

# Formulaire PartDiff

## Généralités

Notations:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= u_y & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= u_{yy} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= u_{xx} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= u_{xy}\end{aligned}$$

Condition de linéarité:

$$\mathcal{L}(u+v) = \mathcal{L}(u) + \mathcal{L}(v)$$

$$\mathcal{L}(cu) = c\mathcal{L}(u)$$

Si  $\mathcal{L}u = 0$  : linéaire homogène

Si  $\mathcal{L}u = f$  : linéaire inhomogène

Divergence:

Pour un champ vectoriel  $\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} v_1(x, y, z) \\ v_2(x, y, z) \\ v_3(x, y, z) \end{pmatrix}$ :

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

Gradient:

Pour un champ scalaire  $u(x, y, z)$ :

$$\operatorname{grad}(u) = \nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Rotationnel:

$$\operatorname{curl}(\vec{v}) = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1(x, y, z) \\ v_2(x, y, z) \\ v_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Laplacien:

$$\Delta u = \operatorname{div}(\Delta u) = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

Quelques propriétés:

$$\operatorname{div}(u \cdot \vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla u + u \cdot \operatorname{div}(\vec{v})$$

Conditions initiales et aux bords:

$u(x, t_0) = \phi(x)$  (diffusion, flux de chaleur)

$u(x, t_0) = \phi(x)$  et  $u_t(x, t_0) = \psi(x)$  (ondes)

$u$  est spécifié : Dirichlet

$\frac{\partial u}{\partial n}$  est spécifié : Neumann

$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}$  est spécifié : Robin

Quelques types d'EDO:

Equation de transport:

$$u_t + cu_x = 0$$

Equation d'onde:

Pour une onde se propageant dans la direction  $x$ :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

Pour une onde se propageant dans deux directions:

$$u_{tt} = c^2 \Delta u = c^2 (u_{xx} + u_{yy})$$

Equation de diffusion:

$$u_t = ku_{xx}$$

EDO connues:

$$\begin{aligned}x'' + \beta^2 x &= 0 \rightarrow x = A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t) \\ x'' - \beta^2 x &= 0 \rightarrow x = C e^{\beta t} + D e^{-\beta t} \\ &= (C + D) \cosh(\beta t) + (C - D) \sinh(\beta t) \\ x'' &= 0 \rightarrow x = Et + F \\ x' \pm \beta x &= 0 \rightarrow x = G e^{\mp \beta t}\end{aligned}$$

Taylor

1D:

Le développement de Taylor de  $u(x)$  autour de  $x_i$ :

$$u(x) = u(x_i) + \frac{u'(x_i)}{1!}(x - x_i) + \frac{u''(x_i)}{2!}(x - x_i)^2 + \frac{u'''(x_i)}{3!}(x - x_i)^3 + \dots$$

2D:

Le développement de Taylor de  $u(x, y)$  autour de  $(x_i, y_i)$ :

$$\begin{aligned}u(x, y) &= u(x_i, y_i) + (u_x + u_y)(x - x_i, y - y_i) \\ &\quad + \frac{1}{2!}(u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy})(x - x_i, y - y_i)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}(u_{xxx} + 3u_{xxy} + 3u_{xyy} + u_{yyy})(x - x_i, y - y_i)^3 + \dots\end{aligned}$$

Max-norm:

$$\|u\|_\infty = \max_{x \in \Omega} |u(x)|$$

EDP linéaire du premier ordre

Quelques équations simples:

$$1) \quad u_{xx} = 0 \quad \text{Solutions } u(x, y)$$

On intègre par rapport à  $x$ :

$$u_x = \cancel{x} f(y) \quad f \text{ fonction quelconque de } y$$

On intègre par rapport à  $x$ :

$$u(x, y) = x \cdot f(y) + g(y) \quad g \text{ " " } y$$

$$2) \quad u_{xx} + u = 0 \quad u(x, y)$$

Si  $u$  était une fonction de  $x$  uniquement ( $\in \mathbb{R}_0$ )  
solution

