

Diskrete Mathematik und Logik – Lösung Blatt 1

Aufgabe 1: Modulare Arithmetik

- a) Bestimmen Sie $\text{mod}(41, 13)$.
- b) Bestimmen Sie $\text{mod}(-18, 13)$.
- c) Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl $k > 0$ mit $\text{mod}(4^k, 13) = 1$.
- d) Bestimmen Sie $\text{mod}(4^{111}, 13)$.
- e) Bestimmen Sie $\text{mod}(4^{57} \cdot 17^{113}, 13)$.

Lösung

- a) $\text{mod}(41, 13) = \text{mod}(3 \cdot 13 + 2, 13) = 2$.
- b) $\text{mod}(-18, 13) = \text{mod}(-2 \cdot 13 + 8, 13) = 8$.
- c) Die Lösung ist $k = 6$, denn $4^6 = 4096 = 4095 + 1 = (13 \cdot 315) + 1$.
- d) Das Resultat von $\text{mod}(4^i, 13)$ wiederholt sich nach allen 6 Inkrementen¹ von i . Für $i \in [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$ ergibt $\text{mod}(4^i, 13)$ die Resultate (in entsprechender Reihenfolge) $i \in [4, 3, 12, 9, 10, 1, 4]$. Da 108 ein Vielfaches von 6 ist, gilt also $\text{mod}(4^{108}, 13) = 1$. Mit 3 weiteren Inkrementen folgt $\text{mod}(4^{111}, 13) = 12$.
- e) 3

Aufgabe 2: Induktion

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion über n folgende Aussagen:

- a) $\sum_{k=0}^n (2k+1)^2 = \frac{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}{6}$ für alle natürlichen Zahlen n .
- b) $\sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!} = \frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$ für alle natürlichen Zahlen n .
- c) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$.
- d) Für alle natürlichen Zahlen n ist $n^3 - n$ durch 6 teilbar.
- e) Für alle natürlichen Zahlen n ist $2^{3n} + 13$ durch 7 teilbar.

Lösung

- a) Induktionsanfang ($n = 0$):

$$n = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n=0} (2k+1)^2 = \frac{(2 \cdot 0 + 1)(2 \cdot 0 + 2)(2 \cdot 0 + 3)}{6} = \frac{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}{6} = 1. \quad \checkmark \quad (1)$$

Induktionsschritt ($n-1 \rightarrow n$):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (2k+1)^2 &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^2 \right) + (2n+1)^2 \\ &= \frac{2n \cdot 2(n+1) \cdot 2(n+2)}{6} + \frac{6(2n+1)^2}{6} \\ &= \frac{8n^3 + 24n^2 + 22n + 6}{6} \\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}{6}. \quad \square \end{aligned} \quad (2)$$

¹Wird ggf. an anderer Stelle bewiesen.

b) Induktionsanfang ($n = 0$):

$$n = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n=0} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{0}{1!} = 0 = \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!}. \quad \checkmark \quad (3)$$

Induktionsschritt ($n-1 \rightarrow n$):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!} &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{(k+1)!} \right) + \frac{n}{(n+1)!} \\ &= \frac{n! - 1}{n!} + \frac{n}{(n+1)!} \\ &= \frac{(n! - 1)(n+1) + n}{(n+1)!} \\ &= \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!}. \quad \square \end{aligned} \quad (4)$$

c) Induktionsanfang ($n = 2$):

$$\prod_{k=2}^2 \left(1 - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{n}. \quad \checkmark \quad (5)$$

Induktionsschritt ($n-1 \rightarrow n$):

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k} \right) &= \left(\prod_{k=2}^{n-1} 1 - \frac{1}{k} \right) \left(1 - \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}. \quad \square \end{aligned} \quad (6)$$

d) Induktionsanfang ($n = 0$):

$$\frac{n^3 - n}{6} = \frac{0}{6} = 0 \in \mathbb{N}_0. \quad \checkmark \quad (7)$$

