

Vorlesungsskript

# Numerische Mathematik (Bachelor)

Hochschule Bochum  
Bochum University  
of Applied Sciences



Matthias Baitsch

2. Auflage 2021

Teil I

# Finite Elemente für Stabtragwerke

# 1 Modellierung von Stabtragwerken

## 1.1 Stabtragwerke

Wir alle kennen unzählige Beispiele von Konstruktionen, die aus stabartigen Bauteilen zusammengesetzt sind, Abbildung 1.1 zeigt eine kleine Auswahl. Der Begriff stabartig besagt dabei, dass ein Bauteil in eine Richtung lang und in die beiden anderen Richtungen vergleichsweise dünn ist. Stabartige Bauteile sind nicht notwendigerweise gerade, wie an dem Beispiel der Emscherbrücke zu sehen ist.

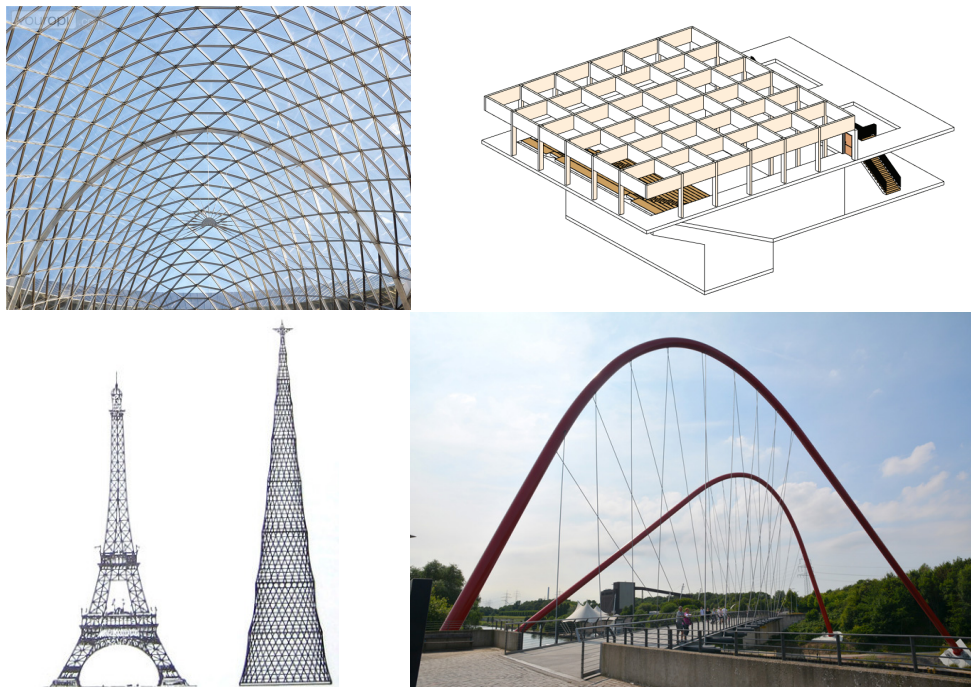


Abbildung 1.1: *Beispiele für Stabtragwerke (im Uhrzeigersinn): Glasdach der DZ Bank in Berlin, Hörsaal H9 HS Bochum, Brücke über die Emscher, Eiffelturm und Radioturm von Schuchow*

## 1.2 Dimensionsreduzierte Modelle

Natürlich ist jedes Bauteil, auch ein stabartiges, ein dreidimensionales Objekt. Daher ist es prinzipiell denkbar, die Berechnung von Stabtragwerken an einem Volumenmodell durchzuführen. In Abbildung 1.2 sehen Sie ein entsprechendes Beispiel, das mit einem Finite-Elemente-Programm berechnet wurde. Allerdings ist der Aufwand ein Tragwerk auf diese Weise in den Computer einzugeben sehr groß, es muss jeder Querschnitt detailliert eingegeben werden, insbesondere Anschlüsse sind hier oft sehr kompliziert. Mit den heute zur Verfügung stehenden Programmen ist dieser Ansatz nicht praktikabel, dies mag sich in der Zukunft aber durchaus ändern (siehe etwa [Nig07]).

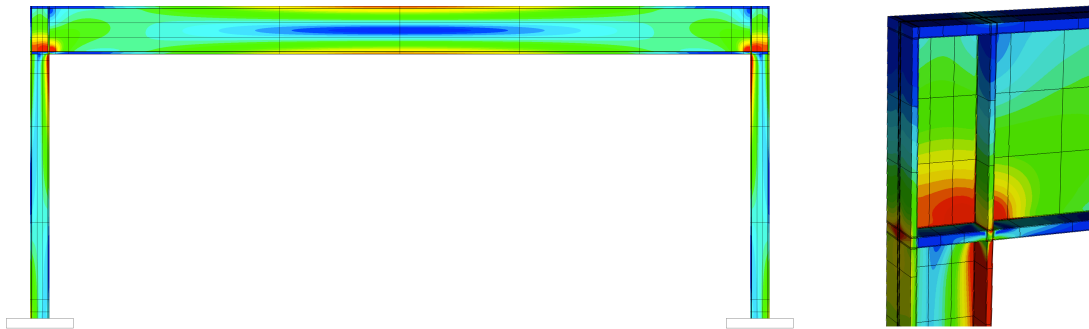


Abbildung 1.2: *Rahmen in Stahlbauweise in einem Volumenmodell (eigene Berechnung). Farblich dargestellt ist die berechnete Spannungsintensität (Von-Mises-Vergleichsspannung). Rot steht für eine hohe Beanspruchung*

Um Stabtragwerke effizient berechnen zu können, erfasst man mittels geeigneter Annahmen die Verschiebung des Systems durch Funktionen, die auf die Stabachse bezogen sind. Die Form des Stabes wird durch Querschnittswerte wie die Fläche  $A$  oder das Flächenträgheitsmoment  $I_y$  erfasst. Weiterhin wird jeder Stab mit einem lokalen Koordinatensystem ausgestattet, dessen  $x$ -Achse in Richtung des Stabes zeigt. In der Skizze eines statischen Systems werden dann nur noch diese Stabachsen dargestellt (Abbildung 1.3).

Die Annahmen über die Art und Weise, wie sich ein solches vereinfachtes System verhält, wird als mechanisches Modell bezeichnet. Es gibt nun zwei verschiedene mechanische Modelle von Stabtragwerken: *Fachwerke* und *Balkentragwerke*. Der Unterschied zwischen beiden Modellen liegt in der Annahme darüber, wie sich das Tragwerk verformt und welche Schnittgrößen daraus resultieren.

**Fachwerke.** In einem Fachwerk (Abbildung 1.4 oben) sind Stäbe durch ein reibungsfreies Momentengelenk miteinander verbunden, Kräfte greifen immer an Knotenpunkten

# 1 Modellierung von Stabtragwerken

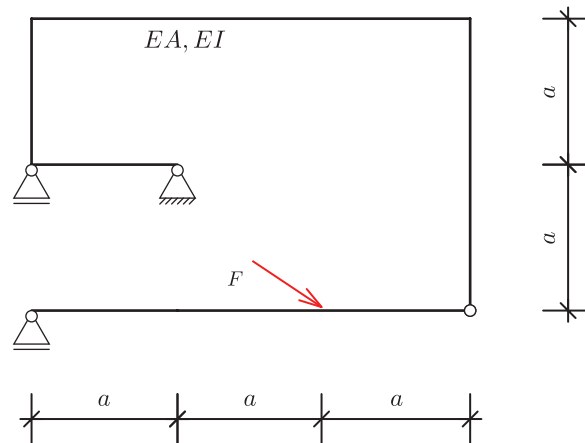
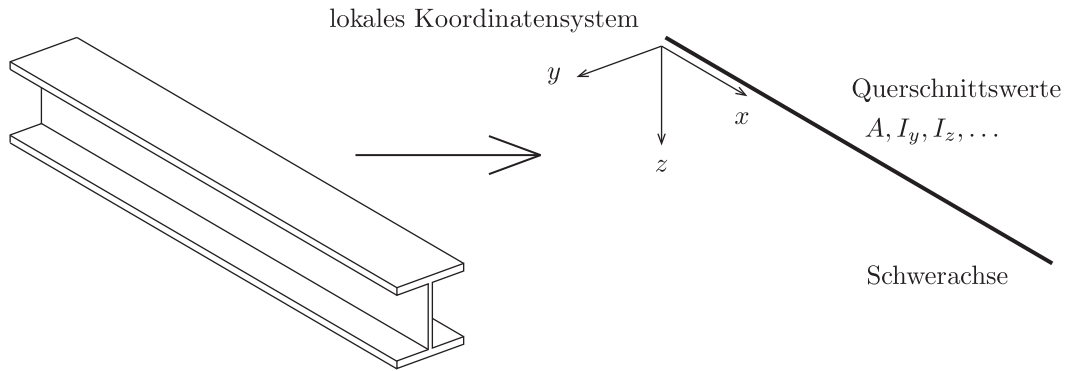


Abbildung 1.3: Reduktion des dreidimensionalen Körpers auf eine Stabachse und Querschnittswerte, statisches System

an und es gibt keine Streckenlasten. In Fachwerken gibt es keine gekrümmten Stäbe. Wenn alle Stäbe gelenkig miteinander verbunden sind, dann kann man sich sofort überlegen, wie sich ein solches System prinzipiell verformt: Alle Stäbe bleiben auch im verformten Zustand gerade! Es tritt zwar eine Änderung der Länge auf und die Stabachse kann sich drehen, es gibt jedoch keine Krümmung. Damit ist auch klar, dass in Fachwerkstäben nur Normalkräfte auftreten, Querkraft und Biegemoment sind demgegenüber auf der gesamten Länge des Stabes immer gleich null.

**Balkentragwerke.** In einem Balkentragwerk (Abbildung 1.4 unten) können Stäbe biegesteif miteinander verbunden sein und Kräfte können auch zwischen zwei Knotenpunkten angreifen. Darüber hinaus können Balkentragwerke auch durch Streckenlasten

## 1 Modellierung von Stabtragwerken

beansprucht sein. In einem Balkentragwerk tritt in den einzelnen Stäben neben einer Änderung der Länge auch eine Krümmung auf, die Stabachse bleibt also nicht gerade. Demzufolge gibt es in einem Balkentragwerk neben Normalkräften auch Querkkräfte und Biegemomente.

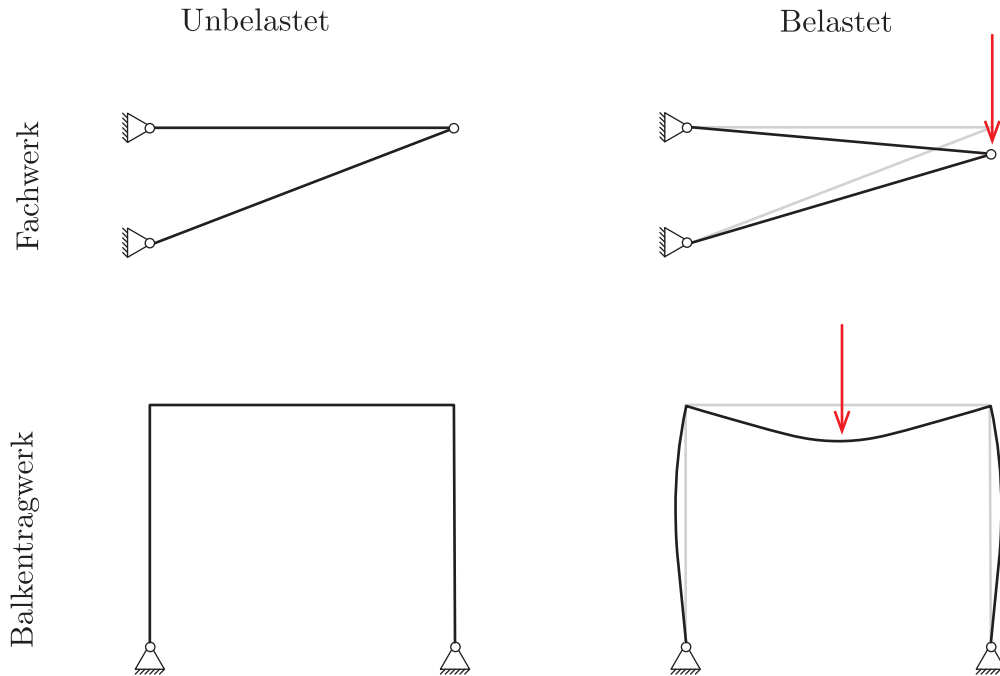


Abbildung 1.4: *Fachwerke und Balkentragwerke*

Wenn Sie sich nun Fachwerkstrukturen, die Sie bisher gesehen haben, in Erinnerung rufen, dann werden Sie feststellen, dass die Knotenpunkte so gut wie nie als Gelenke ausgebildet sind. Anschlüsse sind genietet, geschraubt oder geschweißt, und selbst wenn ein Gelenk eingebaut ist, dann ist dies nie frei von Reibung. In der Realität gibt es also keine Tragwerke, auf die unsere Definition von Fachwerken zutrifft. Das ist der Grund, warum wir an dieser Stelle von einem mechanischen Modell sprechen. Ein Modell ist ein vereinfachtes Abbild der Realität ([Sta73]) und blendet immer Aspekte aus, deren Effekte für den jeweiligen Anwendungsfall vernachlässigbar sind. Wann macht es also Sinn, ein Tragwerk als Fachwerk zu berechnen? Es macht dann Sinn, wenn der Einfluss der Biegemomente gegenüber den Normalkräften vernachlässigbar ist, das System die Lasten also im Wesentlichen über Normalkräfte abträgt.

Selbstverständlich stellt auch die Modellierung eines Systems als Balkentragwerk eine Vereinfachung dar. So werden zum Beispiel die in Abbildung 1.2 zu erkennenden Spannungskonzentrationen bei der Schnittgrößenermittlung nicht erfasst. Das ist der Grund, warum die Tragfähigkeit für konstruktive Details in der Regel gesondert nachzuweisen ist.



Abbildung 1.5: *Knotenpunkte von Fachwerken. Müngstener Brücke, Straßenbrücke bei Naumburg und Terminal Flughafen Heathrow*

### 1.3 Rechenmethoden für Stabtragwerke

Zur Berechnung von Schnittgrößen und Spannungen gibt es zwei grundlegend verschiedene Ansätze.

**Kräfte zuerst.** Hier werden die Schnittgrößen mithilfe des Schnittprinzips und der Gleichgewichtsbedingungen ermittelt. Sind zusätzlich noch Verformungen von Interesse, dann lassen sich diese in einer Nachlaufrechnung durch Anwendung des Prinzips der virtuellen Kräfte berechnen.

- + Gut geeignet für die Handrechnung (einfache Systeme).
- + Anschaulich und intuitiv nachvollziehbar.
- Sehr aufwändig für statisch unbestimmte Systeme (Kraftgrößenverfahren).
- Schwer zu formalisieren.

Die letzten beiden Punkte sind der Grund, warum sich diese Methode nur sehr schlecht für die Umsetzung in einem Computerprogramm eignet.

**Verschiebungen zuerst.** Die Alternative besteht darin, zunächst die Verschiebungen zu ermitteln und in einem zweiten Schritt die zugehörigen Schnittgrößen zu berechnen.

- + Funktioniert für statisch bestimmte und statisch unbestimmte Systeme.
- + Einfach zu formalisieren und gut zu programmieren.
- Schlecht geeignet für die Handrechnung.
- Wenig intuitiv.

Wir werden uns nun mit diesem verschiebungsbasierten Verfahren befassen.

## 2 Fachwerke

Für die Herleitung numerischer Verfahren für Stabtragwerke gibt es eine Reihe verschiedener Zugänge. Die wichtigsten sind:

- Stabendkräfte und Gleichgewicht an Knoten (direkte Steifigkeitsmethode).
- Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie (Ritz-Verfahren).
- Differentialgleichung in variationeller Formulierung (Galerkin-Verfahren).

