Formulaire CompAlg

Équations différentielles

h : pas de discrétisation
Il faut isoler y' tel que $y' = f(t, y)$

Euler (un étage)

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n), \\ t_{n+1} = t_n + h \end{cases}$$

Point milieu

$$\begin{cases} s_1 = f(t_n, y_n), \\ s_2 = f\left(t_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2} \cdot s_1\right), \\ y_{n+1} = y_n + h \cdot s_2, \\ t_{n+1} = t_n + h. \end{cases}$$

Trapèze

$$\begin{cases} s_1 = f(t_n, y_n), \\ s_2 = f\left(t_n + h, y_n + h \cdot s_1\right), \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2} \cdot (s_1 + s_2), \\ t_{n+1} = t_n + h. \end{cases}$$

Runge-Kutta d'ordre 2 (forme générale)

$$\begin{cases} s_1 = f(t_n, y_n), \\ s_2 = f\left(t_n + c_2 \cdot h, y_n + a_{21} \cdot h \cdot s_1\right), \\ y_{n+1} = y_n + h \cdot (\omega_1 \cdot s_1 + \omega_2 \cdot s_2), \\ t_{n+1} = t_n + h. \end{cases}$$

Il est possible de représenter les différents paramètres intervenant dans une méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 (c_2, $a_2$1, w_1 et w_2) dans un tableau

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ c_2 & a_{21} & \\ \hline & \omega_1 & \omega_2 \end{array}$$

point milieu (droite), optimal (milieu), trapèze (gauche)

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 2/3 & 2/3 & \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Runge-Kutta d'ordre 3 (forme générale)

$$\begin{cases} s_1 = f(t_n, y_n), \\ s_2 = f\left(t_n + c_2 \cdot h, y_n + a_{21} \cdot h \cdot s_1\right), \\ s_3 = f\left(t_n + c_3 \cdot h, y_n + a_{31} \cdot h \cdot s_1 + a_{32} \cdot h \cdot s_2\right), \\ y_{n+1} = y_n + h \cdot (\omega_1 \cdot s_1 + \omega_2 \cdot s_2 + \omega_3 \cdot s_3), \\ t_{n+1} = t_n + h. \end{cases}$$

Kutta (droite), 2/3 (milieu), optimale (gauche)

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & & \\ 3/4 & 0 & 3/4 & \\ \hline & 2/9 & 3/9 & 4/9 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 2/3 & 2/3 & & \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 & \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array}$$

Runge-Kutta classique

$$\begin{cases} s_1 = f(t_n, y_n), \\ s_2 = f\left(t_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2} \cdot s_1\right), \\ s_3 = f\left(t_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2} \cdot s_2\right), \\ s_4 = f(t_n + h, y_n + h \cdot s_3), \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6} \cdot (s_1 + 2 \cdot s_2 + 2 \cdot s_3 + s_4), \\ t_{n+1} = t_n + h. \end{cases}$$

Runge-Kutta-Fehlberg

$$\begin{cases} s_1 = f(t_n, y_n), \\ s_2 = f\left(t_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2} \cdot s_1\right), \\ s_3 = f\left(t_n + \dfrac{3}{4} \cdot h, y_n + \dfrac{3}{4} \cdot h \cdot s_2\right), \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{9} \cdot (2 \cdot s_1 + 3 \cdot s_2 + 4 \cdot s_3), \\ s_4 = f(t_n + h, y_{n+1}), \\ e_{n+1} = \dfrac{h}{72} \cdot (-5 \cdot s_1 + 6 \cdot s_2 + 8 \cdot s_3 - 9 \cdot s_4), \\ t_{n+1} = t_n + h. \end{cases}$$

Systèmes d'équations différentielles

On peut transformer une équation différentielle d'ordre n en un système d'équations différentielles d'ordre 1. Au lieu d'avoir n dérivées, on a n fonctions inconnues.
Exemple : $x''(t) = -\sin(t) \cdot x'(t) + 2 \cdot x(t)$

$$y(t) = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}, \quad y'(t) = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ -\sin(t) \cdot x' + 2 \cdot x \end{pmatrix},$$
$$y'\left(t, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\sin(t) \cdot y_2 + 2 \cdot y_1 \end{pmatrix}$$

