

# Présentation MPNA

## Méthode des itérations simultanées

Matthias BEAUPÈRE & Pierre GRANGER

M2 CHPS

19 février 2019

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Présentation de l'algorithme
- 3 Séquentiel
- 4 Multicœurs
- 5 Multinœuds
- 6 Conclusion

# Introduction

## Position du problème

- Calcul de vp de grandes matrices creuses → matrice de Google.
- Seulement quelques vp dominantes.
- Algorithmes robustes.
- Algorithmes adaptés aux architectures massivement parallèles.

## La méthode des itérations simultanées

### Méthode de la puissance

- Extraction de la vp dominante d'une matrice  $A$ .
- Multiplication répétée d'un vecteur initial par  $A$ .
- Convergence en  $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^N$

### Méthode des itérations simultanées

- Espace invariant par  $A$  de dim  $k > 1$ .
- Multiplication répétée du sous-espace par  $A$ .
- Orthonormalisation du sous-espace.

## Données d'entrée

- $M$  : taille du sous-espace de Krylov
- $k$  : nombre de vecteurs propres demandé
- $p$  : précision demandé
- $A$  : matrice de taille  $N \times N$  donnée en entrée
- $N_{iter}$  : nombre d'itérations

## Description de l'algorithme

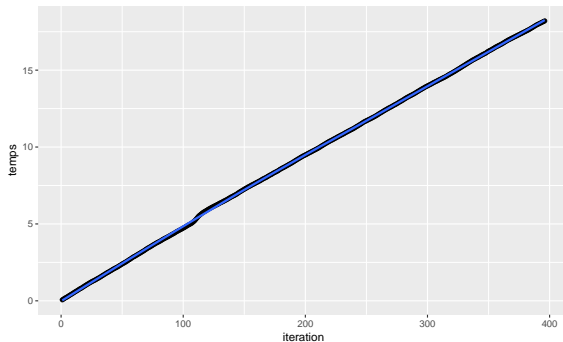
```
 $Q \leftarrow rand()$   
while  $i = 0..N_{iter} - 1$  OU  $\max(\text{precisions}) < p$  do  
     $Z = AQ$   
    Gram-Schmidt  $Q$   
    Projection  $B = Z^tAZ$   
    Décomposition de Schur  $B = Y^tRY$   
    Retour dans l'espace d'origine  $Q = ZY$   
    Calcul de la précision des vecteurs de  $Q$   
    Sélection des  $k$  vecteurs propres  
end while
```

## Performances théoriques

Produit $AQ$	$O(N^2M)$
Gram-Schmidt	$O(NM \log(M))$
Projection	$O(N^2M)$
Décomposition de Schur	$O(1)$
Précision	$O(NM^2)$
Sélection	$O(1)$

$$C^{tot} = O(N_{iter} N^2 M)$$

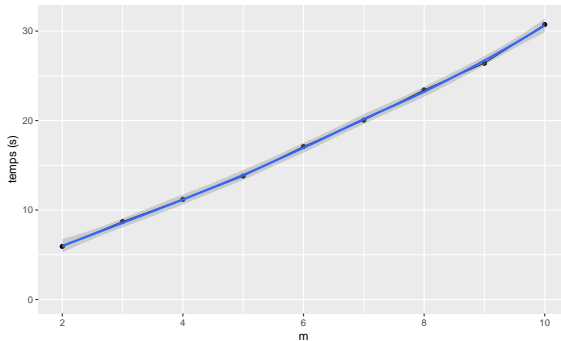
## Nombre d'itérations



Evolution du temps de calcul en fonction du nombre d'itérations.

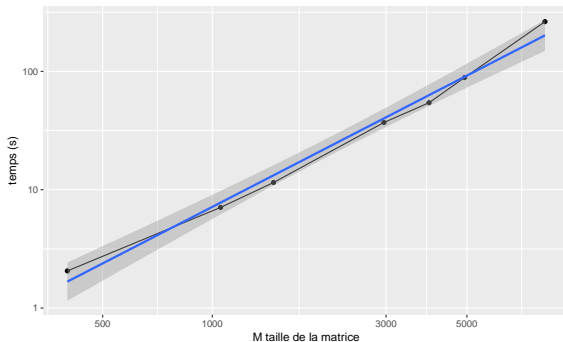


## Taille du sous-espace de Krylov $m$



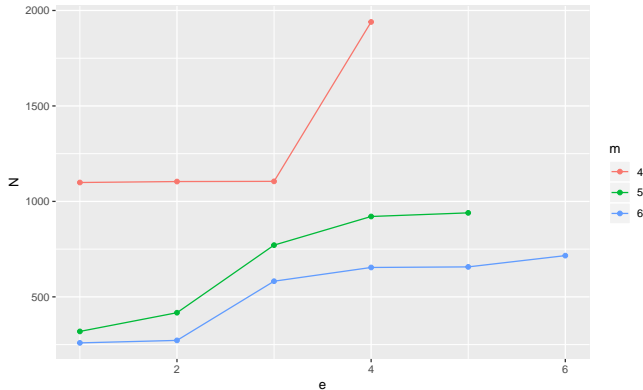
Evolution du temps de calcul en fonction de la taille du sous-espace de Krylov  $m$ .

