Universität Konstanz
Fachbereich Informatik & Informationswissenschaft
Prof. Dr. Sven Kosub / Dr. Johannes Blum, Silvan Reiner / Johanna Győrffy, Juliane Wöhrn

Diskrete Mathematik und Logik
WS 2022/23

1. Übungsblatt

Ausgabe: 28.10.2022 **Abgabe:** 04.11.2022, freiwillig per Upload in ILIAS

Für einen Teil der Aufgaben benötigen Sie folgende Definitionen und Regeln.

Für ganze Zahlen n und natürliche Zahlen $m > 0$ und $0 \leq r < m$ sagen wir, dass m *die Zahl n mit Rest r teilt*, falls es eine ganze Zahl t gibt mit $n = t \cdot m + r$. Wir führen dafür die zweistellige Modulo-Funktion mod ein:

$$\mathrm{mod}(n, m) =_{\mathrm{def}} r.$$

Es gilt z.B. $\mathrm{mod}(25, 9) = 7$ und $\mathrm{mod}(-25, 9) = 2$.

Für die Modulo-Funktion und beliebige ganze Zahlen a, b und eine beliebige natürliche Zahl m gelten folgende Regeln:

$$\begin{aligned} \mathrm{mod}(a + b, m) &= \mathrm{mod}(\mathrm{mod}(a, m) + \mathrm{mod}(b, m), m) \\ \mathrm{mod}(a \cdot b, m) &= \mathrm{mod}(\mathrm{mod}(a, m) \cdot \mathrm{mod}(b, m), m) \end{aligned}$$

Hinweis: Konsultieren Sie das Kapitel *Arithmetik* im Skriptum *Kompaktkurs Mathematik.*

Aufgabe 1: Modulare Arithmetik

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{mod}(41, 13)$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{mod}(-18, 13)$.

(c) Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl $k > 0$ mit $\mathrm{mod}(4^k, 13) = 1$.

(d) Bestimmen Sie $\mathrm{mod}(4^{111}, 13)$.

(e) Bestimmen Sie $\mathrm{mod}(4^{57} \cdot 17^{113}, 13)$.

Aufgabe 2: Induktion

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion über n folgende Aussagen:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2 = \frac{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}{6}$ für alle natürlichen Zahlen n.

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!}$ für alle natürlichen Zahlen n.

(c) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$.

(d) Für alle natürlichen Zahlen n ist $n^3 - n$ durch 6 teilbar.

(e) Für alle natürlichen Zahlen n ist $2^{3n} + 13$ durch 7 teilbar.

Aufgabe 3: Ackermann-Funktion

Die Ackermann-Funktion $A(x, y)$ sei für natürlichen Zahlen x, y wie folgt rekursiv definiert:

$$\begin{array}{lll} A(0, y) & =_{\text{def}} & y + 1 \\ A(x, 0) & =_{\text{def}} & x & \text{falls } x \geq 1 \\ A(x, y) & =_{\text{def}} & A(x - 1, A(x, y - 1)) & \text{falls } x \geq 1, y \geq 1 \end{array}$$

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion über n, dass für alle natürlichen Zahlen n, y die folgenden Aussagen gelten:

(a) $A(2, n) = n + 2$

(b) $A(3, n) = 2n + 3$

(c) $A(4, n) = 7 \cdot 2^n - 3$

(d) $y < A(n, y)$

(e) $A(n, y) \leq A(n + 1, y)$

Hinweis: Benutzen Sie für jede Teilaufgabe die in der vorangegangenen Teilaufgabe bewiesene Aussage. Es gilt $A(1, n) = n + 1$ (siehe Skriptum *Diskrete Mathematik und Logik*).