Kacper Błaszczyk 251485
Maciej Miazek 251589

Rok akademicki *2024/25*
poniedziałek, 16:00

METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM

Zadanie 3

Opis rozwiązania

Zaimplementowano metodę interpolacji Newtona dla nierównych odstępów argumentu (wariant 5). Użytkownik ma możliwość wyboru funkcji interpolowanej, przedziału interpolacji, liczby węzłów, oraz wczytania węzłów z pliku. Program rysuje wykres funkcji interpolowanej, wielomianu interpolacyjnego oraz węzły interpolacji.

Metoda interpolacji Newtona dla nierównych odstępów argumentu

$$W_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_0; x_1; \dots; x_i)\, \omega_{i-1}(x)$$

Iloraz różnicowy n-tego rzędu:

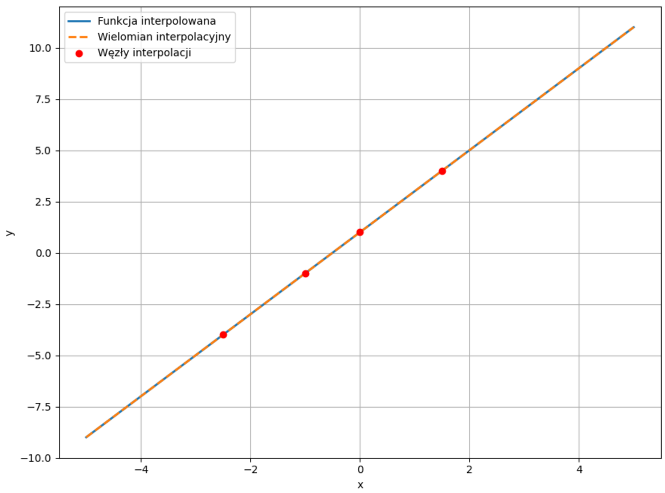
$$f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+n}) = \frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}; \dots; x_{i+n}) - f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+n-1})}{x_{i+n} - x_i}$$

$$\omega_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \in \mathbb{Z}^- = \{\dots, -2, -1\} \\ \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) & \text{dla } n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\} \end{cases}$$

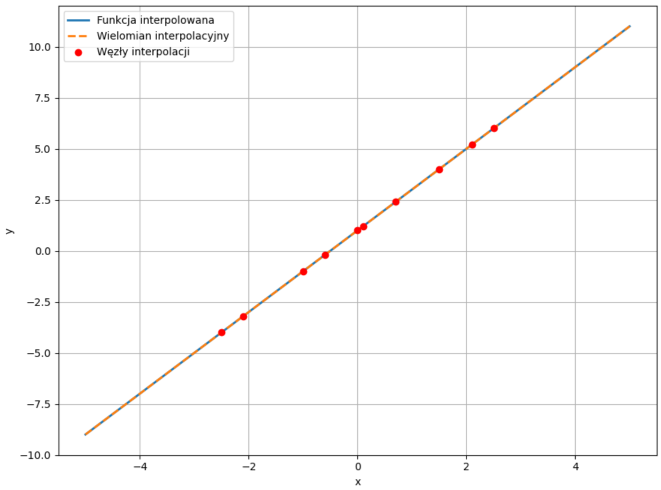
Wyniki

1. Funkcja interpolowana: $f_1(x) = 2x + 1$
Przedział interpolacji: $[-5; 5]$

$x_i \in \mathbb{X}_1 = \{-2.5\,; -1.0; 0.0; 1.5\}$

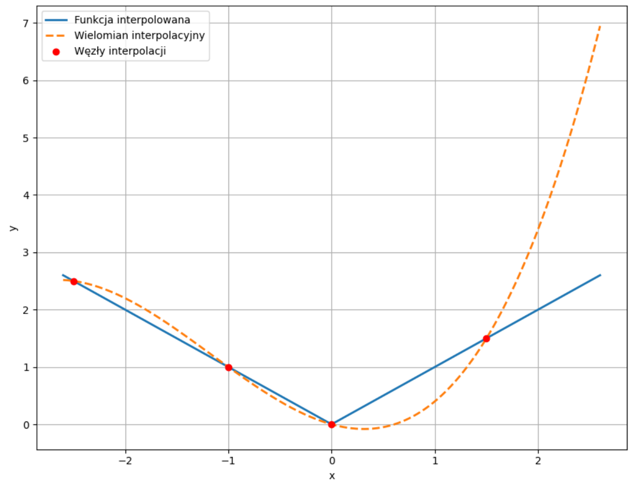


$x_i \in \mathbb{X}_2 = \{-2.5;\ -2.1; -1.0; -0.6; 0.0; 0.1; 0.7; 1.5; 2.1; 2.5\}$

