Traitement mathématiques des images (II)
Analyse fréquentielle d'une image

bruno.colombel@univ-amu.fr

DUT Informatique
IUT d'Aix-Marseille
Site d'Arles

2019 — 2020

Spectre d’un signal

Série de Fourier d’un signal périodique

Transformée de Fourier

Transformée de Fourier d’une image discrète

Sommaire

Exemple musical

Si on fait vibrer une corde suffisamment tendue, elle fait aussi vibrer l'air qui se trouve à côté et produit un son.

Exemple musical

Si on fait vibrer une corde suffisamment tendue, elle fait aussi vibrer l'air qui se trouve à côté et produit un son.

- la vibration d'une corde de guitare produit un son ;

Exemple musical

Si on fait vibrer une corde suffisamment tendue, elle fait aussi vibrer l'air qui se trouve à côté et produit un son.

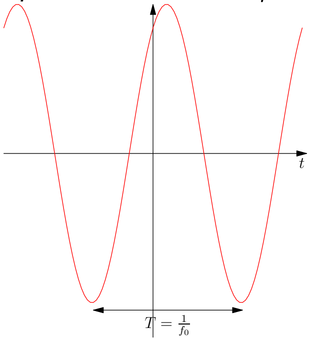
- la vibration d'une corde de guitare produit un son ;
- on obtient des sons plus ou moins graves :
  - selon l'épaisseur de la corde ;
  - selon la longueur de la corde.

Exemple musical

Mathématiquement, une onde est modélisée par :

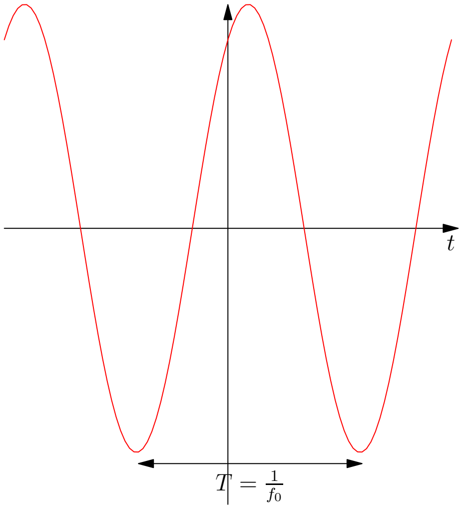
$$x(t) = A\sin(2\pi f_0 t + \varphi) \quad \text{ou } x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

où f_0 est la *fréquence de l'onde* et φ sa *phase* et A l'*amplitude*

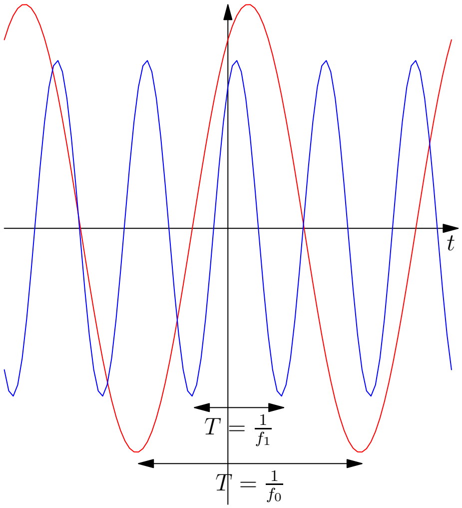


On parle de **représentation temporelle**

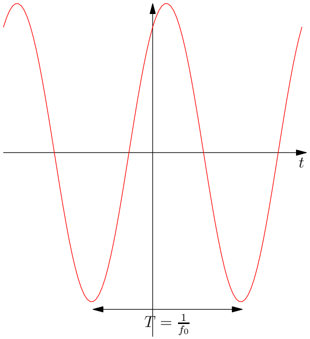
Représentation temporelle

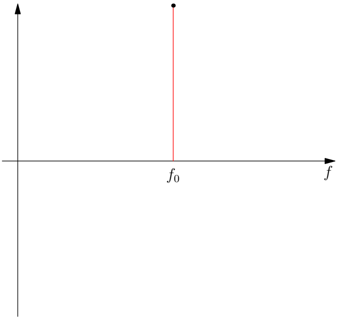


Représentation temporelle

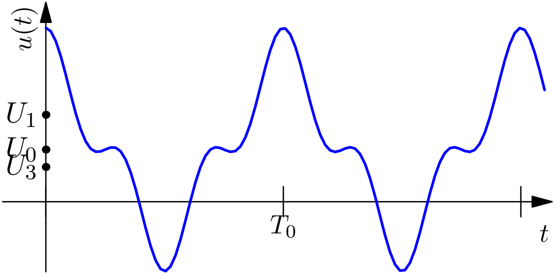


Représentation fréquentielle





Signal sinusoïdal



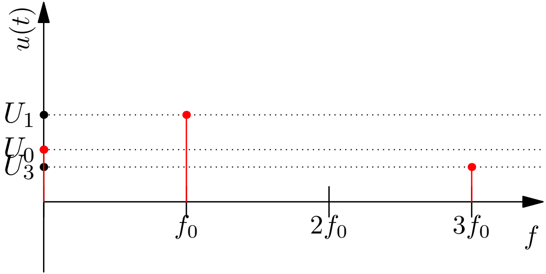
$$u(t) = U_0 + U_1 \cos(f_0 t) + U_3 \cos(3 f_0 t)$$