$u = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$ . Comme  $u$  dépend de  $y$  également, on a,

$$u(x, y) = f(y) \cdot \cos(x) + g(y) \cdot \sin(x)$$

A ce stade  $f$  et  $g$  sont des fonctions arbitraires de  $y$

$$3) \quad u_{xy} = 0$$

On intègre par rapport à  $x$ :  $u_y = f(y)$

On intègre par rapport à  $y$ :  $u(x, y) = F(y) + g(x)$

$$\text{avec } F'(y) = f(y)$$

Equation à coefficients constants:

$$au_x + bu_y = 0$$

$$u(x, y) = f(bx - ay)$$

$$\underline{\text{Exemple : }} \quad 4u_x - 3u_y = 0 \quad u(0, y) = y^3 \quad a = -3 \quad b = 4$$

On note

$$f(-3x - 4y) = u(x, y)$$

$$\omega = -4y$$

$$u(0, y) = f(-4y) = y^3 \Rightarrow f(\omega) = -\frac{\omega^3}{64}$$

$$\text{Ainsi } \quad u(x, y) = f(-3x - 4y) = -\frac{(-3x - 4y)^3}{64} = \frac{(3x + 4y)^3}{64}$$

Equation à coefficients variables:

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}$$

Solution générale:

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$$

Fonction d'erreur:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-p^2} dp$$

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2} dp = \sqrt{\pi} \\ \int_0^{\infty} e^{-p^2} dp = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$f$  et  $g$  sont deux fonction quelconques d'une seule variable.  
Solution avec condition initiales:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x + ct) + \psi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds$$

$$3) u_x + 2xy^2 u_y = 0 \quad a = 1 \quad b = 2xy^2$$

$$\text{EDO: } \frac{dy}{dx} = 2xy^2 \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int 2x dx$$

$$+ \frac{1}{y} = -x^2 + C_1$$

Solution  $u(x, y)$ :

$$u(x, y) = f(c)$$

$$y = \frac{1}{c - x^2} : \text{ isoler } c :$$

$$c = x^2 + \frac{1}{y} \Rightarrow u(x, y) = f(x^2 + \frac{1}{y})$$

$$y = \frac{1}{c - x^2} \quad (c = -c_1)$$

Courbes caractéristiques de l'EDP

## EDP linéaire du second ordre

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

$A, B, C, D, E, F, G$  constantes ou des fonctions de  $x$  et  $y$ .

Parabolique si  $B^2 - 4AC = 0$

Hyperbolique si  $B^2 - 4AC > 0$

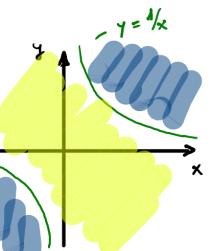
Elliptique si  $B^2 - 4AC < 0$

Trouver les régions de l'EDP:

$$yu_{xx} - 2u_{xy} + xu_{yy} = 0$$

Parabolique :

$$4 - 4xy = 4(1 - xy) = 0 \Rightarrow 1 = xy \Rightarrow y = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$



Hyperbolique :  $1 - xy > 0 \Leftrightarrow xy < 1$

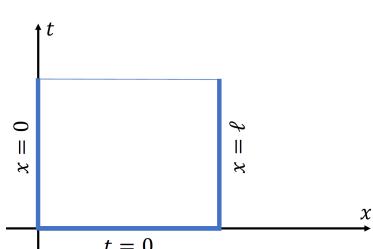
$$x > 0 : y < \frac{1}{x}$$

$$x < 0 : y > \frac{1}{x}$$

Elliptique :  $xy > 1$

$$x > 0 : y > \frac{1}{x}$$

$$x < 0 : y < \frac{1}{x}$$



La valeur minimale à la même propriété.  
Solution avec condition initiale:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \phi(y) dy$$

Résoudre l'équation de diffusion avec la condition initiale:

$$\begin{cases} \phi(x) = 1 \text{ pour } x > 0 \\ \phi(x) = 3 \text{ pour } x < 0 \end{cases}$$

