Kacper Błaszczyk 251485
Maciej Miazek 251589

Rok akademicki 2024/25
poniedziałek, 16:00

METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM
Zadanie 5

Aproksymacja z wielomianami Czebyszewa

Wielomiany Czebyszewa

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n \arccos(x)) & \text{dla } n \in [-1;1] \\ \cosh(n \operatorname{arccosh}(x)) & \text{dla } x \geq 1 \\ (-1)^k \cosh(k \operatorname{arccosh}(-x)) & \text{dla } x \leq 1 \end{cases} \tag{1}$$

$$T_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0 \\ x & \text{dla } n = 1 \\ 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) & \text{dla } n \in \mathbb{N}_0 - \{0,1\} = \{2,3,\dots\}. \end{cases} \tag{2}$$

Węzły Czebyszewa

Wielomian Czebyszewa $T_n(x)$ posiada k zer rzeczywistych danych wzorem:

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \quad k \in \mathbb{N}_1 \tag{3}$$

Przekształcenie w przedział $[a;b]$:

$$\overline{x_k} = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \tag{4}$$

Przekształcenie w przedział $[-1;1]$:

$$\overline{x} = \frac{2x-a-b}{b-a} \tag{5}$$

Obliczanie współczynników aproksymacji

Wielomiany Czebyszewa tworzą układ ortogonalny w przestrzeni $L_p^2[-1,1]$ z funkcją wagową $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\langle T_k, T_j \rangle = \int_{-1}^{1} T_k(x)T_j(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & \text{dla } k \neq j \\ \pi & \text{dla } k = j = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{dla } k = j \neq 0 \end{cases} \tag{6}$$

Zatem współczynniki aproksymasji obliczane są przy pomocy wzorów:

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(x)T_0(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{7}$$

$$c_d = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(x)T_d(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{8}$$

Do obliczenia tych całek można wykorzystać metodę Gaussa-Czebyszewa:

$$\int_{-1}^{1} \psi(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \sum_{i=0}^{n} w_i \psi(x_i) \tag{9}$$

gdzie:

- $x_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right)$ - węzły Czebyszewa
- $w_i = \frac{\pi}{n}$ - wagi
- n - liczba węzłów

Zatem dla $\psi(x) = f(x)T_n(x)$:

$$c_j = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{d} f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{a+b}{2}\right) T_j\left(x_i\right) \tag{10}$$

Ostatecznie:

$$f(x) \approx \sum_{j=0}^{d} c_j T_j \left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right) = g(x) \tag{11}$$

gdzie:

- d - stopień wielomianu docelowego
- n - liczba węzłów całkowania

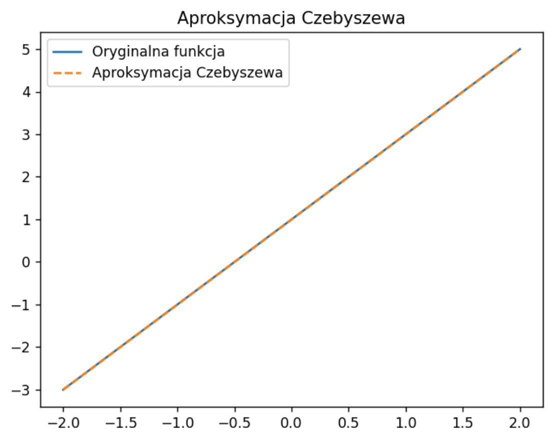
Błąd aproksymacji wynosi:

$$\int_{-1}^{1} \left| f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}\right) - g\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}\right)\right| \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{12}$$

