Universität Konstanz — Diskrete Mathematik und Logik
Fachbereich Informatik & Informationswissenschaft — WS 2022/23
Prof. Dr. Sven Kosub / Dr. Johannes Blum, Silvan Reiner / Johanna Győrffy, Juliane Wöhrn

2. Übungsblatt

Ausgabe: 04.11.2022 **Abgabe:** 11.11.2022, freiwillig per Upload in ILIAS

Für die Bearbeitung der Aufgaben benötigen Sie folgende Definition:

Zwei Aussagen A und B heißen genau dann *(logisch) äquivalent*, symbolisch $A \equiv B$, wenn für alle Interpretationen I gilt $I(A) = I(B)$.

Hinweis: Die Definition wird noch ausführlich in der Vorlesung besprochen. Konsultieren Sie bitte vorab auch den Abschnitt 2.3 „Rechnen mit logischen Verknüpfungen“ im Skriptum *Diskrete Mathematik und Logik* (ab Version 5.2).

Aufgabe 4: Logische Äquivalenz

(a) Ist „13 ist genau dann eine gerade Zahl, wenn 13 keine Primzahl ist “ eine wahre Aussage?

(b) Gilt $A \to (\mathsf{w} \to A) \equiv A$?

(c) Gilt $A \wedge (B \vee (C \wedge A)) \equiv A \vee (B \wedge C)$?

(d) Gilt $A \wedge (B \oplus C) \equiv (A \oplus B) \wedge (A \oplus C)$?

(e) Gilt $A \oplus (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \oplus (A \wedge C)$?

Aufgabe 5: Rechnen mit aussagenlogischen Formeln

(a) Vereinfachen Sie die Aussage $(\neg A) \to (\neg((A \wedge \neg B) \leftrightarrow C) \oplus \neg(B \vee C))$ mittels einer Wahrheitswerttabelle.

(b) Zeigen Sie ohne Verwendung einer Wahrheitswerttabelle, dass die folgenden Aussagen logisch äquivalent sind:

$$\neg((A \wedge (\neg B)) \wedge C) \wedge D, \qquad ((\neg A) \wedge D) \vee (D \wedge (\neg C)) \vee (B \wedge D)$$

Aufgabe 6: Rechnen mit aussagenlogischen Formeln

Für die aussagenlogischen Variablen $X_0, X_1, X_2, \ldots$ und für alle natürlichen Zahlen $n > 0$ seien folgende aussagenlogische Formeln definiert:

$$H_n =_{\text{def}} \bigwedge_{i=1}^{n} \left(X_i \to \bigvee_{j=0}^{i-1} X_j \right)$$

Beispielsweise sehen die Aussagen H_1, H_2 und H_3 wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
H_1 &= X_1 \to X_0 \\
H_2 &= (X_1 \to X_0) \wedge (X_2 \to (X_0 \vee X_1)) \\
H_3 &= (X_1 \to X_0) \wedge (X_2 \to (X_0 \vee X_1)) \wedge (X_3 \to (X_0 \vee X_1 \vee X_2))
\end{aligned}$$

Vereinfachen Sie die Aussagen H_n zu Aussagen, in denen nur eine Implikation vorkommt, und zeigen Sie mittels vollständiger Induktion über n die Korrektheit Ihrer Vereinfachung.