On sait

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \phi(y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy + \frac{3}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy \\ &\quad p = \frac{y-x}{\sqrt{4kt}} \quad \frac{dp}{dy} = \frac{1}{\sqrt{4kt}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^{\infty} e^{-p^2} dp - \frac{3}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^{\infty} e^{-q^2} dq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^{\infty} e^{-p^2} dp &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^0 e^{-p^2} dp + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-p^2} dp \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right) + \frac{1}{2} \\ - \frac{3}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^{\infty} e^{-q^2} dq &= -\frac{3}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^{\infty} e^{-q^2} dq - \frac{3}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-q^2} dq \\ &= \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right) \end{aligned}$$

. On somme et on obtient le résultat

## Équation d'onde

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

## Problèmes bornés

### Problème de Dirichlet:

Onde:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{l} t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

Diffusion:

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) \end{cases}$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

### Problème de Neumann:

Onde:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} A_0 + \frac{1}{2} B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{l} t\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$\phi(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2} B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} B_n \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

### Diffusion:

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} \\ u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) \end{cases}$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt} \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$\phi(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

### Valeurs propres et fonctions propres:

Exemple:

Résoudre avec les conditions Dirichlet:

$$u_t = ju_{xx}$$

$$\text{On pose } u(x, t) = X(x)T(t) \Rightarrow$$

$$X \cdot T' = j X'' \cdot T$$

$$\Leftrightarrow j \frac{T'}{T} = -\frac{X''}{X} = \lambda = \beta^2 \quad (\text{constante } \lambda > 0)$$

Pour  $T$ :

$$\frac{dT}{T} = -j\beta^2 \Rightarrow T(t) = e^{-j\beta^2 t}$$

$$\text{Pour } X \text{ (comme dans le cours)} : \quad \text{On pose } \lambda = \beta^2$$

$$X'' + \lambda X = 0 \Rightarrow X(x) = B \cos(\beta x) + A \sin(\beta x)$$

$$\text{Conditions aux bords } u(0, t) = 0 \Rightarrow X(0) = B = 0$$

$$u(l, t) = A \sin(\beta l) = 0 \Rightarrow \beta_n = \frac{n\pi}{l} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{et donc } u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-j\frac{n\pi}{l} t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

Dans ce cas-ci, la valeur propre est  $\lambda = \beta^2 = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$  trouvée en résolvant  $\frac{-X''}{X} = \lambda$  et la fonction propre est  $T(t) = e^{-j\beta^2 t}$  trouvée en résolvant  $j \frac{T'}{T} = \lambda$ .

Conditions mixte

$$\lambda = \frac{(n+1/2)^2 \pi^2}{l^2}$$

La fonction propre est elle à calculer selon les conditions au bord spécifiées.

### Fonctions harmoniques

Résolution similaire aux problèmes bornés.

#### Exemple:

On veut résoudre:

$$\begin{cases} u(x, y) = \Delta u = u_{xx} + u_{yy} \\ D = \{0 < x < a, 0 < y < b\} \end{cases}$$

avec les conditions aux bords:

$$\boxed{\begin{array}{c} u = g(x) \\ u = 0 \\ u_y + u = 0 \\ u_x = 0 \end{array}}$$

trouver les valeurs propres et les fonctions propres :

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & \text{pour } 0 \leq x \leq a \\ Y'' - \lambda Y = 0 & \text{pour } 0 \leq y \leq b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = \beta^2 = (n+1/2)^2 \frac{\pi^2}{a^2} \\ X(x) = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) = B \sin(\beta x) \\ \text{car } X(0) = X'(a) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y(y) = A \cosh(\beta y) + B \sinh(\beta y) = \beta \cosh(\beta y) - \sinh(\beta y) \\ \text{car } Y'(0) + Y(0) = C + D\beta = 0 \Rightarrow D = -1 \text{ et } C = \beta \end{cases}$$

il reste à sommer la série est trouver  $g(x)$

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} [B_n \sin(\beta_n x) (\beta_n \cosh(\beta_n y) - \sinh(\beta_n y))]$$

$$u(x, b) = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{B_n (\beta_n \cosh(\beta_n b) - \sinh(\beta_n b))}_{E_n} \sin(\beta_n x)$$

#### Formule de poisssons:

On veut séparer les variables en coordonnées polaires  $u = R(r)\Theta(\theta)$ :

$$u_{xx} = +u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}$$

puis on procède comme d'habitude.

