1 Spektrale Graph Bisektion

1.1 Idee

- Formuliere Graph-Partition als diskretes Optimierungsproblem
- Ersetzte dieses durch ein kontinuierliches Optimierungsproblem

1.2 Integer Linear Programm

Definition 1. *Laplace-Matrix*
die Laplace-Matrix $L(G)$ eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine $|V| * |V|$ symmetrische Matrix, wobei gilt:

$$L(G)(i,j) = \begin{cases} \text{Knotengrad von } v_i & i = j, \\ -1 & i \neq j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Satz. *Satz von Fiedler (1975)*
Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $V = V_1 \cup V_2$ eine beliebige Partition mit $|V| = n$, der Laplace Matrix $L(G)$ und einem Indexvektor x mit:

$$x_i = \begin{cases} 1 & v_i \in V_1 \\ -1 & v_i \in V_2 \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\text{Die Anzahl der Kanten zwischen } V_1 \text{ und } V_2 \text{ beträgt } \frac{1}{4} x^T L(G) * x$$

Im Folgenden gelte: $z \in \{0, 1\}^n$

Beweis. *Schritt 1*
Sei A die Adjazenmatrix von G, dann gilt:

$$\begin{aligned} z^T A z =& \sum_{i,j} a_{ij} z_i z_j \\ =& 2 \sum_{i,j(i,j) \in E} z_i z_j \\ =& 2 * (-|Schnittkanten| + |E| - |Schnittkanten|) \\ =& -2|E| + 4|Schnittkanten| \end{aligned}$$

Beachte hierzu:

$$z_i z_j = \begin{cases} 1 & (i,j) \notin Schnittkanten \\ -1 & (i,j) \in Schnittkanten \end{cases}$$

Und:

$$z_j * a_i j * z_i = 0 \Leftrightarrow a_{ij} = 0$$
$$\Rightarrow \text{Es gibt keine Kanten von } i \text{ nach } j$$

Das heißt uns interessiert nur der Fall, in dem $(i, j) \in E$

Beweis. *Schritt 2*
Sei D die degree-Matrix von G. Dann gilt:

$$\begin{aligned} z^T D z =& \sum_{i,j} d_{ij} z_i z_j \\ =& \sum_i d_{ii} = 2 * |E| \end{aligned}$$

Beachte: Die Summe der Diagonaleinträge entspricht der doppleten Anzahl der Kanten in G!

$$z_i d_{i,j} z_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ d_{i,j} & sonst \end{cases}$$

Beweis 1. *Schritt 3*
Sei A die Adjazenzmatrix, D die Diagonalmatrix und L die Laplacematrix, wobei $L = D - A$
Dann gilt:

$$\frac{1}{4}(z^T Dz - z^T Az) = |Schnittkanten|$$
$$\Rightarrow \frac{1}{4}(z^T Lz) = |Schnittkanten|$$

Alternative Herleitung:

Beweis.

$$\begin{aligned} x^T L(G)x &= \sum_{i,j} L(G)(i,j) x_i x_j \\ &= \sum_{i=j} L(G)(i,j) x_i^2 + \sum_{i \neq j} L(G)(i.j) x_i x_j \\ &= \sum_{i=j} L(G)(i,j) x_i^2 + \sum_{i \neq j, i,j \in V_1} L(G)(i.j) x_i x_j + \sum_{i \neq j, i,j \in V_2} L(G)(i.j) x_i x_j + \sum_{i \neq j, i \in V_1, j \in V_2} L(G)(i.j) x_i x_j \\ &= \sum_i grad(i) + \sum_{i \neq j, i,j \in V_1} (-1)(+1)(+1) + \sum_{i \neq j, i,j \in V_2} (-1)(-1)(-1) + \sum_{i \neq j, i \in V_1, j \in V_2} (-1)(+1)(-1) \\ &= 2 * |E| - 2 * |E_{(V_1,V_1)}| - 2 * |E_{(V_2,V_2)}| + 2 * |E_{(V_1,V_2)}| \\ &= 4 * |E_{(V_1,V_2)}| \end{aligned}$$

Nun können wir die Graph-Bisektion als diskretes Optimierungsproblem beschreiben. $e = [1, ..., 1]^T$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f(z) = \frac{1}{4} z^T L(G) z \\ \text{subject to} & \sum_i z_i = 0 \Leftrightarrow z^T e = 0 \\ & z \in \{1, -1\}^n \Leftrightarrow z_i^2 = 1 \end{array}$$

Ganzzahlige Optimierungsprobleme sind NP-vollständig!