Signal sinusoïdal

$$u(t) = U_0 + U_1 \cos(f_0 t) + U_3 \cos(3 f_0 t)$$

Signal sinusoïdal

$$u(t) = U_0 + U_1 \cos(f_0 t) + U_3 \cos(3 f_0 t)$$



Sommaire

Série de Fourier d'un signal 1D périodique

Théorème

Soit $x(t)$ une fonction périodique de période T_0 et de fréquence $f_0 = \frac{1}{T_0}$. Alors, $x(t)$ est égale à la série :

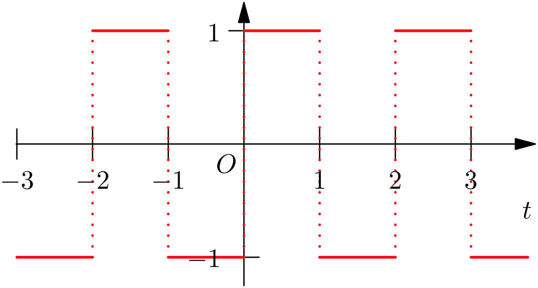
$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T_0} t \right) + b_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T_0} t \right) \right]$$

Cette série s'appelle la décomposition en série de Fourier de la fonction $x(t)$.

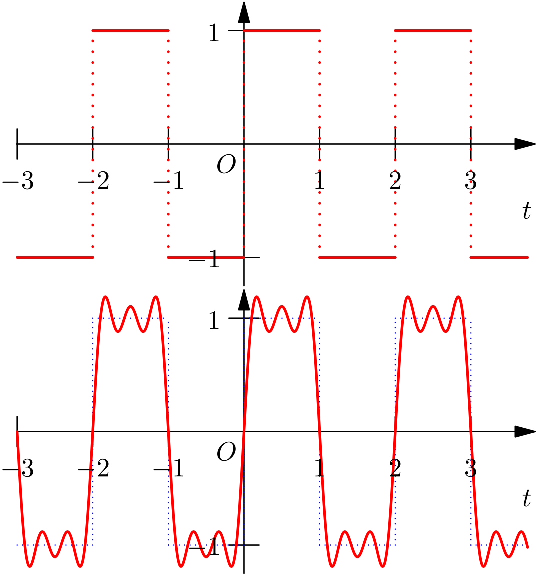
Calculs des coefficients

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_t^{t+T_0} x(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{T_0}t\right)\,\mathrm{d}t$$
$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_t^{t+T_0} x(t)\sin\left(n\frac{2\pi}{T_0}t\right)\,\mathrm{d}t$$

Série de Fourier d'un signal 1D

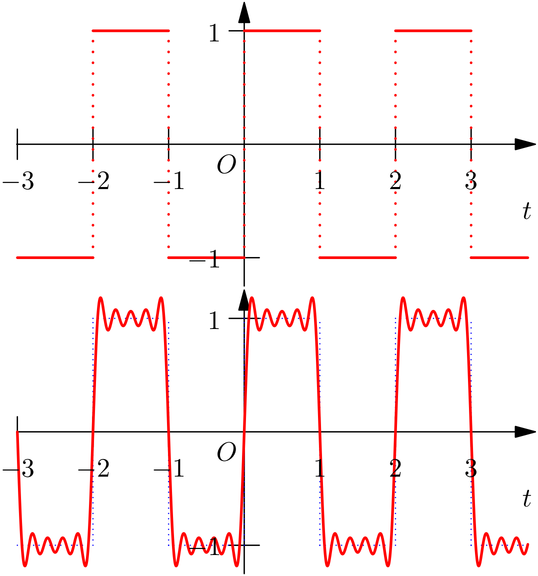


Série de Fourier d'un signal 1D



$n = 5$

Série de Fourier d'un signal 1D



$n = 9$

Série de Fourier d'un signal 1D

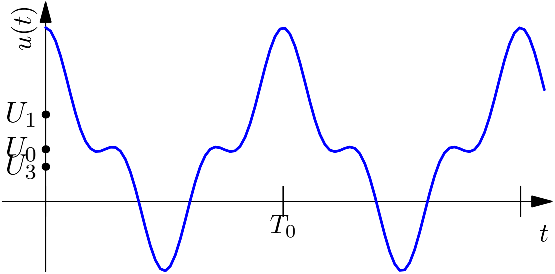
Version complexe :

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(-2\,\mathrm{i}\,\pi n f_0 t)}$$

avec

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - \mathrm{i}\, b_n) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,\pi n f_0 t}\,\mathrm{d}t$$

Signal sinusoïdal



$$u(t) = U_0 + U_1 \cos(f_0 t) + U_3 \cos(3 f_0 t)$$

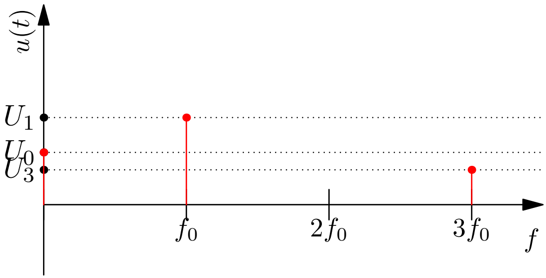
Spectre d'un signal

Signal sinusoïdal

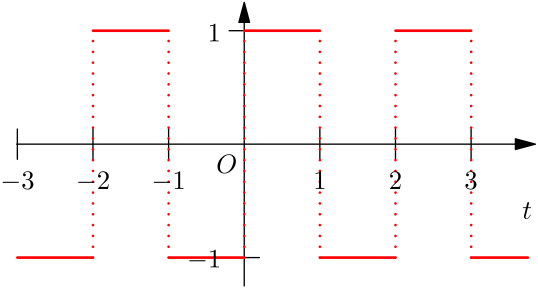
$$u(t) = U_0 + U_1 \cos(f_0 t) + U_3 \cos(3 f_0 t)$$

