M4202Cip : TD 3

Programmation linéaire
Algorithme du simplexe

19 janvier 2020 – B. Colombel

1 Modélisation

Exercice 1 : **(Production de vins)**
Dans une distillerie américaine on produit trois sortes de vin allemands authentiques :
Heidelberg sweet, Heidelberg regular et Deutschland extra dry. Les produits de base, la main d'œuvre et le profit par gallon sont indiqués dans le tableau ci-dessous.

	raisin - type A (boisseau)	raisin - type B (boisseau)	sucre (kg) (kg)	main d'œuvre (heures)	profit (€)
Heideberg sweet	1	1	2	2	10
Heideberg regular	2	0	1	3	12
Deutschland extra dry	0	2	0	1	20

La distillerie possède 150 boisseaux de raisin de type A, 150 boisseaux de raisin de type B, 80 kg de sucre et peut fournir 225 heures de travail.
Problèmatique : Quelles quantités faut-il produire de ces trois vins pour obtenir un profit maximum ?

Fomuler la problématique comme programme linéaire.

Exercice 2 : **(Problème de mélange)**
Un industriel veut produire un alliage Z à 30 % de plomb, 30 % de zinc et 40 % d'étain. Supposons qu'il puisse se procurer sur le marché des alliages A, B, C, D, E, F, G, H, I dont les compositions (en pourcentages) et les prix respectifs sont donnés dans le tableau suivant :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	Alliage à fabriquer
Plomb	10	10	40	60	30	30	30	50	20	30
Zinc	10	30	50	30	30	40	20	40	30	30
Étain	80	60	10	10	40	30	50	10	50	40
Coût au kilo	4.1	4.3	5.8	6	7.6	7.5	7.3	6.9	7.3	

Problématique : Combien doit-il acheter de chaque alliages A, B, C, D, E, F, G, H et I pour obtenir au prix de revient minimum un 1 Kg de l'alliage Z ?

Fomuler la problématique comme programme linéaire.

Exercice 3 : **(Problème de fabrication)**
Une P.M.E spécialisée dans la fabrication de jouets et de maquettes, réalise, entre autre, la préparation de trois modèles réduits :
- robots ;
- avons à réaction ;
- navettes spatiales.

Cette préparation s'effectue en trois étapes successives. Le tableau suivant indique le temps nécessaire, en minutes, pour chaque modèle, à chaque étape :

Étape	Robot	Avion	Navette
1 : Assemblage	3	2	7
2 : Emballage	6	3	8
3 : Vérification	2	1	5

L'entreprise peut consacrer, au plus, par jour :

— 315 minutes à l'assemblage ;
— 450 minutes à l'emballage ;
— 200 minutes à la vérification.

Le profit réalisé est de :
— 40 € pour un robot ;
— 30 € pour un avion ;
— 100 € pour une navette.

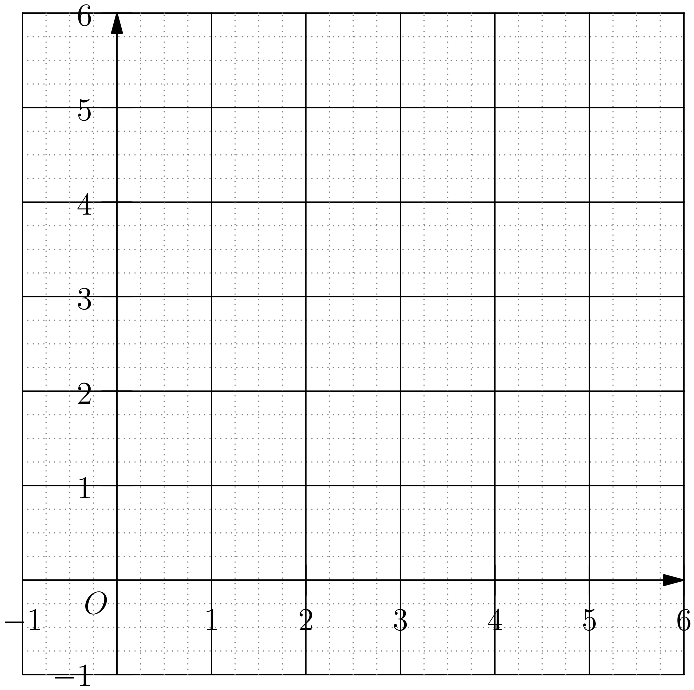
1. Formuler le programme linéaire qui détermine le programme de préparation procurant un profit maximal.
2. Un des 3 modèles n'est pas rentable par rapport aux deux autres. Lequel ? Pourquoi ?