Ensuite, on peut appliquer une méthode numérique à ce système d'équations différentielles. On aura donc, par exemple pour Euler :

$$\begin{cases} y_{1,n+1} = y_{1,n} + h \cdot y_{2,n}, \\ y_{2,n+1} = y_{2,n} + h \cdot (-\sin(t_n) \cdot y_{2,n} + 2 \cdot y_{1,n}), \\ t_{n+1} = t_n + h. \end{cases}$$

Et pour une méthode de Runge-Kutta on devrait calculer deux s_1, s_2, etc. et pour chaque pas de temps t_n on aura deux valeurs $y_{1,n}$ et $y_{2,n}$.

Algèbre linéaire numérique

On peut réécrire un système d'équations linéaires sous la forme $A \cdot x = b$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Pour les exemples on prend toujours le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Méthode de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & -6 & -12 & -4 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

Puis on remonte et on trouve $x_3 = {}^{-4}/_{-6} = {}^{2}/_{3}$, $x_2 = \ldots$

Décomposition LU

Le but de la décomposition LU est de factoriser la matrice A en deux matrices L et U telles que $A = L \cdot U$. Elle ne s'applique qu'aux matrices carrées.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Les coefficients sont calculés comme suit :

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 \cdot u_{11} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ a_{12} &= 1 \cdot u_{12} + 0 \cdot u_{22} + 0 \cdot 0 \\ a_{13} &= 1 \cdot u_{13} + 0 \cdot u_{23} + 0 \cdot u_{33} \\ a_{21} &= l_{21} \cdot u_{11} + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ a_{22} &= l_{21} \cdot u_{12} + 1 \cdot u_{22} + 0 \cdot 0 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Puis comme on connait les a_{ij} on peut trouver les l_{ij} et les u_{ij}. Ensuite on résout le système $L \cdot \overrightarrow{y} = \overrightarrow{b}$ et $U \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Il faut faire attention si la première valeur de la matrice est très petite, il faut permuter les lignes. Sinon, on peut avoir des erreurs d'arrondi à cause des chiffres significatifs. 3 chiffres dans la mantisse signifie : $1.234 \cdot 10^6 = 1.230 \cdot 10^6$
Attention si on permute des lignes, il faut aussi permuter les valeurs de b :

$$PA\overrightarrow{x} = P\overrightarrow{b}$$

$$L\underbrace{U\overrightarrow{x}}_{\overrightarrow{y}} = P\overrightarrow{b}$$

Transformation de Householder

La transformation de Householder permet de transformer une matrice A en une matrice R triangulaire supérieure. Pour cela il faut recalculer les vecteurs $\overrightarrow{x}$ et les matrices H pour chaque colonne de la matrice A.

$$H \cdot \overrightarrow{x} = -\rho \cdot \overrightarrow{e}_1$$

Pour une matrice 3x3 :

$$\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -\rho_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ -\rho_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{x_3} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

$$\rho = \operatorname{sign}(x_1) \cdot \|\overrightarrow{x}\|_2$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{x} + \rho \cdot \overrightarrow{e}_1$$

$$\gamma = \frac{\|\overrightarrow{v}\|_2^2}{2} = \rho \cdot v_1$$

Et donc la matrice H se calcul :

$$H = I - \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}^T}{\gamma}$$

Décomposition QR

Le but de la décomposition QR est de factoriser la matrice A en deux matrices Q et R telles que $A = Q \cdot R$. Elle s'applique à toutes les matrices.
Exemple pour une matrice 3x3 :

1ère colonne : calculer H_1 avec $\overrightarrow{x_1}$ puis :

$$A_1 = H_1 \cdot A = \begin{pmatrix} -\rho_1 & \alpha & \beta \\ 0 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \end{pmatrix}$$

2ère colonne : calculer H_2 avec $\overrightarrow{x_2}$ puis :

$$A_2 = H_2 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} -\rho_1 & \alpha & \beta \\ 0 & -\rho_2 & \gamma \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$$

H_2 devrait être de la forme :