Signal sinusoïdal

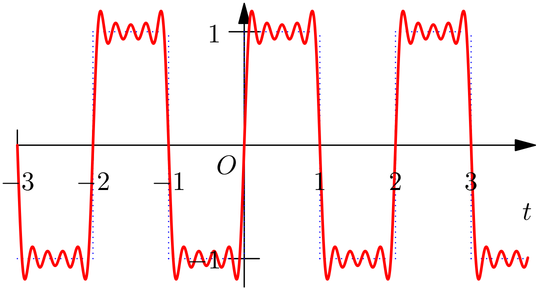
$$u(t) = U_0 + U_1 \cos(f_0 t) + U_3 \cos(3 f_0 t)$$



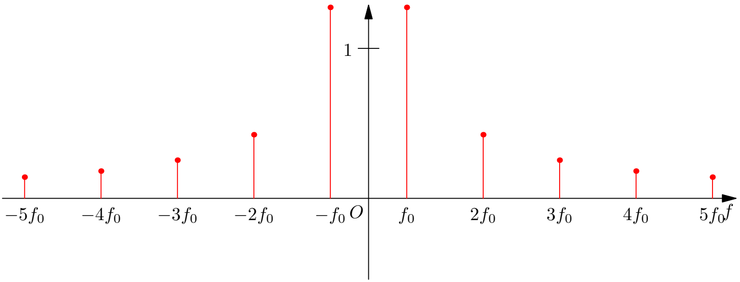
Signal périodique



Spectre de sa série de Fourier (complexe)

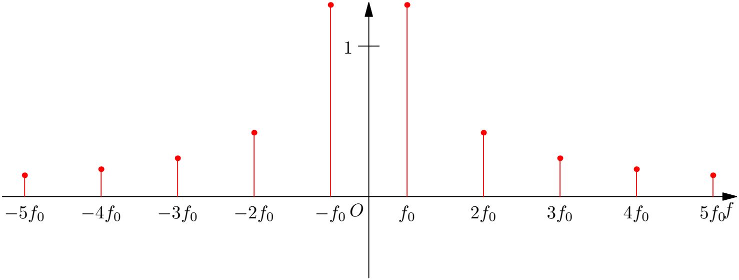


Spectre de sa série de Fourier (complexe)



Spectre d'un signal

Spectre de sa série de Fourier (complexe)

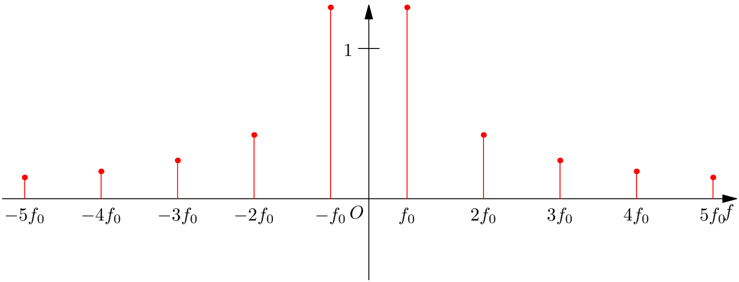


- Les raies du spectre d'amplitude ont pour hauteur :

$$|c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Spectre d'un signal

Spectre de sa série de Fourier (complexe)



- Les raies du spectre d'amplitude ont pour hauteur :

$$|c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

- $\lim\limits_{n \to \pm\infty} |c_n| = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$

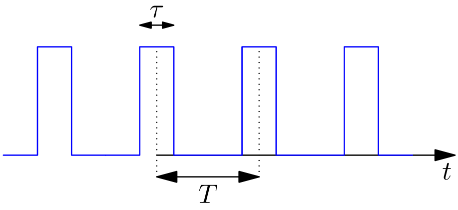
Sommaire

Passage de la série de Fourier à la densité spectrale

Principe : Généralisation des séries de Fourier aux signaux non-périodiques

cas limite d'un signal périodique lorsque $T \to +\infty$

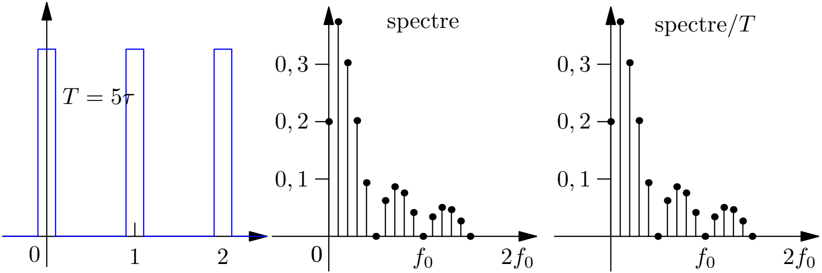
Passage de la série de Fourier à la densité spectrale



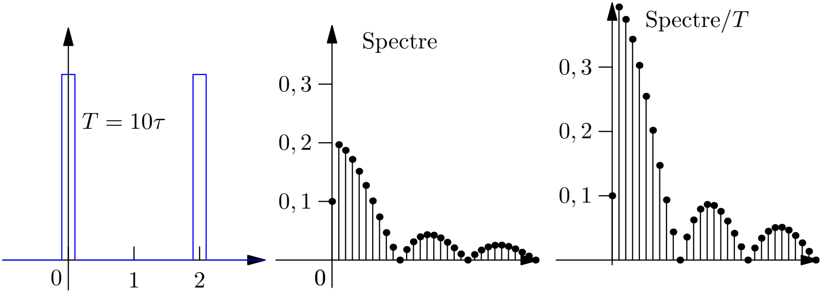
$$x(t) = E \times \frac{\tau}{T} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2E}{n\pi} \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)$$

où E est l'amplitude du signal.

