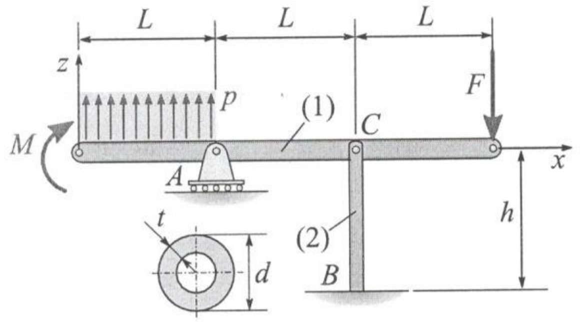
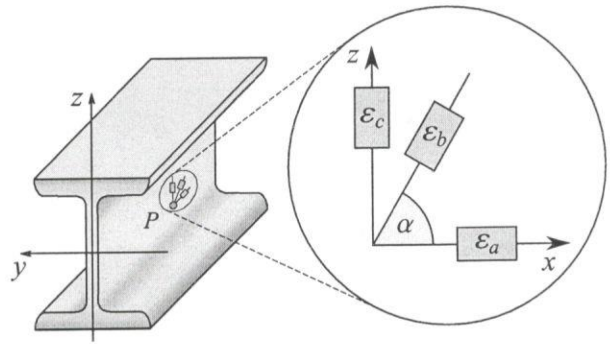
BME Gépészmérnöki Kar	SZILÁRDSÁGTAN	Név: Szigecsán Máté
Műszaki Mechanikai Tanszék	2. HÁZI FELADAT	Neptun kód: QIA950
2019/20 II.	Határidő: május 11. 14:00	Késedelmes beadás: □ Javítás: □
Nyilatkozat: Aláírásommal igazolom, hogy a házi feladatot saját magam készítettem el, az abban leírtak saját megértésemet tükrözik.		Aláírás: Szl M

Csak a formai követelményeknek megfelelő feladatokat értékeljük! `http://www.mm.bme.hu/targyak/bsc/sziltan`

Feladatkitűzés

Az ábrán vázolt szerkezet két rúdja csuklósan kapcsolódik, anyaguk homogén, izotrop, lineárisan rugalmas (rugalmassági modulusz: $E = 210$ GPa; Poisson-tényező: $\nu = 0{,}3$). Az (1)-es rúd keresztmetszete az ábrán látható I-szelvény (I-80-MSZ-325), míg a (2)-es rúdé d külső átmérőjű körgyűrű.





Adatok

L [m]	h [m]	d [mm]	F [kN]	M [kNm]	p [kN/m]	ε_a [10^{-4}]	ε_b [10^{-4}]	ε_c [10^{-4}]	α [°]
1.250	2.250	56	4	1.50	2	-3.40	-6.50	6	45

(Rész)eredmények

A_z [kN]	x_{max} [m]	w_{max} [mm]	t_{min} [mm]	ε_y [10^{-4}]	γ_{xz} [10^{-4}]	σ_x [MPa]
−8,95	3,75	−26,8	6,3	−1,11	−15,6	−36,87
σ_z [MPa]	τ_{xz} [MPa]	σ_1 [MPa]	σ_2 [MPa]	σ_3 [MPa]	$\Delta\sigma_e$ [MPa]	u_d [J/cm^3]
114,97	−126	186,15	0	−108,05	36,44	0,1369

e_{1x} [-]	e_{1y} [-]	e_{1z} [-]	e_{2x} [-]	e_{2y} [-]	e_{2z} [-]	e_{3x} [-]	e_{3y} [-]	e_{3z} [-]
0,492	0	−0,871	0	1	0	0,871	0	0,492