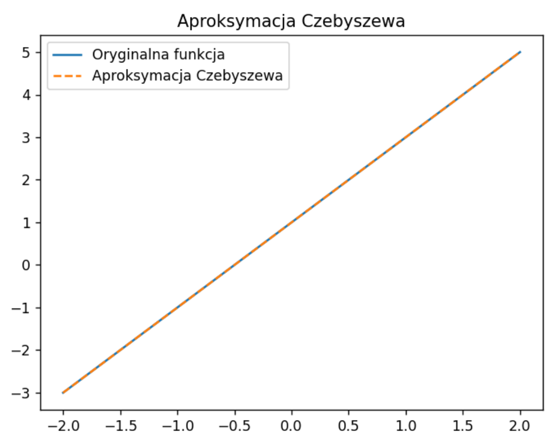
Przykłady

$f_1(x) = 2x + 1$ **Przedział** $[-2; 2]$

- **Stały stopień**:
  - Stopień wielomianu aproksymacyjnego: 5
  - Ilość węzłów dla całkowania numerycznego: 7
  - Błąd aproksymacji: 1.5645581548210147e-14
  - Współczynniki aproksymacji Czebyszewa: [1.00000000e+00 4.00000000e+00 1.26882631e-16 3.80647894e-16 -1.83979816e-15 3.36238973e-15]

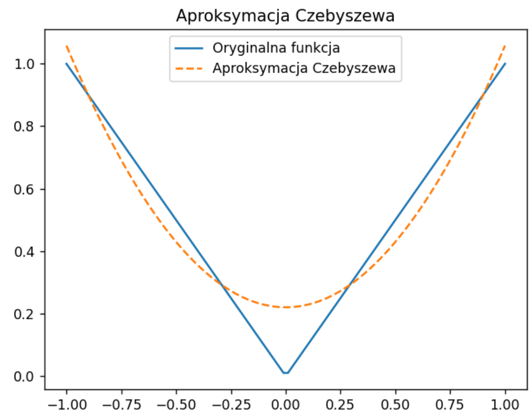


- **Docelowy błąd**:
  - Maksymalny błąd aproksymacji: 0.01
  - Ilość węzłów dla całkowania numerycznego: 10
  - Dobrany stopień wielomianu: 1
  - Błąd aproksymacji: 1.4649047691636253e-15
  - Współczynniki aproksymacji Czebyszewa: [1. 4.]

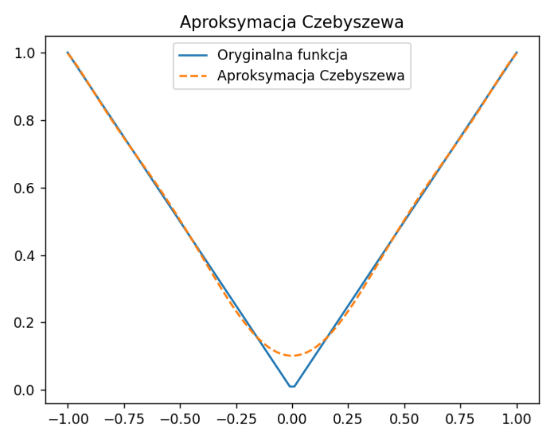


$f_2(x) = |x|$ **Przedział** $[-1; 1]$

- **Stały stopień**:
  - Stopień wielomianu aproksymacyjnego: 3
  - Ilość węzłów dla całkowania numerycznego: 10
  - Błąd aproksymacji: 0.16885160593093274
  - Współczynniki aproksymacji Czebyszewa: [6.39245322e-01 8.88178420e-17 4.18976396e-01 3.33066907e-16]

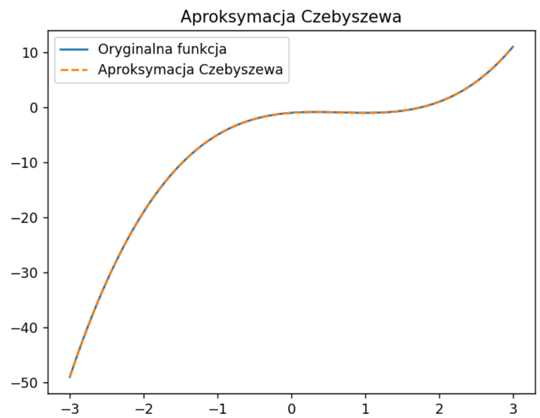


- **Docelowy błąd**:
  - Maksymalny błąd aproksymacji: 0.01
  - Ilość węzłów dla całkowania numerycznego: 10
  - Dobrany stopień wielomianu: 8
  - Błąd aproksymacji: 1.8311309614545318e-15
  - Współczynniki aproksymacji Czebyszewa: [6.39245322e-01 8.88178420e-17 4.18976396e-01 3.33066907e-16 -7.88475702e-02 6.43929354e-16 2.91887325e-02 6.88338275e-16 -1.09861112e-02]