# Calcul des coefficients de Fourier:

## Série en sinus - Dirichlet

Pour l'équation de diffusion:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \quad n = 1, 2, \dots$$

Pour l'équation d'onde:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\frac{n\pi c}{l} B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \quad n = 1, 2, \dots$$

## Série en cosinus - Neumann:

Pour l'équation de diffusion:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Pour l'équation d'onde:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$B_0 = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) dx$$

$$\frac{n\pi c}{l} B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \quad n = 1, 2, \dots$$

## Série en cosinus et sinus - périodique:

$$A_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \phi(x) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$B_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \phi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \quad n = 1, 2, \dots$$

# Laplace

Table des transformées de Laplace:

$f(t)$	$F(s)$
$H(t)$	$\frac{1}{s}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\sqrt{t}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}s^{-3/2}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\pi}s^{-1/2}$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$H(t-b)$	$\frac{e^{-bs}}{s}$
$\delta(t-b)$	$e^{-bs}$
$a(4\pi t^3)^{-1/2}e^{-a^2/4t}$	$e^{a\sqrt{s}}$
$(\pi t)^{-1/2}e^{-a^2/4t}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{a\sqrt{s}}$
$1 - \text{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{4t}}\right)$	$\frac{1}{s}e^{a\sqrt{s}}$

Propriétés:

Fonction	Transformée
$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
$\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0)$
$\frac{d^2f}{dt^2}$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$e^{bt}f(t)$	$F(s-b)$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(\tilde{s})d\tilde{s}$
$tf(t)$	$-\frac{dF}{ds}$
$H(t-b)f(t-b)$	$e^{-bs}F(s)$
$f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$
$\int_0^t g(t-\tilde{t})f(\tilde{t})d\tilde{t}$	$G(s)F(s)$

Exemples:

PartDiff      Semaine 7      11.11.23

Ex 6)

$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + \cos(\omega t) \sin(\pi x) & 0 < x < 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \end{cases}$

$\begin{aligned} s^2 U(x,s) - \cancel{S} u(x,0) - \cancel{U}(x,0) &= c^2 U_{xx}(x,s) + \frac{s}{s^2 + \omega^2} \sin(\pi x) \\ c^2 U_{xx}(x,s) - s^2 U(x,s) &= -\frac{s}{s^2 + \omega^2} \sin(\pi x) \end{aligned}$

$\begin{aligned} U_{xx}(x,s) - \frac{s^2}{c^2} U(x,s) &= -\frac{1}{c^2 s^2 + \omega^2} \sin(\pi x) \end{aligned} \quad \text{E.O.O}$

Solution homogène

$U_{xx}(x,s) - \frac{s^2}{c^2} U(x,s) = 0$

$s^2 - \frac{s^2}{c^2} = 0 \rightarrow U_h(x,s) = C_1 e^{\frac{s}{c}x} + C_2 e^{-\frac{s}{c}x} \quad (\text{voir ex 6})$

Solution particulière

$U_p(x,s) = A \sin(\pi x) \quad U'_p(x,s) = A\pi \cos(\pi x)$

$U''_p(x,s) = -A\pi^2 \sin(\pi x)$

$-A\pi^2 \sin(\pi x) - \frac{s^2}{c^2} A \sin(\pi x) = -\frac{1}{c^2} \frac{s}{s^2 + \omega^2} \sin(\pi x)$