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \end{pmatrix}$$

Résoudre le système :

$$Q^T = H_2 \cdot H_1$$

$$R = A_2$$

$$R \cdot \overrightarrow{x} = Q^T \cdot \overrightarrow{b} \quad \Longleftrightarrow \quad A_2 \cdot \overrightarrow{x} = H_2 \cdot H_1 \cdot \overrightarrow{b}$$

Méthode de Jacobi

Pour les méthodes itératives, il faut que la matrice soit diagonalement dominante :

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

Soit le système :

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Qu'on réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} 10 \cdot x_1^{(k+1)} &= -1 \cdot x_2^{(k)} + 11 \\ 10 \cdot x_2^{(k+1)} &= -2 \cdot x_1^{(k)} + 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} &= \dfrac{1}{10} \cdot (-1 \cdot x_2^{(k)} + 11) \\ x_2^{(k+1)} &= \dfrac{1}{10} \cdot (-2 \cdot x_1^{(k)} + 12) \end{cases}$$

Pour estimer le nombre d'itérations à effectuer afin de réduire l'erreur initiale d'un facteur τ il faut calculer le rayon spectral de la matrice d'itération $E = I - NA$, dans le cas de la méthode de Jacobi :

$$\varrho(E) = \max_i |\lambda_i(E)|$$

$$E = I - D^{-1} \cdot A$$

$$n \geq \frac{\ln(\tau)}{\ln(\varrho(E))}$$

Méthode de Gauss-Seidel

Même chose que pour la méthode de Jacobi, mais on utilise les nouvelles valeurs dans la même itération :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{10} \cdot (-1 \cdot x_2^{(k)} + 11) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{10} \cdot (-2 \cdot x_1^{(k+1)} + 12) \end{cases}$$

Matrice d'itérations pour réduire l'erreur initiale d'un facteur τ :

$$E = I - (D + L)^{-1} \cdot A$$

Méthode de relaxation

Même chose que pour la méthode de Gauss-Seidel, mais on rajoute un poids ω :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (1-\omega) \cdot x_1^{(k)} + \dfrac{\omega}{10} \cdot (-1 \cdot x_2^{(k)} + 11) \\ x_2^{(k+1)} = (1-\omega) \cdot x_2^{(k)} + \dfrac{\omega}{10} \cdot (-2 \cdot x_1^{(k+1)} + 12) \end{cases}$$

Méthode de descente pour $F(\overrightarrow{x}) = \left\| \overrightarrow{b} - A\overrightarrow{x} \right\|_2^2$

On veut minimiser la fonction $F(\overrightarrow{x})$.
$\overrightarrow{x_0}$ étant le vecteur de départ (aléatoire), on calcule :
L'erreur

$$F(\overrightarrow{x_0}) = \left\| \overrightarrow{b} - A \cdot \overrightarrow{x_0} \right\|_2^2$$

Le résidu

$$\overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{b} - A \cdot \overrightarrow{x_0}$$

Le gradient de $F(\overrightarrow{x})$

$$\nabla F(\overrightarrow{x_0}) = -2 \cdot A^T \cdot \overrightarrow{r_0}$$

La direction de descente

$$\overrightarrow{d_0} = -\nabla F(\overrightarrow{x_0}) = 2 \cdot A^T \cdot \overrightarrow{r_0}$$

Le pas

$$\alpha_0 = \frac{\overrightarrow{r_0}^T \cdot A \cdot \overrightarrow{d_0}}{\overrightarrow{d_0}^T \cdot A^T \cdot A \cdot \overrightarrow{d_0}}$$

Le nouveau vecteur

$$\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_0} + \alpha_0 \cdot \overrightarrow{d_0}$$

Puis recommencer pour $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{x_2}$, ...

