

Diskrete Mathematik und Logik

Universität Konstanz, Wintersemester 2022/23

Dozent: Prof. Dr. Sven Kosub

Ausarbeitung: Dr. Matthias Droth

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|-----------------------------------|----------|
| 1 | Mathematische Grundlagen | 5 |
| 1.1 | Zuweisung | 5 |
| 1.2 | Iteration | 5 |
| 1.3 | Rekursion | 6 |
| 1.4 | Strukturierte Induktion | 7 |

Kapitel 1

Mathematische Grundlagen

1.1 Zuweisung

- Zuweisung als Standardform (linke Seite wird durch rechte Seite definiert):

$$x =_{\text{def}} y \quad \text{oder} \quad X := y. \quad (1.1)$$

\Rightarrow „ x “ ist der Name für y .

- x und y dürfen beliebig vertauscht werden.

Beispiele:

1. $x =_{\text{def}} 2$,
2. $x =_{\text{def}} 2n + 1$,
3. $f(x) =_{\text{def}} 2n + 1$,
4. $p|q \Leftrightarrow_{\text{def}} \exists k : q = k \cdot p$ (es gibt ein k mit $q = k \cdot p$).

Beachte: „ $x = y$ “ **behauptet** eine Gleichheit \Rightarrow Beweis nötig!

1.2 Iteration

- Definitionsform zum Ausdrücken von Wiederholungen in Variablen, aber mit bestimmten Grenzen:

$$\sum_{k=1}^n a_k =_{\text{def}} a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, \quad \prod_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n. \quad (1.2)$$

Beispiel: $n! =_{\text{def}} \prod_{k=1}^n k$.

- Typisches Problem: Finde wertgleichen Ausdruck ohne die Laufvariable k .
 Beispiel: $\sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

1.3 Rekursion

- Definitionsform, bei der die definierte Seite auf der definierenden Seite vorkommen darf:
 $x =_{\text{def}} \dots x \dots$
- Um unendliche Schachtelungen auszuschließen werden Abbruchbedingungen festgelegt.
 Ein paar Beispiele:

1. $n! =_{\text{def}} n \cdot (n-1)!$ für $n \geq 1$ und $0! =_{\text{def}} 1$.
2. $\text{Euklid}(m, n) =_{\text{def}} \begin{cases} \text{Euklid}(\text{mod}(n, m), m) & \text{falls } m \nmid n, \\ m & \text{falls } m \mid n. \end{cases}$
3. Fibonacci Reihe: $F_n =_{\text{def}} F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 2$ und mit $F_0 =_{\text{def}} 0$, $F_1 =_{\text{def}} 1$.

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow F_5 &= F_4 + F_3 \\
 &= (F_3 + F_2) + (F_2 + F_1) \\
 &= ((F_2 + F_1) + (F_1 + F_0)) + ((F_1 + F_0) + F_1) \\
 &= (((F_1 + F_0) + F_1) + (F_1 + F_0)) + ((F_1 + F_0) + F_1) \\
 &= 5F_1 + 3F_0 = 5 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 5.
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Merke: Rekursionen werden ausgewertet, indem sie in Iterationen umgewandelt werden.

4. Ackermann Funktion (auf natürlichen Zahlen x, y):

$$\begin{aligned}
 A(0, y) &=_{\text{def}} y + 1, \\
 A(x, 0) &=_{\text{def}} x, \\
 A(x, y) &=_{\text{def}} A(x-1, A(x, y-1)), \quad \text{für } x \geq 1, y \geq 1.
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

5. Typische Probleme: Terminierung, Auflösung (n -te Fibonacci-Zahl) und Abschätzung bei rekursiven Definitionen.

Beispiele:

1. $\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq n^2$

2. Ackermann-Funktion:

$$\begin{aligned}
 A(5, y) &\geq 2^{\overbrace{2^{\dots^2}}^{y\text{-mal}}} \\
 A(5, 2) &\geq 2^2 = 4 \\
 A(5, 3) &\geq 2^{2^2} = 2^4 = 16 \\
 A(5, 4) &\geq 2^{2^{2^2}} = 2^{16} = 65536 \\
 A(5, 5) &\geq 2^{2^{2^{2^2}}} = 2^{65536} \approx 10^{19660}
 \end{aligned}$$

Die Ackermann Funktion ist nicht mit einer for-Schleife berechenbar.