Wir nutzen deshalb die LP-Relaxierung, um die Nebenbedingung $z \in \{1, -1\}^n$ abzuschwächen und das Problem in ein polynomialzeit lösbares Problem zu transformieren.

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f(z) = \frac{1}{4} z^T L(G) z \\ \text{subject to} & z^T e = 0 \\ & ||z||^2 = n \end{array}$$

Das geht, weil:

$$z_i^2 = 1 \Rightarrow ||z|| = \sqrt{n} \Rightarrow ||z||^2 = n$$

Für z_i sind nun also Werte aus $\mathbb{R}$ zugelasssen.
Wir wollen nun unseren Vektor aud 1 normieren und schreiben deshalb:

$$||z||^2 = n \Rightarrow ||z|| = \sqrt{n} \text{ und } z' = \frac{z}{\sqrt{n}}$$

Und damit:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f(z') = \frac{1}{4} z'^T L(G) z' \\ \text{subject to} & z'^T e = 0 \\ & ||z'||^2 = 1 \end{array}$$

Resultat:

- Die diskreten Vektoren x sind eine Teilmenge der reellen
- Die Lösung des kontinuierlichen Problems stellt eine unter Schranke des diskrete Graph Paritionierungsproblem
- Eine heuristische Lösung erhält man durch $z_i = sign(z_i) * 1$

1.3 Lösung

Wir wollen nun das Folgende Optimierungsproblem lösen:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f(z') = \frac{1}{4} z'^T L(G) z' \\ \text{subject to} & z'^T e = 0 \\ & ||z'||^2 = 1 \end{array}$$

Satz. *Eigenschaften der Laplacematrix*

1. *$L(G)$ ist symmetrisch*
2. *$L(G)$ ist positiv definit ($x^T L(G) x \geq 0$)*
3. *Die Eigenwerte λ_i sind reell und positiv*
4. *Es gibt n Eigenvektoren, die eine orthogonale Basis bilden*
5. *Sei $e = [1, ...1]^T$ ein Vektor. Dann gilt $L(G) * e = 0$*

1.4 Exkurs Optimierungsprobleme der Form $x^T M x$

Für das folgende Optmierungsproblem wollen wir zeigen, das der Eigenvektor zum kleinsten Eigenwert eine optimale Lösung ist.

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f(x) = x^T M x \\ \text{subject to} & ||x||^2 = 1 \end{array}$$

Wenn M symmetrisch ist, dann bilden die Eigenvektoren von M eine Orthogonalbasis, womit sich jeder Vektor als Linearkombination dieser schreiben lässt.

$$x = \sum_i a_i v_i$$

Wir schreiben deshalb:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & (\sum_i a_i v_i)^T M (\sum_i a_i v_i) \\ \text{subject to} & ||(\sum_i a_i v_i)||^2 = 1 \end{array}$$

Es gilt:

$$||(\sum_i a_i v_i)||^2 = 1 \Leftrightarrow (\sum_i a_i v_i)^T (\sum_i a_i v_i) = \sum_{i,j} a_i a_j v_i^T v_j = \sum_i a_i^2 = 1$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} (\sum_i a_i v_i)^T M (\sum_i a_i v_i) &= (\sum_i a_i v_i)^T (\sum_i a_i M v_i) \\ &= (\sum_i a_i v_i)^T (\sum_i a_i \lambda v_i) \text{ weil (Eigenvektor) } \lambda_i v_i = M v_i \\ &= \sum_{i,j} a_i a_j \lambda_i v_i^T v_j \\ &= \sum_i a_i^2 \lambda_i \end{aligned}$$

Deshalb lautet unser Problem wie folgt:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \sum_i a_i^2 \lambda_i \\ \text{subject to} & \sum_i a_i^2 = 1 \end{array}$$

Wir ordnen nun unsere reellen Eigenwerte:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$$

Unsere Zielfunktion wird genau dann minimal, wenn gilt:

$$\begin{gathered} a_n^2 * \lambda_n = 0 \Leftrightarrow a_n = 0 \\ a_{n-1}^2 * \lambda_{n-1} = 0 \Leftrightarrow a_{n-1} = 0 \\ ... \\ a_1^2 * \lambda_1 = 1 \Leftrightarrow a_1 = 0 \end{gathered}$$

Die Lösung zu diesem Problem ist deshalb der kleinste Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 zu $\lambda_1 v_1 = M v_1$

1.5 Lösung 2

Unser ursprüngliches Optimierungsproblem hätte als Lösung den Eigenvektor zum kleinsten Eigenwert von L.