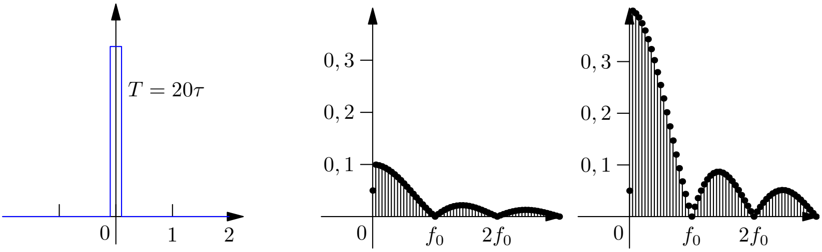
Passage de la série de Fourier à la densité spectrale



Passage de la série de Fourier à la densité spectrale



Passage de la série de Fourier à la densité spectrale



Transformée de Fourier

Généralisation au cas non périodique du calcul des coefficients de Fourier d'une fonction périodique

Transformée de Fourier

Généralisation au cas non périodique du calcul des coefficients de Fourier d'une fonction périodique

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,\pi f t}\, \mathrm{d}t$$

Transformée de Fourier

Généralisation au cas non périodique du calcul des coefficients de Fourier d'une fonction périodique

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,\pi f t}\, \mathrm{d}t$$

- $X(f) = TF(x(t))$ est une fonction de la fréquence f

Transformée de Fourier

Généralisation au cas non périodique du calcul des coefficients de Fourier d'une fonction périodique

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,\pi f t}\,\mathrm{d}t$$

- $X(f) = TF(x(t))$ est une fonction de la fréquence f
- $X(f)$ extrait une information fréquentielle sur le signal $x(t)$

Transformée de Fourier

Généralisation au cas non périodique du calcul des coefficients de Fourier d'une fonction périodique

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,\pi f t}\, \mathrm{d}t$$

- $X(f) = TF(x(t))$ est une fonction de la fréquence f
- $X(f)$ extrait une information fréquentielle sur le signal $x(t)$
- La fréquence f est-elle présente dans le signal $x(t)$?

Sommaire

Fréquence d'une image

Fréquence spatiale : « vitesse » de variation du signal $I(x, y)$ par rapport aux variables spatiale (x, y)

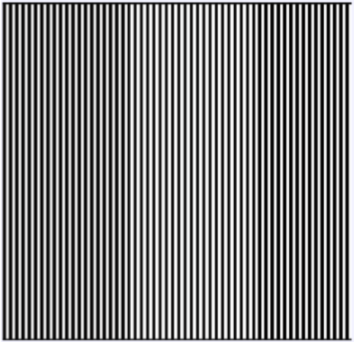
Fréquence spatiale : « vitesse » de variation du signal $I(x, y)$ par rapport aux variables spatiale (x, y)

Basses fréquences

Fréquence d'une image

Fréquence spatiale : « vitesse » de variation du signal $I(x, y)$ par rapport aux variables spatiale (x, y)

Basses fréquences



Hautes fréquences

Fréquence d'une image

Transformée de Fourier 2D

En traitement d'image, on utilise la transformée de Fourier à deux dimensions :

$$X(u, v) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x; y)\, \mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,\pi(xu+yv)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

Transformée de Fourier 2D

En traitement d'image, on utilise la transformée de Fourier à deux dimensions :

$$X(u, v) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x; y)\, \mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,\pi(xu+yv)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

Une image ne correspond pas à un signal continu mais discret, on utilise la *transformée de Fourier discrète* :

Transformée de Fourier 2D

En traitement d'image, on utilise la transformée de Fourier à deux dimensions :

$$X(u,v) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x;y)\,\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,\pi(xu+yv)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Une image ne correspond pas à un signal continu mais discret, on utilise la *transformée de Fourier discrète* :

$$I(u,v) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{N=0}^{N-1} i(m,n)\,\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,\pi\left(\frac{um}{M}+\frac{vn}{N}\right)}$$

Transformée de Fourier 2D

La Transformée de Fourier d'une fonction réelle donne une fonction complexe

Transformée de Fourier 2D

La Transformée de Fourier d'une fonction réelle donne une fonction complexe

- Entrée : une image

Transformée de Fourier 2D

La Transformée de Fourier d'une fonction réelle donne une fonction complexe

- Entrée : une image
- Sortie : image(partie réelle) + image(partie imaginaire)

Transformée de Fourier 2D

La Transformée de Fourier d'une fonction réelle donne une fonction complexe

- Entrée : une image
- Sortie : image(partie réelle) + image(partie imaginaire)

$$\mathbb{C} = \left\{ z = x + \mathrm{i}\, y \mid (x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{i}^2 = -1 \right\}$$

Transformée de Fourier 2D

$$\mathbb{C} = \left\{ z = x + \mathrm{i}\, y \mid (x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{i}^2 = -1 \right\}$$

Transformée de Fourier 2D

$$\mathbb{C} = \left\{ z = x + \mathrm{i}\, y \mid (x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{i}^2 = -1 \right\}$$