Alle Varianten führen auf exakt dieselben Gleichungen und man kann auch zeigen, dass dies so sein muss. Dabei hat die direkte Steifigkeitsmethode den Vorteil, recht anschaulich zu sein, die beiden anderen Ansätze sind allgemeiner anwendbar, allerdings auch deutlich abstrakter. Wir werden daher die direkte Steifigkeitsmethode verwenden.

### 2.1 Grundidee des Verfahrens

Die direkte Steifigkeitsmethode für Fachwerke beruht auf folgenden Überlegungen:

1. Das Fachwerk verformt sich unter der Belastung.
2. Durch die Verformung ändern die Stäbe ihre Länge.
3. Die Längenänderung ruft Normalkräfte in den Stäben hervor.
4. Verformung stellt sich genau so ein, dass jeder freigeschnittene Knoten im Gleichgewicht steht.

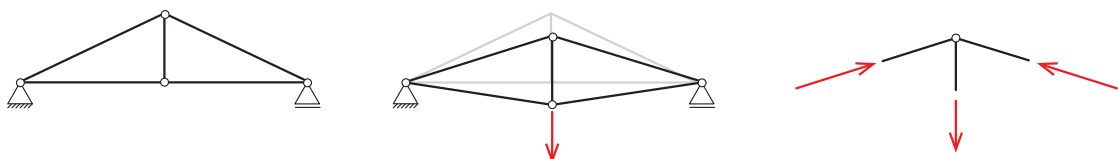


Abbildung 2.1: *Direkte Steifigkeitsmethode: Die Verformung stellt sich genau so ein, dass an allen Knoten die angreifenden Normalkräfte mit den Knotenlasten im Gleichgewicht sind*



Um die direkte Steifigkeitsmethode umzusetzen gehen wir in zwei Schritten vor: Zunächst bestimmen wir für einen einzelnen Stab zu einer gegebenen Verformung die Stabendkräfte. Anschließend überlegen wir uns, wie man aus dem Kräftegleichgewicht an jedem Knoten die Verschiebungen des Systems bestimmen kann.

## 2.2 Stabendkräfte

Wir bestimmen nun für einen Stab die Stabendkräfte, die von einer gegebenen Verformung hervorgerufen werden. Die betrachtete Situation ist in Abbildung 2.2 dargestellt. Zunächst fassen wir die verwendeten Größen zusammen.

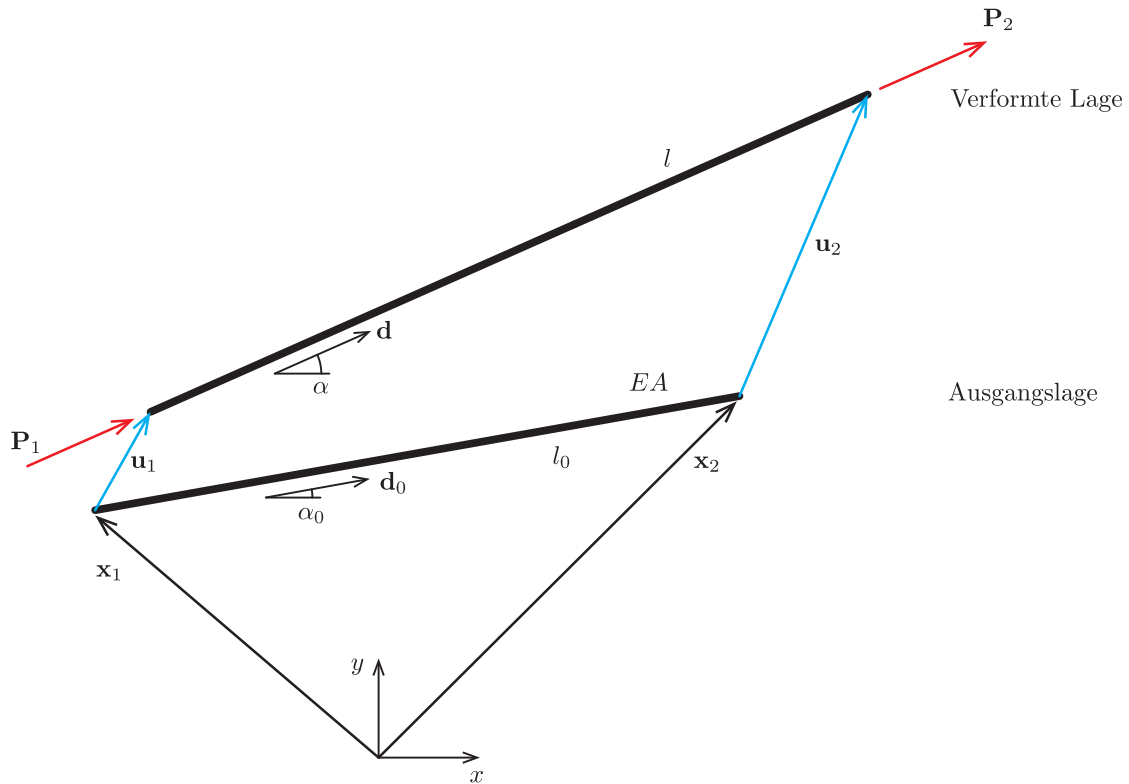


Abbildung 2.2: Stabendkräfte Fachwerkstab

**Definitionen.** Der Fachwerkstab besitzt den E-Modul  $E$  und die Querschnittsfläche  $A$ , die wir in der Größe  $EA$  zusammenfassen. In der unverformten Ausgangslage sind die Ortsvektoren von Anfangs- und Endpunkt des Stabes durch

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}$$

## 2 Fachwerke

gegeben. Die zugehörige Länge bezeichnen wir mit  $l_0$  wobei

$$l_0 = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| = \sqrt{(x_{21} - x_{11})^2 + (x_{22} - x_{12})^2}.$$

Weiterhin definieren wir den Einheitsvektor

$$\mathbf{d}_0 = \frac{1}{l_0}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 \\ \sin \alpha_0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |\mathbf{d}_0| = 1,$$

der vom Anfangspunkt des Stabes in Richtung der Stabachse zeigt.

Die Endpunkte des Stabes werden nun um die Verschiebungsvektoren

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix}$$

aus ihrer spannungsfreien Ausgangslage bewegt. Die Länge des verformten Fachwerkstabes beträgt

$$l = |\mathbf{x}_2 + \mathbf{u}_2 - (\mathbf{x}_1 + \mathbf{u}_1)| = \sqrt{(x_{21} + u_{21} - (x_{11} + u_{11}))^2 + (x_{22} + u_{22} - (x_{12} + u_{12}))^2},$$

der Einheitsvektor

$$\mathbf{d} = \frac{1}{l}(\mathbf{x}_2 + \mathbf{u}_2 - (\mathbf{x}_1 + \mathbf{u}_1)) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |\mathbf{d}| = 1$$

zeigt in Richtung der ausgelenkten Stabachse.

Die durch die Verschiebung erzwungene Längenänderung des Stabes ruft eine Normalkraft  $N$  hervor, die an den Stabenden aufgebracht werden muss. Die zugehörigen Kräfte sind

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} P_{11} \\ P_{12} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} P_{21} \\ P_{22} \end{pmatrix},$$

wobei es sich als vorteilhaft erweisen wird, diese in Richtung der Stabachse positiv zu definieren. Diese Vereinbarung wird manchmal auch als Schnittgrößenkonvention II bezeichnet. Da keine weiteren Kräfte am Stab angreifen gilt immer  $\mathbf{P}_1 = -\mathbf{P}_2$ .

Für die direkte Steifigkeitsmethode benötigen wir für einen Stab mit den Eigenschaften  $EA$  sowie  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  den funktionalen Zusammenhang zwischen den Verschiebungen  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  und den Stabendkräften  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ . Um zu einer möglichst einfachen Schreibweise zu gelangen, fassen wir Verschiebungen und Stabendkräfte in jeweils einem Vektor zusammen und stellen uns die Frage: Wie können wir für den Verschiebungsvektor

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix}$$

den zugehörigen Vektor der Stabendkräfte

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} \\ P_{12} \\ P_{21} \\ P_{22} \end{pmatrix}$$

berechnen? Aus mathematischer Sicht geht es also um eine Abbildung, die einem Verschiebungsvektor  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$  einen Vektor der Stabendkräfte  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^4$  zuordnet. Wir schreiben hierfür (etwas salopp)

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{u})$$

und verstehen unter  $\mathbf{P}$  je nach Zusammenhang entweder den Vektor der Stabendkräfte oder die Abbildung, die zu einem gegebenen Verschiebungsvektor die Stabendkräfte liefert.

Diese Abbildung bestimmen wir nun zunächst geometrisch exakt und werden dann eine vereinfachte lineare Beziehung für kleine Verformungen herleiten.

### 2.2.1 Geometrisch exakte Formulierung

Wenn wir einen Stab in die Länge ziehen oder zusammendrücken ruft dies in dem Stab eine Normalkraft  $N$  hervor. Dabei ist anschaulich klar, dass für eine gegebene Längenänderung  $\Delta l$  die Normalkraft  $N$  abhängt von

- der Querschnittsfläche  $A$  (je dicker der Stab, umso größer  $N$ ),
- dem Material (je größer der Elastizitätsmodul  $E$ , umso größer  $N$ ),
- der Länge des Stabes  $l_0$  (je größer, umso kleiner wird  $N$ ).

Dabei bezeichnen wir die auf die Ausgangslänge bezogene Längenänderung als Verzerrung oder Dehnung

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

und erhalten die Normalkraft

$$N = EA \cdot \varepsilon = EA \frac{l - l_0}{l_0}.$$

Zur Bestimmung der (vektoriellen) Stabendkräfte  $\mathbf{P}_1$  und  $\mathbf{P}_2$  schneiden wir die Stäben frei und bringen die Normalkraft  $N$  auf, siehe Abbildung 2.3. Aus dem Kräftegleichgewicht erhalten wir sofort

$$\mathbf{P}_1 = -N \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = -N \cdot \mathbf{d} \quad \text{und} \quad \mathbf{P}_2 = N \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = N \cdot \mathbf{d}$$

## 2 Fachwerke

Dieses Ergebnis fassen wir im Vektor der Stabendkräfte

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{pmatrix} = N \cdot \begin{pmatrix} -\mathbf{d} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix} = N \cdot \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

zusammen. Den Vektor

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} -\mathbf{d} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

bezeichnen wir als Transformationsvektor. Damit können wir die gesuchte Beziehung für die Stabendkräfte in der Form

$$\mathbf{P} = EA \frac{l - l_0}{l_0} \cdot \mathbf{t} \quad (2.2)$$

aufschreiben.

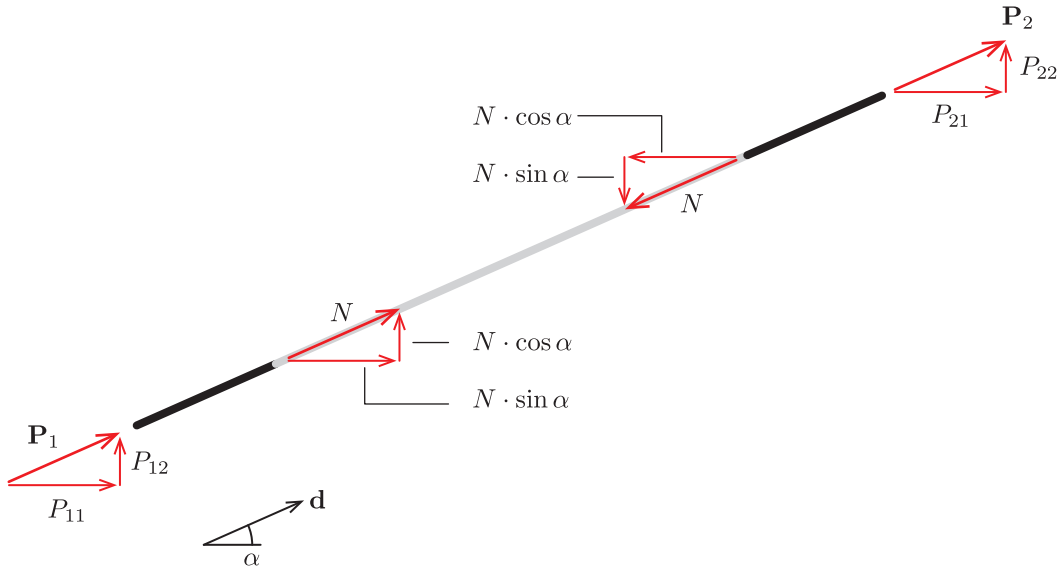


Abbildung 2.3: *Komponenten der Stabendkräfte*

Die Formulierung 2.2 ist kompakt und in der Herleitung anschaulich. Allerdings hängen sowohl die Länge  $l$  als auch der Transformationsvektor  $\mathbf{t}$  nichtlinear von den Verschiebungen ab. Um einen Gleichgewichtszustand für das Gesamtsystem zu finden müsste also ein nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden. Das ist im Prinzip kein Problem, bringt allerdings doch eine Reihe von Schwierigkeiten mit sich. Diese lassen sich umgehen, wenn man berücksichtigt, dass im Bauwesen die Verformungen in der Regel klein sind und die Rechnung sich entsprechend vereinfachen lässt.

### 2.2.2 Formulierung für kleine Verformungen

Wenn die Verformungen klein sind, dann sind die folgenden beiden Vereinfachungen gerechtfertigt:

1. Die Normalkraft  $N$  hängt nichtlinear von den Verschiebungen ab. Wir ersetzen diesen nichtlinearen Zusammenhang durch ein Taylorpolynom ersten Grades. Man spricht hier von einer Linearisierung der Beziehung zwischen Verformungen und Normalkraft.
2. Das Gleichgewicht formulieren wir am unverformten System. Statt  $\mathbf{d}$  setzen wir  $\mathbf{d}_0$  ein. Das ist naheliegend und unkompliziert.

Gerechtfertigt heißt hier, dass die Abweichungen gegenüber der genaueren nichtlinearen Lösung klein sind.

**Linearisierung.** Dies ist wahrscheinlich der schwierigste Schritt der gesamten Herleitung. Sie alle kennen das Taylorpolynom ersten Grades zu einer Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  am Entwicklungspunkt  $x_0$ , nämlich

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

dies ist genau die Gleichung der Tangentenfunktion. Die Verallgemeinerung für eine Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  von zwei Variablen ist die Tangentialebene mit der Funktionsgleichung

$$T(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0).$$

zur Stelle  $x_0, y_0$ .

