1. Mathematische Konstruktionen

1.1. Zuweisung

- Zuweisung als Standardform (linke Seite wird durch rechte Seite definiert:

$(x := y)$

$x =_{def} y$: x ist Name (Abk.) für y

- x und y dürfen bel. vertauscht werden

Beispiele:

① $x =_{def} 2$

② $x =_{def} 2n + 1$

③ $f(x) =_{def} x^2$

④ $p \mid q \iff_{def}$ es gibt k mit $q = k \cdot p$

Beachte: „$x = y$" behauptet Gleichheit, d.h. Begr. fällig

1.2 Iteration

- Definitionsform zum Ausdr. v. Wiederholungen in variablen, aber bestimmten Grenzen:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k =_{def} a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$\prod_{k=1}^{n} a_k =_{def} a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$$

Beispiel: $n! =_{def} \prod_{k=1}^{n} k$

- typ. Problem: Finde wertgl. Ausdruck ohne Laufv. k

<u>Beispiel:</u> $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

1.3 Rekursion

- Definitionsform, bei der die definierte Seite auf definierender Seite vorkommen darf:

$$x =_{def} \ldots x \ldots$$

- für Ausschluss unendl. Schachtelungen Festlegung v. Abbruchbedingungen:

<u>Beispiele:</u>

1. $n! =_{def} n \cdot (n-1)!$ für $n \geq 1$; $0! =_{def} 1$

2. $\text{Euklid}(m,n) =_{def} \begin{cases} \text{Euklid}(\text{mod}(n,m), m) & \text{falls } m \nmid n \\ m & \text{falls } m \mid n \end{cases}$

3. $F_n =_{def} F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 2$; $F_1 =_{def} 1$, $F_0 =_{def} 0$

$$\begin{aligned} F_5 &= F_4 + F_3 \\ &= F_3 + F_2 + F_2 + F_1 \\ &= F_2 + F_1 + F_1 + F_0 + F_1 + F_0 + F_1 \\ &= F_1 + F_0 + F_1 + F_1 + F_0 + F_1 + F_0 + F_1 \\ &= 5 \cdot F_1 + 3 \cdot F_0 = 5 \end{aligned}$$

4. Ackermann-Funktion (auf nat. Zahlen x, y):

$$A(0,y) =_{def} y+1$$

$$A(x,0) =_{def} x \qquad \text{für } x \geq 1$$

$$A(x,y) =_{def} A(x-1, A(x,y-1)) \qquad \text{für } x \geq 1,\ y \geq 1$$

- typ. Probleme: Terminierung, Auflösung, Abschätzung bei rek. Def.

Beispiele:

① $\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq n^n$

② $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

③ $A(5,y) \geq \left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}\right\}y\text{-mal}$

$A(5,2) \geq 2^2 = 4$

$A(5,3) \geq 2^{2^2} = 2^4 = 16$

$A(5,4) \geq 2^{2^{2^2}} = 2^{16} = 65.536$

$A(5,5) \geq 2^{2^{2^{2^2}}} = 2^{65.536} \approx 10^{19.660}$

1.4 Strukturelle Induktion

- beim rek. Def. zerlegen; beim ind. Def. zusammensetzen
- typ. f. Konstruktionen v. Mengen
- Form:
  1. (IA) Legen Basiselemente fest
  2. (IS) Legen Operationen zur konstr. neuer Elemente aus bestehenden fest
  3. Nichts sonst ist ein Element dieser Menge.

Beispiele:

① nat. Zahlen:

1. 0 ist eine nat. Zahl

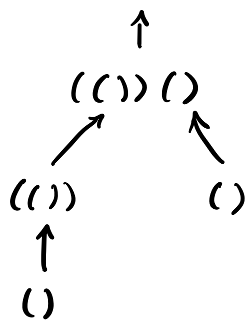
2. Ist n eine nat. Zahl, so ist n+1 eine nat. Zahl