2 Résolution graphique

Exercice 4 : **Résolution graphique**

$$\max z = 3x + 2y$$
$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} x - y \geq -2 \\ 2x + y \leq 8 \\ x + y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Soit le programme linéaire ci-contre.
1. Dessiner la région admissible R du problème.
2. Résoudre le problème graphiquement.



3 Bases d'un système linéaire

Exercice 5 : **Formes canonique et standard**
Formuler les programmes linéaires suivants sous formes canonique et standard.

$$\max z = x_1 - x_2$$
$$\text{s.c.} \quad \left| \begin{array}{rl} \frac{1}{3}x_1 + \ \ x_2 & \leq 2 \\ -2x_1 + 5x_2 & \leq 7 \\ x_1 + \ \ x_2 & \leq 4 \\ x_1 \qquad & \geq 0 \\ x_2 & \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\max z = x_1 - x_2$$
$$\text{s.c.} \quad \left| \begin{array}{rl} \frac{1}{3}x_1 + \ \ x_2 & = 2 \\ -2x_1 + 5x_2 & \leq 7 \\ x_1 + \ \ x_2 & \leq 4 \\ x_1 \qquad & \geq 0 \\ x_2 & \geq 0 \end{array} \right.$$

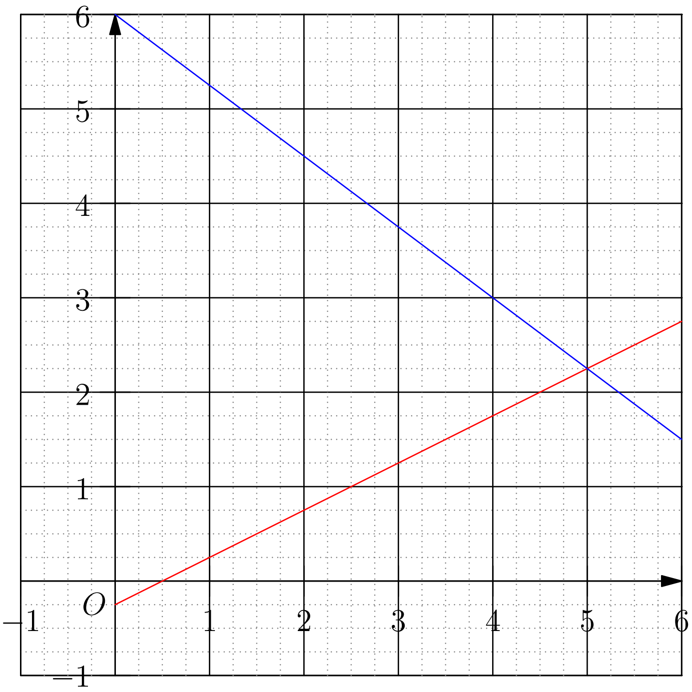
Exercice 6 : **Bases d'un programme linéaire**
On considère le programme linéaire canonique :

$$\max z = 2x_1 + 5x_2$$
$$\text{s.c.} \quad \left| \begin{array}{rl} 2x_1 - 4x_2 & \geq 1 \\ 3x_1 + 4x_2 & \leq 24 \\ x_2 & \leq 4 \\ x_1 \qquad & \leq 5 \\ x_1 \qquad & \geq 0 \\ x_2 & \geq 0 \end{array} \right.$$

1. Identifier chacune des droites représentées ci-dessous puis tracer son domaine admissible.
2. Pour chacune des bases qui suivent, identifier dans votre dessin le point correspondant à sa solution de base.
   $B_1 = x_3,x_4,x_5,x_6$,
   $B_2 = x_1,x_2,x_3,x_5$,
   $B_3 = x_2,x_3,x_5,x_6$ et
   $B_4 = x_1,x_2,x_5,x_6$.