Wir übertragen diesen Gedanken auf die näherungsweise Berechnung der Normalkraft für kleine Verformungen. Zunächst einmal halten wir fest, dass die Normalkraft  $N$  von den vier Verschiebungen  $u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}$  abhängt, wir schreiben dafür wieder  $N = N(u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22})$ . Ausgehend von der unverformten Lage mit  $u_{11} = u_{12} = u_{21} = u_{22} = 0$  erhalten wir für die Normalkraft die verallgemeinerte Tangentialebene

$$N_{\text{lin}}(u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}) = N(0, 0, 0, 0) +$$

$$\frac{\partial N(0, 0, 0, 0)}{\partial u_{11}}u_{11} + \frac{\partial N(0, 0, 0, 0)}{\partial u_{21}}u_{21} + \frac{\partial N(0, 0, 0, 0)}{\partial u_{12}}u_{12} + \frac{\partial N(0, 0, 0, 0)}{\partial u_{22}}u_{22},$$

wobei wir von der unverformten Lage ausgehen. Die partielle Ableitung der Normalkraft nach einer Verschiebungskomponente ist

$$\frac{\partial N(u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22})}{\partial u_{ij}} = \frac{\partial}{\partial u_{ij}} \left( EA \frac{l(u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}) - l_0}{l_0} \right) = \frac{EA}{l_0} \cdot \frac{\partial l(u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22})}{\partial u_{ij}},$$

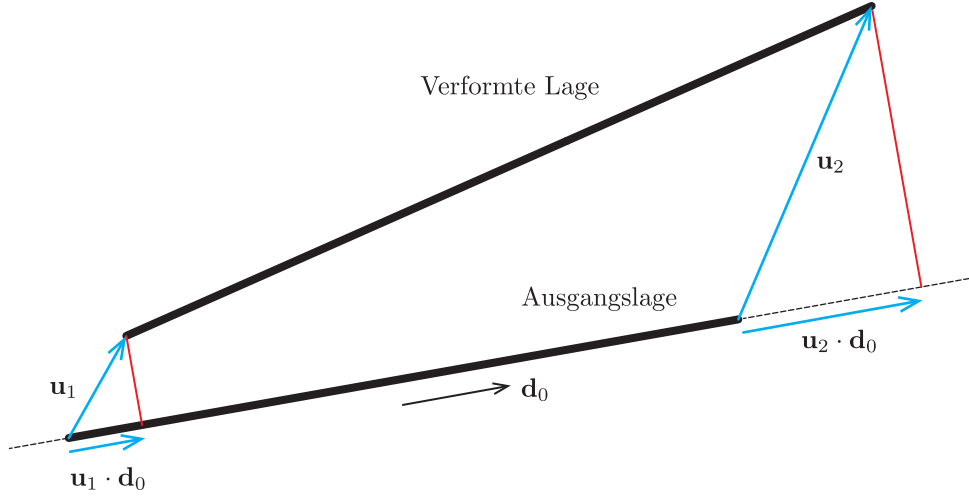


Abbildung 2.4: Projektion der Verschiebungsvektoren auf die Stabachse

wobei verwendet wurde, dass nur die Länge des verformten Stabes von den Verschiebungen abhängt. Die partielle Ableitung der Länge  $l$  nach der Verschiebungskomponente  $u_{11}$  lautet

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22})}{\partial u_{11}} &= \frac{\partial}{\partial u_{11}} \sqrt{(x_{21} + u_{21} - (x_{11} + u_{11}))^2 + (x_{22} + u_{22} - (x_{12} + u_{12}))^2} \\ &= \frac{-(x_{21} + u_{21} - (x_{11} + u_{11}))}{\sqrt{(x_{21} + u_{21} - (x_{11} + u_{11}))^2 + (x_{22} + u_{22} - (x_{12} + u_{12}))^2}}. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\frac{\partial l(0, 0, 0, 0)}{\partial u_{11}} = \frac{-(x_{21} - x_{11})}{\sqrt{(x_{21} - x_{11})^2 + (x_{22} - x_{12})^2}} = -\cos \alpha_0,$$

ein dann doch wieder beruhigend einfaches Ergebnis. Auf dieselbe Art und Weise erhalten wir weiterhin

$$\frac{\partial l(0, 0, 0, 0)}{\partial u_{12}} = -\sin \alpha_0, \quad \frac{\partial l(0, 0, 0, 0)}{\partial u_{21}} = \cos \alpha_0, \quad \frac{\partial l(0, 0, 0, 0)}{\partial u_{22}} = \sin \alpha_0.$$

Für die linearisierte Normalkraft ergibt sich schließlich der Zusammenhang

$$N_{\text{lin}} = \frac{EA}{l_0} (-(\cos \alpha_0 u_{11} + \sin \alpha_0 u_{12}) + \cos \alpha_0 u_{21} + \sin \alpha_0 u_{22}) = \frac{EA}{l_0} (\mathbf{d}_0 \cdot \mathbf{u}_2 - \mathbf{d}_0 \cdot \mathbf{u}_1).$$

Diese Darstellung der linearisierten Normalkraft besitzt eine anschauliche Interpretation (Abbildung 2.4): Es wird nur die Projektion der Verschiebungsvektoren auf die Stabachse betrachtet, die Verschiebung quer zur Stabachse spielt keine Rolle.

## 2 Fachwerke

Zur Bestimmung des Vektors der Stabendkräfte  $\mathbf{P}$  schreiben wir die linearisierte Normalkraft nochmals um zu

$$N_{\text{lin}} = \frac{EA}{l_0} \begin{pmatrix} -\cos \alpha_0 & -\sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 & \sin \alpha_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix} = \frac{EA}{l_0} \mathbf{t}_0^\top \mathbf{u}.$$

Dabei ist

$$\mathbf{t}_0 = \begin{pmatrix} -\mathbf{d}_0 \\ \mathbf{d}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \alpha_0 \\ -\sin \alpha_0 \\ \cos \alpha_0 \\ \sin \alpha_0 \end{pmatrix}$$

der Transformationsvektor des unverformten Stabes.

**2. Gleichgewicht am unverformten System.** Für die Ermittlung der Stabendkräfte  $\mathbf{P}_1$  und  $\mathbf{P}_2$  setzen wir nun statt des Winkels  $\alpha$  den Winkel  $\alpha_0$  der unverformten Achse ein. Zusammen mit der linearisierten Normalkraft erhalten wir den vereinfachten Zusammenhang

$$\mathbf{P}_{\text{lin}} = N_{\text{lin}} \cdot \mathbf{t}_0 = \mathbf{t}_0 \cdot N_{\text{lin}} = \frac{EA}{l_0} \mathbf{t}_0 \mathbf{t}_0^\top \mathbf{u}.$$

Vor dem Vektor  $\mathbf{u}$  steht das Produkt eines Spaltenvektors mit einem Zeilenvektor, das heißt eine Matrix mit vier Zeilen und vier Spalten. Multipliziert mit der Dehnsteifigkeit ist das die Elementsteifigkeitsmatrix

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \frac{EA}{l_0} \mathbf{t}_0 \mathbf{t}_0^\top \\ &= \frac{EA}{l_0} \begin{pmatrix} -\cos \alpha_0 \\ -\sin \alpha_0 \\ \cos \alpha_0 \\ \sin \alpha_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos \alpha_0 & -\sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 & \sin \alpha_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{EA}{l_0} \begin{pmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

wobei  $c = \cos \alpha_0$  und  $s = \sin \alpha_0$  gelten soll. Mit der Elementsteifigkeitsmatrix lautet der linearisierte Zusammenhang zwischen Verformungen und Stabendkräften

$$\mathbf{P}_{\text{lin}} = \mathbf{K} \mathbf{u}. \tag{2.4}$$

Gegenüber der nichtlinearen Beziehung (2.2) stellt dieser lineare Zusammenhang eine erhebliche Vereinfachung dar.

## 2.3 Kräftegleichgewicht, Systemgrößen und Berechnung der Verschiebungen

In diesem Abschnitt setzen wir die einzelnen Stäbe zu einem Tragwerk zusammen und bestimmen mithilfe der Gleichgewichtsbedingungen für jeden freigeschnittenen Knoten die Knotenverschiebungen. Dabei setzen wir voraus, dass die Verformungen klein sind und verwenden daher die lineare Theorie. Die Bezeichnung *lin* wird weggelassen, es ist klar, was gemeint ist.

Die Berechnung erfolgt zunächst für ein einfaches Tragwerk, im Anschluss fassen wir die einzelnen Schritte nochmals allgemein zusammen.

### 2.3.1 Rechenbeispiel: Fachwerk aus drei Stäben

Wir betrachten das in Abbildung 2.5 dargestellte Beispiel. Für die Ermittlung der Verschiebungen rechnen wir für Kräfte in Meganewton und sparen damit Nullen, als Längeneinheit legen wir den Meter zu Grunde.

**System.** Das System besteht aus drei Stäben und ist statisch bestimmt. Knoten und Stäbe sind nummeriert, die Stäbe haben jeweils eine Richtung vom ersten zum zweiten Knoten.

**Verschiebungen.** Jeder Knoten kann sich prinzipiell in horizontaler und vertikaler Richtung verschieben. Insgesamt gibt es also, wieder prinzipiell, doppelt so viele unbekannte Verschiebungen wie Knoten. Bei dieser Betrachtung lassen wir die Auflager zunächst außer Betracht, darum kümmern wir uns später. Wir fassen die unbekannten Verschiebungen im Vektor der Systemverschiebungen

$$\hat{\mathbf{u}} = (\hat{u}_1 \quad \hat{u}_2 \quad \hat{u}_3 \quad \hat{u}_4 \quad \hat{u}_5 \quad \hat{u}_6)^\top$$

zusammen. Der Hut über einer Variablen bezeichnet dabei eine Systemgröße (im Unterschied zu Größen für einen einzelnen Stab ohne Hut). Die unbekannten Verschiebungen werden häufig auch als Freiheitsgrade bezeichnet. Bei der Nummerierung der Freiheitsgrade stützen wir uns auf die Nummerierung der Knoten, so dass der Knoten  $n$  die Freiheitsgradnummern  $2n - 1$  und  $2n$  erhält.

**Stabendkräfte.** Im vorangegangenen Abschnitt haben wir die Stabendkräfte ermittelt, die für einen einzelnen Fachwerkstab zu einer vorgegebenen Verschiebung gehören. Nun benötigen wir die Kräfte, die an einem freigeschnittenen Knoten angreifen. Hierzu schneiden wir die Stäben von Stab 2 frei und sehen, dass an den beiden Schnittufern jeweils die negativen Stabendkräfte angreifen. Beachten Sie, dass die Nummer des Stabes bei den Stabendkräften mit einem hochgestellten Index angegeben ist.



## 2 Fachwerke

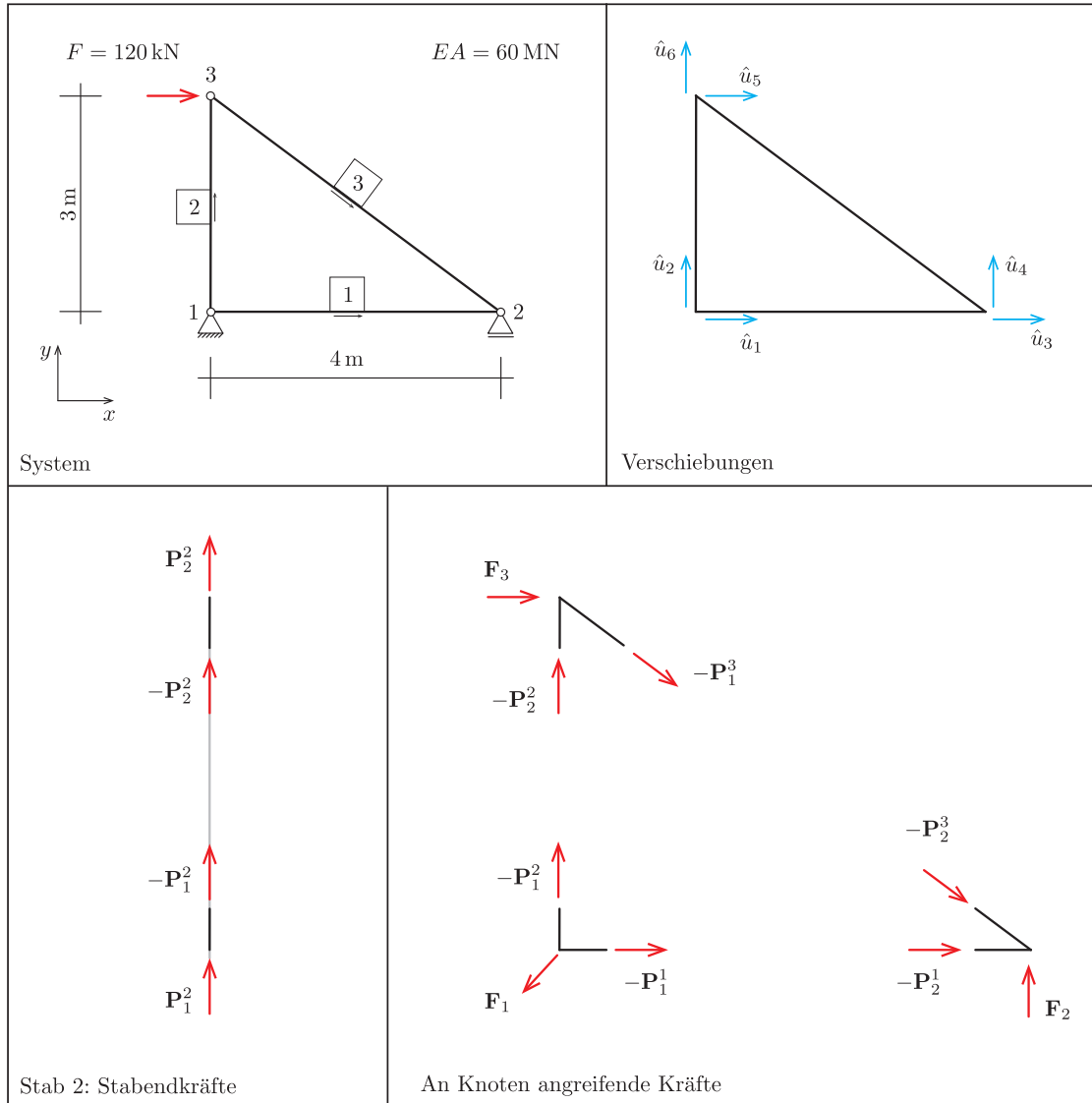


Abbildung 2.5: *System, Verschiebungen und Knotenkräfte*

**An Knoten angreifende Kräfte.** Hier sind die Kräfte dargestellt, die an jedem Knoten angreifen. Wichtig ist, dass wir die Kräfte als vektorielle Größen angetragen haben, bei der Addition sind also keine Vorzeichen zu beachten. Für die externen Kräfte können wir festhalten:

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{12} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ R_{12} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_3 = \begin{pmatrix} 120 \cdot 10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei sind  $R_{ij}$  die unbekannten Auflagerreaktionen, die angreifende Kraft  $F$  wird auf Meganewton umgerechnet.

### Kräftegleichgewicht an den Knoten

Jetzt kommt der zentrale gedankliche Schritt des Verfahrens: Die Formulierung des Knotengleichgewichts. In vektorieller Schreibweise erhalten wir aus der Summe der Kräfte an jedem Knoten die drei Gleichungen

$$\begin{array}{lll} -\mathbf{P}_1^1 - \mathbf{P}_1^2 + \mathbf{F}_1 = 0 & \Longleftrightarrow & \mathbf{P}_1^1 + \mathbf{P}_1^2 = \mathbf{F}_1 \\ -\mathbf{P}_2^1 - \mathbf{P}_2^3 + \mathbf{F}_2 = 0 & \Longleftrightarrow & \mathbf{P}_2^1 + \mathbf{P}_2^3 = \mathbf{F}_2 \\ -\mathbf{P}_2^2 - \mathbf{P}_1^3 + \mathbf{F}_3 = 0 & \Longleftrightarrow & \mathbf{P}_2^2 + \mathbf{P}_1^3 = \mathbf{F}_3 \end{array}$$

Komponentenweise aufgeschrieben und sortiert erhalten wir die Beziehungen

$$\begin{array}{rclcl} P_{11}^1 & + & P_{11}^2 & + & 0 & = & R_{11} \\ P_{12}^1 & + & P_{12}^2 & + & 0 & = & R_{12} \\ P_{21}^1 & + & 0 & + & P_{21}^3 & = & 0 \\ P_{22}^1 & + & 0 & + & P_{22}^3 & = & R_{22} \\ 0 & + & P_{21}^2 & + & P_{11}^3 & = & 120 \cdot 10^{-3} \\ 0 & + & P_{22}^2 & + & P_{12}^3 & = & 0 \end{array}$$

Wir können nun die Beiträge der einzelnen Stäbe und die rechte Seite jeweils in Vektoren zusammenfassen und erhalten die globale Gleichung

$$\hat{\mathbf{P}}^1 + \hat{\mathbf{P}}^2 + \hat{\mathbf{P}}^3 = \hat{\mathbf{F}}. \quad (2.5)$$

Sie besagt, dass die Summe der Stabendkräfte mit den äußeren Lasten im Gleichgewicht stehen muss. Dabei ist klar, dass die Vektoren  $\hat{\mathbf{P}}^1, \hat{\mathbf{P}}^2, \hat{\mathbf{P}}^3$  alle vom globalen Verschiebungsvektor  $\hat{\mathbf{u}}$  abhängen.

### Systemgrößen

Wie diese Abhängigkeit erfasst werden kann untersuchen wir exemplarisch am horizontalen Stab 1.