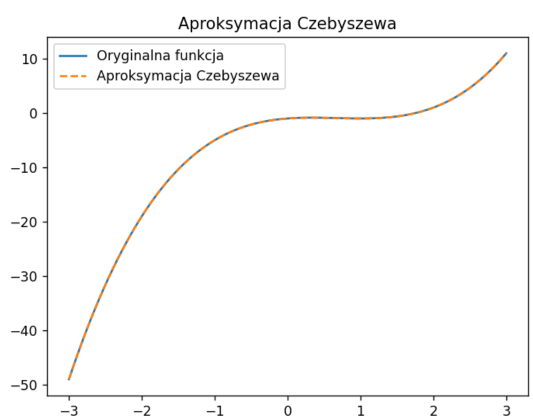


$f_3(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ **Przedział** $[-3; 3]$

- **Stały stopień**:
  - Stopień wielomianu aproksymacyjnego: 7
  - Ilość węzłów dla całkowania numerycznego: 10
  - Błąd aproksymacji: 2.474642699337124e-13
  - Współczynniki aproksymacji Czebyszewa: [-1.00000000e+01 2.32500000e+01 -9.00000000e+00 6.75000000e+00 1.98951966e-14 -2.13162821e-14 2.77111667e-14 -2.55795385e-14]

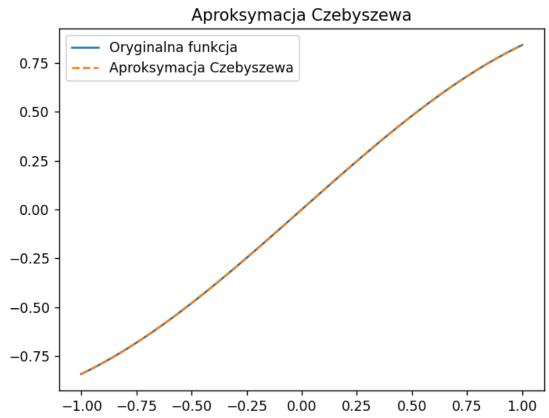


- **Docelowy błąd**:
  - Maksymalny błąd aproksymacji: 0.01
  - Ilość węzłów dla całkowania numerycznego: 10
  - Dobrany stopień wielomianu: 3
  - Błąd aproksymacji: 8.224393918304354e-14
  - Współczynniki aproksymacji Czebyszewa: [-10. 23.25 -9. 6.75]

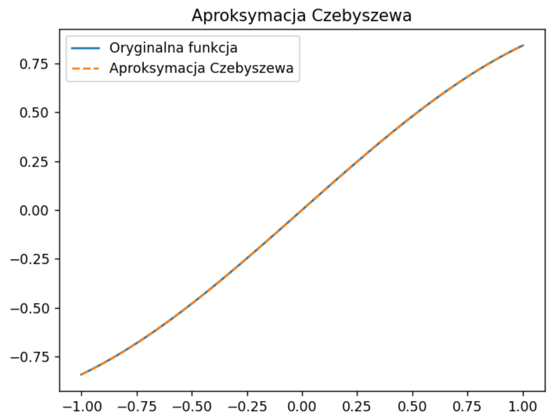


$f_4(x) = \sin(x)$ **Przedział** $[-1; 1]$

- **Stały stopień**:
  - Stopień wielomianu aproksymacyjnego: 5
  - Ilość węzłów dla całkowania numerycznego: 10
  - Błąd aproksymacji: 6.037797045147814e-06
  - Współczynniki aproksymacji Czebyszewa: [8.88178420e-17 8.80101171e-01 1.77635684e-16 -3.91267080e-02 4.66293670e-16 4.99515460e-04]