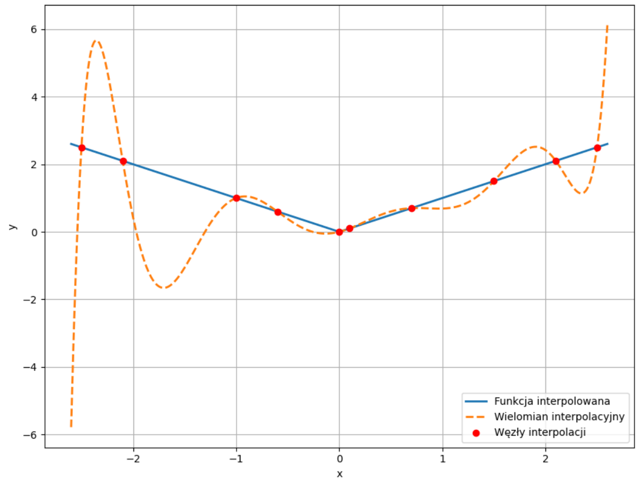


2. Funkcja interpolowana: $f_2(x) = |x|$
Przedział interpolacji: $[-2.6; 2.6]$

$x_i \in \mathbb{X}_1 = \{-2.5\,; -1.0; 0.0; 1.5\}$

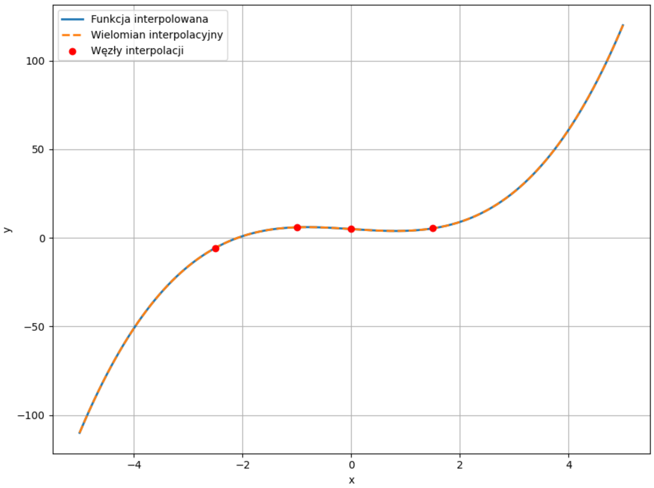


$x_i \in \mathbb{X}_2 = \{-2.5;\ -2.1; -1.0; -0.6; 0.0; 0.1; 0.7; 1.5; 2.1; 2.5\}$