**Beitrag von Stab 1.** Entsprechend den Überlegungen im vorangegangenen Abschnitt erhalten wir mit

$$l_0 = 4, \quad \mathbf{d}_0 = (1 \ 0)^\top, \quad \mathbf{t} = (-1 \ 0 \ 1 \ 0)^\top$$

die Elementsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}^1 = \frac{EA}{l} \mathbf{t} \mathbf{t}^\top = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -15 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit den Vektor der Stabendkräfte

$$\begin{pmatrix} P_{11}^1 \\ P_{12}^1 \\ P_{21}^1 \\ P_{22}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -15 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \end{pmatrix} \quad \text{oder kurz} \quad \mathbf{P}^1 = \mathbf{K}^1 \mathbf{u}^1.$$

Dieser Zusammenhang gilt für den einzelnen Stab und muss nun in das Gesamtsystem eingebaut werden. Es fehlt also noch der Zusammenhang mit den globalen Vektoren  $\hat{\mathbf{P}}^1$  und  $\hat{\mathbf{u}}$ .

Die Verknüpfung zwischen den lokalen und den globalen Vektoren stellen wir mit einer Matrix her, deren Einträge entweder 0 oder 1 sind. Wir finden schnell heraus, dass wir diese Idee in der Form

$$\begin{pmatrix} P_{11}^1 \\ P_{12}^1 \\ P_{21}^1 \\ P_{22}^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11}^1 \\ P_{12}^1 \\ P_{21}^1 \\ P_{22}^1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \\ \hat{u}_5 \\ \hat{u}_6 \end{pmatrix}$$

aufschreiben können. Offensichtlich handelt es sich um ein und dieselbe Matrix, einmal eben transponiert. Diese neue Matrix nennen wir Assemblierungsmatrix, bezeichnen sie mit  $\mathbf{A}^1$  und erhalten die kompakte Darstellung

$$\hat{\mathbf{P}}^1 = (\mathbf{A}^1)^\top \mathbf{P}^1 \quad \text{und} \quad \mathbf{u}^1 = \mathbf{A}^1 \hat{\mathbf{u}}.$$

Die Konvention ist, dass die Matrix zwischen  $\hat{\mathbf{u}}$  und  $\mathbf{u}$  mit  $\mathbf{A}^1$  bezeichnet wird und nicht umgekehrt. Setzen wir nun diese beiden Gleichungen in die Stabendkräfte von Stab 1 ein, so ergibt sich

$$\hat{\mathbf{P}}^1 = (\mathbf{A}^1)^\top \mathbf{K}^1 \mathbf{A}^1 \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{K}}^1 \hat{\mathbf{u}}.$$

## 2 Fachwerke

Die Matrix

$$\hat{\mathbf{K}}^1 = (\mathbf{A}^1)^\top \mathbf{K}^1 \mathbf{A}^1$$

heißt globale Steifigkeitsmatrix zu Stab 1. Mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -15 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -15 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

erhalten wir schließlich den gesuchten Zusammenhang

$$\begin{pmatrix} P_{11}^1 \\ P_{12}^1 \\ P_{21}^1 \\ P_{22}^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -15 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \\ \hat{u}_5 \\ \hat{u}_6 \end{pmatrix}.$$

**Beiträge der Stäbe 2 und 3.** Mit derselben Vorgehensweise bestimmen wir die globalen Steifigkeitsmatrizen

$$\hat{\mathbf{K}}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{K}}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7.68 & -5.76 & -7.68 & 5.76 \\ 0 & 0 & -5.76 & 4.32 & 5.76 & -4.32 \\ 0 & 0 & -7.68 & 5.76 & 7.68 & -5.76 \\ 0 & 0 & 5.76 & -4.32 & -5.76 & 4.32 \end{pmatrix}$$

für die beiden anderen Stäbe.

### Berechnung der Verschiebungen

Die globale Gleichgewichtsbedingungen (2.5) können wir nun in der Form

$$\hat{\mathbf{K}}^1 \hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{K}}^2 \hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{K}}^3 \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{F}} \iff (\hat{\mathbf{K}}^1 + \hat{\mathbf{K}}^2 + \hat{\mathbf{K}}^3) \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{F}}$$

## 2 Fachwerke

aufschreiben. Wir nennen die Matrix

$$\hat{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{K}}^1 + \hat{\mathbf{K}}^2 + \hat{\mathbf{K}}^3 = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & -20 \\ -15 & 0 & 22.68 & -5.76 & -7.68 & 5.76 \\ 0 & 0 & -5.76 & 4.32 & 5.76 & -4.32 \\ 0 & 0 & -7.68 & 5.76 & 7.68 & -5.76 \\ 0 & -20 & 5.76 & -4.32 & -5.76 & 24.32 \end{pmatrix}$$

Gesamtsteifigkeitsmatrix und formulieren das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 15 & 0 & -15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & -20 \\ -15 & 0 & 22.68 & -5.76 & -7.68 & 5.76 \\ 0 & 0 & -5.76 & 4.32 & 5.76 & -4.32 \\ 0 & 0 & -7.68 & 5.76 & 7.68 & -5.76 \\ 0 & -20 & 5.76 & -4.32 & -5.76 & 24.32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \\ \hat{u}_5 \\ \hat{u}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{12} \\ 0 \\ R_{22} \\ 120 \cdot 10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schließlich sind noch die Auflagerbedingungen  $\hat{u}_1 = \hat{u}_2 = \hat{u}_4 = 0$  zu berücksichtigen. Die einfachste Möglichkeit dies zu erreichen besteht darin, die betroffenen Zeilen gleich 0 zu setzen und eine 1 für das Diagonalelement zu vergeben. Damit lautet das modifizierte lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -15 & 0 & 22.68 & -5.76 & -7.68 & 5.76 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7.68 & 5.76 & 7.68 & -5.76 \\ 0 & -20 & 5.76 & -4.32 & -5.76 & 24.32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \\ \hat{u}_5 \\ \hat{u}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 120 \cdot 10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das Lineare Gleichungssystem besitzt die Lösung (Matlab)

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.008 \\ 0 \\ 0.027 \\ 0.0045 \end{pmatrix}$$

aus der wir die Knotenverschiebungen

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0.008 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0.027 \\ 0.0045 \end{pmatrix}$$

ablesen können.

### Berechnung von Schnittgrößen

Mit den Knotenverschiebungen können wir schließlich die Normalkräfte der einzelnen Stäbe berechnen.

Stab 1:

$$l_0 = 4, \quad \mathbf{d}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N = \frac{60000}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.008 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = 120 \text{ kN}$$

Stab 2:

$$l_0 = 3, \quad \mathbf{d}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad N = \frac{60000}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.0045 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = 90 \text{ kN}$$

Stab 3:

$$l_0 = 5, \quad \mathbf{d}_0 = \begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.6 \end{pmatrix}, \quad N = \frac{60000}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.008 - 0.027 \\ 0 - 0.0045 \end{pmatrix} = -150 \text{ kN}$$

### 2.3.2 Assemblierungsmatrix

Ein wichtiger Baustein bei der Herleitung der globalen Gleichgewichtsbeziehung war die Assemblierungsmatrix  $\mathbf{A}^e$  für jeden Stab  $e$ . Wir sehen in diesem Abschnitt, dass diese Matrix für die Umsetzung in einem Computerprogramm gar nicht notwendig ist.

Beispiel: Stab 1 besitzt die Freiheitsgrade

$$\mathbf{I}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und die Assemblierungsmatrix} \quad \mathbf{A}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir nennen  $\mathbf{I}^1$  Indexvektor von Stab 1. Aus dem Indexvektor lässt sich also für jede Zeile ablesen, an welcher Stelle die 1 steht. Daraus können wir das allgemeine Schema

$$A_{ij}^e = \begin{cases} 1 & \text{falls } I_i^e = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für } i = 1, \dots, 4 \quad \text{und } j = 1, \dots, 2 \cdot N_n$$

## 2 Fachwerke

ableiten, wobei  $N_n$  die Anzahl der Knoten bezeichnet. Für den Fachwerkstab besitzt die Assemblierungsmatrix immer vier Zeilen, die Anzahl der Spalten ist gleich der Anzahl der Freiheitsgrade, also  $2N_n$ .

Interessant ist, dass durch das Produkt

$$\hat{\mathbf{K}}^e = (\mathbf{A}^e)^\top \mathbf{K}^e \mathbf{A}^e$$

die Einträge der  $4 \times 4$ -Matrix  $\mathbf{K}^e$  auf die  $2N_n \times 2N_n$ -Matrix  $\hat{\mathbf{K}}$  verteilt werden. Man kann sich überlegen, dass dies nach dem Schema

$$\hat{K}_{I_i^e I_j^e}^e = K_{ij}^e$$

geschieht. In Matlab lässt sich das in einer Zeile mithilfe des Indexvektors bewerkstelligen. Für die Programmierung wird die Assemblierungsmatrix also gar nicht benötigt.

### 2.3.3 Berechnungsprozedur

Wir fassen die Schritte aus den vorangegangenen Abschnitten nochmal allgemein zusammen:

1. Nützliche Variablen:  
 $N_e$  (Anzahl Stäbe),  $N_n$  (Anzahl Knoten),  $N = 2N_n$  (Anzahl Freiheitsgrade)
2. Globale Steifigkeitsmatrix  $\hat{\mathbf{K}}$  der Größe  $N \times N$  mit Nullen vorbelegen
3. Schleife über alle Stäbe
  - Variablen:  $n_1, n_2$  (Knotennummern),  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  (Knotenkoordinaten)
  - Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  berechnen
  - Indexvektor  $I = (2n_1 - 1, 2n_1, 2n_2 - 1, 2n_2)$  für Element aufstellen
  - Matrix  $\mathbf{K}$  mit Indexvektor  $I$  auf globale Matrix  $\hat{\mathbf{K}}$  aufaddieren
4. Äußere Lasten in Vektor  $\hat{\mathbf{F}}$  anordnen
5. Auflagerbedingungen einbauen
6. Lineares Gleichungssystem lösen

## Teil II

# Numerische Lösung von Anfangswertproblemen



## 3 Anfangswertprobleme erster Ordnung

In Natur und Technik gibt es viele Vorgänge, bei denen der Zustand des betrachteten Systems sich über die Zeit verändert. Häufig ist dabei der Zustand des Systems zu einem bestimmten Zeitpunkt bekannt und man fragt sich, wie sich die Dinge über die Zeit verändern werden. Beispiele hierfür sind

- Erwärmung und Abkühlung von Bauteilen,
- Schwingungsvorgänge zum Beispiel bei Erdbeben,
- Ausbreitung von Schadstoffen in Wasser, Boden und Luft,
- Flugsimulatoren,
- Strömung von Fluiden (Luft, Wasser, Öl, ...),
- Ausbreitung von Wellen (akustisch, elektromagnetisch, im Wasser, ...),
- Wettervorhersage und Klimaprognosen,
- Ausbreitung von Infektionskrankheiten (zum Beispiel Covid-19).

Typisch bei solchen Aufgaben ist, dass die zeitliche Änderung des Zustandes vom aktuellen Zustand abhängt. Zum Beispiel ändert sich die Temperatur eines Metallstabes dann besonders schnell, wenn ein Ende des Stabes sehr warm und das andere Ende sehr kalt ist. Mathematisch werden solche Vorgänge durch Differentialgleichungen beschrieben. Zusammen mit den Anfangsbedingungen erhält man auf diese Weise ein Anfangswertproblem, das sich nur in seltenen Fällen auf dem Papier lösen lässt.

In diesem Kapitel beginnen wir mit dem einfachsten Fall aus dieser Problemklasse: Anfangswertprobleme erster Ordnung (es kommen nur erste Ableitungen vor) mit einer unbekannten Funktion.

### 3.1 Grundlagen

In einem Anfangswertproblem ist eine Funktion gesucht, die eine Differentialgleichung erster Ordnung erfüllt und gleichzeitig an einer vorgegebenen Stelle einen bestimmten Funktionswert annimmt. Mathematisch formuliert lautet das Problem: Gesucht ist eine Funktion  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$y'(x) = F(x, y(x)) \quad \text{und} \quad y(x_0) = y_0.$$

### 3 Anfangswertprobleme erster Ordnung

Dabei definiert die Funktion  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die Differentialgleichung und  $y_0$  ist der vorgegebene Funktionswert zur Stelle  $x_0$ .

#### Beispiel 3.1.1

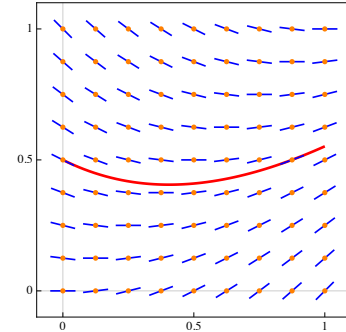
Das Anfangswertproblem

$$y'(x) = x - y(x) \quad \text{mit} \quad y(0) = 1$$

besitzt  $F(x, y) = y - x$  als Funktion der Differentialgleichung und die Lösung

$$y(x) = x + 2e^{-x} - 1.$$

Rechts ist das Richtungsfeld und die Lösungsfunktion des Anfangswertproblems dargestellt.



Wir halten fest:

- Die Differentialgleichung  $y'(x) = F(x, y(x))$  besagt: Wenn die Lösungsfunktion  $y$  durch den Punkt  $(x, y(x))$  verläuft, dann besitzt sie an der Stelle  $x$  die Ableitung  $F(x, y(x))$ .
- In einem Richtungsfeld wird dieser Zusammenhang graphisch dargestellt. Dabei berechnet man für ausgewählte Punkte  $(x_i, y_j)$  die Steigung  $F(x_i, y_j)$  und stellt diese mit einer kurzen Strecke dar.
- Bei zeitabhängigen Prozessen verwenden wir  $t$  als unabhängige Variable und schreiben  $\dot{y}(t)$  statt  $y'(x)$ .

In bestimmten Fällen lassen sich Lösungen von Anfangswertproblemen analytisch bestimmen. Allgemeiner anwendbar sind jedoch numerische Lösungsverfahren.

## 3.2 Numerische Lösungsverfahren

Bei der numerischen Lösung von Anfangswertproblemen gibt man sich damit zufrieden, Funktionswerte der Lösungsfunktion an einzelnen Stellen  $x_i$  durch Werte  $y_i$  anzunähern. Je besser die Näherungslösung ist, umso näher liegen die berechneten Zahlen  $y_i$  an der exakten Lösung  $y(x_i)$ . Abbildung 3.1 zeigt eine solche numerische Lösung zusammen mit der exakten Lösung des Anfangswertproblems.

Um eine numerische Lösung zu bestimmen benötigen wir also

- eine Funktion der Differentialgleichung  $F$ ,
- einen Bereich  $I = [x_0, x_e]$  für den die Lösung gesucht wird,

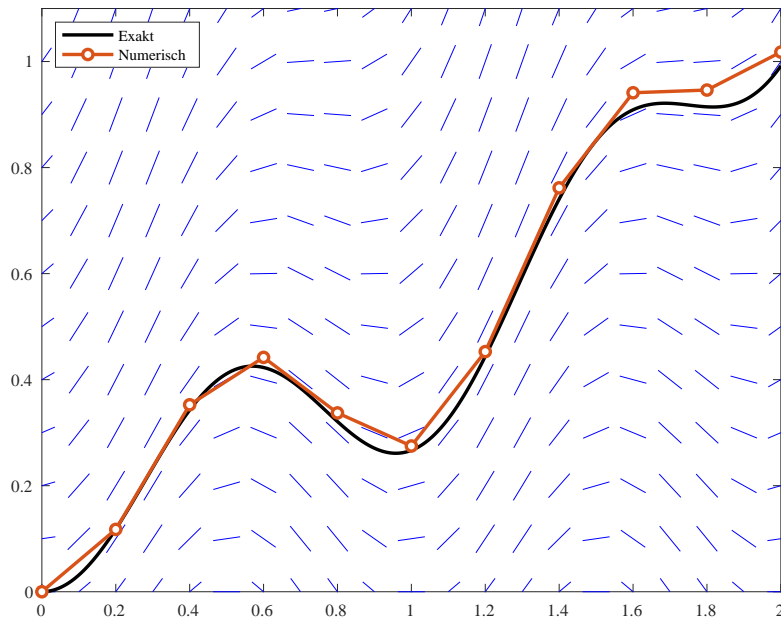


Abbildung 3.1: Numerische Lösung eines Anfangswertproblems für  $0 \leq x \leq 2$ . Es wird eine feste Schrittweite von  $h = x_{i+1} - x_i = 0.2$  verwendet. Zu erkennen ist, dass die Punkte  $(x_i, y_i)$  nicht auf dem Graphen der exakten Lösung liegen.