$\rightarrow A = \frac{s}{(s^2 + c^2\pi^2)(s^2 + \omega^2)}$

$U_p(x,s) = \frac{s}{(s^2 + c^2\pi^2)(s^2 + \omega^2)} \sin(\pi x)$

Solution générale

$$U(x,s) = U_h(x,s) + U_p(x,s)$$

$$= C_1 e^{\frac{s}{c}x} + C_2 e^{-\frac{s}{c}x} + \frac{s}{(s^2 + c^2\pi^2)(s^2 + \omega^2)} \sin(\pi x)$$

conditions aux bord

$$U(0,s) = 0 \quad U(1,s) = 0$$

$$\begin{cases} U(0,s) = C_1 + C_2 + 0 = 0 \\ U(1,s) = C_1 e^{\frac{s}{c}} + C_2 e^{-\frac{s}{c}} + 0 = 0 \end{cases} \rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

$$U(x,s) = \frac{s}{(s^2 + c^2\pi^2)(s^2 + \omega^2)} \sin(\pi x)$$

$$U(x,t) \rightarrow \frac{AS+B}{s^2 + c^2\pi^2} + \frac{DS+E}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{(s^2 + c^2\pi^2)(s^2 + \omega^2)}$$

$$S = AS^3 + AS\omega^2 + BS^2 + BW^2 + DS^3 + DSC^2\pi^2 + ES^2 + EC^2\pi^2$$

$$\begin{cases} A + D = 0 \\ B + E = 0 \\ AW^2 + DC^2\pi^2 = 1 \\ BW^2 + EC^2\pi^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} A = \frac{1}{w^2 - c^2\pi^2} \\ B = 0 \\ D = \frac{-1}{w^2 - c^2\pi^2} \\ E = 0 \end{array}$$

$$\frac{1}{w^2 - c^2\pi^2} \cdot \frac{s}{s^2 - c^2\pi^2} - \frac{1}{w^2 - c^2\pi^2} \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{(s^2 + c^2\pi^2)(s^2 + \omega^2)}$$

$$\Rightarrow U(x,t) = \frac{\sin(\pi x)}{w^2 - c^2\pi^2} \left( \cos(c\pi t) - \cos(\omega t) \right) \rightarrow w \neq \pi c$$

Si  $w = \pi c$  voir corrigé page  
alors vont mega flammé

# Méthode des différences finies

## Principe:

On veut discréteriser une fonction  $u(x, y)$  sur un domaine  $\Omega$  en utilisant un pas  $h$ .

$$\underbrace{-\Delta u(x, y) + c(x, y)u(x, y)}_{\mathcal{L}u} = f(x, y)$$

$$\mathcal{L}u = f \leftrightarrow \mathcal{L}_h \vec{u}_h = \vec{f}_h$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_h & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_h \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_h \\ | \end{pmatrix}$$

## Discréétisation:

Pour un pas  $h = x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1}$ .

Décentré à droite (forward):

$$\frac{du}{dx} \approx \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_y}$$

Décentré à gauche (backward):

$$\frac{du}{dx} \approx \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h} \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_y}$$

Centré (différences finies):

$$\frac{du}{dx} \approx \frac{u(x_i + h) - u(x_i - h)}{2h} \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_y}$$

## Deuxième ordre:

$$\frac{d^2u}{dx^2} \approx \frac{u(x_i - h) - 2u(x_i) + u(x_i + h)}{h^2} \approx \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h_x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h_y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \approx \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4h_x h_y}$$

## Exemple 1D:

Soit le problème suivant:

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) & \text{dans } \Omega = (0, 1) \\ u(0) = \alpha \\ \lambda u(1) + u'(1) = g & (CB : Robin) \end{cases}$$