## Taille de la matrice $M$



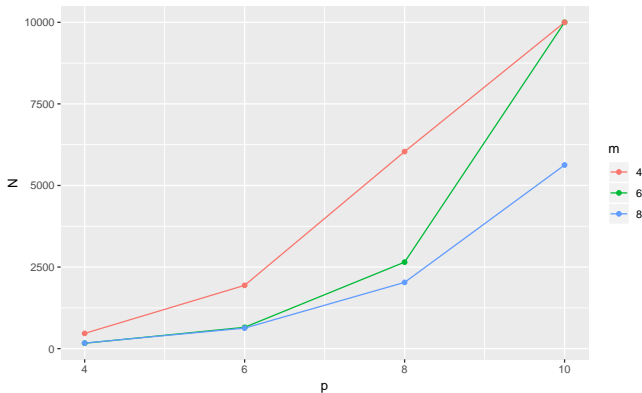
Evolution du temps de calcul en fonction de la taille de la matrice  $M$ .

# Influence de $m$



Nombre d'itérations  $N$  nécessaires pour faire converger  $e$  valeurs propres pour différentes tailles de sous-espace de Krylov  $m$  et une précision  $p = 10^{-6}$

# Influence de $p$



Nombre d'itérations  $N$  nécessaires pour faire converger  $e = 4$  valeurs propres pour différentes tailles de sous-espace de Krylov  $m$  et une précision  $p$

# Principe du locking

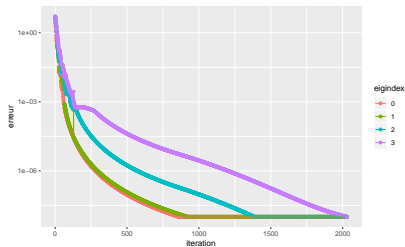
## Justifications

- Vitesses de convergence différentes des vp.
- Perte de temps.
- Instabilités numériques.

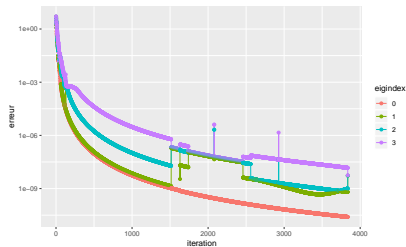
## Le locking

- On verrouille les vp lorsqu'ils ont convergé.
- On ne le multiplie par  $A$ .
- On diminue  $m$ .
- On l'utilise pour l'orthonormalisation.

# Performances du locking



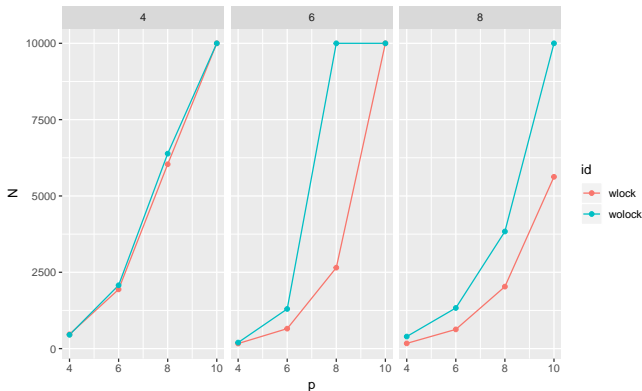
Avec locking



Sans locking

Précision au cours des itérations  $N$  pour  $e = 4$  valeurs propres pour une taille de sous-espace de Krylov  $m = 8$

# Performances du locking



Nombre d'itérations  $N$  nécessaires pour faire converger  $e = 4$  valeurs propres pour différentes tailles de sous-espace de Krylov  $m$  et une précision  $p$  avec et sans utilisation du locking

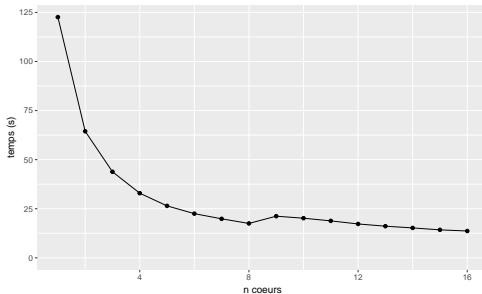
# Multicœurs

## Parallélisation OpenMP

- On parallélise les produits matriciels dans l'espace d'origine
- Pragmas devant les boucles parallélisables
- Pas de pénalité de communication
- Performance :  $C \rightarrow \frac{C}{N_{\text{cores}}}$



# Multicœurs : performances pratiques



Nœud avec 8 cœurs hyperthreadés pour un calcul de 4 valeurs propres avec  $m = 8$  à  $p = 10^{-8}$

Accélération x7 avec 8 cœurs physiques !

# Multinœuds

# Performances théoriques

# Multinœuds : performances pratiques

# Conclusion

## Algorithme

- Complexité pratique proche de la théorie.
- Imporance du choix de  $m$  en fonction des autres paramètres.
- Meilleure convergence et efficacité avec locking.

## Parallélisation

- Très bonne parallélisation intra-nœud.
- Mauvaise scalabilité sur inter-nœud → communications trop coûteuses.
- Méthodes hybrides probablement mieux adaptées à l'inter-nœud.