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f(z') = \frac{1}{4} z'^T L(G) z' \\ \text{subject to} & z'^T e = 0 \\ & ||z'||^2 = 1 \end{array}$$

Der kleinste Eigenvektor hat den Eigenwert 0!

$$L(G)e = 0$$

Aus diesem Grund wählen wir den zweitkleinsten Vektor

Satz. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $V = V_1 \cup V_2$ eine Partition, dann gilt:*

- *Die minimale Anzahl an Kanten, welche die beiden Gebiete V_1 und V_2 verbinden ist mindestens $\frac{1}{4}\lambda_2 |V|$, wobei λ_2 der zweitkleinste Eigenwert von $L(G)$ ist.*
- *Der zu λ_2 gehörende Eigenvektor v_2 heißt Fiedler-Vektor und minimiert das zugehörige Minimierungsproblem.*

1.6 Algorithmus

```
SpektraleBisektion(V,E):
  Berechne L(G)
  Berechne v2
  Berechne den Median M aller Komponenten von v2
  for v[i] in V:
    if v2[i] < M:
      lege v in V[1]
    if v2[i] >= M:
      lege v in V[2]
```

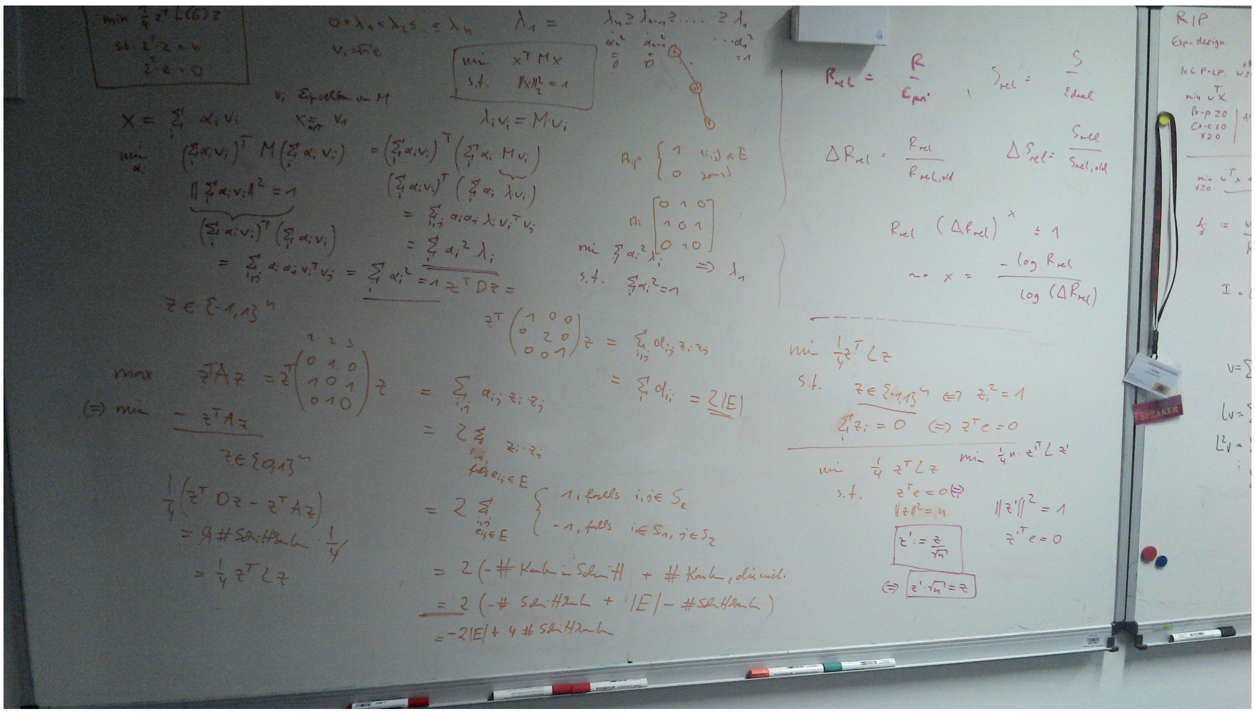

Figure 1: Herleitung