On sait que  $x_1 = 0$  et donc que  $u_1 = \alpha$ . Pour les  $x_i$  ont discréétisé l'équation différentielle:

$$-\left(\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}\right) + c_i u_i = f_i$$

$$-\frac{1}{h^2} u_{i-1} + \frac{1}{h^2} u_i (2 + h^2 c_i) - \frac{1}{h^2} u_{i+1} = f_i$$

$$\frac{1}{h^2} [-u_{i-1} + u_i (2 + h^2 c_i) - u_{i+1}] = f_i$$

On sait que  $x_N = 1$ , discréétisée par le technique du point fictif la condition au bord de Robin:

$$\lambda u_N + \frac{u_{N+1} - u_{N-1}}{2h} = g$$

$$u_{N+1} = 2h(g - \lambda u_N) + u_{N-1}$$

En supposant que l'équation différentielle est valide aussi au bord  $x_N = 1$  on la discréétise:

$$-\left(\frac{u_{N-1} - 2u_N + u_{N+1}}{h^2}\right) + c_N u_N = f_N$$

Dans laquelle on substitue  $u_{N+1}$ :

$$-\left(\frac{u_{N-1} - 2u_N + 2h(g - \lambda u_N) + u_{N-1}}{h^2}\right) + c_N u_N = f_N$$

$$-\left(\frac{u_{N-1} - 2u_N + 2hg - 2h\lambda u_N + u_{N-1}}{h^2}\right) + c_N u_N = f_N$$

$$-\frac{2}{h^2} u_{N-1} + \frac{1}{h^2} u_N (2 + 2h\lambda + h^2 c_N) = f_N + \frac{2g}{h}$$

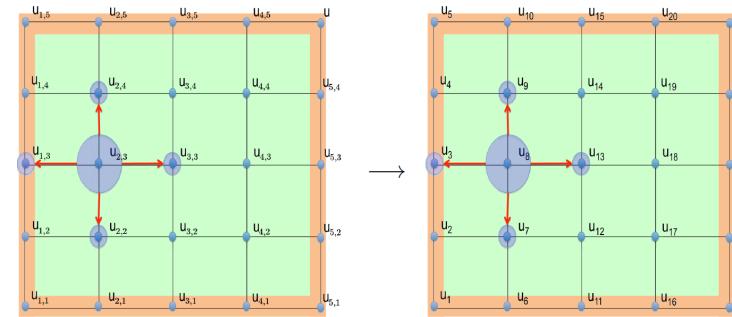
$$\frac{1}{h^2} [-2u_{N-1} + u_N (2 + 2h\lambda + h^2 c_N)] = f_N + \frac{2g}{h}$$

On obtient donc le système suivant:

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 + h^2 c_2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 + h^2 c_3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 + h^2 c_{N-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 + 2h\lambda + h^2 c_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{h^2} \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N + \frac{2g}{h} \end{pmatrix}$$

## Exemple 2D:

On veut trouver une approximation numérique de  $-\Delta u = f(x, y)$  dans  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ . Couvrir  $\Omega$  avec un maillage régulier de pas  $h_x = h_y = h$ :



Approchée, l'équation différentielle devient:

$$-\Delta u(\vec{x}_{i,j}) \approx \frac{1}{h_x^2} [-u_{i-1,j} + 2u_{i,j} - u_{i+1,j}] + \frac{1}{h_y^2} [-u_{i,j-1} + 2u_{i,j} - u_{i,j+1}]$$

Comme  $h_x = h_y = h$ :

$$-\Delta u(\vec{x}_{i,j}) \approx \frac{1}{h^2} [4u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1}]$$

En réécrivant  $u_{i,j} \rightarrow u_l$ ,  $l = 1, \dots, N$ . On a par exemple pour  $\vec{x}_{2,3} = \vec{x}_8$ :

$$-\Delta u(\vec{x}_8) \approx \frac{1}{h^2} [4u_8 - u_3 - u_1 - u_7 - u_9]$$

C'est le stencil à 5 points:

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} \cdot & -1 & \cdot \\ -1 & 4 & -1 \\ \cdot & -1 & \cdot \end{bmatrix}$$

## Analyse de convergence

### Erreur de troncature

L'erreur de troncature est l'erreur commise en remplaçant une dérivée par une différence finie:

$$|e'_h(x_i)| = |u'_h(x_i) - u'(x_i)| \leq C \cdot h^p$$

avec  $p$  l'ordre du stencil (degré de la dérivée approchée).

