Kacper Błaszczyk 251485
Maciej Miazek 251589

Rok akademicki *2024/25*
poniedziałek, 16:00

METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM

Zadanie 4

Opis rozwiązania

Zaimplementowano dwie metody całkowania numerycznego:

1. złożoną kwadraturę Newtona-Cotesa opartą na trzech węzłach (wzór Simpsona)
2. kwadraturę Gaussa (wariant 1) całkowanie na przedziale $[-1;1]$, z wagą $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (wielomiany Czebyszewa) całek postaci:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)\, dx$$

Kwadratury złożone Newtona-Cotesa obliczane są iteracyjne z dokładnością podaną przez użytkownika.

Metoda Newtona-Cotesa (zamknięta)

$$I = \int_a^b f(x)\, dx \approx \sum_{i=0}^{n} f(x_i) h \int_0^n \prod_{\substack{j \neq i \\ j=0}}^{n} \frac{(x-j)}{(i-j)} dx$$

Dla $n = 2$:

$$h = \frac{b-a}{2}$$
$$x_i = a + hi$$
$$I \approx \frac{h}{3}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\big)$$

Metoda Gaussa-Czebyszewa

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

Gdzie:

$$x_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right)$$
$$w_i = \frac{\pi}{n}$$

Wyniki

1. Funkcja liniowa $f_1(x) = 2x + 1$
Dokładność: $\varepsilon = 0.01$
Metoda Newtona-Cotesa: 3.090300806800477

Metoda Gaussa-Czebyszewa:

Liczba węzłów	2	3	4	5
Wynik	3.141592653589793	3.141592653589793	3.141592653589793	3.141592653589793

2. Funkcja wielomianowa $f_2(x) = 3x^3 + 2x^2 + 5x + 7$
Dokładność: $\varepsilon = 0.01$
Metoda Newtona-Cotesa: 24.797089678954407

Metoda Gaussa-Czebyszewa:

Liczba węzłów	2	3	4	5
Wynik	25.13274122871834	25.13274122871834	25.13274122871834	25.13274122871834

3. Funkcja trygonometryczna $f_3(x) = \sin(x)$
Dokładność: $\varepsilon = 0.01$
Metoda Newtona-Cotesa: -0.011700148173926127

Metoda Gaussa-Czebyszewa:

Liczba węzłów	2	3	4	5
Wynik	$-2.2204460492e-16$	$-1.11022302462e-16$	$-1.11022302462e-16$	$-1.11022302462e-16$

4. Złożenie funkcji $f_4(x) = (f_3 \circ f_1)(x) = \sin(2x + 1)$
Dokładność: $\varepsilon = 0.01$
Metoda Newtona-Cotesa: 0.606145971929568

Metoda Gaussa-Czebyszewa:

Liczba węzłów	2	3	4	5
Wynik	0.41224636778335755	0.59822589279604	0.591751232650335	0.5918698284775143

Wnioski

Metody mają różną dokładność. Różnica w dokładności dla funkcji trygonometrycznych pomiędzy dwoma a trzema węzłami Czebyszewa jest większa niż pomiędzy kolejnymi. Metoda Gaussa jest dokładniejsza dla małych wartości epsilon w metodzie Newtona-Cotesa.