

Un projet \mathcal{P} est constitué par :

- un ensemble de tâches à réaliser $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ avec pour chaque tâche, une date de commencement t_i et une durée d_i ;
- un ensemble de « contraintes » sur les tâches du projets, contraintes qui peuvent s'exprimer par des inégalités faisant intervenir les dates (t_i) et les durées (d_i) .

Trouver un ordonnancement pour le projet consiste à calculer, à partir des durées (d_i) , des dates de commencement (t_i) qui soient compatibles avec les contraintes du projet.

Pour rendre tout cela plus lisible nous allons traduire les contraintes sous forme d'inégalités entre les dates de commencement de chaque tâche. Il faudra pour cela bien identifier les différents types de contrainte.

Type de contraintes On traduira les différentes contraintes en inégalités de la manière suivante :

- **contrainte au plus tôt** : « la tâche A_j commence au plus tôt δ après le début de la tâche A_i » :

$$t_j - t_i \geq \delta.$$

- **contrainte au plus tard** : « la tâche A_j commence au plus tard δ après le début de la tâche A_i » :

$$t_j - t_i \leq \delta \quad \Leftrightarrow \quad t_i - t_j \geq -\delta.$$

- **contraintes implicites** : « toute tâche A_i doit démarrer au plus tôt au début du projet (A_1) et finir au plus tard à la fin du projet (A_n) » :

$$t_i - t_1 \geq 0 \quad \text{et} \quad t_n - t_i \geq d_i.$$

0.0.1 Le projet

Un projet et ses contraintes se présentent en général sous forme de tableau :

| Tâches | Opérations et contraintes | Durée (jours) |
|--------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| 1 | <i>début du projet</i> | 0 |
| 2 | aucune contrainte | 11 |
| 3 | commence au plus tôt 1 jour après le début du projet commence au plus tard 8 jours après le début de (4) | 5 |
| 4 | commence au plus tôt 1 jour après la fin de (2) | 8 |
| 5 | commence au plus tôt 1 jour avant la fin de (2) | 5 |
| 6 | commence au plus tôt après le début de (4) commence au plus tôt après la fin de (5) | 4 |
| 7 | <i>fin du projet</i> | 0 |

Exercice 1 : Traduire chaque contrainte en une inégalité :

| Contraintes | Inéquation |
|---------------------------------------------------------|------------|
| (3) commence au plus tôt 1 jour après le début de (1) | |
| (3) commence au plus tard 8 jours après le début de (4) | |
| (4) commence au plus tôt 1 jour après la fin de (2) | |
| (5) commence au plus tôt 1 jour avant la fin de (2) | |
| (6) commence au plus tôt après le début de (4) | |
| (6) commence au plus tôt après la fin de (5) | |

À partir des équations obtenues on va pouvoir représenter ce projet par un graphe orienté et valué.

Définition 1 (Graphe potentiel-tâches)

On associe à un problème d'ordonnancement un graphe orienté et valué $G = (S, A, f)$ tel que :

- chaque tâche A_i du projet est représentée par un sommet x_i du graphe ;
- chaque contrainte $t_j - t_i \geq d$ du projet est représentée par un arc (x_i, x_j) de valuation $f(x_i, x_j) = d$.

On ajoute éventuellement des **contraintes implicites** pour que chaque tâche dans le graphe appartienne à au moins un chemin reliant la tâche de début de projet et celle de fin de projet.

Remarque. Il est **impératif** de modéliser le début de projet et la fin de projet par des tâches A_1 et A_n de durée nulle.

Exercice 2 :

1. Tracer le graphe associé à notre projet.
2. Il faut ajouter deux arcs correspondant à des contraintes implicites. Lesquels et pourquoi ?

0.0.2 Résolution de l'ordonnancement du projet

Théorème 1 (Ordonnancement au plus tôt)

L'ordonnancement au plus tôt d'un projet consiste à trouver les dates de commencement $\{t_i^{(-)}\}_{i=1,\dots,n}$ de chaque tâche telles que le projet soit fini le plus rapidement possible.

Pour déterminer l'ordonnancement au plus tôt d'un projet, il suffit de déterminer **les chemins les plus longs dans le graphe G** depuis le sommet correspondant au début du projet. Les distances $\{d_i^{(-)}\}_{i=1,\dots,n}$ ainsi obtenues sont les dates de commencement au plus tôt de chaque tâche :

$$t_i^{(-)} = d_i^{(-)}, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

La durée totale minimale du projet est $T_{\min} = t_n^{(-)}$.

Remarque. Lorsqu'il n'y a pas de circuits dans le graphe on peut utiliser l'algorithme de Bellman pour calculer l'ordonnancement correspondant.

Exercice 3 : Déterminer l'ordonnancement au plus tôt, au plus tard et un chemin critique.