Remarque. Les variables x_3, x_4, x_5 et x_6 correspondent aux variables d'écart introduites lors de la mise sous forme standard.

3. En vous aidant de votre dessin, donner le nombre de bases du P.L., son nombre de bases admissibles.
4. Donner toutes les bases optimales du programme linéaire ainsi que toutes les solutions optimales (et leur valeur).



4 Algorithme du simplexe

4.1 Exemple détaillé

L'entreprise Simtech doit, dans son processus de fabrication de ses produits, utiliser trois phases successives d'opération : l'usinage des pièces, l'assemblage et la finition. Pour simplifier le problème, supposons que l'entreprise fabrique trois produits que nous noterons P_1 , P_2 et P_3. Les différentes phases d'opération ne peuvent toutefois fonctionner que pendant un certain nombre d'heures. La main-d'œuvre actuelle limite le nombre d'heures disponibles aux valeurs suivantes :

Usinage :	100 heures
Assemblage :	120 heures
Finition :	200 heures

Le tableau suivant nous indique les temps de fabrication requis, en heures/unité, aux différentes phases d'opération pour fabriquer les produits P_1, P_2 et P_3.

	Produits		
	P_1	P_2	P_3
Usinage	1	2	1
Assemblage	3	4	2
Finition	2	6	4

Le département de compatibilité de l'entreprise a estimé aux valeurs suivantes la contribution au bénéfice de chaque produit :

Produits	€/unité
P_1	6
P_2	7
P_3	8

De plus, on suppose qu'il n'existe aucune restriction de marché ; il peut absorber toute la production.
On cherche à déterminer le programme optimal, c'est-à-dire celui qui maximise le bénéfice.

1. Exprimer la fonction économique à maximiser :
2. Exprimer les contraintes sous la forme d'un système d'inéquations :
3. Structurer ce programme linéaire sous sa forme standard.
4. Que représente chaque variable d'écart ?
5. Déterminer le programme initial : les équations sont :

$$x_4 = \qquad (1)$$
$$x_5 = \qquad (2)$$
$$x_6 = \qquad (3)$$

Programme de base n° 1

$x_1 =$
$x_2 =$
$x_3 =$
$x_4 =$
$x_5 =$
$x_6 =$
fct éco$_1$ =

— Variables dans le programme (les non nulles) :
— Variables hors programme (les nulles) :

6. Quelle est l'expression de la fonction économique pour le pro- gramme de base n° 1 ?
Peut-on améliorer la valeur de la fonction économique ?

7. Déterminer la variable entrante et la variable sortante :
   Variable entrante :
   (1) $\Longrightarrow$
   (2) $\Longrightarrow$
   (3) $\Longrightarrow$
   Variable sortante :
8. Déterminer la nouvelle solution : programme de base n° 2

   Programme de base n° 2
   $x_1 =$
   $x_2 =$
   $x_3 =$
   $x_4 =$
   $x_5 =$
   $x_6 =$
   fct éco$_2$ =

   — Variables dans le programme (les non nulles) :
   — Variables hors programme (les nulles) :
9. Quelle(s) équation(s) doit-on transformer ?
10. Déterminer les nouvelles relations qui existent entre les variables dans le programme de base et les variables hors programme :

$$\boxed{\begin{array}{c}\textit{variables}\\ \textit{dans le}\\ \textit{programme}\end{array}} \begin{array}{c}\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow\end{array} \begin{cases} x = & (4)\\ x = & (5)\\ x = & (6)\end{cases}$$

$$\boxed{\textit{variables hors programme}}$$

11. Déterminer la nouvelle expression de la fonction économique :
12. Le programme de base n° 2 est-il optimal ?
13. À ce stade, déterminer la variable entrante, sa valeur et la variable sortante :
   Variable entrante :
   (4) $\Longrightarrow$
   (5) $\Longrightarrow$
   (6) $\Longrightarrow$
   Variable sortante :
14. Déterminer la nouvelle solution : programme de base n° 3

   Programme de base n° 3
   $x_1 =$
   $x_2 =$
   $x_3 =$
   $x_4 =$
   $x_5 =$
   $x_6 =$
   fct éco$_2$ =

