Diskrete Mathematik und Logik – Lösung Blatt 1

`https://tinyurl.com/2bx3rm4v`

Aufgabe 1: Modulare Arithmetik

a) Bestimmen Sie mod(41, 13).

b) Bestimmen Sie mod(−18, 13).

c) Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl $k > 0$ mit $\operatorname{mod}(4^k, 13) = 1$.

d) Bestimmen Sie $\operatorname{mod}(4^{111}, 13)$.

e) Bestimmen Sie $\operatorname{mod}(4^{57} \cdot 17^{113}, 13)$.

Lösung

a) $\operatorname{mod}(41, 13) = \operatorname{mod}(3 \cdot 13 + 2, 13) = 2$.

b) $\operatorname{mod}(-18, 13) = \operatorname{mod}(-2 \cdot 13 + 8, 13) = 8$.

c) Die Lösung ist $k = 6$, denn $4^6 = 4096 = 4095 + 1 = (13 \cdot 315) + 1$.

d) Das Resultat von $\operatorname{mod}(4^i, 13)$ wiederholt sich nach allen 6 Inkrementen[1] von i. Für $i \in [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$ ergibt $\operatorname{mod}(4^i, 13)$ die Resultate (in entsprechender Reihenfolge) $i \in [4, 3, 12, 9, 10, 1, 4]$. Da 108 ein Vielfaches von 6 ist, gilt also $\operatorname{mod}(4^{108}, 13) = 1$. Mit 3 weiteren Inkrementen folgt $\operatorname{mod}(4^{111}, 13) = 12$.

e) 3

Aufgabe 2: Induktion

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion über n folgende Aussagen:

a) $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^2 = \frac{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}{6}$ für alle natürlichen Zahlen n.

b) $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$ für alle natürlichen Zahlen n.

c) $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$.

d) Für alle natürlichen Zahlen n ist $n^3 - n$ durch 6 teilbar.

e) Für alle natürlichen Zahlen n ist $2^{3n} + 13$ durch 7 teilbar.

Lösung

a) Induktionsanfang ($n = 0$):

$$n = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n=0}(2k+1)^2 = \frac{(2\cdot 0+1)(2\cdot 0+2)(2\cdot 0+3)}{6} = \frac{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}{6} = 1\,. \quad \checkmark \tag{1}$$

Induktionsschritt ($n-1 \to n$):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}(2k+1)^2 &= \left(\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)^2\right) + (2n+1)^2 \\ &= \frac{2n \cdot 2(n+1) \cdot 2(n+2)}{6} + \frac{6(2n+1)^2}{6} \\ &= \frac{8n^3 + 24n^2 + 22n + 6}{6} \\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}{6}\,. \quad \square \end{aligned} \tag{2}$$

[1] Wird ggf. an anderer Stelle bewiesen.

b) Induktionsanfang ($n = 0$):

$$n = 0 \quad \Rightarrow \sum_{k=0}^{n=0} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{0}{1!} = 0 = \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!} . \quad \checkmark \tag{3}$$

Induktionsschritt ($n-1 \to n$):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{(k+1)!} \right) + \frac{n}{(n+1)!} \\ &= \frac{n! - 1}{n!} + \frac{n}{(n+1)!} \\ &= \frac{(n! - 1)(n+1) + n}{(n+1)!} \\ &= \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!} . \qquad \square \end{aligned} \tag{4}$$

c) Induktionsanfang ($n = 2$):

$$\prod_{k=2}^{2} \left(1 - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{n} . \quad \checkmark \tag{5}$$

Induktionsschritt ($n-1 \to n$):

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k} \right) &= \left(\prod_{k=2}^{n-1} 1 - \frac{1}{k} \right) \left(1 - \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} . \qquad \square \end{aligned} \tag{6}$$

d) Induktionsanfang ($n = 0$):

$$\frac{n^3 - n}{6} = \frac{0}{6} = 0 \in \mathbb{N}_0 . \quad \checkmark \tag{7}$$

Induktionsschritt ($n-1 \to n$):

$$\frac{((n-1)+1)^3 - ((n-1)+1)}{6} = \frac{n^3 - n}{6} . \qquad \square \tag{8}$$

e) Induktionsanfang ($n = 0$):

$$\frac{2^{3n} + 13}{7} = \frac{2^0 + 13}{7} = \frac{14}{7} = 2 \in \mathbb{N}_0 . \quad \checkmark \tag{9}$$

Induktionsschritt ($n-1 \to n$):

$$\frac{2^{3n} + 13}{7} = \frac{2^{3(n-1)+3} + 13}{7} = \frac{8 \cdot 2^{3n-1} + 13}{7} = \ldots ? \tag{10}$$

Aufgabe 3: Ackermann-Funktion

Die Ackermann-Funktion $A(x, y)$ sei für natürliche Zahlen x, y wie folgt rekursiv definiert:

$$\begin{aligned} A(0, y) &=_{\text{def}} y + 1 \\ A(x, 0) &=_{\text{def}} x \quad \text{falls } x \geq 1 \\ A(x, y) &=_{\text{def}} A(x-1, A(x, y-1)) \quad \text{falls } x \geq 1, y \geq 1 \end{aligned} \tag{11}$$

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion über n, dass für alle natürlichen Zahlen n, y die folgenden Aussagen gelten:

a) $A(2,\, n) = n + 2$.

b) $A(3,\, n) = 2n + 3$.

c) $A(4,\, n) = 7 \cdot 2^n - 3$.

d) $y < A(n,\, y)$.

e) $A(n,\, y) < A(n+1,\, y)$.

Hinweis: Benutzen Sie für jede Teilaufgabe die in der vorangegangenen Teilaufgabe bewiesene Aussage. Es gilt $A(1,\, n) = n + 1$ (siehe Skriptum *Diskrete Mathematik und Logik*).

Lösung

With $L_x^2 + L_y^2 = L^2 - L_z^2$, the crystal field operator reads

$$\mathcal{H} = (a - b)L_z^2 + b\, L^2\,.$$

Its eigenfunctions