1.4 Strukturierte Induktion

- Beim rekursiven Definieren geht es ums **Zerlegen** und beim induktiven Definieren geht es ums **Zusammensetzen**.
- Typisch für Konstruktionen von Mengen.
- Form:
 1. (IA) Festlegen der Basiselemente.
 2. (IS) Festlegen der Operationen zur Konstruktion neuer Elemente aus bestehenden Elementen.
 3. Nichts sonst ist ein Element dieser Menge.

Beispiele:

1. Natürliche Zahlen:

- 0 ist eine natürliche Zahl.
- Ist n eine natürliche Zahl, so ist $n+1$ auch eine natürliche Zahl.
- Nichts sonst ist eine natürliche Zahl.

2. Korrekte Klammerausdrücke

- (a) $()$ ist ein korrekter Klammerausdruck.
- (b) Sind H_1, H_2 korrekte Klammerausdrücke, so sind (H_1) und H_1H_2 korrekte Klammerausdrücke.
- (c) Nichts sonst ist ein korrekter Klammerausdruck.

Beispiel: „ $\underbrace{((()))}_{(())}()$ “ ist ein korrekter Klammerausdruck, „ $)()$ “ ist kein korrekter Klammerausdruck. Fallbeispiel: Suchbäume

- Datenstruktur zur Suche in geordneten Mengen
- wollen wissen, ob 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 eine Zahl a enthält.
- Die kombinatorische Struktur: volle, gewurzelte Binärbäume.
- voller, gewurzelter Binärbaum T besteht aus Knoten $(0, \square)$ und Verweise (\rightarrow) . Ein Knoten r ist die Wurzel.
 (IA) Für jedes r ist der Knoten r ein Baum, \square
 (IS) Sind T_1, T_2 Bäume mit Wurzeln r_1, r_2 und keinen gemeinsamen Knoten, so ist die Kollektion der Knoten und Kanten aus T_1 und T_2 sowie den neuen Kanten $r \rightarrow r_1, r \rightarrow r_2$ für $r \neq r_1, r_2$ ein Baum; r ist die neue Wurzel.
 Nichts sonst ist ein voller, gewurzelter Binärbaum.
 Beispiel: XXX image2 XXX
- Wollen die induktive Struktur der Bäume benutzen, um Sachverhalte zu beweisen.
- Knoten ohne ausgehende Kante heißt *Blatt*, sonst heißt der Knoten *innerer Knoten*.

Proposition

Für einen vollen, gewurzelten Binärbaum T seien n_T die Anzahl der inneren Knoten und m_T die Anzahl der Blätter. Dann gilt stets $n_T = m_T - 1$.

Beweis (Induktion über Aufbau der Bäume):

(IA) Ist T ein Baum mit einem Knoten τ , so gilt $m_\tau = 1, n_\tau = 0$.

(IS) Es sei T ein Baum mit mehr als einem Knoten, mit Wurzel r . Dann gibt es Bäume T_1, T_2 mit Wurzeln τ_1, τ_2 , aus denen T zusammengesetzt ist.

Insbesondere: Blätter bzw. innere Knoten von τ_1, τ_2 sind auch Blätter bzw. innere Knoten von T . Die Wurzel r ist ein innerer Knoten von T .

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 n_T &= n_{T_1} + n_{T_2} + 1 \\
 &= (m_{T_1} - 1) + (m_{T_2} - 1) + 1 \\
 &= (m_{T_1} + m_{T_2}) - 1 \\
 &= m_T - 1.
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Literaturverzeichnis

- [1] G. Baym, *Lectures on Quantum Mechanics* (Addison Wesley, 1993).
- [2] F. Schwabl, *Quantenmechanik und Quantenmechanik für Fortgeschrittene* (Springer, 2007 und 2005).
- [3] W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik*, Bände 4, 5/2 und 7 (Springer, 2005, 2006 und 2005).
- [4] A. Messiah, *Quantenmechanik 2* (de Gruyter, 1990).
- [5] H. Bruus and K. Flensberg, *Many-Body Quantum Theory in Condensed Matter Physics: An Introduction* (Oxford, 2004).