Universität Konstanz
Fachbereich Informatik & Informationswissenschaft
Prof. Dr. Sven Kosub / Dr. Johannes Blum, Silvan Reiner / Johanna Győrffy, Juliane Wöhrn

Diskrete Mathematik und Logik
WS 2022/23

1. Übungsblatt
(Musterlösung)

Ausgabe: 28.10.2021 **Abgabe:** 04.11.2021, freiwillig per Upload in ILIAS

Für einen Teil der Aufgaben benötigen Sie folgende Definitionen und Regeln.

Für ganze Zahlen n und natürliche Zahlen $m > 0$ und $0 \leq r < m$ sagen wir, dass m *die Zahl n mit Rest r teilt*, falls es eine ganze Zahl t gibt mit $n = t \cdot m + r$. Wir führen dafür die zweistellige Modulo-Funktion mod ein:

$$\mathrm{mod}(n, m) =_{\mathrm{def}} r.$$

Es gilt z.B. $\mathrm{mod}(25, 9) = 7$ und $\mathrm{mod}(-25, 9) = 2$.

Für die Modulo-Funktion und beliebige ganze Zahlen a, b und eine beliebige natürliche Zahl m gelten folgende Regeln:

$$\begin{aligned} \mathrm{mod}(a + b, m) &= \mathrm{mod}(\mathrm{mod}(a, m) + \mathrm{mod}(b, m), m) \\ \mathrm{mod}(a \cdot b, m) &= \mathrm{mod}(\mathrm{mod}(a, m) \cdot \mathrm{mod}(b, m), m) \end{aligned}$$

Hinweis: Konsultieren Sie das Kapitel *Arithmetik* im Skriptum *Kompaktkurs Mathematik*.

Aufgabe 1: Modulare Arithmetik

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{mod}(41, 13)$.
(b) Bestimmen Sie $\mathrm{mod}(-18, 13)$.
(c) Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl $k > 0$ mit $\mathrm{mod}(4^k, 13) = 1$.
(d) Bestimmen Sie $\mathrm{mod}(4^{111}, 13)$.
(e) Bestimmen Sie $\mathrm{mod}(4^{57} \cdot 17^{113}, 13)$.

Lösung:

(a) $\mathrm{mod}(41, 13) = 2$, denn $41 = 3 \cdot 13 + 2$
(b) $\mathrm{mod}(-18, 13) = 8$, denn $-18 = (-2) \cdot 13 + 8$

(c) Es gilt $k = 6$, denn:

$$\begin{aligned}
\mathrm{mod}(4^1, 13) &= \mathrm{mod}(4, 13) = 4 \\
\mathrm{mod}(4^2, 13) &= \mathrm{mod}(4 \cdot 4^1, 13) = \mathrm{mod}(16, 13) = 3 \\
\mathrm{mod}(4^3, 13) &= \mathrm{mod}(4 \cdot 4^2, 13) = \mathrm{mod}(4 \cdot 3, 13) = \mathrm{mod}(12, 13) = 12 \\
\mathrm{mod}(4^4, 13) &= \mathrm{mod}(4 \cdot 4^3, 13) = \mathrm{mod}(4 \cdot 12, 13) = \mathrm{mod}(48, 13) = 9 \\
\mathrm{mod}(4^5, 13) &= \mathrm{mod}(4 \cdot 4^4, 13) = \mathrm{mod}(4 \cdot 9, 13) = \mathrm{mod}(36, 13) = 10 \\
\mathrm{mod}(4^6, 13) &= \mathrm{mod}(4 \cdot 4^5, 13) = \mathrm{mod}(4 \cdot 10, 13) = \mathrm{mod}(40, 13) = 1
\end{aligned}$$