- eine Schrittweite<sup>1</sup>  $h$ ,
- einen Anfangswert  $y_0$ .

Mit einem numerisches Lösungsverfahren berechnet man auf dieser Grundlage die Werte

$$x_i = x_0 + i \cdot h \quad \text{und} \quad y_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

wobei  $y_i$  die gesuchten Näherungen für  $y(x_i)$  sind.

#### 3.2.1 Explizites Euler-Verfahren

Das explizite Euler-Verfahren wurde 1768 von Leonard Euler veröffentlicht und ist das einfachste Verfahren zur numerischen Lösung von Anfangswertproblemen. Praktisch relevant wurde das Verfahren (und eine große Klasse verwandter Methoden) mit der Verfügbarkeit von elektronischen Computern. Ein frühes Anwendungsbeispiel ist die Berechnung der Bahnkurve einer Raumkapsel bei der NASA<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Es gibt auch adaptive Verfahren, in denen die Schrittweite basierend auf vorgegebenen Genauigkeitsanforderungen automatisch bestimmt und im Verlauf der Berechnung angepasst wird. Wir werden jedoch von einer festen Schrittweite ausgehen.

<sup>2</sup>Der aus verschiedenen Gründen sehenswerte Film Hidden Figures beleuchtet die Rolle von drei afro-amerikanischen Mathematikerinnen in dem Vorhaben.

**Beispiel 3.2.1** Wir lösen näherungsweise das Anfangswertproblem

$$y'(x) = -y(x) \quad \text{mit} \quad y(0) = 1$$

für  $I = [0, 1]$  und eine Schrittweite  $h = 0.5$  mit dem expliziten Euler-Verfahren.

Zunächst halten wir fest, dass die Funktion der Differentialgleichung die Zuordnungsvorschrift

$$F(x, y) = -y$$

besitzt und

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.5, \quad x_2 = 1$$

die gegebenen Stellen auf der  $x$ -Achse sind. Weiterhin folgt aus dem vorgegebenen Startwert  $y_0 = 1$ . Die zugehörige Steigung ist

$$y'_0 = F(x_0, y_0) = -1.$$

Damit können wir die Lösungsfunktion durch die Tangentenfunktion

$$T_0(x) = 1 - x$$

approximieren. Natürlich ist die Tangentenfunktion nur in der unmittelbaren Umgebung von  $x_0$  eine vernünftige Näherung an die gesuchte Lösungsfunktion. Die Idee von Euler bestand daher darin, diesen Approximationsschritt zu wiederholen. Wir gehen also das Stück  $h$  entlang der Tangentenfunktion und erhalten einen neuen Punkt mit den Koordinaten

$$x_1 = 0.5 \quad \text{und} \quad y_1 = T_0(0.5) = 1 - 0.5 = 0.5,$$

wie in Abbildung 3.2 oben rechts dargestellt. Mithilfe der Steigung

$$y'_1 = F(x_1, y_1) = -0.5$$

können wir die Tangentenfunktion

$$T_1(x) = 0.5 - 0.5(x - 0.5)$$

aufstellen (Abbildung 3.2 unten links) und erhalten den nächsten Punkt

$$x_2 = 1 \quad \text{und} \quad y_2 = T_1(1) = 0.5 - 0.5(1 - 0.5) = 0.25,$$

siehe Abbildung 3.2 unten rechts.

### 3 Anfangswertprobleme erster Ordnung

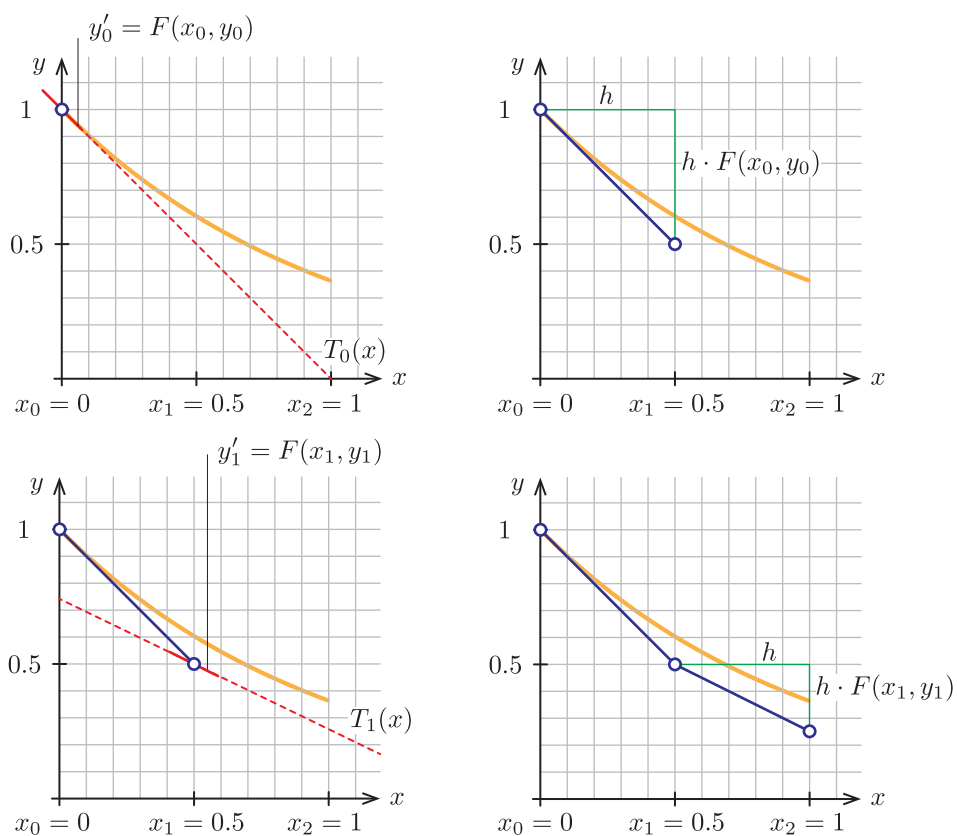
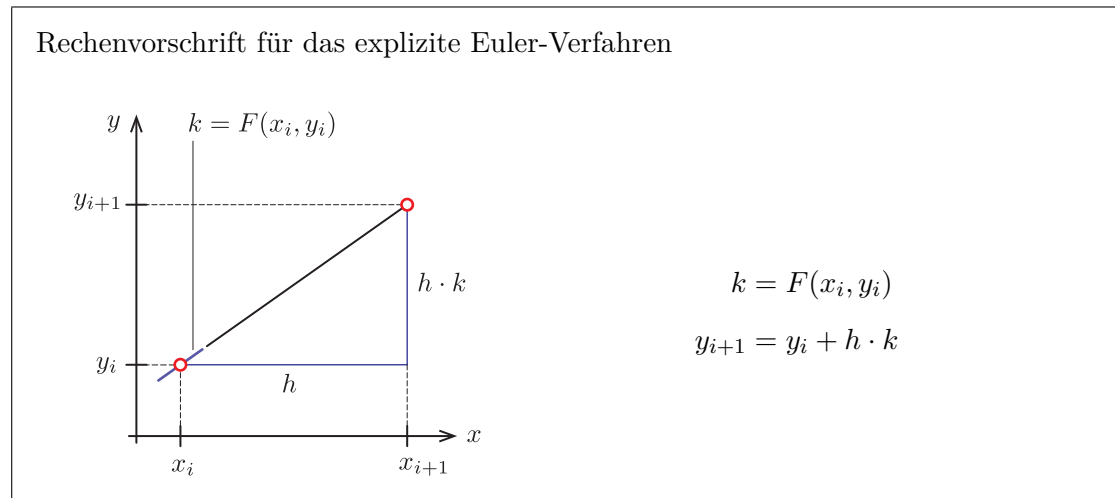


Abbildung 3.2: Prinzip des Euler-Verfahrens. Die Lösungsfunktion  $y$  des Anfangswertproblems ist orange dargestellt.

### 3 Anfangswertprobleme erster Ordnung

In Abbildung 3.2 ist zu sehen, dass die Aufstellung der Tangentenfunktion gar nicht notwendig ist: Wir erhalten die Höhendifferenz aus der Schrittweite multipliziert mit der Steigung. Dies führt uns auf die



#### Beispiel 3.2.2 Zurück zum Beispiel

$$F(x, y) = -y, \quad I = [0, 1], \quad h = 0.5 \quad \text{und} \quad y_0 = 1,$$

das wir nun kompakt mit dem expliziten Euler-Verfahren lösen (so wie man das auch programmieren könnte). Zunächst stellen wir fest, dass wir  $N = 2$  Schritte benötigen. Damit lassen sich sofort die Stellen

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.5, \quad x_2 = 1$$

angeben und wir erhalten für die gesuchten Näherungen

$$\begin{array}{ll}
 y_0 = 1 & k = -1 \\
 y_1 = 1 + 0.5 \cdot (-1) = 0.5 & k = -0.5 \\
 y_2 = 0.5 + 0.5 \cdot (-0.5) = 0.25. & 
 \end{array}$$

#### 3.2.2 Numerische Integration

Eine andere Sicht auf das explizite Euler-Verfahren eröffnet sich, wenn wir den Schritt  $y_{i+1} = y_i + h \cdot F(x_i, y_i)$  als numerische Integration interpretieren.

Aus der Integralrechnung kennen wir den Zusammenhang

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x) \, dx = \left[ y(x) \right]_{x_i}^{x_{i+1}} = y(x_{i+1}) - y(x_i).$$

### 3 Anfangswertprobleme erster Ordnung

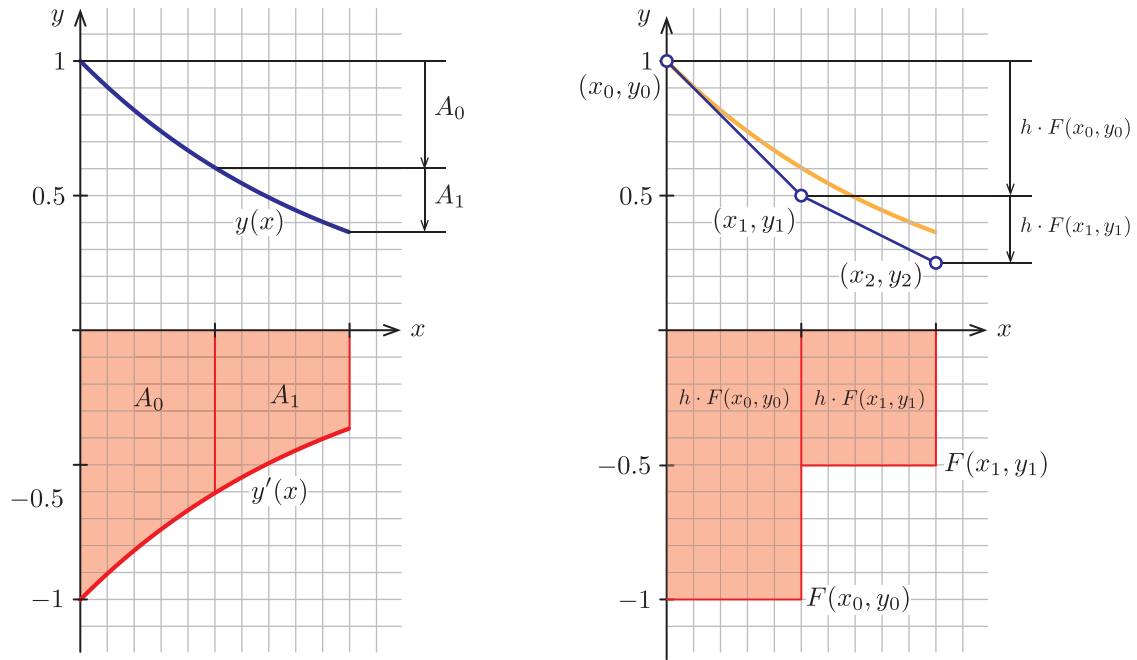


Abbildung 3.3: Exakte Integration und Approximation des Euler-Verfahrens

Umstellen nach  $y(x_{i+1})$  liefert die Beziehung

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x) \, dx.$$

Der Funktionswert an der Stelle  $x_{i+1}$  ergibt sich somit aus dem Funktionswert für  $x_i$  zusammen mit dem orientierten Flächeninhalt unter dem Graphen von  $y'$  zwischen  $x_i$  und  $x_{i+1}$  (vergleiche Abbildung 3.3 links).

Der Vergleich mit der Rechenvorschrift des Euler-Verfahrens

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \underbrace{F(x_i, y_i)}_{y'(x_i)}$$

erlaubt eine neue Interpretation des Zuwachses  $h \cdot F(x_i, y_i)$ : Es handelt sich um eine numerische Approximation des Integrals  $\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x) \, dx$ . Die Approximation ist recht grob (vergleiche Abbildung 3.3), was auch die signifikante Abweichung der Näherung von der exakten Lösung erklärt. Eine verbesserte Approximation liefert das Halbschrittverfahren.

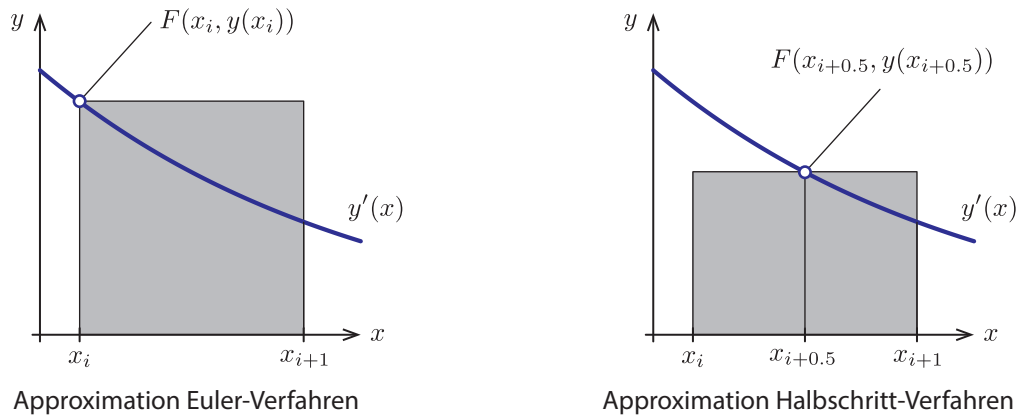


Abbildung 3.4: Näherung des Integrals für das Euler-Verfahren und das Halbschrittverfahren

### 3.2.3 Halbschrittverfahren

Die Idee des Halbschrittverfahrens besteht darin, das Integral  $\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x) dx$  mithilfe des Funktionswertes bei der halben Schrittweite zu approximieren, siehe Abbildung 3.4. Offensichtlich wird der Flächeninhalt unter dem Graphen von  $y'$  damit wesentlich besser approximiert als mit dem Anfangswert des Euler-Verfahrens.

Problematisch dabei ist, dass wir den Funktionswert  $y(x_{i+0.5})$  bei der halben Schrittweite nicht kennen. Dieser wird daher in einem Zwischenschritt nach der Vorschrift des Euler-Verfahrens approximiert.

**Beispiel 3.2.3** Wir lösen das Anfangswertproblem

$$F(x, y) = -y, \quad I = [0, 1], \quad h = 0.5 \quad \text{und} \quad y_0 = 1$$

mit dem Halbschrittverfahren.

