Feuille de travaux dirigés nᵒ 1

Exercice 1.1 (Grammaires : génération et typage)

Pour chacune des grammaires suivantes :

1. générer deux mots et préciser leurs longueurs,

2. donner les types possibles de la grammaire,

3. définir (si possible) sous forme ensembliste le langage engendré par la grammaire,

4. existe-t'il une grammaire de type plus élevé pour le même langage ?

$$
\begin{aligned}
G_1 &= (\{a,b,c\},\{S\},S,\{ & S &\to aScSa \mid b\}) \\
G_2 &= (\{a,b,ch,d\},\{S,A,B,C\},S,\{ & S &\to BbCCaA \mid BbCCa, \\
& & A &\to bCCaA \mid bCCa, \\
& & bC &\to ba, \\
& & Ca &\to da, \\
& & B &\to cha\}) \\
G_3 &= (\{cha,bada\},\{S,A\},S,\{ & S &\to chaA, \\
& & A &\to badaA \mid bada\}) \\
G_4 &= (\{a,b,ch,d\},\{S,A\},S,\{ & S &\to chaA, \\
& & A &\to badaA \mid bada\}) \\
G_5 &= (\{a,b\},\{S,A,B\},S,\{ & S &\to aAbB, \\
& & B &\to SA \mid \varepsilon, \\
& & bB &\to b, \\
& & Ab &\to Sab \mid SBb\}) \\
G_6 &= (\{a,b\},\{S,S_1\},S,\{ & S &\to \varepsilon \mid aS_1, \\
& & S_1 &\to S_1a \mid b\}) \\
G_7 &= (\{a,b\},\{S\},S,\{ & S &\to \varepsilon \mid aS \mid Sb\}) \\
G_8 &= (\{a,b,c\},\{S,A,B,C\},S,\{ & S &\to \varepsilon \mid A, \\
& & A &\to aA \mid B, \\
& & B &\to bB \mid C, \\
& & C &\to cC \mid c\}) \\
G_9 &= (\{a,b\},\{S\},S,\{ & S &\to \varepsilon \mid aSaS \mid bSaS \\
& & SaS &\to SbS\}) \\
G_{10} &= (\{a,b\},\{S,S_1,A\},S,\{ & S &\to \varepsilon \mid S_1, \\
& & S_1 &\to A \mid b \mid AS_1AS_1 \mid bS_1AS_1 \\
& & S_1AS_1 &\to S_1bS_1 \\
& & A &\to a\})
\end{aligned}
$$

Exercice 1.2 (Grammaire de la calculatrice)

Soit la grammaire :

$$G : (\quad \{a, b, ..., z, +, (,)\}, \{S, somme, produit, facteur, terme\}, S,$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & somme \\ produit & \rightarrow & produit\ facteur \mid facteur \\ facteur & \rightarrow & (\ somme\ ) \mid terme \\ somme & \rightarrow & somme + produit \mid produit \\ terme & \rightarrow & a \mid b \mid c \mid \cdots \mid y \mid z \end{array}\right\} \quad)$$

1. Donner une génération de la chaîne $ab + (a + b)c + a(bc)$.

2. En cherchant une génération de la chaîne $a + ()$, justifier sa non-appartenance au langage engendré par la grammaire ci-dessus.

3. Modifier la grammaire pour qu'elle prenne en compte les opérations $-$ et $/$, dont les propriétés sont respectivement égales à celles de l'addition et du produit. Pour cette nouvelle grammaire, donner une génération de la chaîne $a/(d + e - f)$

Exercice 1.3 (Représentation de langages par des grammaires formelles)

Donner une grammaire du type le plus élevé possible pour les langages suivants. En déduire le type du langage. Dans quel cas pouvez-vous certifier votre réponse ?

1. $\{a^n b^n \mid n > 0\}$

2. $\{a^p b^q \mid p \geq 0, q \geq 0, p \neq q\}$

3. $\{a^p b^q c^r \mid p > 0, q > 0, r \geq 0, p + q \geq r\}$

4. $L((a|b)^* a(a|b)^2)$

5. $\{w \in \{a, b\}^* \mid w$ contient ab en facteur $\}$

6. $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w|$ est paire$\}$

7. $\{xcy \mid x, y \in \{a, b\}^*$ et $|x|_a > |y|_b\}$

8. $\{xcy \mid x, y \in \{a, b\}^*, |x|_a = |y|_a\}$

9. $\{a^n b^m a^n \mid n \geq 0, m \geq 0\}$

10. $\{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$

11. $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$

12. $\{xcx^r \mid x \in \{a, b\}^*\}$ (x^r est le mot miroir de x)

13. $\{w \in \{a, b\}^* \mid w$ est un palindrome$\}$