Exemple:

Pour déterminer l'erreur de troncature, on exprime le stencil grâce Taylor. Pour un schéma centré  $u'(x_i)$ :

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u(x_i + h) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) \\ &\quad + \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x_i) + \dots \\ u_{i-1} &= u(x_i - h) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) \\ &\quad - \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x_i) + \dots \end{aligned}$$

et on soustrait les deux équations:

$$\begin{aligned} u_{i+1} - u_{i-1} &= 2hu'(x_i) + \frac{h^3}{3}u'''(x_i) + \dots \\ u'(x_i) &= \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - \frac{h^2}{6}u'''(x_i) + \dots \end{aligned}$$

Ce qui donne l'erreur de troncature:

$$e'_h(x_i) \leq \underbrace{\frac{h^2}{6}u'''(x_i) \cdot h^2}_C$$

### Vitesse de couvergence (erreur à priori)

$$\begin{aligned} \|(\vec{u})_h - \vec{u}_h\|_\infty &\leq C \cdot h^p \\ \|(\vec{u})_h - \vec{u}_h\|_\infty &\leq \underbrace{\|\mathcal{L}_h^{-1}\|_\infty}_{\leq C_S} \cdot \underbrace{\|\mathcal{L}_h(\vec{u})_h - \mathcal{L}_h \vec{u}_h\|_\infty}_{\kappa h^p} \leq C_S \kappa h^p \end{aligned}$$

avec  $C_S$  la stabilité et  $\kappa h^p$  la consistance.

### Problèmes évolutifs

#### Méthode explicite:

$$\frac{d\vec{u}_h(t_k)}{dt} \approx \frac{\vec{u}_h(t_k + \tau) - \vec{u}_h(t_k)}{\tau} = \frac{\vec{u}_h^{(k+1)} - \vec{u}_h^{(k)}}{\tau}$$

Puis faire Euler, Heun, Runge-Kutta (voir formulaire CompAlg). Il faut que  $\tau$  soit suffisamment petit pour que la méthode soit stable:

$$\tau \leq \frac{2}{\lambda_{max}}$$

$\lambda_{max}$  est la plus grande valeur propre de la matrice  $A$  du problème de Cauchy.

#### Méthode implicite:

$$\frac{d\vec{u}_h(t_{k+1})}{dt} \approx \frac{\vec{u}_h(t_{k+1}) - \vec{u}_h(t_{k+1} - \tau)}{\tau} = \frac{\vec{u}_h^{(k+1)} - \vec{u}_h^{(k)}}{\tau}$$

#### Exemple:

Soit le problème suivant:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= f(x, t) && \text{dans } \Omega = (a, b) \text{ et pour } t > t_0, \\ u(a, t) &= \alpha(t) && \text{cond. au bord de Dirichlet pour tout } t > t_0 \\ u'(b, t) &= \beta'(t) && \text{cond. au bord de Neumann pour tout } t > t_0 \\ u(x, t_0) &= u^{(0)}(x) && \text{condition initiale pour tout } x \in \bar{\Omega} \text{ au temps } t_0. \end{aligned}$$

#### Semi-discréétisation en espace:

Discrétiser l'équation par les différences finies centrées en espace et préparer le problème de Cauchy pour l'itération en temps:

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  (NB: on numérote les noeuds à partir de 0),

où on pose  $u_i(t) \approx u(x_i, t)$ ,  $u_i^{(0)} = u^{(0)}(t_0)$  et  $f_i(t) = f(x_i, t)$ :