- Les opérations de $\mathbb{C}$ étendent celles de $\mathbb{R}$

Transformée de Fourier 2D

$$\mathbb{C} = \left\{ z = x + \mathrm{i}\, y \mid (x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{i}^2 = -1 \right\}$$

- Les opérations de $\mathbb{C}$ étendent celles de $\mathbb{R}$
- Module de $z = a + \mathrm{i}\, b$: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Transformée de Fourier 2D

$$\mathbb{C} = \left\{ z = x + \mathrm{i}\, y \mid (x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{i}^2 = -1 \right\}$$

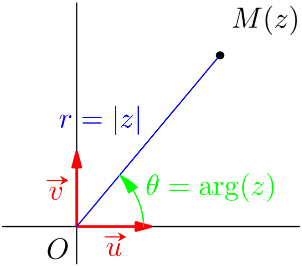
- Les opérations de $\mathbb{C}$ étendent celles de $\mathbb{R}$
- Module de $z = a + \mathrm{i}\, b$: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Argument : $z = r(cos\theta + \mathrm{i} \sin\theta)$

Transformée de Fourier 2D

$$\mathbb{C} = \left\{ z = x + \mathrm{i}\, y \mid (x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{i}^2 = -1 \right\}$$

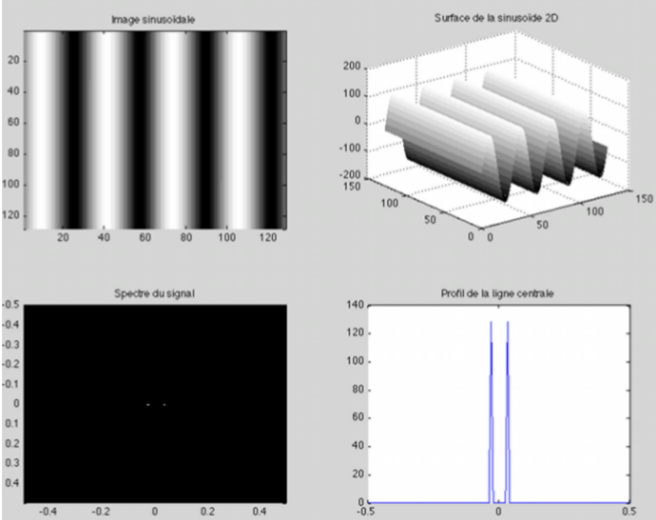
- Les opérations de $\mathbb{C}$ étendent celles de $\mathbb{R}$
- Module de $z = a + \mathrm{i}\, b$: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Argument : $z = r(cos\theta + \mathrm{i} \sin\theta)$
- Forme exponentielle : $z = r\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ où

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = \cos\theta + \mathrm{i} \sin\theta$$



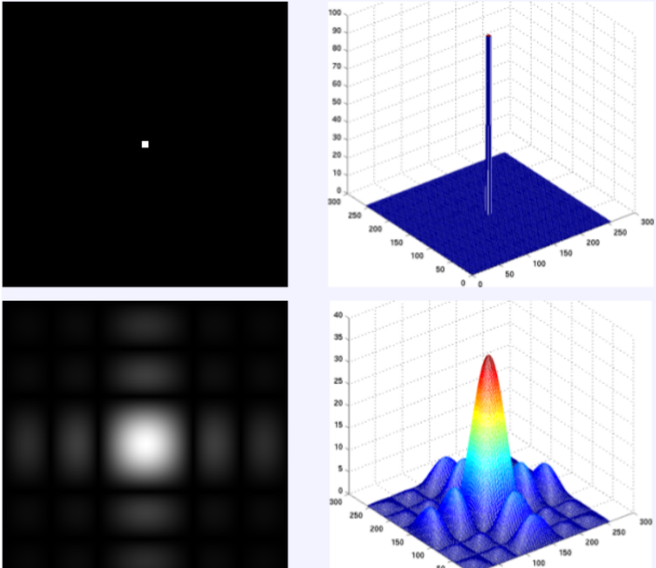
Transformée de Fourier 2D

$$x(t, u) = \cos(2\pi f_0 t)$$



Transformée de Fourier 2D

Fonction « rectangle »



Visualisation

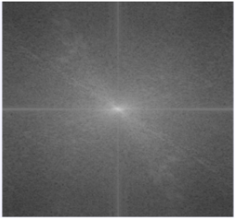
- On visualise en général le module de la transformée de Fourier

Visualisation

- On visualise en général le module de la transformée de Fourier
- Pour un meilleur contraste, on regarde :

$$1 + \log(|X(f, g)|)$$





Visualisation

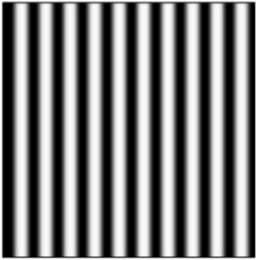
- On visualise en général le module de la transformée de Fourier
- Pour un meilleur contraste, on regarde :

$$1 + \log(|X(f, g)|)$$

- Les basses fréquences sont au centre de l'image

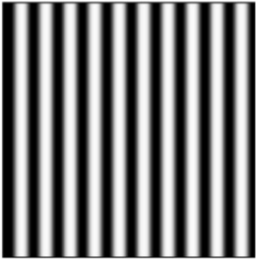
Rotation

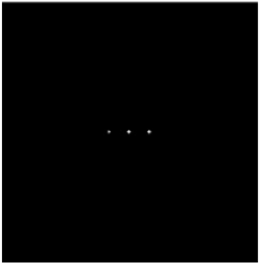
Rotation d'images $\Rightarrow$ rotation de la TF (même angle)