Induktionsschritt ($n-1 \rightarrow n$):

$$\frac{((n-1)+1)^3 - ((n-1)+1)}{6} = \frac{n^3 - n}{6}. \quad \square \quad (8)$$

e) Induktionsanfang ($n = 0$):

$$\frac{2^{3n} + 13}{7} = \frac{2^0 + 13}{7} = \frac{14}{7} = 2 \in \mathbb{N}_0. \quad \checkmark \quad (9)$$

Induktionsschritt ($n-1 \rightarrow n$):

$$\begin{aligned} \frac{2^{3n} + 13}{7} &= \frac{2^3 \cdot 2^{3(n-1)} + 13}{7} \\ &= \frac{(7+1) \cdot 2^{3(n-1)} + 13}{7} \\ &= \underbrace{7 \cdot \frac{2^{3(n-1)}}{7}}_{= 2^{3(n-1)} \in \mathbb{N}_0} + \underbrace{\frac{2^{3(n-1)} + 13}{7}}_{\in \mathbb{N}_0} \in \mathbb{N}_0. \quad \square \end{aligned} \quad (10)$$

Aufgabe 3: Ackermann-Funktion

Die Ackermann-Funktion $A(x, y)$ sei für natürliche Zahlen x, y wie folgt rekursiv definiert:

$$\begin{aligned} A(0, y) &=_{\text{def}} y + 1 \\ A(x, 0) &=_{\text{def}} x \quad \text{falls } x \geq 1 \\ A(x, y) &=_{\text{def}} A(x-1, A(x, y-1)) \quad \text{falls } x \geq 1, y \geq 1 \end{aligned} \quad (11)$$

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion über n , dass für alle natürlichen Zahlen n, y die folgenden Aussagen gelten:

- a) $A(2, n) = n + 2$.
- b) $A(3, n) = 2n + 3$.
- c) $A(4, n) = 7 \cdot 2^n - 3$.
- d) $y < A(n, y)$.
- e) $A(n, y) < A(n+1, y)$.

Hinweis: Benutzen Sie für jede Teilaufgabe die in der vorangegangenen Teilaufgabe bewiesene Aussage. Es gilt $A(1, n) = n + 1$ (siehe Skriptum *Diskrete Mathematik und Logik*).

Lösung

- a) Induktionsanfang ($n = 0$):

$$A(2, n) = A(2, 0) \stackrel{2 \geq 1}{=} 2 = n + 2. \quad \checkmark \quad (12)$$

Induktionsschritt ($n-1 \rightarrow n$):

$$\begin{aligned} A(2, n) &= A(1, \underbrace{A(2, n-1)}_{=(n-1)+2=n+1}) \\ &= A(1, n+1) \\ &= A(0, A(1, n)) \\ &= A(1, n) + 1 \\ &= n + 1 + 1 \\ &= n + 2. \quad \square \end{aligned} \quad (13)$$

- b) Induktionsanfang ($n = 0$):

$$A(3, n) = A(3, 0) = 3 = 3 + 2 \cdot n. \quad \checkmark \quad (14)$$

Induktionsschritt ($n-1 \rightarrow n$):

$$\dots \quad (15)$$

- c) Induktionsanfang ($n = 0$):

$$A(4, 0) = 4 = 7 \cdot 1 - 3 = 7 \cdot 2^0 - 3. \quad \checkmark \quad (16)$$

Induktionsschritt ($n-1 \rightarrow n$):

$$\dots \quad (17)$$

- d) Induktionsanfang ($n = 0$):

$$\begin{aligned} A(n, y) &= A(0, y) = y + 1 > y \\ \Rightarrow y &< A(n, y) \quad \text{für } n = 0. \quad \checkmark \end{aligned} \quad (18)$$

Induktionsschritt ($n-1 \rightarrow n$):

$$\dots \quad (19)$$