1. Schritt

Die Steigung im Punkt  $(x_0 = 0, y_0 = 1)$  ist

$$k_1 = F(x_0, y_0) = -1.$$

Damit erhalten wir den Hilfspunkt im halben Schritt

$$x_{0.5} = x_0 + 0.5 \cdot h = 0.25 \quad \text{und} \quad y_{0.5} = y_0 + 0.5 \cdot h \cdot k_1 = 1 + 0.5 \cdot 0.5 \cdot (-1) = 0.75.$$



### 3 Anfangswertprobleme erster Ordnung

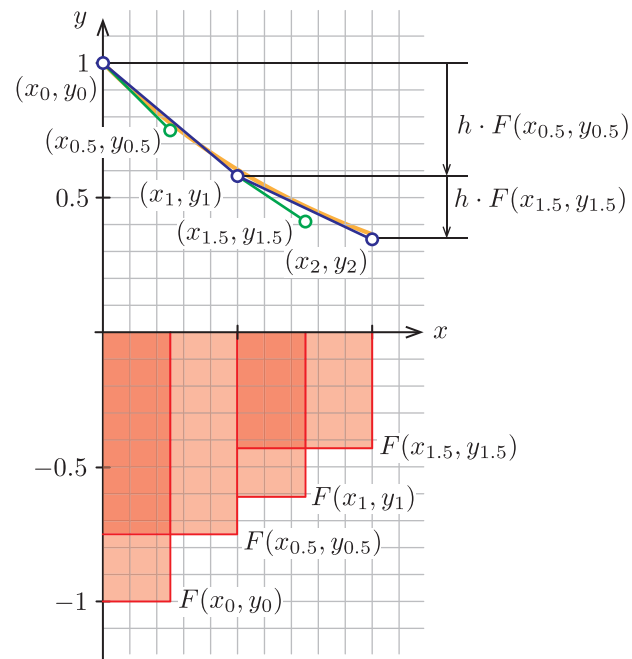


Abbildung 3.5: *Beispiel Halbschrittverfahren*

Die Steigung im Hilfspunkt ist

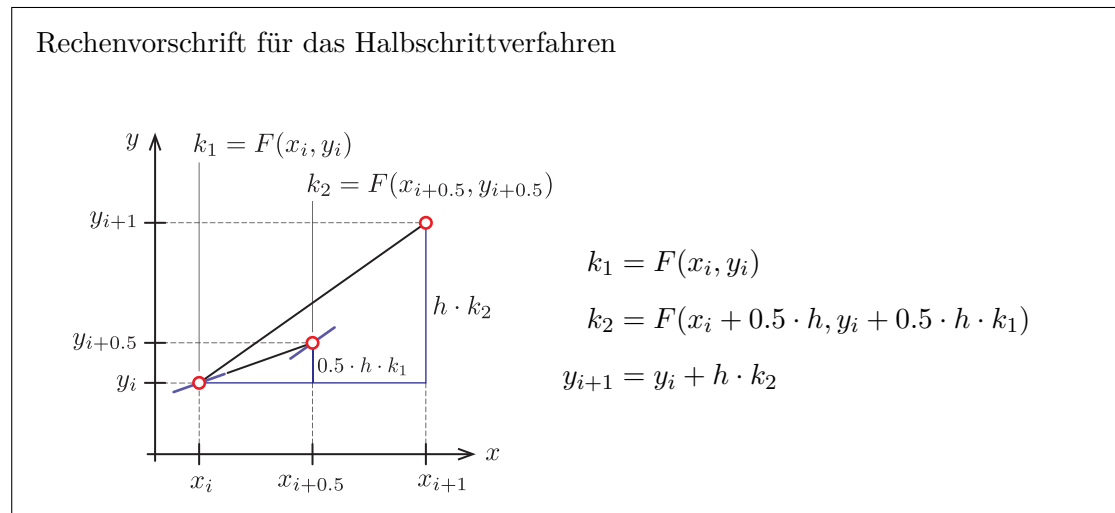
$$k_2 = F(x_{0.5}, y_{0.5}) = -0.75$$

und somit

$$x_1 = x_0 + h = 0.5 \quad \text{und} \quad y_1 = y_0 + h \cdot k_2 = 1 + 0.5 \cdot (-0.75) = 0.625.$$

Die Berechnung des zweiten Schritts erfolgt analog.

Wir verallgemeinern das Vorgehen aus dem Beispiel zur



Da wir im Halbschrittverfahren zwei Auswertungen der Funktion  $F$  der Differentialgleichung benötigen nennt man das Verfahren auch zweistufig.

Wie das Beispiel gezeigt hat, haben wir mit dem Halbschrittverfahren eine gegenüber dem expliziten Euler-Verfahren deutlich verbesserte Vorschrift zur Approximation des Integrals in

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x) \, dx$$

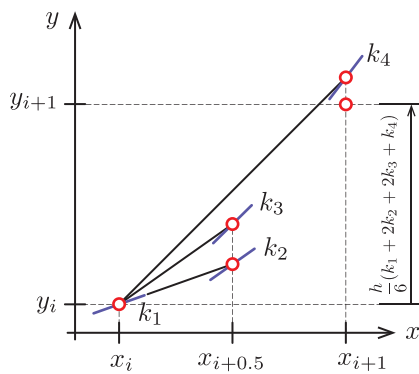
erhalten. Nun liegt es nahe, dass sich auch die Vorschrift des Halbschrittverfahrens noch weiter verbessern lässt und in der Tat, das ist so. Es gibt eine große Vielfalt von numerischen Verfahren zur Lösung von Anfangswertproblemen, die sich in Anzahl der Stufen und den Stellen, an denen die Hilfsgrößen bestimmt werden unterscheiden. Herleiten lassen sich die Verfahren auf der Grundlage einer Taylor-Entwicklung und mithilfe so genannter Butcher-Bäume [But63]. Allerdings ist dies alles andere als trivial und in keinsten Weise anschaulich.

#### 3.2.4 Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung

Einen sehr guten Kompromiss aus Genauigkeit und Rechenaufwand liefert das Runge-Kutta-Verfahren (nach Carl Runge und Martin Wilhelm Kutta), das für eine Vielzahl von Problemstellungen hervorragend geeignet ist und in der Praxis häufig eingesetzt wird (meist mit automatischer Schrittweitensteuerung).

### 3 Anfangswertprobleme erster Ordnung

#### Rechenvorschrift Runge-Kutta-Verfahren



$$k_1 = F(x_i, y_i)$$

$$k_2 = F(x_i + 0.5 \cdot h, y_i + 0.5 \cdot h \cdot k_1)$$

$$k_3 = F(x_i + 0.5 \cdot h, y_i + 0.5 \cdot h \cdot (k_1 + k_2))$$

$$k_4 = F(x_i + h, y_i + h \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4))$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

## 4 Bewegung von Massepunkten

Dieser Abschnitt ist ein kurzer Einschub, der die Grundlage für eine Reihe interessanter Anfangswertprobleme legt, die sich aus der Untersuchung der Bewegung von Punktmassen ergeben.

Anwendungen:

- Schwingungsvorgänge im Bauwesen,
- Dynamische Systeme in der Mechanik,
- Visualisierung von Strömungsvorgängen.

Die Erläuterungen in diesem Kapitel erfolgen für einen Massepunkt, der sich in der Ebene bewegt, im Raum kommt einfach eine Komponente hinzu, sonst bleibt alles gleich.

### 4.1 Kinematik des Massepunkts

In der Kinematik geht es um die mathematische Beschreibung der Bewegung eines Massepunkts (wobei die Masse hier gar keine Rolle spielt) ohne nach der Ursachen der Bewegung zu fragen.

Abbildung 4.1 (links) zeigt einen Massepunkt, der sich über die Zeit entlang einer Bahnkurve bewegt. Mathematisch wird die Position durch die parametrische Kurve  $\mathbf{x} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

beschrieben.

Die zeitliche Änderung des Ortes heißt Geschwindigkeit. Wir betrachten hierzu zunächst den Weg

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)$$

den der Massepunkt im Zeitintervall  $[t, t + \Delta t]$  zurücklegt (siehe auch Abbildung 4.1 rechts). Die mittlere Geschwindigkeit in diesem Zeitintervall ist dann der Vektor

$$\mathbf{v}_{\text{mit}} = \frac{1}{\Delta t} \cdot \Delta \mathbf{x}.$$

#### 4 Bewegung von Massepunkten

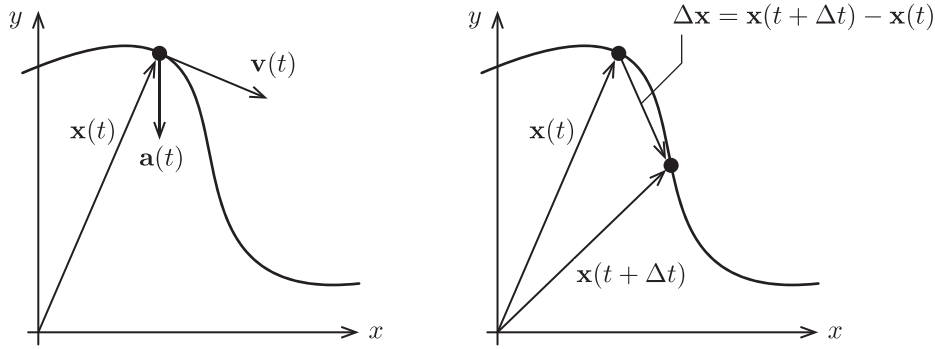


Abbildung 4.1: *Bewegung eines Massepunkts*

Die aktuelle Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t$  erhalten wir mithilfe des Grenzwerts

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot \Delta \mathbf{x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot (\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)).$$

Wird der Grenzwert komponentenweise in der Form

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot (\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)) = \begin{pmatrix} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_1(t + \Delta t) - x_1(t)}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_2(t + \Delta t) - x_2(t)}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}$$

aufgeschrieben, dann ist sofort zu erkennen, dass die Geschwindigkeit die Ableitung des Ortes nach der Zeit ist

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}$$

wobei die Ableitung komponentenweise durchzuführen ist. Wir in der Physik üblich kennzeichnet der hochgestellte Punkt eine Ableitung nach der Zeit,  $\dot{x}_1(t)$  ist also nichts anderes als  $x'_1(t)$ .

Damit ist klar, dass die Geschwindigkeit eine vektorielle Größe ist: Zum Zeitpunkt  $t$  bewegt sich der Massepunkt in Richtung  $\mathbf{v}(t)$  wobei die Geschwindigkeit (so wie man Sie auf dem Tacho eines Autos ablesen würde) der Länge des Geschwindigkeitsvektors entspricht, es gilt also

$$v(t) = |\mathbf{v}(t)|$$

wobei hier auf die Unterscheidung zwischen der Zahl  $v(t)$  und dem Vektor  $\mathbf{v}(t)$  zu achten ist. Und klar: Die Bezeichnung  $\mathbf{v}$  für die Geschwindigkeit kommt vom englischen Wort *velocity*.

Weiterhin bezeichnen wir die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit als Beschleunigung. Die Herleitung erfolgt wie bei der Geschwindigkeit über einen Grenzwert und wir erhalten

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{x}}(t),$$

wobei der Buchstabe  $\mathbf{a}$  dem englischen Wort *acceleration* entnommen ist.

**Beispiel 4.1.1** Wir betrachten ein Auto, das mit einer konstanten Geschwindigkeit von 50 km/h in einem Kreis mit dem Radius 50 m fährt. Gesucht sind die Gleichung des Ortes des Masseschwerpunkts für das Auto und die Beschleunigung.

Fährt das Auto auf einem Kreis, dann ist die Bewegungsgleichung durch

$$\mathbf{x}(t) = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

gegeben. Für den Radius gilt natürlich  $r = 50$  m. Um die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  zu ermitteln bestimmen wir zunächst allgemein den Geschwindigkeitsvektor

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) = 50 \cdot \omega \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

und die Geschwindigkeit auf dem Tachometer

$$v(t) = \sqrt{(-50 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t))^2 + (50 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t))^2} = 50 \cdot \omega.$$

Wenn wir, wie das meist am praktischsten ist, mit Metern und Sekunden rechnen, dann gilt

$$50 \cdot \omega = 50 \cdot \frac{1000}{60 \cdot 60} \iff \omega = \frac{5}{18} \text{ rad/s}$$

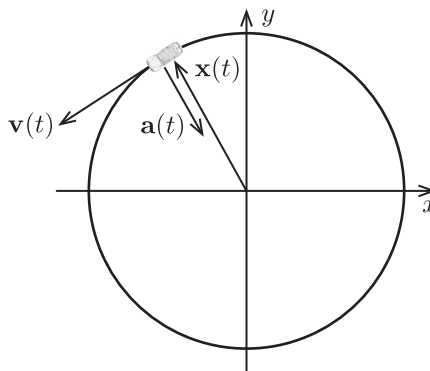
und somit

$$\mathbf{x}(t) = 50 \cdot \begin{pmatrix} \cos(5/18 \cdot t) \\ \sin(5/18 \cdot t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(t) = \frac{125}{9} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(5/18 \cdot t) \\ \cos(5/18 \cdot t) \end{pmatrix}$$

sowie

$$\mathbf{a}(t) = -\frac{625}{162} \cdot \begin{pmatrix} \cos(5/18 \cdot t) \\ \sin(5/18 \cdot t) \end{pmatrix}.$$

Wir halten fest, dass die Passagiere im Auto mit  $(625/162)/9.8 \approx 0.04$  g zur Seite gedrückt werden (also dem 0.04-fachen der Erdbeschleunigung). Der Geschwindigkeitsvektor ist gegenüber dem Ortsvektor um  $90^\circ$  gedreht, der Beschleunigungsvektor ist antiparallel zum Ortsvektor und zeigt somit zum Mittelpunkt des Kreises.



Die Darstellung veranschaulicht die Situation, das Auto ist allerdings nicht maßstäblich dargestellt, ebenso die Pfeile für Geschwindigkeit und Beschleunigung (hier passen ja nicht mal die Einheiten zusammen).

## 4.2 Dynamik des Massepunktes

Grundlage für die Untersuchung der Bewegung eines Massepunkts ist das zweite newtonsche Gesetz

$$\mathbf{F}(t) = m \cdot \ddot{\mathbf{x}}(t).$$

Es besagt, dass die zeitliche Änderung des Geschwindigkeitsvektors proportional zur auf die Masse einwirkenden (resultierenden) Kraft ist.

Im einfachsten Fall ist die Bahnkurve vorgegeben und man kann einfach die zugehörige Kraft ausrechnen.

**Beispiel 4.2.1** Wir nehmen an, dass unser Auto aus dem Beispiel oben mit Insassen und Gepäck eineinhalb Tonnen wiegt, es gilt demnach  $m = 1500$  kg. Die zugehörige Kraft, die durch Reibung auf die Räder übertragen wird, ist

$$\mathbf{F} = -1500 \cdot \frac{625}{162} \cdot \begin{pmatrix} \cos(5/18 \cdot t) \\ \sin(5/18 \cdot t) \end{pmatrix},$$

so dass die resultierende Kraft (der Betrag von  $\mathbf{F}$ )

$$F = \frac{156250}{27} \text{ N} \approx 5.79 \text{ kN}$$

beträgt. Nicht mitgerechnet ist natürlich die Motorkraft, die zur Überwindung des Luftwiderstandes notwendig ist.

Im Allgemeinen hängt allerdings die auf die Masse einwirkende Kraft vom Bewegungszustand ab, so dass eine Differentialgleichung zu lösen ist. Ein klassisches Beispiel ist der Einmassenschwinger.

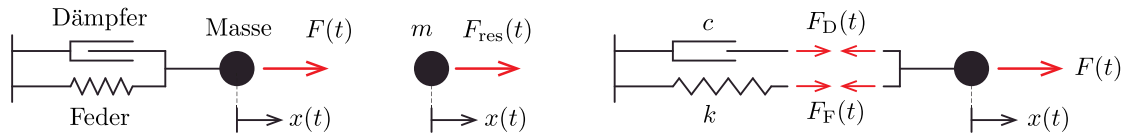
### 4.2.1 Einmassenschwinger

Der Einmassenschwinger ist ein System, das in unterschiedlichsten Zusammenhängen als mechanisches Modell dienen kann, zum Beispiel

- Schwingung von Gebäuden,
- Helmholtz-Resonator in der Akustik,
- Radaufhängung.

## 4 Bewegung von Massepunkten

In der klassischen Modellierung setzt sich der Einmassenschwinger aus drei Bestandteilen zusammen: einem Massepunkt, einer Feder und einem Dämpfer.