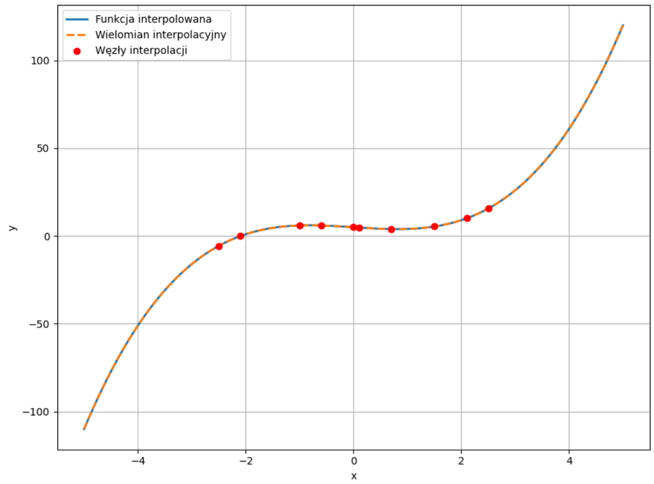


3. Funkcja interpolowana: $f_3(x) = x^3 - 2x + 5$
Przedział interpolacji: $[-5; 5]$

$x_i \in \mathbb{X}_1 = \{-2.5\,; -1.0; 0.0; 1.5\}$

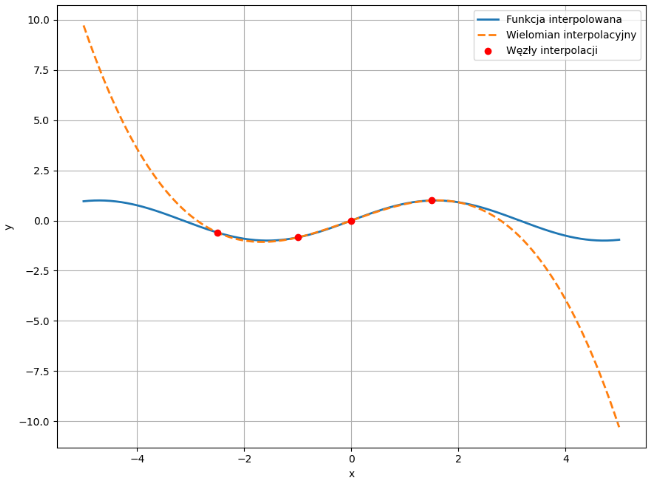


$x_i \in \mathbb{X}_2 = \{-2.5;\ -2.1; -1.0; -0.6; 0.0; 0.1; 0.7; 1.5; 2.1; 2.5\}$

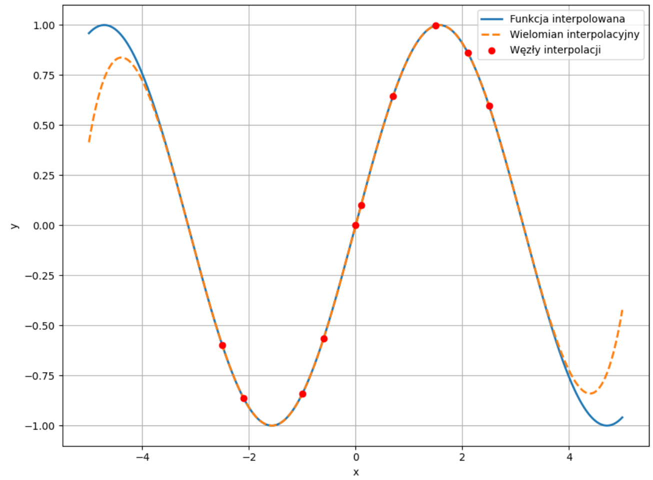


4. Funkcja interpolowana: $f_4(x) = \sin(x)$
Przedział interpolacji: $[-5; 5]$

$x_i \in \mathbb{X}_1 = \{-2.5\,; -1.0; 0.0; 1.5\}$

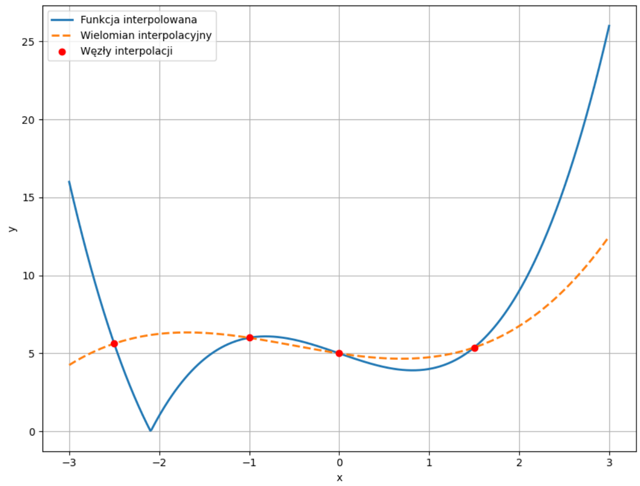


$x_i \in \mathbb{X}_2 = \{-2.5;\ -2.1; -1.0; -0.6; 0.0; 0.1; 0.7; 1.5; 2.1; 2.5\}$