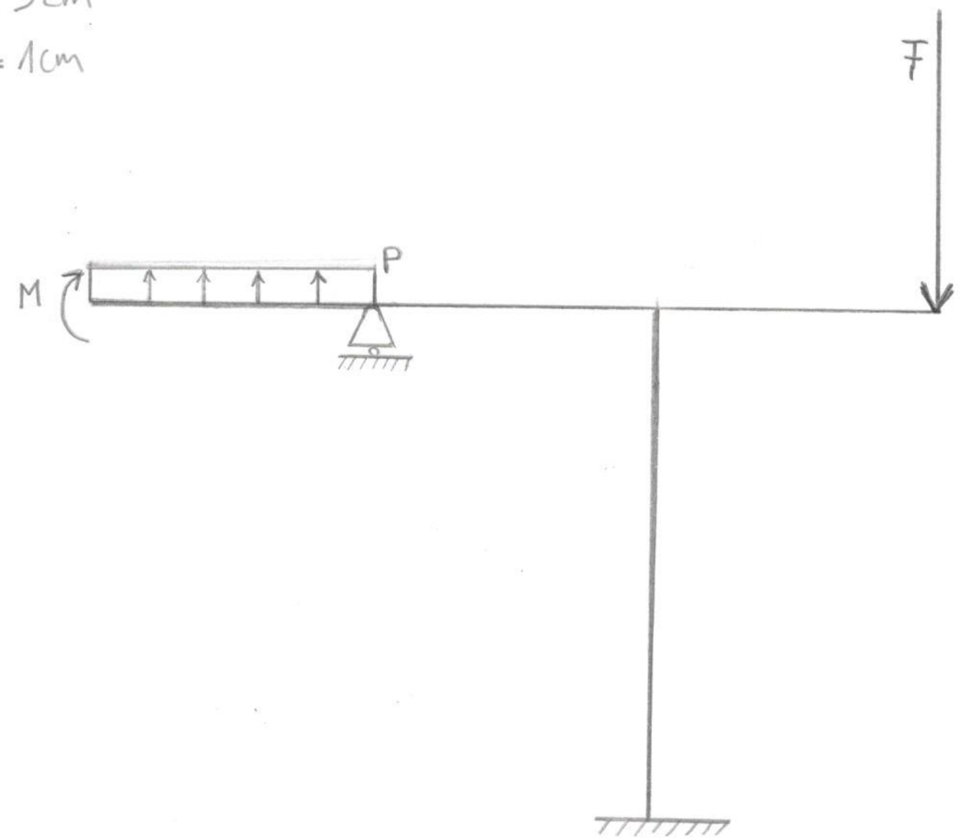
Pontozás

Minimumfeladat	Feladatok						Dokumentáció	Összesen
	2.	3.	4.	5.	6.	7.		
	/5	/3	/4	/4	/2	/2	/5	**/25**

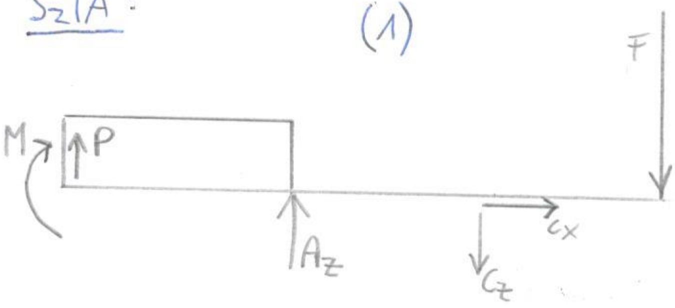
1. oldal

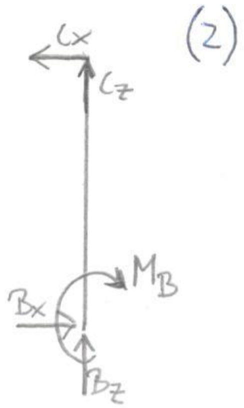
SZIGECSÁN MÁTÉ
QIA960

1, $1m \triangleq 3cm$
$1kN \triangleq 1cm$



SzTÁ:





Reakcióegyenletek:

(1):

$\Sigma F_x = 0 \quad C_x = 0$

$\Sigma F_z = 0 \quad A_z + pL - C_z - F = 0$

$\Sigma M_A = 0 \quad -M - p\frac{L^2}{2} - C_z \cdot L - F \cdot 2L = 0$

(2):

$\Sigma F_x = 0 \quad B_x - C_x = 0$

$\Sigma F_z = 0 \quad B_z + C_z = 0$

$\Sigma M_C = 0 \quad B_x \cdot h + M_B = 0$

$C_x = 0 [kN] \quad B_x = 0 [kN]$

$C_z = \frac{-M - p\frac{L^2}{2} - F \cdot 2L}{L} = -10{,}45 [kN]$

$B_z = -C_z = 10{,}45 [kN]$

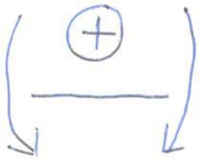
$A_z = C_z + F - pL = -8{,}95 [kN]$

$M_B = -B_x \cdot h = 0 [kNm]$

SZIGECSÁN MÁTÉ
QIA950

2.,

Hajlítónyomatéki függvények:



1. szakasz: $x \in [0; L[$

$$M_{h_1}(x) = -M - p\frac{x^2}{2} = -1{,}5 - x^2 \ [kNm]$$

2. szakasz: $x \in [L; 2L[$

$$M_{h_2}(x) = -M - p \cdot L \cdot \left(x - \frac{L}{2}\right) - A_z \cdot (x - L) = 6{,}45x - 11{,}125 \ [kNm]$$

3. szakasz: $x \in [2L; 3L[$

$$M_{h_3}(x) = F \cdot (3L - x) = 15 - 4x \ [kNm]$$

nevezetes értékek:

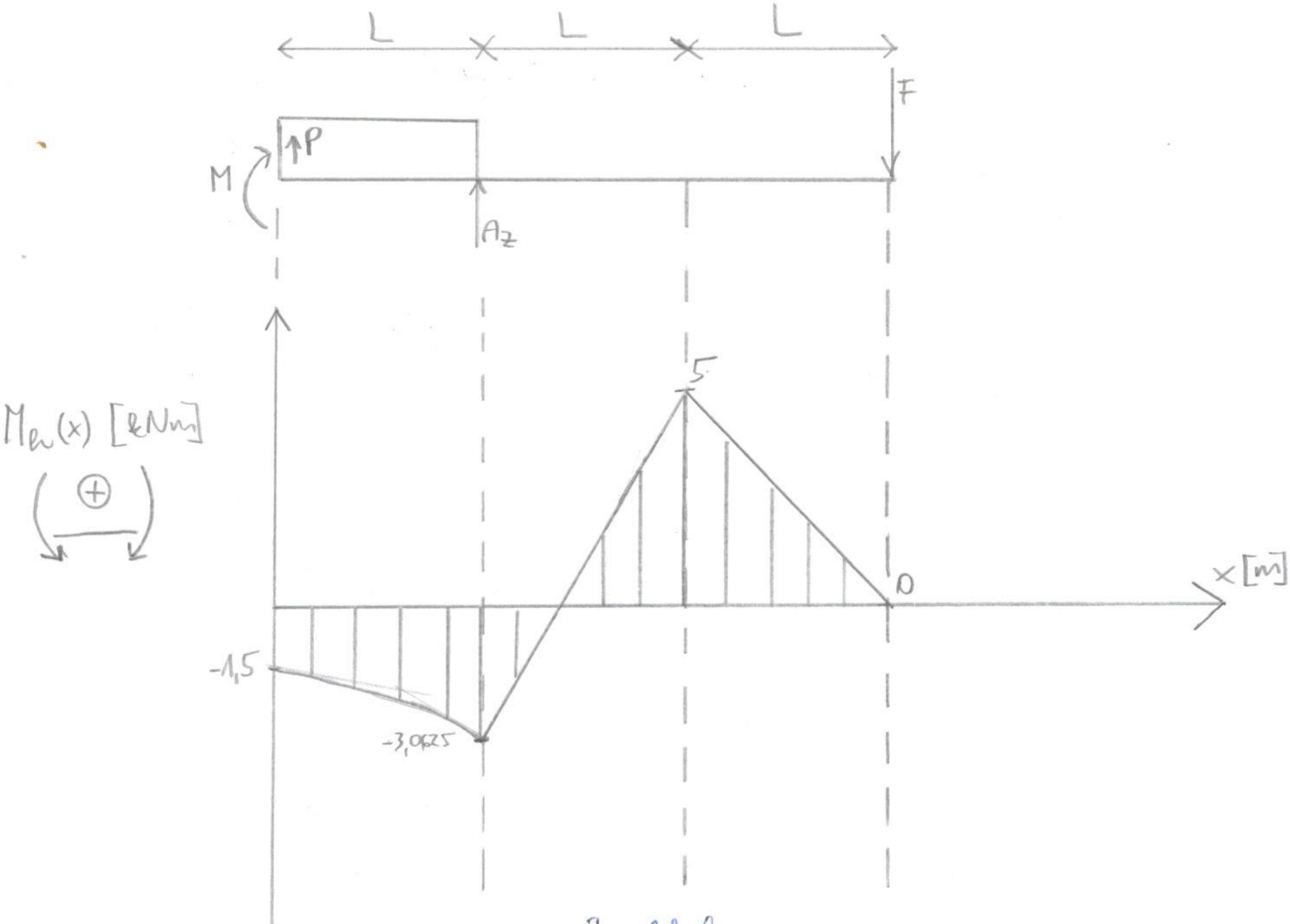
$M_h\ (x=0) = -1{,}5\ [kNm]$

$M_h\ (x=L) = -3{,}0625\ [kNm]$

$M_h\ (x=2L) = 5\ [kNm]$

$M_h\ (x=3L) = 0\ [kNm]$

Ábra:



SZIGECSÁN MÁTÉ
QIA950

<u>Rugalmas szál differenciálegyenlete:</u>

$I = I_y = 77{,}8\ cm^4 = 7{,}78 \cdot 10^{-7}\ m^4$

$E = 210\ GPa = 2{,}1 \cdot 10^{11}\ Pa$

általános felírása az egyenletnek: $-I \cdot E \cdot w''(x) = M_h$

Ezt átrendezve: $-\frac{1}{I \cdot E} \cdot M_h = w''(x)$

„$-\frac{1}{I \cdot E}$" taggal majd a végén szorzok be

$M_h = w''(x)$

<u>1. szakasz</u> $(0 < x < L)$

$w_1'' = -1{,}5 - x^2 \; / \int$

$w_1' = -1{,}5x - \frac{x^3}{3} + C_1 \; / \int$

$w_1 = -0{,}75x^2 - \frac{x^4}{12} + C_1 x + C_2$

<u>2. szakasz</u> $(L < x < 2L)$

$w_2'' = 6{,}45x - 11{,}125 \; / \int$

$w_2' = 3{,}225x^2 - 11{,}125x + C_3 \; / \int$

$w_2 = 1{,}075x^3 - 5{,}5625x^2 + C_3 x + C_4$

<u>3. szakasz</u> $(2L < x < 3L)$

$w_3'' = 15 - 4x \; / \int$

$w_3' = 15x - 2x^2 + C_5 \; / \int$

$w_3 = 7{,}5x^2 - 0{,}67x^3 + C_5 x + C_6$

peremfeltételek:

$w_1(L)=0$
$w_2(2L)=0$

illeszkedési feltételek:

$w_1(L)=w_2(L)$
$w_1'(L)=w_2'(L)$
$w_2(2L)=w_3(2L)$
$w_2'(2L)=w_3'(2L)$

SZIGECSÁN MÁTÉ
QIA950

behelyettesítve:

$w_1(L)=0$
$\hookrightarrow 1{,}25c_1+c_2=1{,}375$

$w_2(2L)=0$
$\hookrightarrow 2{,}5c_3+c_4=17{,}97$

$w_1(L)=w_2(L)$
$\hookrightarrow 1{,}25c_3+c_4-1{,}25c_1-c_2=5{,}217$

$w_1'(L)=w_2'(L)$
$\hookrightarrow c_3-c_1=6{,}341$

$w_2(2L)=w_3(2L)$
$\hookrightarrow 2{,}5c_3+c_4-2{,}5c_5-c_6=54{,}575$

$w_2'(2L)=w_3'(2L)$
$\hookrightarrow c_3-c_5=32{,}656$

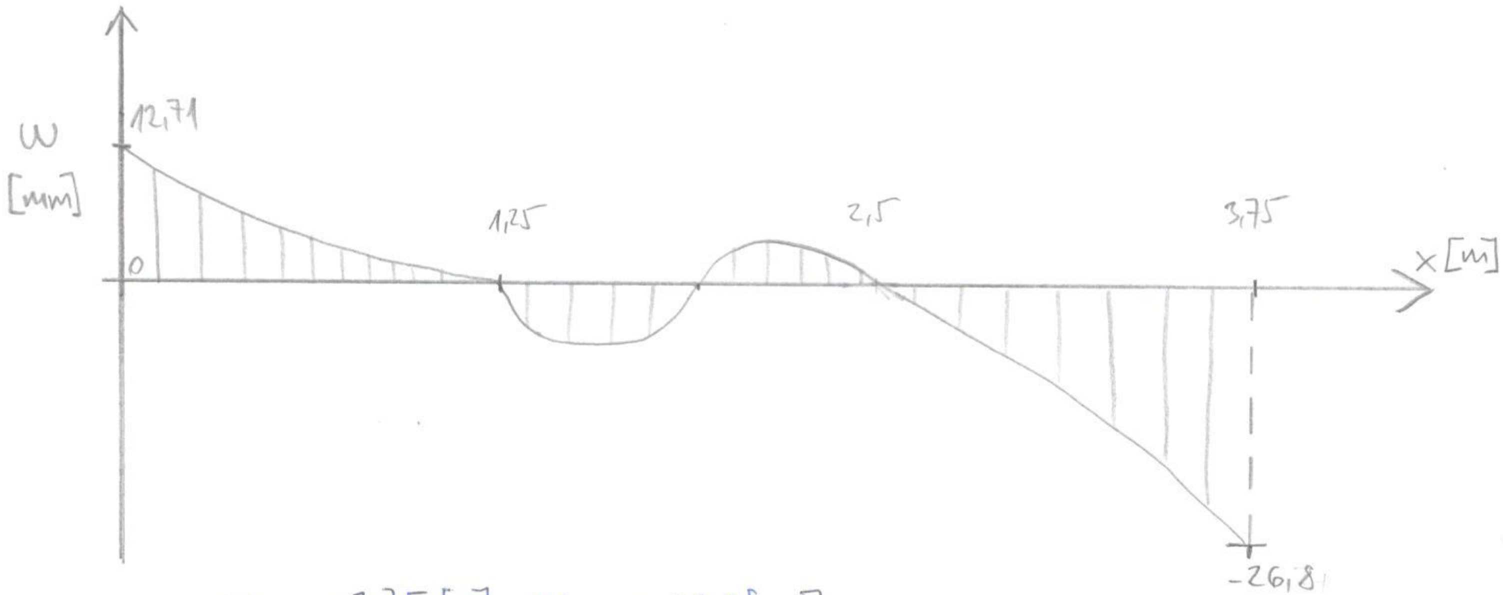
ezeket online megoldva:

$c_1=2{,}761$
$c_2=-2{,}077$
$c_3=9{,}102$
$c_4=-4{,}786$
$c_5=-23{,}554$
$c_6=22{,}479$