Méthode de descente pour $G(\overrightarrow{x}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{x}^T A \overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}^T \overrightarrow{b}$

On veut minimiser la fonction $G(\overrightarrow{x})$.
$\overrightarrow{x_0}$ étant le vecteur de départ (aléatoire), on calcule :
L'erreur

$$G(\overrightarrow{x_0}) = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{x_0}^T \cdot A \cdot \overrightarrow{x_0} - \overrightarrow{x_0}^T \cdot \overrightarrow{b}$$

Le gradient de $G(\overrightarrow{x})$

$$\nabla G(\overrightarrow{x_0}) = A \cdot \overrightarrow{x_0} - \overrightarrow{b}$$

Le résidu et la direction de descente

$$\overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{d_0} = \overrightarrow{b} - A \cdot \overrightarrow{x_0}$$

Le pas

$$\alpha_0 = \frac{\overrightarrow{d_0}^T \cdot \overrightarrow{d_0}}{\overrightarrow{d_0}^T \cdot A \cdot \overrightarrow{d_0}}$$

Le nouveau vecteur

$$\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_0} + \alpha_0 \cdot \overrightarrow{d_0}$$

Puis recommencer pour $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{x_2}$, ...

Méthode du gradient conjugués

On veut minimiser la fonction $G(\overrightarrow{x})$.
L'erreur

$$G(\overrightarrow{x_k}) = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{x_k}^T \cdot A \cdot \overrightarrow{x_k} - \overrightarrow{x_k}^T \cdot \overrightarrow{b}$$

Le gradient de $G(\overrightarrow{x})$

$$\nabla G(\overrightarrow{x_k}) = A \cdot \overrightarrow{x_k} - \overrightarrow{b}$$

Le résidu

$$\overrightarrow{r_k} = \overrightarrow{b} - A \cdot \overrightarrow{x_k}$$

La direction de descente

$$\begin{cases} d_0 = r_0 \\ d_k = r_k + \beta_k \cdot d_{k-1} = r_k + \dfrac{\|r_k\|_2^2}{\|r_{k-1}\|_2^2} \cdot d_{k-1} \end{cases}$$

Le pas

$$\alpha_0 = \frac{\overrightarrow{d_k}^T \cdot \overrightarrow{r_k}}{\overrightarrow{d_k}^T \cdot A \cdot \overrightarrow{d_k}}$$

Le nouveau vecteur

$$\overrightarrow{x}_{k+1} = \overrightarrow{x}_k + \alpha_k \cdot \overrightarrow{d}_k$$

Courbes de Bézier

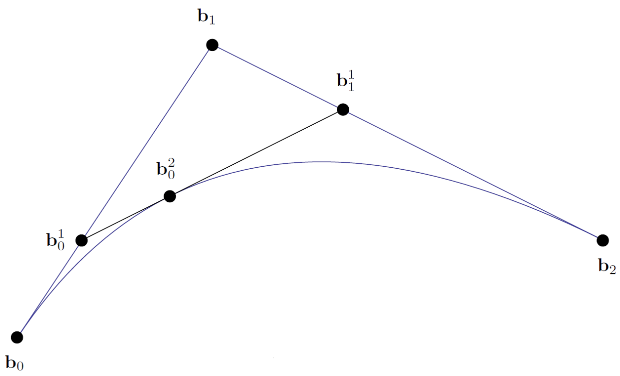
Paramétrisation

On nous donne $n+1$ points de contrôle $P_0, P_1, \dots, P_n$ et on veut définir une courbe de Bézier $B(t)$ qui passe par ces points.

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i \cdot B_i^n(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i \cdot \binom{n}{i} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i}$$

Algorithme de De Casteljau

On veut trouver les points de construction b_0^1, b_1^1, b_0^2 de la courbe de Bézier.



$$\begin{array}{lll} b_0 & & \\ b_1 & b_0^1 & \\ b_2 & b_1^1 & b_0^2 \end{array}$$

Par exemple, pour les points $b_0 = \binom{1}{1}, b_1 = \binom{2}{5/2}, b_2 = \binom{4}{3/2}$ et le pas $t = 1/3$, on a:

$$\begin{array}{lll} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & & \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 5/2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4/3 \\ 3/2 \end{bmatrix} & \\ \begin{bmatrix} 4 \\ 3/2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 8/3 \\ 13/6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 16/9 \\ 31/18 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ces points intermédiaires sont calculés comme suit:

$$b_0^1(t) = (1-t) \cdot b_0 + t \cdot b_1,$$
$$b_1^1(t) = (1-t) \cdot b_1 + t \cdot b_2,$$
$$b_0^2(t) = (1-t) \cdot b_0^1 + t \cdot b_1^1.$$