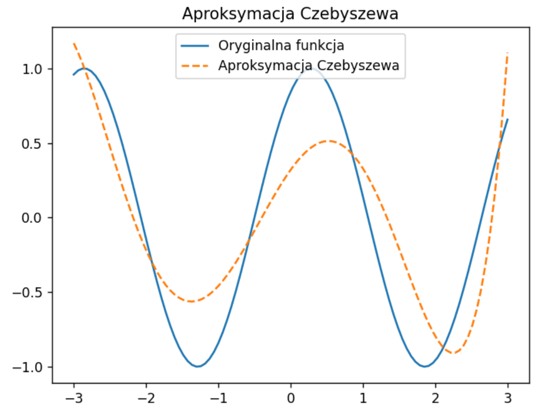


- **Docelowy błąd**:
  - Maksymalny błąd aproksymacji: 0.01
  - Ilość węzłów dla całkowania numerycznego: 10
  - Dobrany stopień wielomianu: 2
  - Błąd aproksymacji: 0.0011096443582287211
  - Współczynniki aproksymacji Czebyszewa: [8.88178420e-17 8.80101171e-01 1.77635684e-16 -3.91267080e-02]

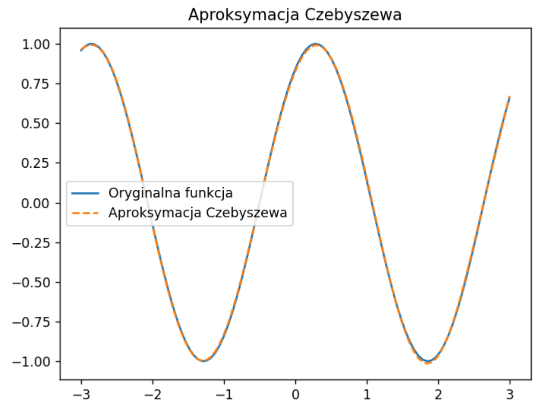


$f_5(x) = (f_4 \circ f_1)(x) = \sin(2x + 1)$ **Przedział** $[-3; 3]$

- **Stały stopień**:
  - Stopień wielomianu aproksymacyjnego: 5
  - Ilość węzłów dla całkowania numerycznego: 10
  - Błąd aproksymacji: 2.5774806281927045
  - Współczynniki aproksymacji Czebyszewa: [0.12676361 -0.29898585 0.40874158 -0.12401948 0.60188803 0.39127965]



- **Docelowy błąd**:
  - Maksymalny błąd aproksymacji: 0.01
  - Ilość węzłów dla całkowania numerycznego: 10
  - Dobrany stopień wielomianu: 9
  - Błąd aproksymacji: 7.919641408290085e-15
  - Współczynniki aproksymacji Czebyszewa: [0.12676361 -0.29898585 0.40874158 -0.12401948 0.60188803 0.39127965 -0.4136791 -0.1401753 0.0942226 0.02508437]



Wnioski

Zwiększenie liczby węzłów całkowanie numerycznego zwiększa dokładność aproksymacji. Zwiększenie stopnia wielomianu aproksymującego również zwiększa dokładność aproksymacji.

Dwanaście pierwszych wielomianów Czebyszewa

$$
\begin{aligned}
T_0(x) &= 1\\
T_1(x) &= x\\
T_2(x) &= 2x^2 - 1\\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x\\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1\\
T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x\\
T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1\\
T_7(x) &= 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x\\
T_8(x) &= 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1\\
T_9(x) &= 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x\\
T_{10}(x) &= 512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1\\
T_{11}(x) &= 1024x^{11} - 2816x^9 + 2816x^7 - 1232x^5 + 220x^3 - 11x
\end{aligned}
$$