$$\begin{aligned} u_0(t) &= \alpha(t) \\ \frac{du_i(t)}{dt} + \frac{\mu}{h^2} \left[ -u_{i-1}(t) + 2u_i(t) - u_{i+1}(t) \right] &= f_i(t) && \text{pour tout } i = 1, \dots, N-1, \\ \frac{du_N(t)}{dt} + \frac{\mu}{h^2} \left[ -u_{N-1}(t) + 2u_N(t) - u_{N+1}(t) \right] &= f_N(t) && \text{technique du point fictif } u_{N+1}(t), \\ \frac{1}{2h} \left[ u_{N+1}(t) - u_{N-1}(t) \right] &= \beta'(t) && \rightarrow u_{N+1}(t) = u_{N-1} + 2h\beta'(t) \\ u_i(t_0) &= u_i^{(0)} && \text{pour tout } i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Eliminer la valeur fictive  $u_{N+1}(t)$  et la valeur de la condition au bord  $u_0(t) = \alpha(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{du_1(t)}{dt} + \frac{\mu}{h^2} \left[ 2u_1(t) - u_2(t) \right] &= f_1(t) + \frac{\mu}{h^2} \alpha(t) && \text{pour tout } i = 1, \\ \frac{du_i(t)}{dt} + \frac{\mu}{h^2} \left[ -u_{i-1}(t) + 2u_i(t) - u_{i+1}(t) \right] &= f_i(t) && \text{pour tout } i = 2, \dots, N-1, \\ \frac{du_N(t)}{dt} + \frac{\mu}{h^2} \left[ -2u_{N-1}(t) + 2u_N(t) \right] &= f_N(t) + \frac{2\mu}{h} \beta'(t) \\ u_i(t_0) &= u_i^{(0)} && \text{pour tout } i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Sous forme matricielle:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ \vdots \\ u_{N-1}(t) \\ u_N(t) \end{pmatrix}}_{\vec{u}_h(t)} + \frac{\mu}{h^2} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -2 & 2 \end{pmatrix}}_{A = \mathcal{L}_h} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ \vdots \\ u_{N-1}(t) \\ u_N(t) \end{pmatrix}}_{\vec{u}_h(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_1(t) + \frac{\mu}{h^2} \alpha(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \\ \vdots \\ f_{N-1}(t) \\ f_N(t) + \frac{2\mu}{h} \beta'(t) \end{pmatrix}}_{\vec{b}_h(t)}$$

$$\begin{pmatrix} u_1(t_0) \\ u_2(t_0) \\ \vdots \\ u_N(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^{(0)} \\ u_2^{(0)} \\ \vdots \\ u_N^{(0)} \end{pmatrix}$$

Pour obtenir le problème de Cauchy, on isole  $\frac{d\vec{u}_h(t)}{dt}$

$$\frac{d\vec{u}_h(t)}{dt} = \overbrace{\vec{b}_h(t) - A\vec{u}_h(t)}^{\vec{f}(t, \vec{u}_h(t))}$$

#### Discréétisation:

connaissant la solution exacte  $u(x, t)$ :

$$u(x, t) = e^{-\mu t}x \cos(x) + e^{-\frac{4}{9}\pi^2\mu t} \sin(\frac{3\pi}{2}x)$$

On peut calculer  $u_i(0)$ :

$$u_i(0) = u(x_i, 0) = x_i \cos(x_i) + \sin(\frac{3\pi}{2}x_i)$$

#### Résolution numérique:

Avec Euler, Heun, Runge-Kutta on itère en temps, dans ce cas on prend Euler:

$$\vec{u}_h^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1 \cos(x_1) + \sin(\frac{3\pi}{2}x_1) \\ x_2 \cos(x_2) + \sin(\frac{3\pi}{2}x_2) \\ \vdots \\ x_N \cos(x_N) + \sin(\frac{3\pi}{2}x_N) \end{pmatrix}$$

# Méthode des volumes finis

Flux:

Convectif:

$$\int_{\partial C_{ij}} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \approx \phi_{ij}^C(u) = |\partial C_{ij}| (\vec{v}_{ij} \cdot \vec{n}_{ij}) \cdot u_{ij}$$

Diffusif:

$$\int_{\partial C_{ij}} (\mu \nabla u) \cdot \vec{n} dS \approx \phi_{ij}^D(u) = |\partial C_{ij}| \frac{\mu}{l_{ij}} (u_j - u_i)$$

Création du maillage (diagramme de Voronoi):