Systèmes d'équations non linéaires

Point fixe

Exemple, mettre le système suivant sous forme de point fixe :

$$\begin{cases} x^2 - 10x + y^2 + 6 = 0 \\ xy^2 + x - 10y + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{cases} x = \dfrac{1}{10} \cdot (x^2 + y^2 + 6) \\ y = \dfrac{1}{10} \cdot (xy^2 + x + 5) \end{cases}$$

Et donc pour itérer :

$$\begin{cases} x_{k+1} = \dfrac{1}{10} \cdot (x_k^2 + y_k^2 + 6) \\ y_{k+1} = \dfrac{1}{10} \cdot (x_k y_k^2 + x_k + 5) \end{cases}$$

Norme matricielle

$$\|A\|_2 = \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + \dots + a_{1n}^2 + \dots + a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + \dots + a_{nn}^2}$$

Matrice de Jacobi

$$J_{\overrightarrow{F}}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Contraction sur D

S'il existe une constante $L < 1$ telle que la norme matricielle de la matrice de Jacobi soit inférieure à L pour tout point $(x,y) \in D$, alors $\overrightarrow{F}(x,y)$ est un contraction sur D :

$$J_{\overrightarrow{F}}(x,y) = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y^2 + 1 & 2x \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\left\|J_{\overrightarrow{F}}(x,y)\right\|_2 = \frac{1}{10} \cdot \sqrt{4x^2 + 4y^2 + (y^2+1)^2 + 4x^2y^2}$$

sur $D = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$, on a :

$$\left\|J_{\overrightarrow{F}}(x,y)\right\|_2 \leq \frac{1}{10} \cdot \sqrt{4+4+4+4} = \frac{2}{5}$$

Car :

$$F_1(x,y) \leq \frac{1}{10} \cdot (1^2 + 1^2 + 6) = \frac{4}{5} < 1$$
$$F_2(x,y) \leq \frac{1}{10} \cdot (1 \cdot 1^2 + 1 + 5) = \frac{7}{10} < 1$$

Erreurs

Erreur a priori :

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{L^k}{1-L} \cdot \left\|\overrightarrow{F}(x_1,y_1) - \overrightarrow{F}(x_0,y_0)\right\|_2 \\ &= \frac{L^k}{1-L} \cdot \sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2} \end{aligned}$$

Erreur a posteriori pour une $k^{ème}$ itération :

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{L}{1-L} \cdot \left\|\overrightarrow{F}(x_k,y_k) - \overrightarrow{F}(x_{k-1},y_{k-1})\right\|_2 \\ &= \frac{L}{1-L} \cdot \sqrt{(x_k-x_{k-1})^2 + (y_k-y_{k-1})^2} \end{aligned}$$

Avec L la constante de Lipschitz :

$$L = \max_{(x,y)\in D} \left\|J_{\overrightarrow{F}}(x,y)\right\|_2 < 1$$

Méthode de Newton (suicide)

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \dfrac{F_2(x_k,y_k) \cdot \frac{\partial F_1(x_k,y_k)}{\partial y} - F_1(x_k,y_k) \cdot \frac{\partial F_2(x_k,y_k)}{\partial y}}{\frac{\partial F_1(x_k,y_k)}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_2(x_k,y_k)}{\partial y} - \frac{\partial F_1(x_k,y_k)}{\partial y} \cdot \frac{\partial F_2(x_k,y_k)}{\partial x}} \\ y_{k+1} = y_k + \dfrac{F_1(x_k,y_k) \cdot \frac{\partial F_2(x_k,y_k)}{\partial x} - F_2(x_k,y_k) \cdot \frac{\partial F_1(x_k,y_k)}{\partial x}}{\frac{\partial F_1(x_k,y_k)}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_2(x_k,y_k)}{\partial y} - \frac{\partial F_1(x_k,y_k)}{\partial y} \cdot \frac{\partial F_2(x_k,y_k)}{\partial x}} \end{cases}$$