SZIGECSÁN MÁTÉ
QIA9SO

Behelyettesítek és nozzok $-\frac{1}{I \cdot E}$-vel

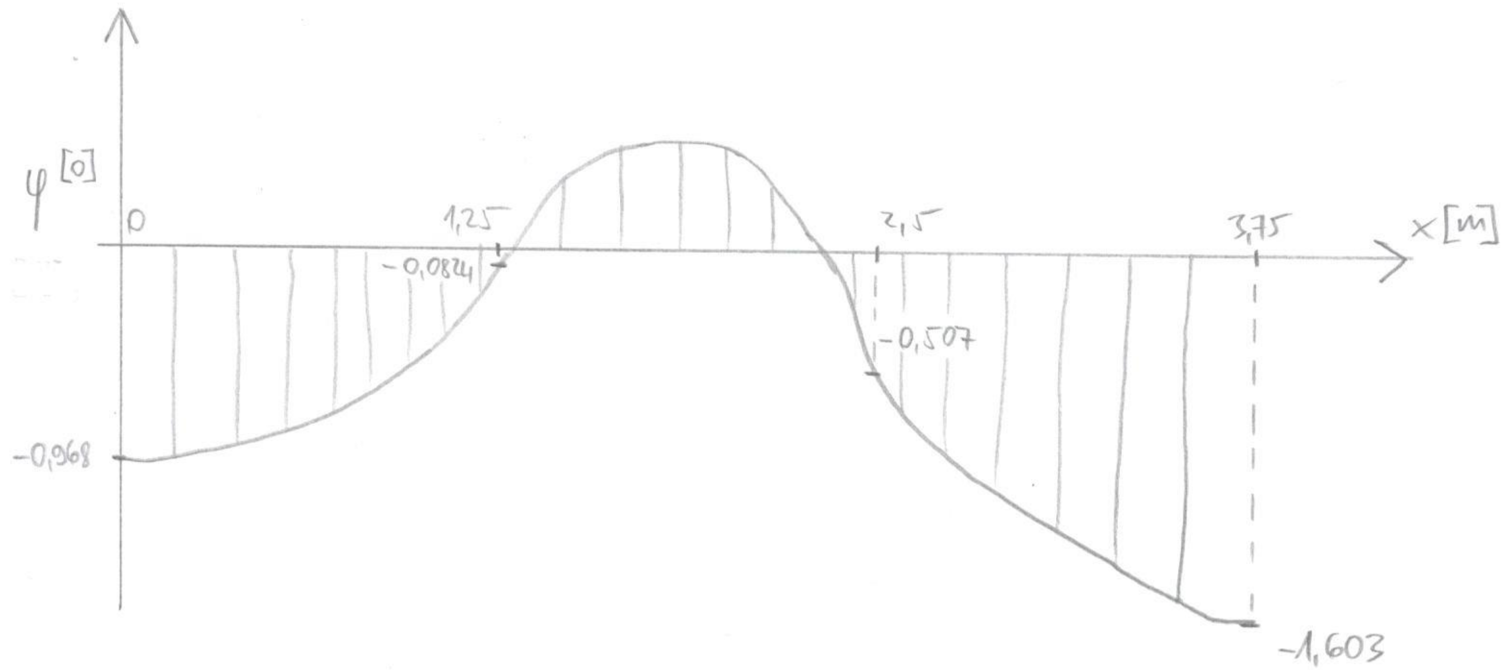
$w(0) = 12{,}71\ mm$
$w(1{,}25) = 0\ mm$
$w(2{,}5) = 0\ mm$
$w(3{,}75) = -26{,}8\ mm$



$x_{max} = 3{,}75\ [m]$ $w_{max} = -26{,}8\ [mm]$

Szögelfordulás függvény:
általánosan: $w'(x) = \varphi(x)$

$\varphi(0) = -0{,}968°$ $\varphi(1{,}25) = -0{,}0824°$ $\varphi(2{,}5) = -0{,}507°$ $\varphi(3{,}75) = -1{,}603°$



