# 2

# TP2

## 2.1 Structure de données

On peut définir des structures de données avec Scilab, qui définissent également les types impliqués. Par exemple :

```
//déclaration de la structure de données
droite=struct('coefX', double, 'coefY', double, 'constante', double);

//utilisation de la structure
//définition de la droite 0
droite0 = droite;
droite0.coefX = 2.0;
droite0.coefY = 3.0;
droite0.constante = 5.0;
```

C'est pratique pour l'organisation et la lecture du code. C'est nettement moins pratique lorsqu'on veut utiliser des fonctions vectorielles, à vous de voir...

## 2.2 Intersection de droites paramétriques

La forme générale des droites paramétriques, dans le plan, est :

$$\begin{cases} x(t) = & a_0 t + b_0 \\ y(t) = & c_0 t + d_0 \end{cases} \quad \forall t \in ]-\infty, +\infty[ \tag{2.1}$$

L'intersection de 2 droites paramétriques implique, si elle existe, l'existence d'un point unique :

$$I(x_0(t_0) = x_1(u_0), y_0(t_0) = y_1(u_0))$$

de paramètre $t_0$ sur la première droite $(x_0(t), y_0(t))$ et $u_0$ sur la seconde $(x_1(u), y_1(u))$, dont les coordonnées vérifient ces équations. De manière générale :

$$\begin{cases} (1) \quad x(t_0) & = a_0 t_0 + b_0 = x(u_0) & = a_1 u_0 + b_1 \\ (2) \quad y(t_0) & = c_0 t_0 + d_0 = y(u_0) & = c_1 u_0 + d_1 \end{cases} \quad t_0 \in ]-\infty, +\infty[ \text{ et } u_0 \in ]-\infty, +\infty[$$

La difficulté étant de trouver $t_0$ et $u_0$, 2 équations à 2 inconnues, on devrait pouvoir réussir.

### 2.2.1 Par substitution

On exprime par exemple $u_0$ en fonction de $t_0$ dans (1) :

$$(1) \implies \frac{a_0 t_0 + b_0 - b_1}{a_1} = u_0$$

Et on réintroduit cette variable dans (2) :

$$(2) \implies c_0 t_0 + d_0 = c_1 \frac{a_0 t_0 + b_0 - b_1}{a_1} + d_1$$

$$\iff (c_0 - c_1 \frac{a_0}{a_1}) t = -d_0 + d_1 + c_1 \frac{b_0 - b_1}{a_1} \iff \quad t = \frac{-d_0 + d_1 + c_1 \frac{b_0 - b_1}{a_1}}{(c_0 - c_1 \frac{a_0}{a_1})}$$

$$\iff t = \frac{-a_1 d_0 + a_1 d_1 + c_1(b_0 - b_1)}{(a_1 c_0 - c_1 a_0)} \iff \quad t = \frac{a_1(d_1 - d_0) - c_1(b_1 - b_0)}{(a_1 c_0 - a_0 c_1)}$$

Et on trouve ensuite $u_0 = \frac{a_0 t_0 + b_0 - b_1}{a_1}$. Si $a_1 = 0$, il faut substituer une autre ligne du système. Si les coefficients $c_1$ et $a_1$ sont nuls, ont est dans une situation bien triste (vous savez pourquoi ?).

### 2.2.2 Méthode de Cramer

La méthode de Cramer[1] permet d'obtenir les solutions de systèmes d'équations (lorsqu'elles existent). En dimension 2, si on a le couple d'équation :

$$\begin{cases} (1) \quad x(t_0) & = a_0 t_0 + b_0 = x(u_0) & = a_1 u_0 + b_1 \\ (2) \quad y(t_0) & = c_0 t_0 + d_0 = y(u_0) & = c_1 u_0 + d_1 \end{cases} \iff \begin{cases} (1) \quad a_0 t_0 - a_1 u_0 & = b_1 - b_0 \\ (2) \quad c_0 t_0 - c_1 u_0 & = d_1 - d_0 \end{cases} \text{avec } t_0 \in ]-\infty, +\infty[ \text{ et } u_0 \in ]-\infty, +\infty[$$

Alors $t_0 = \frac{\det(A_0)}{\det(A_1)}$ et $u_0 = \frac{\det(A_2)}{\det(A_1)}$, avec

$$A_0 = \begin{pmatrix} (b_1 - b_0) & -a_1 \\ (d_1 - d_0) & -c_1 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 \\ c_0 & -c_1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_0 & (b_1 - b_0) \\ c_0 & (d_1 - d_0) \end{pmatrix}$$

Pour rappel, le déterminant de la matrice :

$$A \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

.

On retrouve la même formule qu'à la section précédente, mais ici avec des opérateurs matriciels.