Rotation

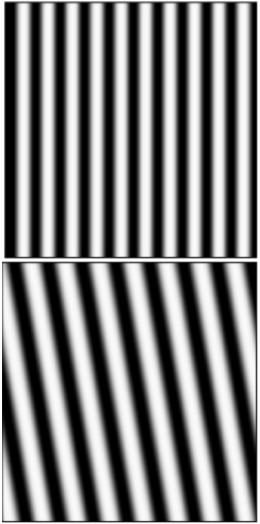
Rotation d'images $\Rightarrow$ rotation de la TF (même angle)

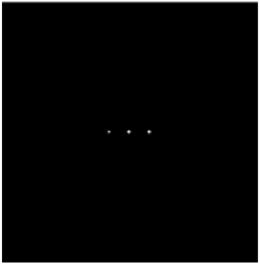




Rotation

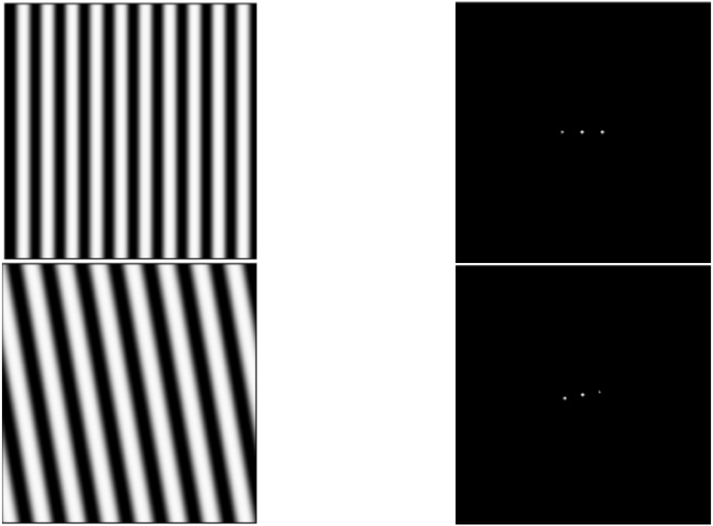
Rotation d'images $\Rightarrow$ rotation de la TF (même angle)



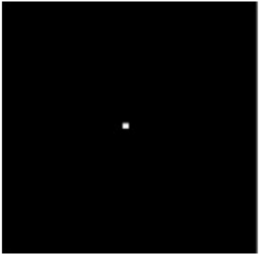


Rotation

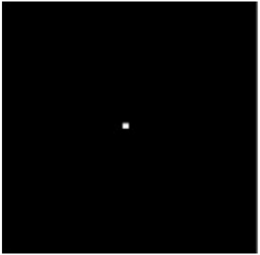
Rotation d'images $\Rightarrow$ rotation de la TF (même angle)