(d) Es gilt $\mathrm{mod}(4^{111}, 13) = 12$, denn:

$$\begin{aligned}
\mathrm{mod}\left(4^{111}, 13\right) &= \mathrm{mod}\left(4^{6 \cdot 18 + 3}, 13\right) \\
&= \mathrm{mod}\left(\mathrm{mod}(4^6, 13)^{18} \cdot \mathrm{mod}(4^3, 13), 13\right) \\
&= \mathrm{mod}(1^{18} \cdot 12, 13) \\
&= 12
\end{aligned}$$

(e) Es gilt $\mathrm{mod}(4^{57} \cdot 17^{113}, 13) =$, denn:

$$\begin{aligned}
\mathrm{mod}\left(4^{57} \cdot 17^{113}, 13\right) &= \mathrm{mod}\left(4^{57} \cdot 4^{113}, 13\right) \\
&= \mathrm{mod}\left(4^{170}, 13\right) \\
&= \mathrm{mod}\left(4^{6 \cdot 28 + 2}, 13\right) \\
&= \mathrm{mod}\left(\mathrm{mod}(4^6, 13)^{28} \cdot \mathrm{mod}(4^2, 13), 13\right) \\
&= \mathrm{mod}\left(1^{28} \cdot 3, 13\right) \\
&= 3
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Induktion

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion über n folgende Aussagen:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2 = \frac{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}{6}$ für alle natürlichen Zahlen n.

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!}$ für alle natürlichen Zahlen n.

(c) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$.

(d) Für alle natürlichen Zahlen n ist $n^3 - n$ durch 6 teilbar.

(e) Für alle natürlichen Zahlen n ist $2^{3n} + 13$ durch 7 teilbar.

Lösung:

(a) Wir zeigen mittels vollständiger Induktion: $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^2 = \frac{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}{6}$ für alle n.

- *Induktionsanfang* $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^{0}(2k+1)^2 = (2\cdot 0+1)^2 = 1 = \frac{(2\cdot 0+1)(2\cdot 0+2)(2\cdot 0+3)}{6}$$

- *Induktionsschritt* $n > 0$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^2 &= (2n+1)^2 + \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)^2 \\
&= (2n+1)^2 + \frac{(2n-1)\cdot 2n\cdot(2n+1)}{6} \\
&\qquad\qquad \text{(nach Induktionsvoraussetzung für } n-1\text{)} \\
&= \frac{(2n+1)\Big(6(2n+1)+(2n-1)\cdot 2n\Big)}{6} \\
&= \frac{(2n+1)(4n^2+10n+6)}{6} \\
&= \frac{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}{6}
\end{aligned}$$

(b) Wir zeigen mittels vollständiger Induktion: $\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{(k+1)!} = \frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$ für alle n.

- *Induktionsanfang* $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^{0}\frac{k}{(k+1)!} = \frac{0}{(0+1)!} = 0 = \frac{(0+1)!-1}{(0+1)!}$$

- *Induktionsschritt* $n > 0$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{(k+1)!} &= \frac{n}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{(k+1)!} \\
&= \frac{n}{(n+1)!} + \frac{n!-1}{n!} \qquad \text{(nach Induktionsvoraussetzung für } n-1\text{)} \\
&= \frac{n}{(n+1)!} + \frac{(n+1)(n!-1)}{(n+1)\cdot n!} \\
&= \frac{n+(n+1)!-(n+1)}{(n+1)!} \\
&= \frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

(c) Wir zeigen mittels vollständiger Induktion: $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{n}$ für alle $n \geq 2$.

- *Induktionsanfang* $n = 2$:

$$\prod_{k=2}^{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

- *Induktionsschritt* $n > 2$:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) &= \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\prod_{k=2}^{n-1}\left(1-\frac{1}{k}\right) \\
&= \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n-1} \qquad \text{(nach Induktionsvoraussetzung für } n-1\text{)} \\
&= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1} \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Alternativ ohne Induktion:

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$$

(d) Wir zeigen mittels vollständiger Induktion: Für alle n ist n^3-n durch 6 teilbar.