### 2.2.3 Exercices

1. calculer l'intersection entre 2 droites paramétriques, afficher les 2 paramètres et la position du point d'intersection ;
2. tirer au hasard 2 droites paramétrique, calculer l'intersection et vérifier que l'intersection appartient bien au 2 droites (cela paraît logique). En fait, le stockage des réels en format binaire (cf IEEE754, M1101) rogne la précision des nombres. Vous aurez donc des cas où l'intersection n'appartient pas aux droites, à 1 ou au 2. Calculer le ratio de points d'intersection appartenant aux deux droites, à une seule ou à aucune ;
3. implémenter une fonction qui calcule le point d'intersection d'une droite paramétrique avec un plan (s'il existe). On peut prendre le plan défini par les 3 points $P_0(0\ 0\ 0)$, $P_1(1\ 0\ 0)$, $P_2(0,5\ 1\ 0)$ et la droite définie par les 2 points $p_0(0,5\ 0,5\ -10)$ et $p_1(0,5\ 0,5\ 10)$ pour tester. L'intersection devrait être en $t = 0,5$ qui correspond à $I(0,5\ 0,5\ 0)$. Utiliser des fonctions vectorielles ! Chercher des conditions limites pour lesquelles votre algorithme ne fonctionne pas ;
4. implémenter une fonction qui calcule l'intersection d'une droite paramétrique $\mathcal{D}$ avec un triangle $(P_0P_1P_2)$ dans $\mathbb{R}^3$. On connaît l'équation du plan $\Pi$ qui supporte le triangle : elle est donnée par la normale à ce plan, calculée par un produit vectoriel de 2 vecteurs du plan, par ex. $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{P_0P_1} \wedge \overrightarrow{P_0P_2}$. Le produit vectoriel peut être une fonction du type :

```
function [v]=prodVect(v1,v2)
 v(1) = v1(2)*v2(3) - v1(3)*v2(2);
 v(2) = v1(3)*v2(1) - v1(1)*v2(3);
 v(3) = v1(1)*v2(2) - v1(2)*v2(1);
endfunction
```

On trouvera donc l'équation du plan $\Pi$ : $N.x\ x + N.y\ y + N.z\ z + d = 0,\ \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Il faut calculer $d$, on sait que $P_0 \in \Pi$ donc $d = -(N.x\ P_0.x + N.y\ P_0.y + N.z\ P_0.z) = -\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{OP_0}$ (on utilise le produit scalaire déjà vu au TP1).

Une fois que l'on a l'équation du plan $\Pi$ et de la droite paramétrique $\mathcal{D}$, on retombe donc sur le problème précédent de calcul d'intersection (droite, plan).

Cela ne s'arrête pas là : comment savoir si le point d'intersection $I = \mathcal{D} \cap \Pi$ obtenu est bien dans le triangle ? On peut utiliser les coordonnées barycentriques[2]. En calculant les aires des triangles formés par $(I, P_0, P_1), (I, P_1, P_2), (I, P_2, P_0)$, on peut calculer les coefficients barycentriques de $P_0$, $P_1$, $P_2$ et déterminer si $I$ est intérieur au triangle. Si on nomme $a_0$, $a_1$, $a_2$ l'aire des 3 triangles et $\mathcal{A}$ l'aire du triangle $(P_0P_1P_2)$, si

$$\frac{a_0}{A} + \frac{a_1}{A} + \frac{a_2}{A} = 1$$

alors le point $I$ est à l'intérieur du triangle. 2 méthodes de calcul d'aire de triangles sont en annexe. Tester avec les points et la droite de la question précédente (et d'autres).

1. https://fr.wikipedia.org/wiki/Règle_de_Cramer
2. cf https://fr.wikipedia.org/wiki/Coordonnées_barycentriques

5. visualisation d'un objet implicite. On utilise souvent des objets implicites en synthèse d'images, des blobs ou des metaballs [3]. Une équation d'une de ces surfaces (en fait d'un volume) est :

$$D(r) = \begin{cases} a\left(1 - \dfrac{4r^6}{9b^6} + \dfrac{17r^4}{9b^4} - \dfrac{22r^2}{9b^2}\right) \\ 0 \text{ si } r > b \end{cases}$$