3. Nichts sonst ist eine nat. Zahl

(2) Korrekte Klammerausdrücke

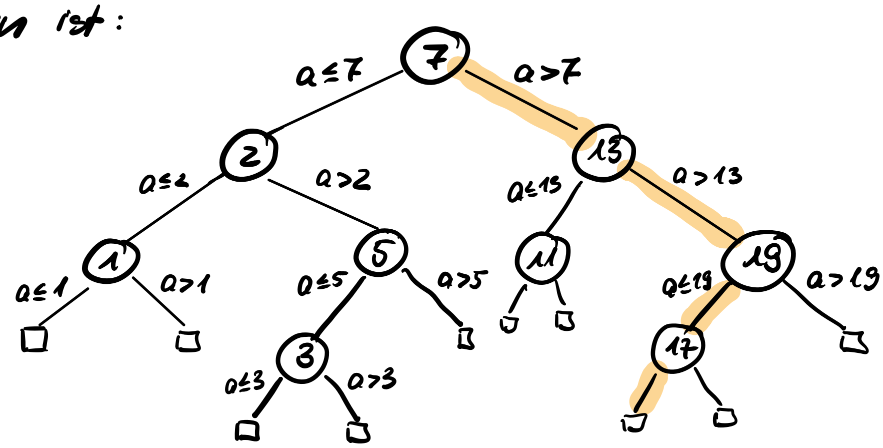
1. () ist korr. KA
2. Sind H_1, H_2 korr. KA, so sind (H_1) und $H_1 H_2$ korr. KA
3. Nicht sonst ist korr. KA

Beispiel: ((())()) korr. ;)(nicht korr.



Fallbeispiel: Suchbäume

- Datenstruktur zur Suche in geordneten Mengen
- wollen wissen, ob in 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 eine Zahl a enthalten ist:



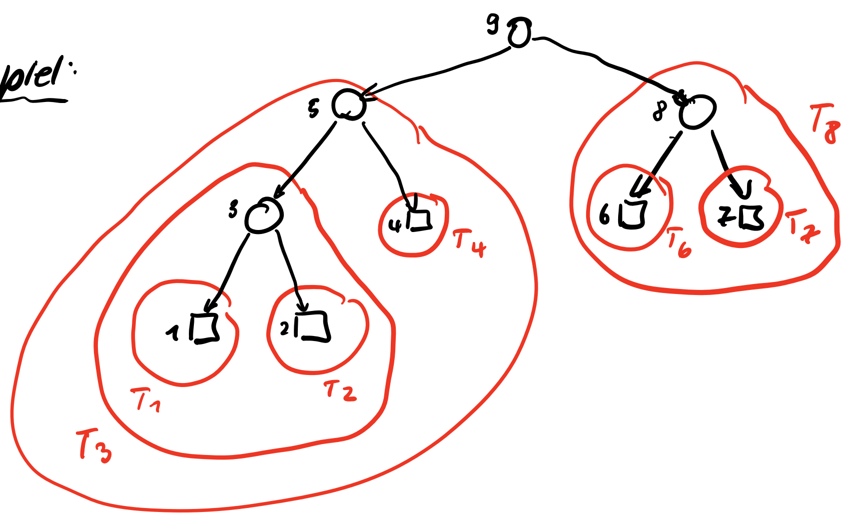
- kombinatorische Struktur: Volle, gewurzelte Binärbäume
- voller, gew. Binärbaum T besteht aus Knoten $(\circ, \square)$ und Verweise $(\rightarrow)$; ein Knoten r ist die Wurzel

  (IA) Für jedes r ist der Knoten r ein Baum, $\square$

  (IS) Sind T_1, T_2 Bäume mit Wurzeln r_1, r_2 und keinen gemeinsamen Knoten, so ist die Kollektion der Knoten und Kanten aus T_1 und T_2 sowie den neuen Kanten $r \rightarrow r_1, r \rightarrow r_2$ für $r \neq r_1, r_2$ ein Baum; r ist die neue Wurzel, $\circ$

  Nichts sonst ist ein voller, gew. Binärbaum

Beispiel:



- Wollen ind. Struktur d. Bäume benutzen, um Sachverhalte zu beweisen
- Knoten ohne ausgehende Kanten heißt **Blatt**, sonst **innerer Knoten**

Proposition.

Für einen vollen, gew. Binärbaum T seien n_T die Anzahl innerer Knoten und m_T die Anzahl der Blätter. Dann gilt stets

$$n_T = m_T - 1$$

Beweis: (Induktion über Aufbau d. Bäume)

(IA) Ist T ein Baum mit einem Knoten r, so gilt $m_T = 1$, $n_T = 0$

(IS) Es sei T ein Baum mit mehr als einem Knoten, Wurzel r. Dann gibt es Bäume T_1, T_2 mit Wurzeln r_1, r_2, aus denen T zusammengesetzt ist.

Insbesondere: Blätter bzw. innere Knoten v. T_1, T_2 sind auch Blätter bzw. innere Knoten v. T. Die Wurzel r ist innerer Knoten v. T.

Es gilt:

$$\begin{aligned} n_T &= n_{T_1} + n_{T_2} + 1 \\ &\overset{(IV)}{=} (m_{T_1} - 1) + (m_{T_2} - 1) + 1 \\ &= (m_{T_1} + m_{T_2}) - 1 \\ &= m_T - 1 \end{aligned}$$

■