- *Induktionsanfang* $n = 0$: Es gilt $\mathrm{mod}(0^3-0,6)=0$.
- *Induktionsschritt* $n > 0$: Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{mod}(n^3-n,6) &= \mathrm{mod}((n-1+1)^3-(n-1+1),6) \\
&= \mathrm{mod}((n-1)^3+3(n-1)^2+3(n-1)+1-(n-1)-1,6) \\
&= \mathrm{mod}((n-1)^3-(n-1)+3n(n-1),6) \\
&= \mathrm{mod}(\mathrm{mod}\big((n-1)^3-(n-1),6)+\mathrm{mod}(3n(n-1),6),6) \\
&= \mathrm{mod}(0+\mathrm{mod}\big(3n(n-1),6),6) \\
&\qquad \text{(nach Induktionsvoraussetzung für } n-1\text{)} \\
&= \mathrm{mod}(3\cdot 2k,6) \qquad \text{(für geeignetes } k\text{, da } n \text{ oder } n-1 \text{ gerade)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

(e) Wir zeigen mittels vollständiger Induktion: Für alle n ist $2^{3n}+13$ durch 7 teilbar.

- *Induktionsanfang* $n = 0$: Es gilt $\mathrm{mod}(2^{3\cdot 0}+13,7)=\mathrm{mod}(14,7)=0$.
- *Induktionsschritt* $n > 0$: Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{mod}(2^{3n}+13,7) &= \mathrm{mod}(2^{3(n-1)+3}+13,7) \\
&= \mathrm{mod}(\mathrm{mod}(8,7)\cdot\mathrm{mod}(2^{3(n-1)},7)+\mathrm{mod}(13,7),7) \\
&= \mathrm{mod}(2^{3(n-1)}+13,7) \\
&= 0 \qquad \text{(nach Induktionsvoraussetzung für } n-1\text{)}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Ackermann-Funktion

Die Ackermann-Funktion $A(x, y)$ sei für natürlichen Zahlen x, y wie folgt rekursiv definiert:

$$\begin{array}{lcll} A(0, y) & =_{\text{def}} & y + 1 & \\ A(x, 0) & =_{\text{def}} & x & \text{falls } x \geq 1 \\ A(x, y) & =_{\text{def}} & A(x - 1, A(x, y - 1)) & \text{falls } x \geq 1, y \geq 1 \end{array}$$

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion über n, dass für alle natürlichen Zahlen n, y die folgenden Aussagen gelten:

(a) $A(2, n) = n + 2$

(b) $A(3, n) = 2n + 3$

(c) $A(4, n) = 7 \cdot 2^n - 3$

(d) $y < A(n, y)$

(e) $A(n, y) \leq A(n + 1, y)$

Hinweis: Benutzen Sie für jede Teilaufgabe die in der vorangegangenen Teilaufgabe bewiesene Aussage. Es gilt $A(1, n) = n + 1$ (siehe Skriptum *Diskrete Mathematik und Logik*).

Lösung:

(a) Wir zeigen mittels vollständiger Induktion: $A(2, n) = n + 2$ für alle n.

- *Induktionsanfang* $n = 0$: $A(2, 0) = 2 = 0 + 2$.
- *Induktionsschritt* $n > 0$: Wegen $n = (n - 1) + 1$ erhalten wir

$$\begin{array}{lcll} A(2, n) & = & A(1, A(2, n - 1)) & \\ & = & A(1, (n - 1) + 2) & \text{(nach Induktionsvoraussetzung für } n - 1) \\ & = & A(1, n + 1) & \\ & = & n + 2 & \end{array}$$

(b) Wir zeigen mittels vollständiger Induktion: $A(3, n) = 2n + 3$ für alle n.