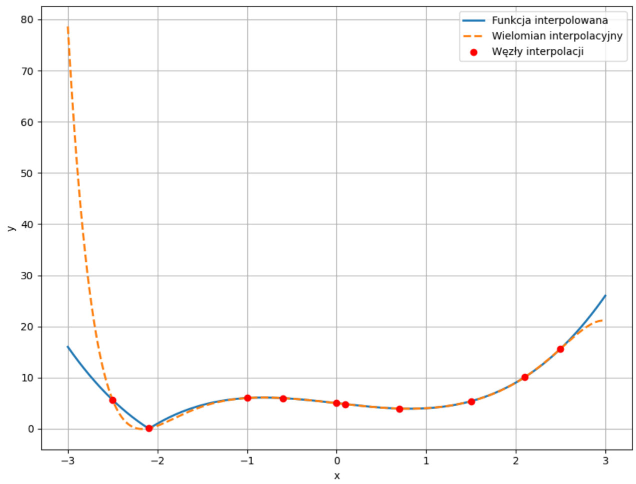


5. Funkcja interpolowana: $f_5(x) = (f_2 \circ f_3)(x) = |x^3 - 2x + 5|$
Przedział interpolacji: $[-3; 3]$

$x_i \in \mathbb{X}_1 = \{-2.5\,; -1.0; 0.0; 1.5\}$

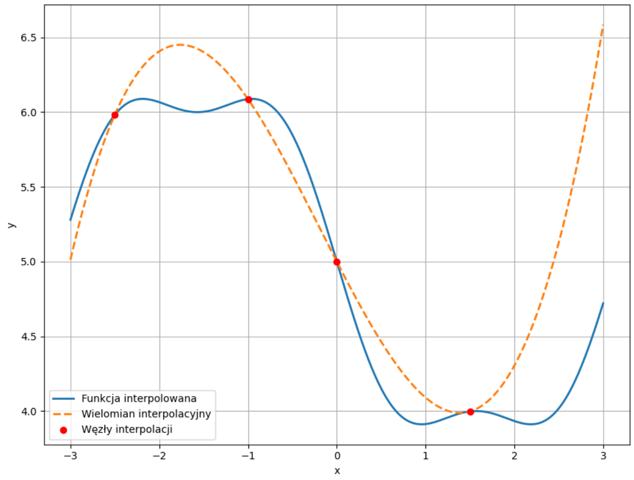


$x_i \in \mathbb{X}_2 = \{-2.5;\ -2.1; -1.0; -0.6; 0.0; 0.1; 0.7; 1.5; 2.1; 2.5\}$

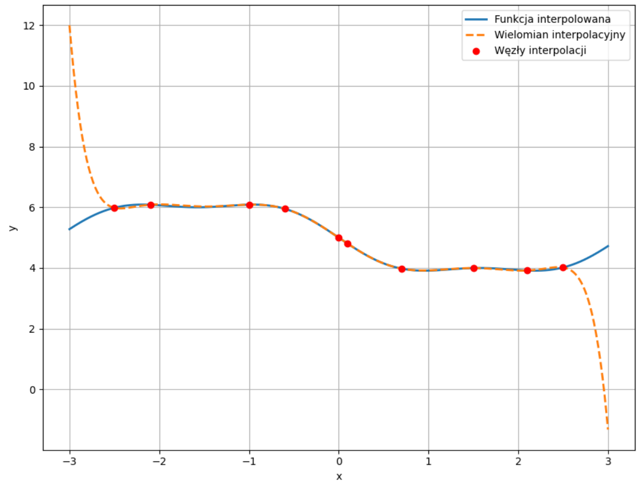


6. Funkcja interpolowana: $f_6(x) = (f_3 \circ f_4)(x) = \sin(x)^3 - 2\sin(x) + 5$
Przedział interpolacji: $[-3; 3]$

$x_i \in \mathbb{X}_1 = \{-2.5\,; -1.0; 0.0; 1.5\}$



$x_i \in \mathbb{X}_2 = \{-2.5;\ -2.1; -1.0; -0.6; 0.0; 0.1; 0.7; 1.5; 2.1; 2.5\}$



Wnioski

Do interpolacji wielomianu n-tego stopnia potrzeba $n+1$ węzłów.
Zwiększenie liczby węzłów zwiększa dokładność interpolacji.

$$\lim_{n\to\infty} W_n(x) = f(x)$$

Twierdzenie Stone'a-Weierstrassa

Dla każdej funkcji ciągłej określonej na przedziale domkniętym i przyjmującej wartości rzeczywiste istnieje ciąg wielomianów zbieżny jednostajnie do tej funkcji na tym przedziale.