**Massepunkt.** Der Massepunkt mit der Masse  $m$  kann sich in horizontaler Richtung reibungslos hin- und herbewegen. Zum Zeitpunkt  $t$  ist er um die Verschiebung  $x(t)$  aus der Ruhelage ausgelenkt. Damit ist  $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die jedem Zeitpunkt eine Auslenkung des Massepunkts zuordnet. Für den Massepunkt gilt das 2. newtonsche Gesetz

$$F_{\text{res}}(t) = m \ddot{x}(t).$$

Es besagt: Die auf den Massepunkt einwirkende resultierende Kraft ist gleich der Masse mal der Beschleunigung.

**Feder.** Die Feder bewirkt bei einer Auslenkung des Massepunkts eine Rückstellkraft, die den Massepunkt zurück in die Ausgangslage zieht beziehungsweise drückt. Vereinfachend nimmt man hierbei an, dass die Kraft proportional zur Auslenkung ist

$$F_F(t) = k x(t),$$

und zwar mit der Federkonstanten  $k$ .

**Dämpfer.** Mit dem Dämpfungselement können wir abbilden, dass Bewegung in Wirklichkeit immer irgendeine Form von Reibung (Luftwiderstand, innere Reibung des Materials, Lagerung etc.) verursacht und dadurch Bewegungsenergie in Wärme umgewandelt wird. Die einfachste Form der Dämpfung ist die viskose Dämpfung, in der die Dämpfungskraft proportional mit der Dämpfungskonstanten  $d$  zur Geschwindigkeit ist:

$$F_D(t) = c \dot{x}(t).$$

Die viskose Dämpfung bildet zum Beispiel in guter Näherung den Stoßdämpfer eines Autos ab, in dem eine Lochscheibe durch ein viskoses Dämpfungöl bewegt wird.



### Bewegungsgleichung

Zusammen mit der äußeren Kraft, der Federkraft sowie der Dämpferkraft und unter Berücksichtigung der positiven Richtung (nach rechts) ist die auf den Massepunkt einwirkende resultierende Kraft

$$F_{\text{res}}(t) = F(t) - F_D(t) - F_F(t).$$

Die resultierende Kraft ist gleich Masse mal Beschleunigung, so dass wir zusammen mit dem Feder- und Dämpfergesetz die Bewegungsgleichung

$$F(t) - c \dot{x}(t) - k x(t) = m \ddot{x}(t)$$

beziehungsweise

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = F(t)$$

erhalten.

Aus mathematischer Sicht handelt es sich um eine lineare Differentialgleichung (die gesuchte Funktion taucht nicht als Argument einer Funktion auf) zweiter Ordnung (es gibt zweite Ableitungen) mit konstanten Koeffizienten (die Vorfaktoren  $m, c$  und  $k$  vor  $\ddot{x}(t), \dot{x}(t)$  und  $x(t)$  hängen nicht von der Zeit ab).

### Anfangsbedingungen

Ziel bei der Berechnung eines Einmassenschwingers ist es vorherzusagen, wie sich die Auslenkung der Masse über die Zeit verändert. In (fast) allen Fällen muss dazu ein Ausgangszustand für einen festgelegten Zeitpunkt definiert werden. In der Regel beginnt man bei  $t = 0$  zu rechnen, so dass wir

$$x(0) = u_0 \quad \text{und} \quad \dot{x}(0) = v_0$$

vorgeben müssen.

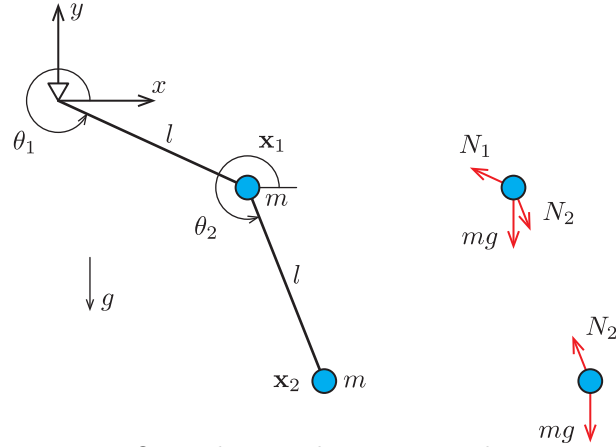
#### 4.2.2 Doppelpendel

Wir betrachten das in Abbildung 4.2 dargestellte Doppelpendel unter Einwirkung der senkrecht nach unten wirkenden Erdbeschleunigung  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . Die beiden Massepunkte der Masse  $m$  sind reibungsfrei mit Stäben der Länge  $l$  verbunden.

Den Ausgangspunkt für die Herleitung der Bewegungsgleichungen für das System bildet die Grundgleichung der Mechanik, aufgeschrieben für die beiden Massepunkte

$$\mathbf{F}_1 = m\ddot{\mathbf{x}}_1 \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_2 = m\ddot{\mathbf{x}}_2.$$

#### 4 Bewegung von Massepunkten



Ortsvektoren der Massepunkte

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}$$

als Funktion der Zeit

Abbildung 4.2: Doppelpendel

Auf die Massen wirken die Stabkräfte  $N_1$  und  $N_2$  sowie die Erdbeschleunigung. In Vektorschreibweise folgen damit für die Kräfte die Beziehungen

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{N_1}{l}\mathbf{x}_1 + \frac{N_2}{l}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) - \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_2 = \frac{N_2}{l}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) - \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix}.$$

Einsetzen der Kräfte liefert in Komponentenschreibweise die vier Gleichungen

$$m\ddot{x}_{11} = -\frac{N_1}{l}x_{11} + \frac{N_2}{l}(x_{21} - x_{11}), \quad (4.1)$$

$$m\ddot{x}_{12} = -\frac{N_1}{l}x_{12} + \frac{N_2}{l}(x_{22} - x_{12}) - mg, \quad (4.2)$$

$$m\ddot{x}_{21} = \frac{N_2}{l}(x_{11} - x_{21}), \quad (4.3)$$

$$m\ddot{x}_{22} = \frac{N_2}{l}(x_{12} - x_{22}) - mg. \quad (4.4)$$

Mithilfe der Gleichungen (4.1) und (4.3) lassen sich die Normalkräfte

$$N_1 = -(\ddot{x}_{11} + \ddot{x}_{21})\frac{ml}{x_{11}} \quad (4.5)$$

$$N_2 = \ddot{x}_{21}\frac{ml}{x_{11} - x_{21}} \quad (4.6)$$

#### 4 Bewegung von Massepunkten

in Abhängigkeit der Komponenten der Ortsvektoren und deren zweiten Zeitableitungen angeben. Wir setzen die Normalkräfte (4.5) und (4.6) in die Gleichungen (4.2) und (4.4) ein, kürzen die Masse  $m$  und erhalten die beiden Gleichungen

$$\ddot{x}_{12} = (\ddot{x}_{11} + \ddot{x}_{21}) \frac{x_{12}}{x_{11}} - \ddot{x}_{21} \frac{x_{12} - x_{22}}{x_{11} - x_{21}} - g \quad (4.7)$$

$$\ddot{x}_{22} = \ddot{x}_{21} \frac{x_{12} - x_{22}}{x_{11} - x_{21}} - g \quad (4.8)$$

mit den vier unbekannten Größen  $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ . Allerdings bewegen sich die Massepunkte nicht völlig frei in der Ebene, vielmehr sind die Bewegungsmöglichkeiten durch die beiden Stäbe und das Auflager eingeschränkt. Mit den Winkeln  $\theta_1$  und  $\theta_2$  gilt für die Koordinaten

$$\begin{aligned} x_{11} &= l \cos \theta_1, \\ x_{12} &= l \sin \theta_1, \\ x_{21} &= l(\cos \theta_1 + \cos \theta_2), \\ x_{22} &= l(\sin \theta_1 + \sin \theta_2). \end{aligned}$$

Die zweiten Zeitableitungen

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{11} &= -l(\ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1) \\ \ddot{x}_{12} &= l(\ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1) \\ \ddot{x}_{21} &= -l(\ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 + \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2) \\ \ddot{x}_{22} &= l(\ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 + \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2) \end{aligned}$$

lassen sich mithilfe der Kettenregel und der Produktregel bestimmen. Setzen wir nun diese kinematischen Beziehungen in die Gleichungen (4.7) und (4.8) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} l(\ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1) &= \\ &= -l(2\ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 + 2\dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 + \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2) \tan \theta_1 \\ &\quad -l(\ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 + \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2)(-\tan \theta_2) - g, \\ l(\ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 + \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2) &= \\ &= -l(\ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 + \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2) \tan \theta_2 - g \end{aligned}$$

beziehungsweise nach einigen Umstellungen

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1(\cos \theta_1 + \sin \theta_1(2 \tan \theta_1 - \tan \theta_2) + \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2(\tan \theta_1 - \tan \theta_2) &= \\ -\dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1(2 \tan \theta_1 + \tan \theta_2) - \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2(\tan \theta_1 + \tan \theta_2) - g/l, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\ddot{\theta}_1(\cos \theta_1 + \sin \theta_1 \tan \theta_2) + \ddot{\theta}_2 / \cos \theta_2 = \dot{\theta}_1^2 (\sin \theta_1 - \cos \theta_1 \tan \theta_2) - g/l. \quad (4.10)$$

#### 4 Bewegung von Massepunkten

Die Gleichungen (4.9) und (4.10) lassen sich nach  $\ddot{\theta}_1$  und  $\ddot{\theta}_2$  auflösen und mit einigen Vereinfachungen ergibt sich schließlich das nichtlineare System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{3g \cos(\theta_1) - g \cos(\theta_1 - 2\theta_2) + 2l \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2)}{l(\cos(2(\theta_1 - \theta_2)) - 3)},$$
$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(-2g \sin(\theta_1) + l\dot{\theta}_2^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + 2l\dot{\theta}_1^2)}{l(\cos(2(\theta_1 - \theta_2)) - 3)}.$$

**Anmerkung zur Herleitung** Die Herleitung der Bewegungsgleichungen von Hand ist mühselig, langwierig und fehleranfällig. Oben wurde versucht, den Gedankengang bei der Herleitung darzulegen, die mathematischen Umformungen erfolgten jedoch in dem Computeralgebra-Programm Mathematica. In Abbildung 4.3 ist zu sehen, dass hierzu nur wenige Schritte notwendig sind.

## 4 Bewegung von Massepunkten

**Bewegungsgleichung Doppelpendel**

```

In[264]:= Quiet[Remove["Global`*"]]

■ Ausgangsgleichungen
In[266]:= eq1 = m x1l1dd == -N1 x11 / l1 + N2 (x21 - x11) / l2;
eq2 = m x12dd == -N1 x12 / l1 + N2 (x22 - x12) / l2 - m g;
eq3 = m x21dd == -N2 (x21 - x11) / l2;
eq4 = m x22dd == -N2 (x22 - x12) / l2 - m g;

■ Nach N1 und N2 auflösen
In[270]:= sol1 = Solve[{eq1, eq3}, {N1, N2}][[1]];

■ Einsetzen
In[271]:= eq7 = eq2 /. sol1;
eq8 = eq4 /. sol1;

■ Ort in Abhängigkeit vom Winkel mit Beschleunigungen (mit zweiten Zeitableitungen)
In[273]:= kin = {
  x11 -> l1 Cos[t1],
  x12 -> l1 Sin[t1],
  x21 -> l1 (Cos[t1] + Cos[t2]),
  x22 -> l1 (Sin[t1] + Sin[t2]),
  x1l1dd -> -l1 (t1dd Sin[t1] + t1d^2 Cos[t1]),
  x1l2dd -> l1 (t1dd Cos[t1] - t1d^2 Sin[t1]),
  x2l1dd -> -l1 (t1dd Sin[t1] + t1d^2 Cos[t1] + t2dd Sin[t2] + t2d^2 Cos[t2]),
  x2l2dd -> l1 (t1dd Cos[t1] - t1d^2 Sin[t1] + t2dd Cos[t2] - t2d^2 Sin[t2])
};

■ Einsetzen
In[274]:= eq9 = eq7 /. kin;
eq10 = eq8 /. kin;

■ Nach  $\ddot{\theta}_1$  und  $\ddot{\theta}_2$  auflösen und vereinfachen
In[287]:= sol = Simplify[Solve[{eq9, eq10}, {t1dd, t2dd}][[1]]];

xdd = {t1dd, t2dd} /. sol
xdd /. {g -> 9.81, l1 -> 1, t1 -> 1, t2 -> 2, t1d -> 3, t2d -> 4}

Out[288]:= {
  
$$\frac{3 g \cos[t_1] - g \cos[t_1 - 2 t_2] + 2 l_1 (t_2 d^2 + t_1 d^2 \cos[t_1 - t_2]) \sin[t_1 - t_2]}{1 (-3 + \cos[2 t_1 - 2 t_2])}, -\frac{2 (2 l_1 t_1 d^2 + l_1 t_2 d^2 \cos[t_1 - t_2] - 2 g \sin[t_1]) \sin[t_1 - t_2]}{1 (-3 + \cos[2 t_1 - 2 t_2])}
}

Out[289]:= {2.78027, -4.99303}$$

```

Abbildung 4.3: Herleitung der Bewegungsgleichung in Mathematica

## 5 Anfangswertprobleme mit mehreren unbekannten Funktionen

Wir betrachten nun den Fall, dass in der Aufgabenstellung mehrere unbekannte Funktionen gesucht werden. Dies ist öfters der Fall als man denken mag, insbesondere, wenn die Aufgabe zunächst eine räumliche Diskretisierung erforderlich macht. Ein Beispiel hierfür ist die Simulation transienter (also über die Zeit veränderlicher) Wärmeleitungsprozesse.

### 5.1 Beispiel: Partikel in einer Strömung

Als anschauliches Einstiegsbeispiel untersuchen wir die Bewegung eines Partikels (zum Beispiel eines Schadstoffpartikels) in einem vorgegebenen Strömungsfeld, Abbildung 5.1 zeigt Anwendungsbeispiele.

Dabei stellt sich zunächst die Frage, wie eine solche Bewegung mathematisch erfasst werden kann. Hierzu gibt es zwei prinzipielle Möglichkeiten:

1. Ein Partikel wird gedanklich markiert und dann der Weg über die Zeit beschrieben. Für einen einzelnen Punkt (wie das Auto in unserem Beispiel) oder einen elastischen Körper (zum Beispiel einer Deckenplatte) macht diese Betrachtungsweise durchaus Sinn, für eine Strömung ist das zu unhandlich. Dieser Ansatz heißt lagrangesche Betrachtungsweise (nach Joseph-Louis Lagrange, 1736 – 1813).
2. Es wird für einen festen Ort beschrieben mit welcher Geschwindigkeit und in welcher Richtung Partikel an dieser Stelle vorbeifließen (das kann sich natürlich über die Zeit ändern). Diese Sicht wird eulersche Betrachtungsweise genannt <sup>1</sup>.

In der eulerschen Sicht beschreiben wir also eine Strömung durch ein Vektorfeld, das jedem Punkt  $\mathbf{x} \in \Omega$  zu jedem Zeitpunkt  $t$  einen Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  zuordnet. Wir beschränken uns dabei auf ebene Strömungsfelder mit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  und gehen davon aus, dass wir das Strömungsfeld kennen (die Simulation von Strömungsprozessen ist eine wesentlich schwierigere Aufgabe).

---

<sup>1</sup>Ein kurioses Detail ist, dass die lagrangesche Betrachtungsweise von Euler und die eulersche Sicht von d’Alambert eingeführt wurde.