- *Induktionsanfang* $n = 0$: $A(3, 0) = 3 = 2 \cdot 0 + 3$.
- *Induktionsschritt* $n > 0$: Wegen $n = (n - 1) + 1$ erhalten wir

$$\begin{array}{lcll} A(3, n) & = & A(2, A(3, n - 1)) & \\ & = & A(2, 2(n - 1) + 3) & \text{(nach Induktionsvoraussetzung für } n - 1) \\ & = & A(2, 2n + 1) & \\ & = & 2n + 3 & \text{(nach Teilaufgabe (a))} \end{array}$$

(c) Wir zeigen mittels vollständiger Induktion: $A(4, n) = 7 \cdot 2^n - 3$ für alle n.

- *Induktionsanfang* $n = 0$: $A(4, 0) = 4 = 7 \cdot 2^0 - 3$.

- *Induktionsschritt* $n > 0$: Wegen $n = (n-1)+1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
A(4,n) &= A(3, A(4, n-1)) \\
&= A(3, 7 \cdot 2^{n-1} - 3) && \text{(nach Induktionsvoraussetzung für } n-1) \\
&= 2 \cdot (7 \cdot 2^{n-1} - 3) + 3 && \text{(nach Teilaufgabe (b))} \\
&= 7 \cdot 2^1 \cdot 2^{n-1} - 6 + 3 \\
&= 7 \cdot 2^n - 3
\end{aligned}$$

(d) Wir zeigen mittels vollständiger Induktion über n: $y < A(n,y)$ für alle n, y.

- *Induktionsanfang* $n = 0$: Für alle y gilt $y < y+1 = A(0,y)$.
- *Induktionsschritt* $n > 0$: Es gilt $n = (n-1)+1$. Wir verwenden vollständige Induktion von $y-1$ nach y (für festes n):
  - *Induktionsanfang* $y = 0$: Es gilt $0 < n = A(n,0)$.
  - *Induktionsschritt* $y > 0$: Wegen $y = (y-1)+1$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
A(n,y) &= A(n-1, A(n, y-1)) \\
&> A(n, y-1) && \text{(nach Induktionsvoraussetzung für } n-1) \\
&> y-1 && \text{(nach Induktionsvoraussetzung für } y-1)
\end{aligned}$$

Mithin gilt $A(n,y) > A(n,y-1) \geq (y-1)+1 = y$.

(e) Wir zeigen mittels vollständiger Induktion über n: $A(n,y) \leq A(n+1,y)$ für alle n, y.

- *Induktionsanfang* $n = 0$: Für alle y gilt $A(0,y) = y+1 \leq y+1 = A(1,y)$.
- *Induktionsschritt* $n > 0$: Es gilt $n = (n-1)+1$. Aus Teilaufgabe (d) folgt $A(n,y) < A(n-1, A(n,y)) = A(n, y+1)$ für alle $n > 0$ und y; mithin gilt

$$A(n,x) \leq A(n,y) \quad \text{für alle } n \text{ und alle } x \leq y \tag{*}$$

($A(0,x) \leq A(0,y)$ gilt sowieso für alle $x \leq y$.) Die Induktionsvoraussetzung für $n-1$ lautet: Für alle y gilt $A(n-1,y) \leq A(n,y)$. Um die Aussage für n zu zeigen, verwenden wir vollständige Induktion von $y-1$ nach y (für festes n):

  - *Induktionsanfang* $y = 0$: Es gilt $A(n,0) = n \leq n+1 = A(n+1,0)$.
  - *Induktionsschritt* $y > 0$: Es gilt $y = (y-1)+1$. Damit lautet die Induktionsvoraussetzung für $y-1$: $A(n,y-1) \leq A(n+1,y-1)$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
A(n,y) &= A(n-1, A(n, y-1)) \\
&\leq A(n-1, A(n+1, y-1)) \\
& \qquad \text{(nach Induktionsvoraussetzung für } y-1 \text{ und (*))} \\
&\leq A(n, A(n+1, y-1)) \\
& \qquad \text{(nach Induktionsvoraussetzung für } n-1) \\
&= A(n+1, y)
\end{aligned}$$