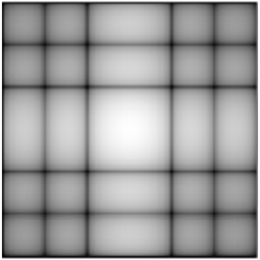


Homothétie

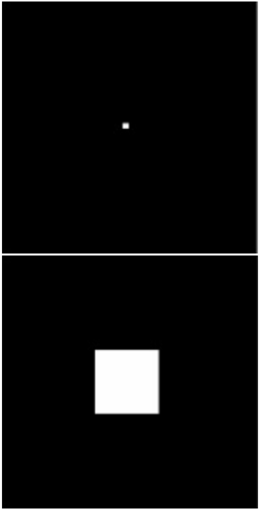


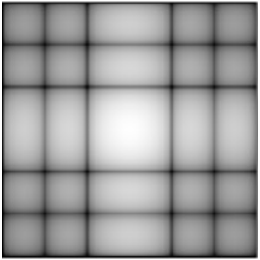
Homothétie



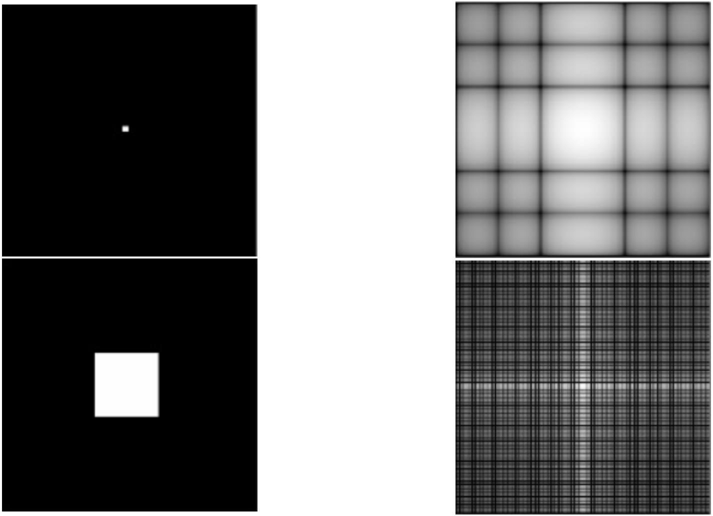


Homothétie

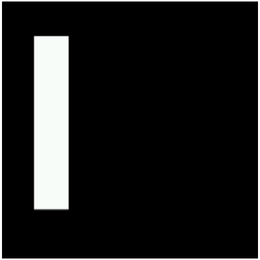




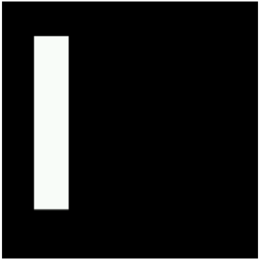
Homothétie



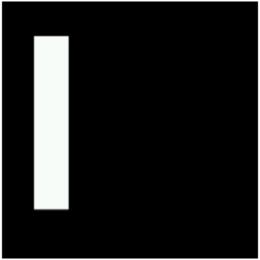
Répétition d'un motif

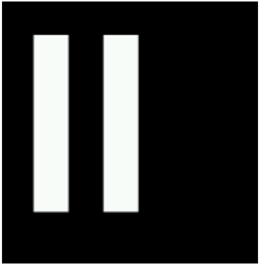


Répétition d'un motif

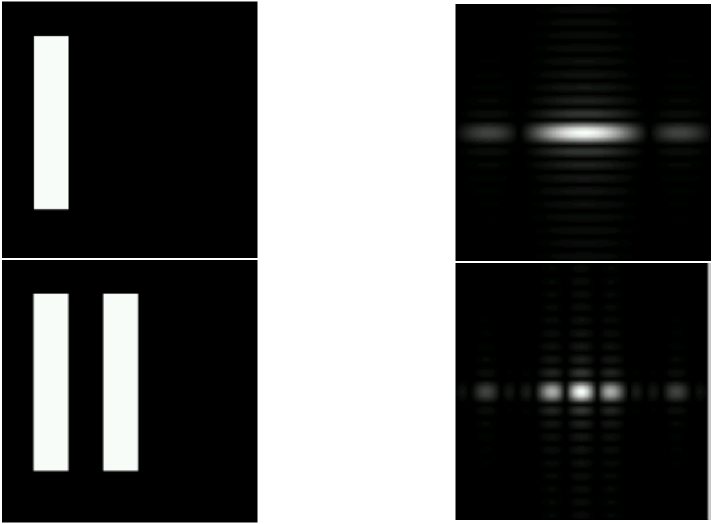


Répétition d'un motif



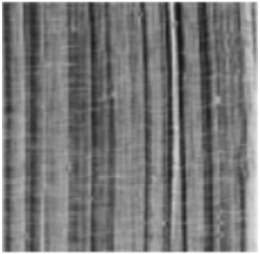


Répétition d'un motif



Direction

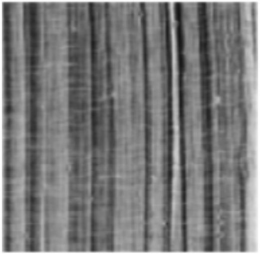
- La réponse fréquentielle de $X(f, g)$ comporte une information structurelle sur la direction des fréquences spatiales

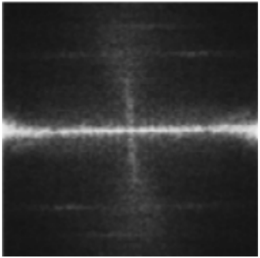


- Les lignes directrices fortement représentées dans les images sont mises en valeur dans les spectres

Direction

- La réponse fréquentielle de $X(f,g)$ comporte une information structurelle sur la direction des fréquences spatiales

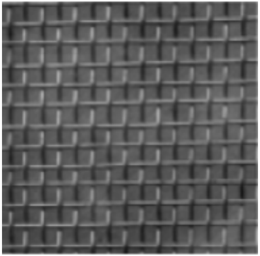




- Les lignes directrices fortement représentées dans les images sont mises en valeur dans les spectres

Direction

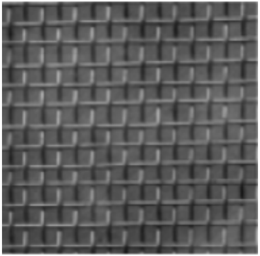
- La réponse fréquentielle de $X(f, g)$ comporte une information structurelle sur la direction des fréquences spatiales

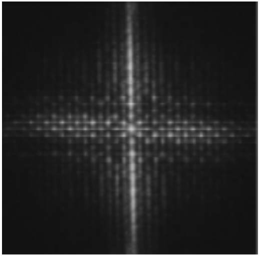


- L'image de gauche possède des lignes horizontales/verticales qu'on retrouve dans sa transformée

Direction

- La réponse fréquentielle de $X(f, g)$ comporte une information structurelle sur la direction des fréquences spatiales





- L'image de gauche possède des lignes horizontales/verticales qu'on retrouve dans sa transformée

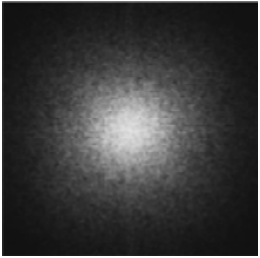
Direction

- La réponse fréquentielle de $X(f, g)$ comporte une information structurelle sur la direction des fréquences spatiales

- L'image de droite possède des lignes dans toutes les directions qu'on retrouve dans sa transformée

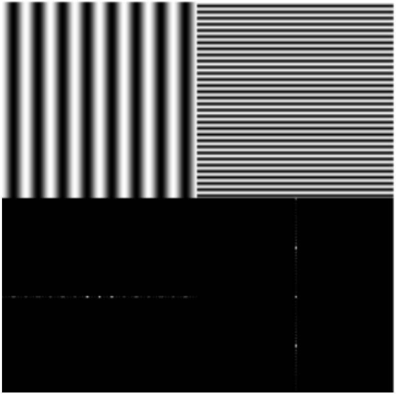
Direction

- La réponse fréquentielle de $X(f, g)$ comporte une information structurelle sur la direction des fréquences spatiales