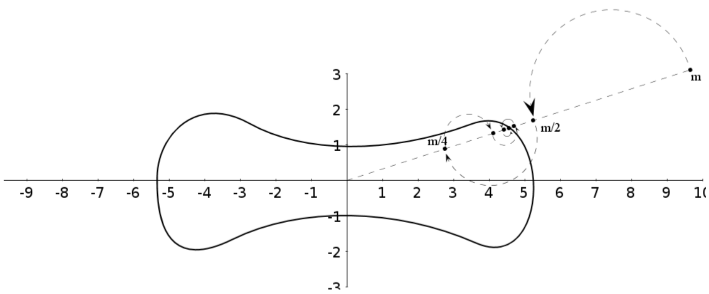
Le « centre » est en $(0, 0, 0)$, le plus dur pour nous est de pouvoir afficher cet objet. Il faut trouver un ensemble de points $P$ sur la surface. Pour cela $a$ et $b$ sont 2 paramètres de la surface implicite. $r$ est la distance entre un point $P$ et le centre. Il faut également fournir un seuil $s$ où visualiser la surface ($s < b$). On affichera donc $D(r) = s$. deux solutions sont possibles pour trouver ces points :

(a) définir une grille de points régulière dans l'espace $\mathbb{R}^3$ et tester l'appartenance de chaque point à la surface. Le pseudo-algorithme naïf serait :

```
pour i=-s à +s par pas de 1
 pour j=-s à +s par pas de 1
  pour k=-s à +s par pas de 1
   faire
    r = distance (P(i, j, k), 0)
    si D(r) = s
     alors afficher(P)
    fin
  fin pour
 fin pour
fin pour
```

Évidemment cette méthode doit tester énormément de point pour un résultat probant. Qui plus est, les points sur la surface sont alignés « par tranches » selon les axes $x$, $y$ et $z$ (cela vient de la façon de découper l'espace).

(b) (si vous avez du temps) « tirer » des demi-droites dans toutes les directions à partir du centre et allumer les passages à la surface. Pour cela on effectue, pour chaque rayon une méthode de dichotomie [4]. Comme le montre la figure ci-dessous, on tire une demi-droite dans une direction. On commence avec un point « assez » loin de $O$ pour être en dehors de la surface ($m$). Si ce point est en dehors de la surface on teste avec $m/2$. Si ce point est intérieur on prendra le point au milieu de $m/2$ et $m$. sur le dessin ce n'est pas le cas, on teste donc avec $m/4$. Ce point est intérieur, on prendra donc le milieu de $m/4$ (intérieur) et $m/2$ (extérieur), et ainsi de suite.




On arrête l'algorithme lorsque la distance entre 2 points consécutifs est très petite (un $\varepsilon$ pré-défini). On tire les demi-droites dans un repère sphérique, avec les coordonnées d'un point sur la droite définies par :

$$\begin{cases} x(\theta, \phi) = s\ cos(\theta)cos(\phi) \\ y(\theta, \phi) = s\ sin(\theta)cos(\phi) \\ z\theta, \phi) = s\ sin(\phi) \end{cases}$$

Avec $\theta \in [0, 2\pi[$ et $\phi \in [-\pi, \pi]$.

## 2.3 Annexes

### 2.3.1 Résolution d'équation

**Remarque1** : comme on souhaite résoudre une équation du type $Ax+b = 0$, on peut aussi utiliser la résolution d'équation de Scilab :

```
//utilisation linsolve(A*x+b=0)
//https://help.scilab.org/docs/5.5.2/fr_FR/linsolve.html
//définition de l'intersection
```

3. cf http://paulbourke.net/geometry/implicitsurf/
4. cf https://fr.wikipedia.org/wiki/Méthode_de_dichotomie

```
A = [droite0.coefX, droite0.coefY; droite1.coefX, droite1.coefY];
b = [droite0.constante; droite1.constante];
res = linsolve(A, b);

disp(res);
```

### 2.3.2 Calculs d'aires de triangles

**Par la formule de Héron**[5]. Pour le triangle $(P_0P_1P_2)$, l'aire $\mathcal{A}$ du triangle est :

$$\mathcal{A} = \sqrt{p * (p - |P_0P_1|) * (p - |P_1P_2|) * (p - |P_2P_0|)} \text{ avec } p = \frac{|P_0P_1| + |P_1P_2| + |P_2P_0|}{2}$$

Attention, si $p = |P_0P_1|$ par exemple cela ne fonctionne pas... Cette formule n'est pas la plus stable. Vous pouvez essayer le calcul de l'aire du triangle $P_0(0,5\ 0,5\ 0)$, $P_1(1\ 0\ 0)$, $P_2(0\ 1\ 0)$.

**Via le produit vectoriel**. Pour le triangle $(P_0P_1P_2)$, le vecteur obtenu par le produit vectoriel $\overrightarrow{P_0P_1} \wedge \overrightarrow{P_0P_2}$ a une norme qui est la surface du quadrilatère $(P_0, P_1, P_1 + \overrightarrow{P_0P_2}P_2)$. On a donc l'aire $\mathcal{A}$ du triangle :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{P_0P_1} \wedge \overrightarrow{P_0P_2}\|$$

5. https://fr.wikipedia.org/wiki/Formule_de_Héron