   — Variables dans le programme (les non nulles) :
   — Variables hors programme (les nulles) :
15. Quelles équations doit-on transformer ?
16. Déterminer les nouvelles relations qui existent entre les variables dans le programme de base et les variables hors programme :

$$\boxed{\begin{array}{c}\textit{variables}\\ \textit{dans le}\\ \textit{programme}\end{array}} \begin{array}{c}\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow\end{array} \begin{cases} x = & (7)\\ x = & (8)\\ x = & (9)\end{cases}$$

$$\boxed{\textit{variables hors programme}}$$

17. Déterminer la nouvelle expression de la fonction économique
18. Le programme de base n° 3 est-il optimal ?
19. Le programme optimal de fabrication de l'entreprise Simtech est :
   $P_1 =$ $P_2 =$ $P_3 =$
   Bénéfice =
   Les temps mort sont :
   Usinage = Assemblage = Finition =

4.2 Exercices

Exercice 7 :

Résoudre le programme linéaire suivant à l'aide de l'algorithme du simplexe. Spécifier à chaque itération les variables de base et hors base ainsi que le point extrême visité.

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$
$$\text{s.c.} \left| \begin{array}{lll} 2x_1 & + x_2 & \leq 7 \\ x_1 & & \leq 3 \\ x_1 + x_2 & & \leq 5 \\ x_1 & & \geq 0 \\ & x_2 & \geq 0 \end{array} \right.$$

Exercice 8 : La méthode du simplexe termine avec les équations ci-dessous :

$$\begin{array}{rl} z = & 10 - x_1 - 2x_6 \\ x_4 = & 3 - 2x_1 - x_5 + x_6 \\ x_2 = & 9 - x_1 - 2x_5 - 2x_6 \\ x_3 = & 7 + x_1 - 2x_5 - x_6 \end{array}$$

$$\begin{cases} z & = 10 - x_1 - 2x_6 \\ x_4 & = 3 - 2x_1 - x_5 + x_6 \\ x_2 & = 9 - x_1 - 2x_5 - 2x_6 \\ x_3 & = 7 + x_1 - 2x_5 - x_6 \end{cases}$$

Indiquer la solution optimale correspondante. Est-elle unique ?

Exercice 9 : Pour chacun des programmes linéaires suivants, vous devez dire si il est sous la forme d'une étape de l'algorithme du simplexe telle que vue en cours et si c'est possible, donner la solution de base associée. Cette solution de base est elle réalisable ? Est-elle optimale ?
Si la solution de base est réalisable mais non optimale, faire une itération du simplexe.

1. $\begin{cases} z = -12 + x_1 + 2x_4 \\ x_1 = 3 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \\ x_2 = 7 + \quad + \quad + 3x_3 + 5x_4 \end{cases}$
2. $\begin{cases} z = -3 + 2x_1 + x_4 \\ x_3 = 11 - 5x_1 + 3x_2 - x_4 \\ x_5 = 2 + 3x_1 + x_2 + \end{cases}$
3. $\begin{cases} z = 10 - 5x_1 + 2x_2 \\ x_3 = -1 + x_1 + 7x_2 \\ x_4 = 2 - x_1 + 3x_2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} z = 17 - x_1 + 3x_2 \\ x_3 = 6 + x_1 + 3x_2 \\ x_4 = 2 - x_1 + 7x_2 \\ x_5 = 4 + 8x_1 + 2x_2 \end{cases}$
5. $\begin{cases} z = -12 - 2x_1 - 3x_3 \\ x_4 = 0 + x_1 + \\ x_5 = 1 - 2x_1 - x_2 + \\ x_3 = 4 - x_1 + 3x_2 + \end{cases}$
6. $\begin{cases} z = 3 + 3x_1 - x_3 \\ x_2 = 1 + x_1 - 2x_3 \\ x_4 = 4 + 2x_1 - 5x_3 \end{cases}$
7. $\begin{cases} z = 13 + 5x_2 + x_3 - x_4 \\ x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_4 \\ x_3 = 4 + 8x_2 - 2x_4 \end{cases}$