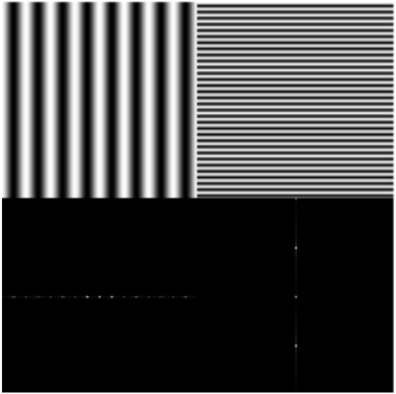
- L'image de droite possède des lignes dans toutes les directions qu'on retrouve dans sa transformée

Effets de bord



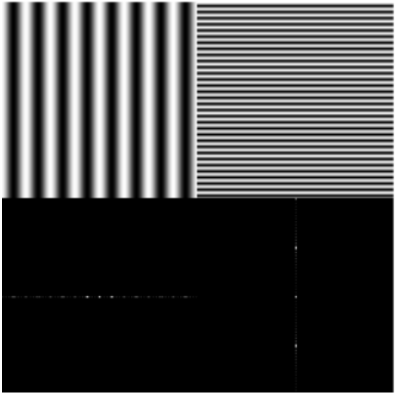
- Chaque transformée de Fourier est théoriquement constituée de trois points :

Effets de bord



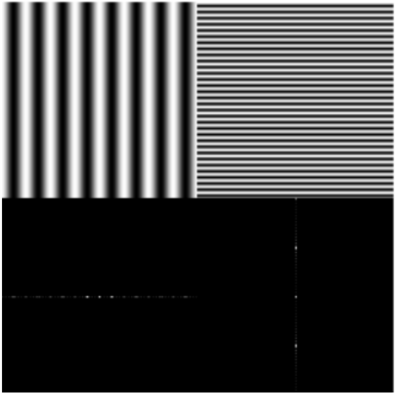
- Chaque transformée de Fourier est théoriquement constituée de trois points :
  - Le point central représente la moyenne de l'intensité de l'image d'origine.

Effets de bord



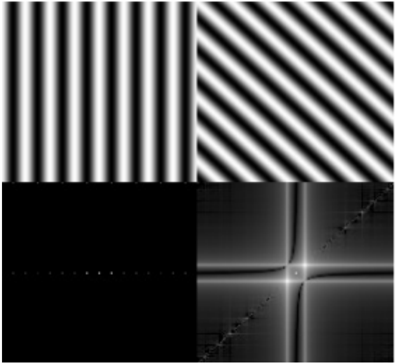
- Chaque transformée de Fourier est théoriquement constituée de trois points :
  - Le point central représente la moyenne de l'intensité de l'image d'origine.
- Les deux autres points représentent la fréquence (verticale ou horizontale) des cosinus

Effets de bord



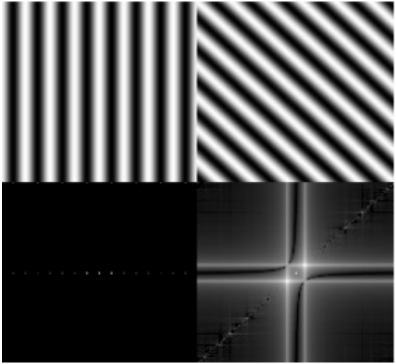
- Chaque transformée de Fourier est théoriquement constituée de trois points :
  - Le point central représente la moyenne de l'intensité de l'image d'origine.
- Les deux autres points représentent la fréquence (verticale ou horizontale) des cosinus
- La fine ligne (verticale ou horizontale) est due à une imperfection : les effets de bord

Effets de bord



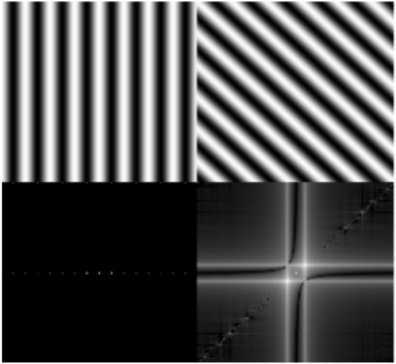
- La TF de la deuxième image semble fausse

Effets de bord



- La TF de la deuxième image semble fausse
- Effet de bord important

Effets de bord



- La TF de la deuxième image semble fausse
- Effet de bord important
- Cause : la TF traite l'image comme si elle faisait partie d'une plus grande image constituée d'une répétition à l'infini du même motif

Transformée de Fourier inverse

Connaissant la transformée de Fourier d'une image, on peut retrouver l'image en utilisant la transformée de Fourier inverse :

$$i(m;n) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{N-1} I(k,i)\, \mathrm{e}^{2\pi\, \mathrm{i}\left(\frac{km}{M} + \frac{in}{N}\right)}$$

Cette formule exprime le fait que les images sont des combinaisons linéaires d'images formées de sinusoïdes

Transformée de Fourier inverse

Il n'y a **aucune perte d'information** dans le cycle :

$$i \longmapsto I = \mathrm{TF}(i) \longmapsto \mathrm{TF}^{-1}(I) = \mathrm{TF}^{-1}(\mathrm{TF}(i)) = i$$