3./

SZIGECSÁN MÁTÉ
QIA950

$\sigma_F = 240\,MPa$

$\lambda_0 = 105$

$\sigma_{Kr} = 308 - 1{,}14\lambda \quad MPa$

$c = 2$

$E = 210.000\,MPa$

$B_z = 10450\,N$

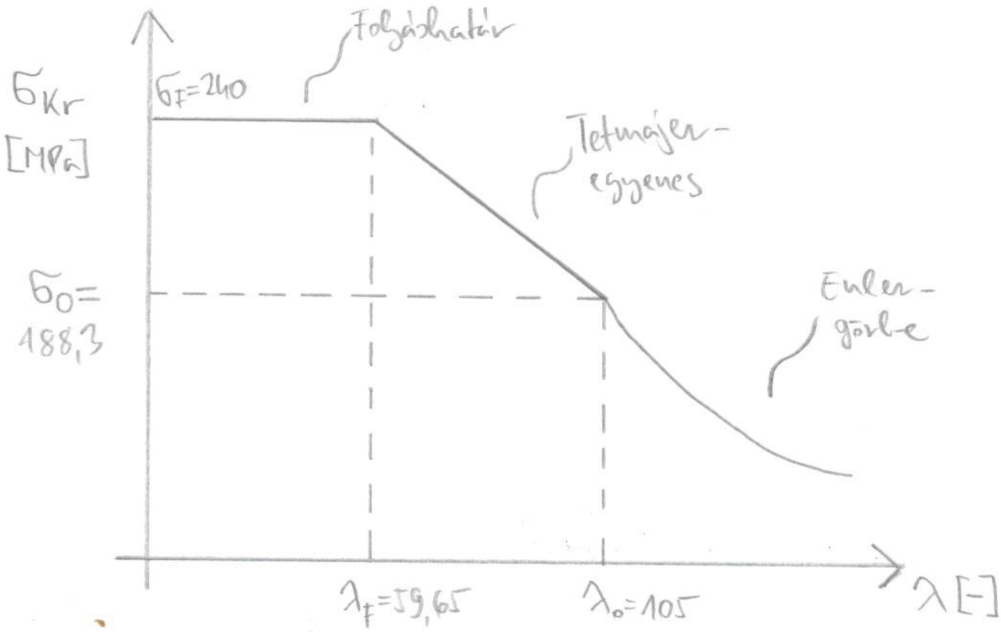
$h = 2250\,mm$

$d = 56\,mm$

$\sigma_{Kr}(\lambda_1) = \sigma_F$

$308 - 1{,}14\lambda_1 = 240\,MPa \Rightarrow \lambda_1 = 59{,}65$

$\sigma_{Kr}(\lambda_0) = 308 - 1{,}14 \cdot 105 = 188{,}3\,MPa$



$F_t = 3 \cdot B_z = 31350\,N$

$$I_y = \frac{F_t \cdot c^2 \cdot h^2}{E \cdot \pi^2} = \frac{31350 \cdot 2^2 \cdot 2250^2}{210000 \cdot \pi^2} = 306297{,}56\,[mm^4]$$

$$I_y = \frac{d^4\pi}{64} - \frac{(d-2t)^4\pi}{64}$$

$$\hookrightarrow t_{min} = \frac{d - \sqrt[4]{d^4 - \frac{64}{\pi} \cdot I_y}}{2} = 6{,}23 \simeq 6{,}3\,[mm]$$

SZIGECSÁN MÁTÉ
QIA950
[signature]

Ellenőrzés:

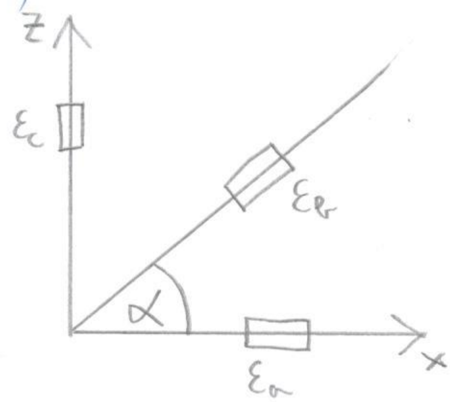
$$A=\frac{[d^2-(d-2t)^2]\pi}{4}=983{,}664\ [mm^2]$$

$$I_y=\frac{[d^4-(d-2t)^4]\pi}{64}=308597{,}55\ [mm^4]$$

$$i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}}=17{,}71\ [mm]$$

A karcsúság: $\lambda=\frac{c\,l}{i_y}=254{,}09>\lambda_0$ ✓

4./



$\varepsilon_a=-3{,}4\cdot10^{-4}$
$\varepsilon_b=-6{,}5\cdot10^{-4}$
$\varepsilon_c=6\cdot10^{-4}$
$\alpha=45^\circ$
$\nu=0{,}3$
$E=210\ GPa$

ε_a x irányú; ε_c z irányú:

$$\varepsilon_x=\varepsilon_a=-3{,}4\cdot10^{-4}$$
$$\varepsilon_z=\varepsilon_c=6\cdot10^{-4}$$

$\underline{\underline{\varepsilon}}$ mátrixhoz kell még: γ_{xz}; ε_y

$$\varepsilon_b=\varepsilon_x\cdot\cos^2\alpha+\varepsilon_z\cdot\sin^2\alpha+\gamma_{xz}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\hookrightarrow \gamma_{xz}=\frac{\varepsilon_b-\varepsilon_x\cdot\cos^2\alpha-\varepsilon_z\cdot\sin^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}=-1{,}56\cdot10^{-3}$$

$$\varepsilon_y=\frac{-\nu}{1-\nu}\cdot(\varepsilon_x+\varepsilon_z)=-1{,}11\cdot10^{-4}$$

$$\underset{(x;y;z)}{\underline{\underline{\varepsilon}}}=\begin{bmatrix}\varepsilon_x & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{xz}\\ 0 & \varepsilon_y & 0\\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & 0 & \varepsilon_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3{,}4 & 0 & -7{,}8\\ 0 & -1{,}11 & 0\\ -7{,}8 & 0 & 6\end{bmatrix}\cdot[10^{-4}]$$

$$\frac{\Delta V}{V}=\varepsilon_V=\varepsilon_I=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=1{,}49\cdot10^{-4}$$

SZIGECSÁN MÁTÉ
QIA950

$\underline{\underline{\sigma}}$ előállítása: (Hooke-törvény)

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu} \cdot \left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \varepsilon_I\right) = -36{,}87 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu} \cdot \left(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \varepsilon_I\right) = 114{,}97 \text{ [MPa]}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{E}{1+\nu} \cdot \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xz} = -126 \text{ [MPa]}$$