Équations non linéaires

Méthode de la bissection

On sait que le $f(x)$ coupe l'axe des x entre a et b. $a_0 = a$, $b_0 = b$

$$\begin{cases} a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = x_k & \text{si } f(x_k) \cdot f(a_k) < 0 \\ a_{k+1} = x_k, b_{k+1} = b_k & \text{si } f(x_k) \cdot f(b_k) < 0 \\ x_{k+1} = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2} & \end{cases}$$

Méthode de la sécante

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Méthode de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Point fixe

Voir les autre section où on met les équations sous forme de point fixe.

$$x_{k+1} = F(x_k)$$

Erreurs

Erreur a priori :

$$E_k = \frac{L^k}{1-L} \cdot |x_1 - x_0|$$

Erreur a posteriori :

$$E_k = \frac{L}{1-L} \cdot |x_k - x_{k-1}|$$

Avec :

$$L = \max_{x \in [a,b]} |F'(x)| < 1$$

Vitesse de convergence

Plus P est grand, plus la vitesse de convergence est rapide. r est la racine de $f(x)$.

$$|x_{k+1} - r| \leq C \cdot |x_k - r|^p$$

Intégration numérique

Méthode composite du trapèze

Pour les points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ avec $x_0 = a$ et $x_n = b$.

$$\begin{cases} T(h) = h \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot f(a) + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + \frac{1}{2} \cdot f(b)\right] \\ h = \frac{b-a}{n} \end{cases}$$

Méthode du point milieu

$$\begin{cases} M(h) = h \cdot \sum_{j=0}^{n-1} f(x_{j+1/2}) \\ x_{j+1/2} = a + (j + 1/2) \cdot h \end{cases}$$

Il existe la relation suivant entre les deux méthodes :

$$T\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot [T(h) + M(h)]$$

Méthode de Simpson simple

$$S = \frac{h}{3} \cdot \left[f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Méthode de Simpson composée

$$\begin{cases} S_c = \frac{h}{3} \cdot (f(a) + 4 \cdot f(x_1) + f(b) \\ \qquad + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} [f(x_{2k}) + 2 \cdot f(x_{2k+1})] \\ x_n = a + n \cdot h \end{cases}$$

Méthode Newton-Cotes

$$\begin{cases} Q_n = \int_a^b P_n(x) \cdot dx = \sum_{j=0}^{n} w_j \cdot f(x_j) \\ w_j = \int_a^b \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k} \cdot dx \end{cases}$$

Exemple avec $n = 1$, $x_0 = a$ et $x_1 = b$ parce que ça veut juste rien dire :

$$Q_1 = \frac{h}{2} \cdot [f(x_0) + f(x_1)]$$

$n = 2$, $x_0 = a$ et $x_2 = b$

$$Q_2 = \frac{h}{3} \cdot [f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + f(x_2)]$$

$n = 3$, $x_0 = a$ et $x_3 = b$

$$Q_3 = \frac{3 \cdot h}{8} \cdot [f(x_0) + 3 \cdot f(x_1) + 3 \cdot f(x_2) + f(x_3)]$$

$n = 4$, $x_0 = a$ et $x_4 = b$

$$Q_4 = \frac{2 \cdot h}{45} \cdot [7 \cdot f(x_0) + 32 \cdot f(x_1) + 12 \cdot f(x_2) + 32 \cdot f(x_3) + 7 \cdot f(x_4)]$$

Méthode de Romberg

Pour les $T_{i,0}$, on utilise la méthode du trapèze. Pour le reste :

$$\begin{cases} T_{i,0} = T\left(\frac{h}{2^n}\right) \\ T_{i,j} = \frac{4^j \cdot T_{i,j-1} - T_{i-1,j-1}}{4^j - 1} \end{cases}$$

Ce qui donne le schéma suivant :

$$\begin{matrix} T_{0,0} & & \\ T_{1,0} & T_{1,1} & \\ T_{2,0} & T_{2,1} & T_{2,2} \end{matrix}$$

Afin d'avoir un comportement de convergence, il faut que $f(x)$ soit $2n + 2$ fois continûment dérivable

Méthode de Gauss

Juste genre vraiment j'ai rien compris là.

Interpolation