## 5 Anfangswertprobleme mit mehreren unbekannten Funktionen

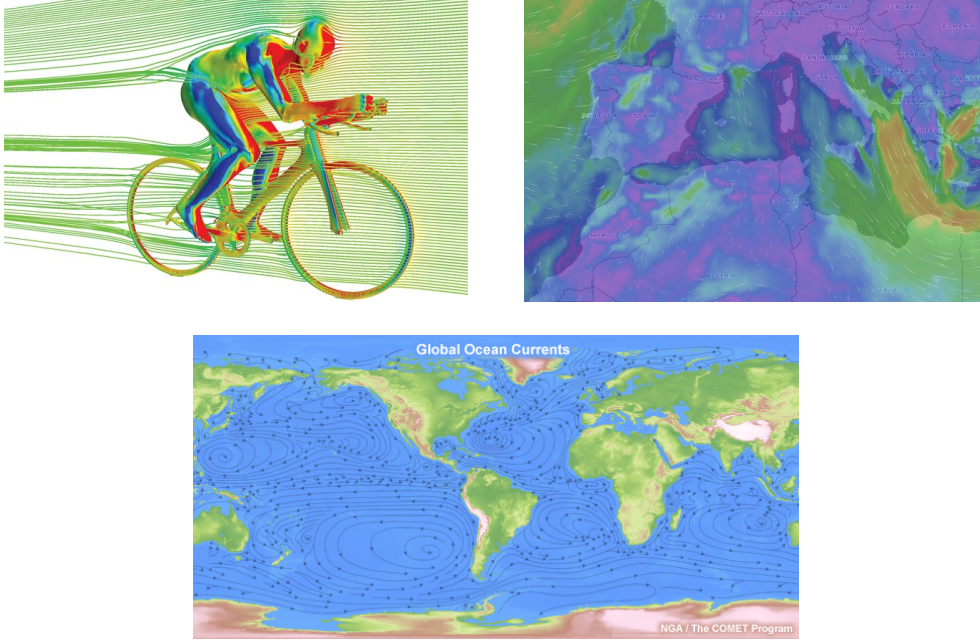


Abbildung 5.1: Möglichkeiten die Bewegung von Partikeln in einem Strömungsfeld zu visualisieren (Quellen: STAR-CCM+, windfinder.com, cmatic.cn)

Als Beispiel betrachten wir ein zweidimensionales Strömungsgeschehen mit dem Strömungsfeld  $\mathbf{v} : ([0, 20] \times [-5, 5]) \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{50 - x_2^2}{50} \begin{pmatrix} 2 + \sin(x_1) \\ \cos(\pi/10 \cdot t) \cdot \sin(x_1) \end{pmatrix},$$

das auf einem Gebiet von 10 m auf 20 m definiert ist. Abbildung 5.2 zeigt das Richtungsfeld der Strömung zu verschiedenen Zeitpunkten.

Wir verfolgen nun näherungsweise den Weg eines Schadstoffpartikels, das sich zum Zeitpunkt

$$t = 0 \quad \text{an der Stelle} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

befindet. Mithilfe der Gleichung des Strömungsfeldes stellen wir fest, dass sich das Partikel zum Zeitpunkt 0 mit der Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}((0, 0)^\top, 0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

fortbewegt. In unserer näherungsweisen Berechnung nehmen wir nun an, dass sich das Schadstoffpartikel im Zeitintervall  $[0, \Delta t]$  konstant mit dem Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}_0$

## 5 Anfangswertprobleme mit mehreren unbekannten Funktionen

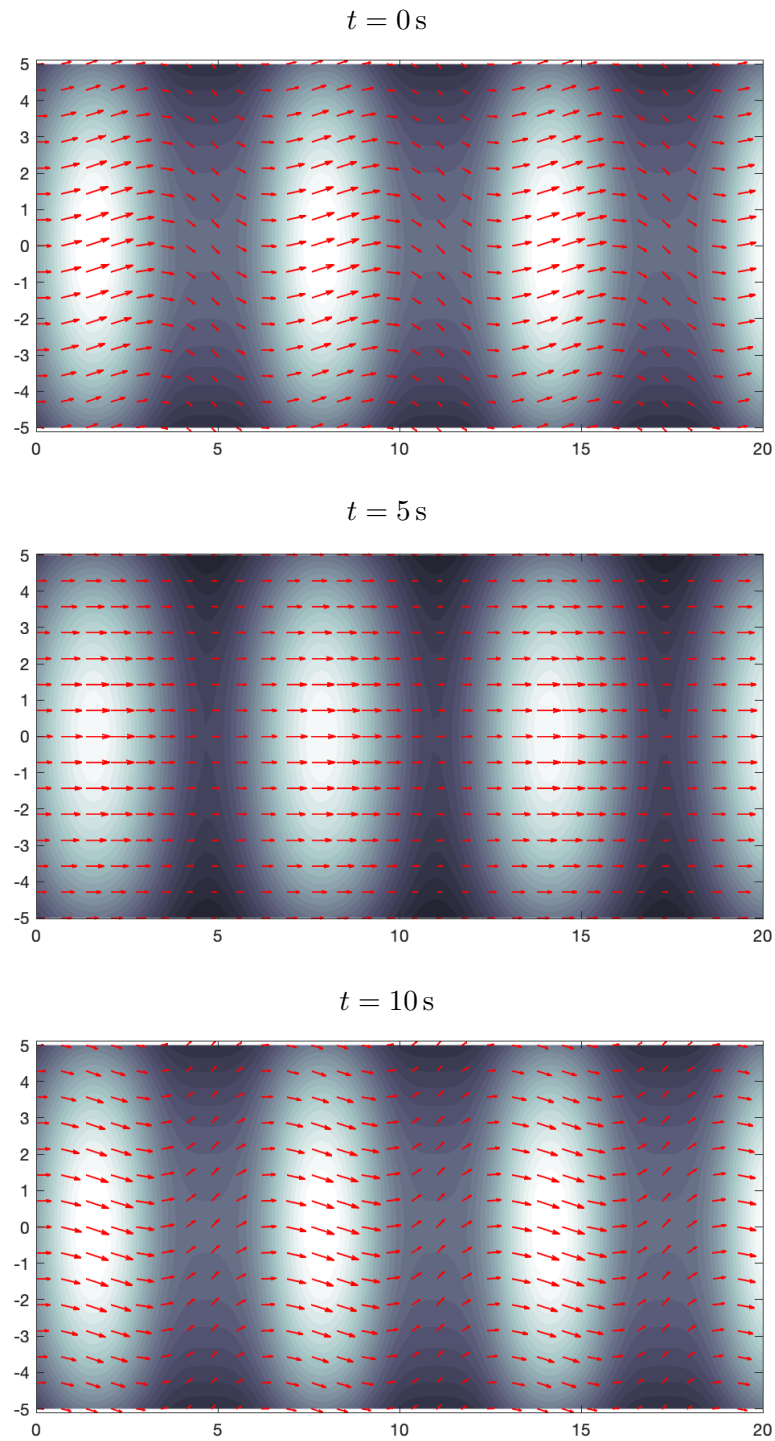


Abbildung 5.2: Strömungsfeld für verschiedene Zeitpunkte. Die Fließgeschwindigkeit ist farblich dargestellt, die Farbe Weiß entspricht dabei einer Geschwindigkeit von 3 m/s



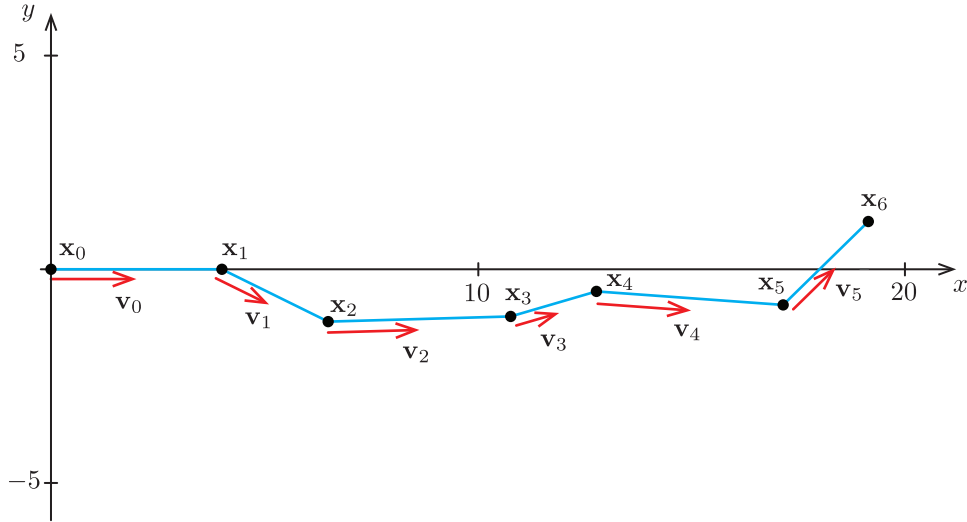


Abbildung 5.3: Näherungsweise Bestimmung des Wegs eines Schadstoffpartikels

bewegt. Dabei ist  $\Delta t$  eine Zeitschrittweite, die wir in diesem Rechenbeispiel auf  $\Delta t = 2$  s festlegen. In den ersten zwei Sekunden legt das Partikel also den Weg

$$\Delta \mathbf{x}_0 = \Delta t \cdot \mathbf{v}_0$$

zurück. Damit erhalten wir die Näherung

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \Delta t \cdot \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für die Position des Schadstoffpartikels zum Zeitpunkt  $t = 2$ . Hierzu lässt sich wieder der Geschwindigkeitsvektor

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}((4, 0)^\top, 2) = \begin{pmatrix} 1.2432 \\ -0.6123 \end{pmatrix}$$

berechnen. Analog zum ersten Schritt erhalten wir damit die Position des Partikels zum Zeitpunkt  $t = 4$  zu

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1.2432 \\ -0.6123 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.4864 \\ -1.2245 \end{pmatrix}.$$

Diese Prozedur setzen wir fort, bis das Schadstoffpartikel unser Berechnungsgebiet verlässt. Die Rechnung können Sie dem Matlab-File auf Moodle entnehmen. Abbildung 5.3 zeigt die einzelnen Schritte in einer graphischen Darstellung.

## 5.2 Systeme von Differentialgleichungen

In unserem Beispiel war die Geschwindigkeit eines Partikels am Ort  $\mathbf{x}$  zum Zeitpunkt  $t$  durch die Gleichung des Strömungsfeldes gegeben. Wir können diesen Zusammenhang in der Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t) = \frac{50 - (x_2(t))^2}{50} \begin{pmatrix} 2 + \sin(x_1(t)) \\ \cos(\pi/10 \cdot t) \cdot \sin(x_1(t)) \end{pmatrix}$$

festhalten und komponentenweise in der Form

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \frac{50 - (x_2(t))^2}{50} \cdot (2 + \sin(x_1(t))) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{50 - (x_2(t))^2}{50} \cdot \cos(\pi/10 \cdot t) \cdot \sin(x_1(t)) \end{aligned}$$

aufschreiben. Gleichzeitig war  $\mathbf{x}(0) = (0, 0)^\top$  vorgegeben. In unserer näherungsweisen Berechnung hatten wir die Vorschrift

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \Delta t \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}_i, t_i)$$

verwendet.

Wir erinnern uns nun nochmal an das Anfangswertproblem

$$y'(x) = F(x, y(x)) \quad \text{und} \quad y(x_0) = y_0$$

und das Euler-Verfahren

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot F(x_i, y_i)$$

aus Kapitel ?? . Der Vergleich beider Aufgabenstellungen und Lösungsverfahren zeigt, dass kein grundlegender Unterschied besteht, wenn man von den unterschiedlichen Bezeichnungen absieht.

Wir verallgemeinern das: Ein Satz von Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} y'_1(x) &= F_1(x, (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))) \\ y'_2(x) &= F_2(x, (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))) \\ &\vdots \\ y'_n(x) &= F_n(x, (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))) \end{aligned}$$

heißt System von Differentialgleichungen erster Ordnung. Gesucht sind also  $n$  Funktionen  $y_1, y_2, \dots, y_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , deren Ableitungen von  $x$  und im Allgemeinen von allen Funktionswerten  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  abhängen<sup>2</sup>. Zusammen mit den Anfangswerten

$$y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0}$$

<sup>2</sup>Wenn die gesuchte Funktion eine zeitabhängige Position beschreibt, dann verwenden wir  $x_i$  statt  $y_i$  und  $t$  statt  $x$ .

## 5 Anfangswertprobleme mit mehreren unbekannten Funktionen

ergibt sich ein Anfangswertproblem erster Ordnung mit  $n$  unbekannten Funktionen.

Eine sehr kompakte Darstellung erhalten wir mit der Vektorschreibweise

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{F}(x, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} F_1(x, \mathbf{y}) \\ F_2(x, \mathbf{y}) \\ \vdots \\ F_n(x, \mathbf{y}) \end{pmatrix}$$

wobei  $\mathbf{y}$  eine Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\mathbf{F}$  eine Abbildung  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist. Dann lautet nämlich das Anfangswertproblem

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{y}(x)) \quad \text{mit} \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0.$$

Abgesehen davon, dass einige Symbole nun fett gedruckt sind hat sich gegenüber dem Anfangswertproblem mit einer unbekannten Funktion nichts geändert.

Damit ist unser Anfangswertproblem des Schadstoffpartikels durch die Angabe von

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = \frac{50 - x_2^2}{50} \begin{pmatrix} 2 + \sin(x_1) \\ \cos(\pi/10 \cdot t) \cdot \sin(x_1) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vollständig definiert. Die Differentialgleichung lautet damit

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t)).$$

In Abbildung 5.4 ist eine Visualisierung des gesamten Strömungsfeldes zu sehen.

Schließlich zeigt uns noch der Vergleich der Rechenvorschriften für das numerische Verfahren, dass wir letztlich bei der näherungsweisen Bestimmung des Wegs des Schadstoffpartikels das Euler-Verfahren verwendet haben.

Rechenvorschrift für das explizite Euler-Verfahren

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \mathbf{F}(x_i, \mathbf{y}_i) \\ \mathbf{y}_{i+1} &= \mathbf{y}_i + h \cdot \mathbf{k} \end{aligned}$$

Der Unterschied besteht also nur darin, dass wir es jetzt mit Vektoren anstatt mit Zahlen zu tun haben. Das Halbschritt- und das Runge-Kutta-Verfahren lassen sich in genau derselben Form aufschreiben und werden daher hier nicht nochmals aufgeführt.

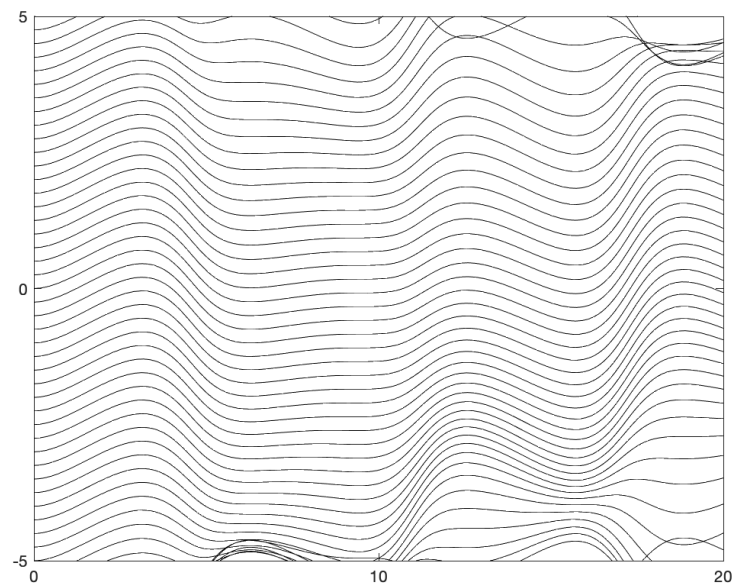


Abbildung 5.4: *Visualisierung des Strömungsfeldes durch den Pfad von Partikeln, die sich zum Zeitpunkt  $t = 0$  auf der  $y$ -Achse befinden.*

## 5.3 Anwendungen

### 5.3.1 Ausbreitung ansteckender Krankheiten mit dem SIR-Modell

TODO

### 5.3.2 Dynamik von Massepunktsystemen

TODO

# Literatur

- [But63] J. C. Butcher. „Coefficients for the study of Runge-Kutta integration processes“. In: *Journal of the Australian Mathematical Society* 3.2 (1963), S. 185–201.
- [Nig07] Andreas Niggel. „Tragwerksanalyse am volumenorientierten Gesamtmodell“. Dissertation. München: Technische Universität München, 2007.
- [Sta73] H. Stachowiak. *Allgemeine Modelltheorie*. Springer, 1973.