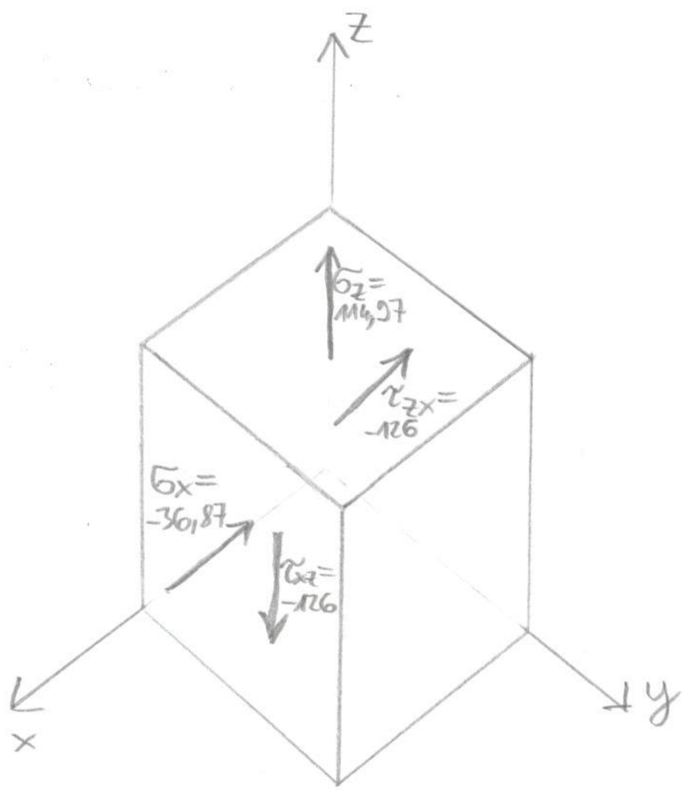
$$\underset{(x;y;z)}{\underline{\underline{\sigma}}} = \begin{bmatrix} -36{,}87 & 0 & -126 \\ 0 & 0 & 0 \\ -126 & 0 & 114{,}97 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 78{,}1 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_{II} = \sigma_x \cdot \sigma_z - \tau_{xz}^2 = -20114{,}94 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_{III} = 0$$

Feszültségi kiskocka:



SZIGECSÁN MÁTÉ
Q1A950

5,

$\underline{\underline{\sigma}} \Rightarrow \sigma_y = 0 \Rightarrow \sigma_y$ főfeszültség és y főirány $\quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Mohr-kör középpontja és sugara:

$$\sigma_K = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} = 39{,}05 \text{ [MPa]}$$

$$R = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_K)^2 + \tau_{xz}^2} = 147{,}1 \text{ [MPa]}$$

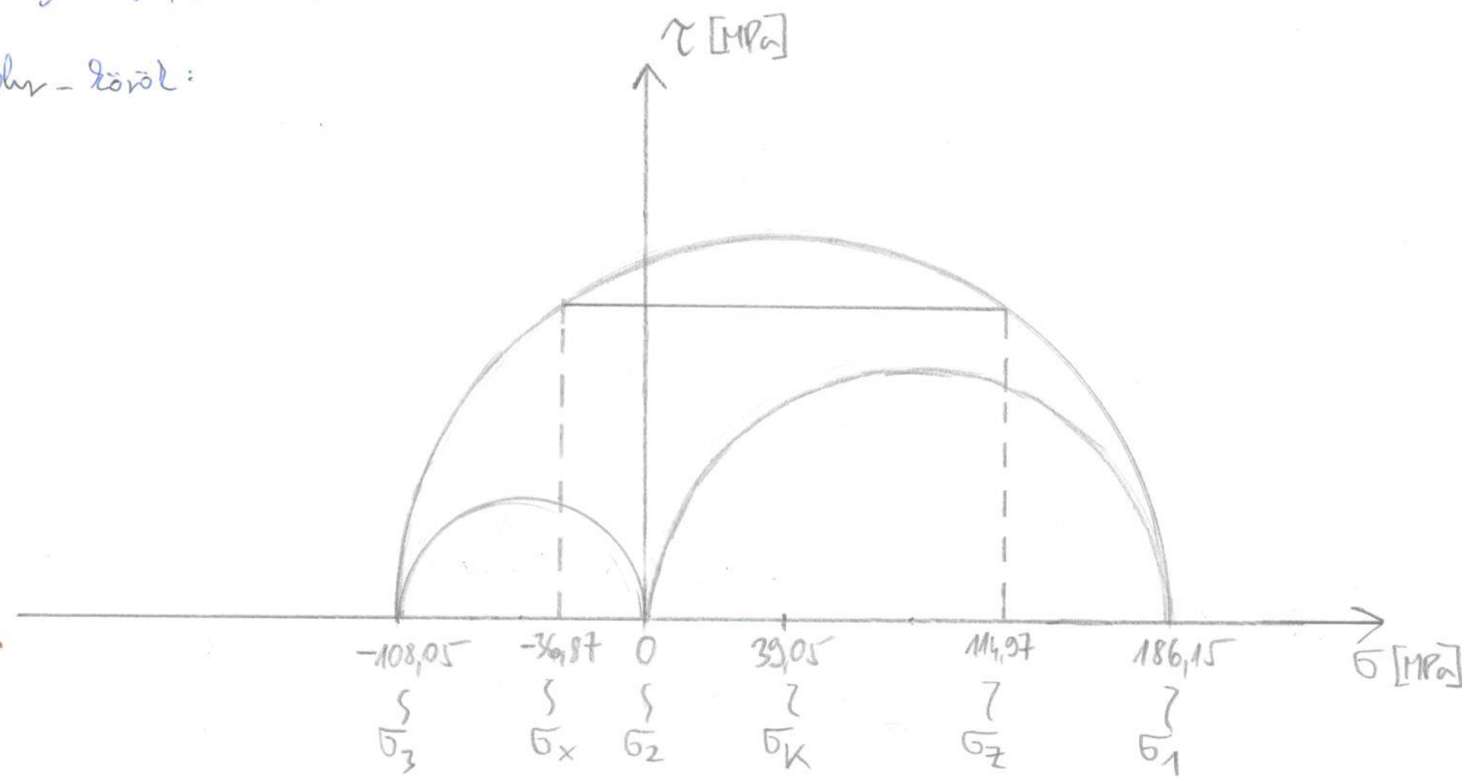
Főfeszültségek:

$$\sigma_1 = \sigma_K + R = 186{,}15 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_2 = 0 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_3 = \sigma_K - R = -108{,}05 \text{ [MPa]}$$

Mohr-körök:



$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xz}}\right) = -60{,}53^\circ$$

$$e_1 = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ 0 \\ \sin\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}492 \\ 0 \\ -0{,}871 \end{bmatrix} \qquad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e_3 = e_1 \times e_2 = \begin{bmatrix} 0{,}492 \\ 0 \\ -0{,}871 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}871 \\ 0 \\ 0{,}492 \end{bmatrix}$$

SZIGECSÁN MÁTÉ
QIA950

Ellenőrzés:

$$\det\left(\underset{(x;y;z)}{\underline{\underline{\sigma}}} - \sigma\cdot\underline{\underline{E}}\right)=0$$

$$\begin{vmatrix} -36{,}87-\sigma & 0 & -126 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ -126 & 0 & 114{,}97-\sigma \end{vmatrix} = (-\sigma)\left[(-36{,}87-\sigma)\cdot(114{,}97-\sigma)-(-126)^2\right]=0$$

jól látszik, hogy az első megoldás: $\sigma=0$ [MPa]

nullára rendezve, a másodfokú egyenletet megoldva további két megoldás:

$$\sigma^2-78{,}1\sigma-20114{,}94=0$$

$$\sigma = \begin{cases} 186{,}15 \text{ [MPa]} \\ -108{,}05 \text{ [MPa]} \end{cases}$$

sorrendben:

$\sigma_1=186{,}15$ [MPa] $\quad\sigma_2=0$ [MPa] $\quad\sigma_3=-108{,}05$ [MPa]

σ helyére $\sigma_1=186{,}15$-öt beírva:

$$\begin{bmatrix} -223{,}02 & 0 & -126 \\ 0 & -186{,}15 & 0 \\ -126 & 0 & -71{,}18 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\varphi \\ 0 \\ \sin\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

első sorban mátrix szorzás:

$$-223{,}02\cdot\cos\varphi-126\cdot\sin\varphi=0$$

$$\varphi=\operatorname{arctg}\left(\frac{-223{,}02}{126}\right)=-60{,}53^\circ$$

$$e_1=\begin{bmatrix}\cos\varphi\\0\\\sin\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}492\\0\\-0{,}871\end{bmatrix}$$

$$e_3=e_1\times e_2=\begin{bmatrix}0{,}492\\0\\-0{,}871\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}871\\0\\0{,}492\end{bmatrix}$$

Ugyanaz, mint a Mohr-körrel.

SZIGECSÁN MÁTÉ
QIA950

6.,

$$\sigma_e^{Mohr} = \sigma_1 - \sigma_3 = 186{,}15 + 108{,}05 = 294{,}2 \ [MPa]$$

$$\sigma_e^{HMH} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2\right]} = 257{,}76 \ [MPa]$$

$$\left.\begin{array}{l} 186{,}15^2 = 34651{,}82 \\ 108{,}05^2 = 11674{,}8 \\ 294{,}2^2 = 86553{,}64 \end{array}\right\} 132880{,}26$$

Eltérés:

$$\Delta\sigma_e = \sigma_e^{Mohr} - \sigma_e^{HMH} = 36{,}44 \ [MPa]$$

7.,

$$u = \frac{1}{2}\cdot \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\cdot\varepsilon_x + \tau_{xz}\cdot\frac{1}{2}\gamma_{xz} + \tau_{zx}\cdot\frac{1}{2}\cdot\gamma_{zx} + \sigma_z\cdot\varepsilon_z\right) = 0{,}1388 \ [J/cm^3]$$

$$u_h = \frac{1}{6}\cdot\sigma_I\cdot\varepsilon_I = 1{,}94\cdot 10^{-3} \ [J/cm^3]$$

$$u = u_d + u_h \Rightarrow u_d = u - u_h = 0{,}1369 \ [J/cm^3]$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} -36{,}87 & 0 & -126 \\ 0 & 0 & 0 \\ -126 & 0 & 114{,}97 \end{bmatrix} [MPa] \qquad \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} -3{,}4 & 0 & -7{,}8 \\ 0 & -1{,}11 & 0 \\ -7{,}8 & 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot [10^{-4}]$$

$$\varepsilon_I = 1{,}49\cdot 10^{-4}$$

$$\sigma_I = 78{,}1 \ [MPa]$$