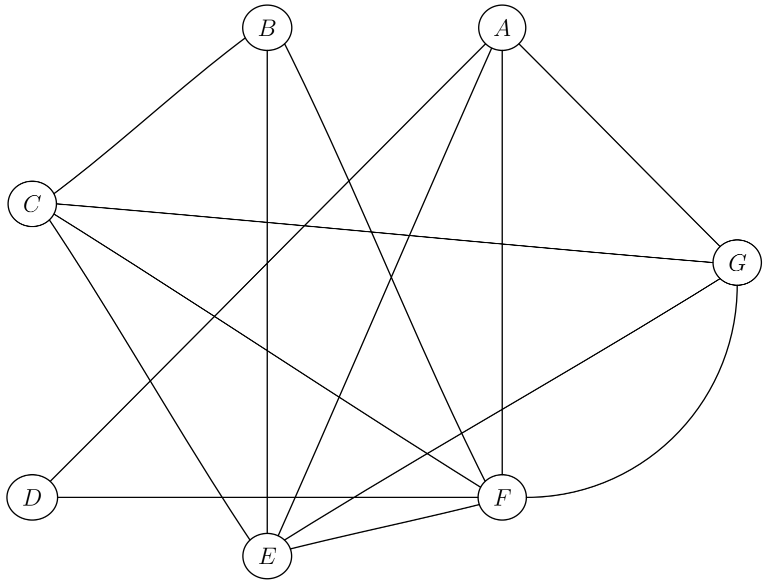
M2201 : TD 1

Vocabulaire des graphes

19 mars 2019 – B. Colombel

Exercice 1 : Un concert de solidarité est organisé dans une grande salle de spectacle. À ce concert sont conviés sept artistes de renommé internationale :
Luther Allunison (A), John Biaise (B), Phil Colline (C), Bob Ditlâne (D), Jimi Endisque (E), Robert Fripe (F) et Rory Garaguerre (G).
Les différents musiciens invités refusant de jouer avec certains autres, l'organisateur du concert doit prévoir plusieurs parties du spectacle. Les arêtes du graphe Γ ci-dessous indiquent quels sont les musiciens qui refusent de jouer entre eux.



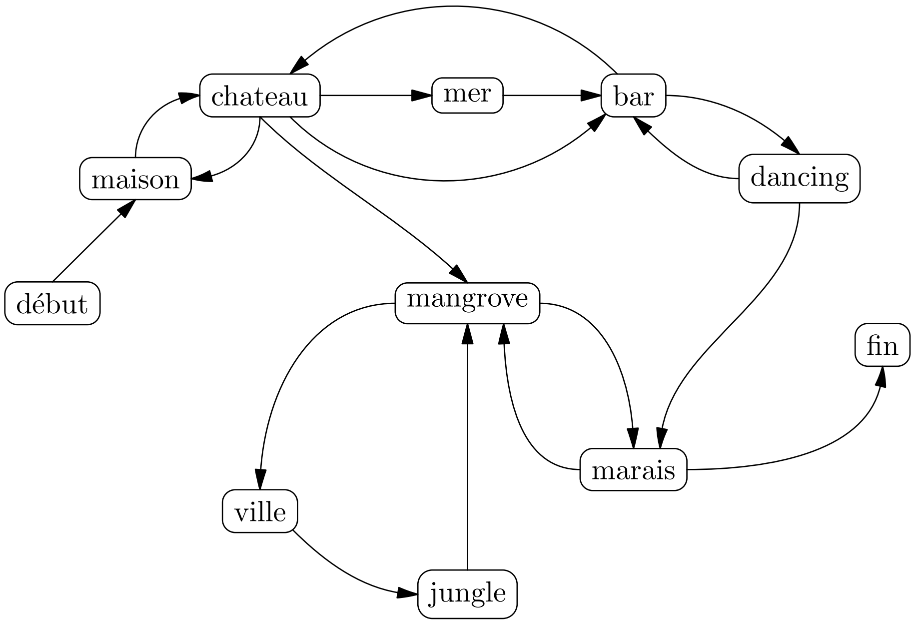
1. (a) Déterminer la matrice M associée au graphe Γ (les sommets de Γ étant classés dans l'ordre alphabétique).
   (b) A l'aide de cette matrice M, en déduire le nombre de chaînes de longueur trois reliant les sommets B et D. Écrire toutes ces chaînes.
2. (a) Quelle est la nature du sous-graphe de Γ constitué des sommets A, E, F et G ?
   (b) Que peut-on en déduire pour le nombre chromatique $\gamma(\Gamma)$?
3. Après avoir classé l'ensemble des sommets de Γ par ordre de degrés décroissants, colorer le graphe Γ en utilisant l'algorithme de Welch-Powell.
4. En déduire le nombre chromatique de ce graphe.
5. (a) Combien de parties l'organisateur du concert doit-il prévoir ?
   (b) Proposer une répartition des musiciens pour chacune de ces parties.
6. (a) Le graphe Γ admet-t-il un cycle eulérien (expliquer) ?
   (b) Sinon admet-il une chaîne eulérienne (expliquer) ?
   (c) Déterminer, s'il existe, ce cycle eulérien ou cette chaîne eulérienne.

Exercice 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On cherche à dessiner le graphe dont la matrice d'adjacence est A.

1. La matrice permet-elle de savoir si le graphe est orienté ou non ?
2. Dessiner le graphe orienté ayant A pour matrice d'adjacence.
3. Dessiner le graphe non-orienté ayant A pour matrice d'adjacence.

Exercice 3 : Le graphe ci-contre représente un jeu vidéo dans lequel le joueur peut aller et venir dans différents lieux.



1. Quelle est ordre du graphe ? sa taille ?
2. Donner la matrice d'adjacence du graphe.

> **Rappels** : il n'existe aucune propriété générale permettant de conclure si un graphe est hamiltonien ou non. Néanmoins :
> — Si un graphe possède un sommet de degré 1, il n'est pas hamiltonien
> — Si un cycle hamiltonien existe, il traverse obligatoirement les sommets de degré 2

3. (a) Le graphe est-il hamiltonien ?
   (b) Le devient-il si on prend en compte le graphe non-orienté induit ?
4. Combien de composantes fortement-connexe ce graphe possède-t-il ?
   À quoi correspondent-elles pour le jeu ?

Exercice 4 : Soit le graphe $\mathscr{G} = (\mathcal{S},\mathcal{A})$ avec :

$$\mathcal{S} = \{1;2;3;4;5;6\} \quad \text{et} \quad \mathcal{A} = \{(1,2);(1,4);(2,3);(3,2);(4,5);(5,6);(6,6);(3,6)\}$$

1. S'agit-il d'un graphe orienté ou non-orienté ?
2. Quel est l'ordre et la taille de ce graphe ?

3. Représenter ce graphe par un diagramme.
4. Donner sa matrice d'adjacence M.

Lemme des poignée de mains

1. Si $\mathscr{G} = (\mathcal{S}; \mathcal{A}; \gamma)$ est un graphe orienté et si m désigne le nombre d'arcs de $\mathscr{G}$ alors :

$$\sum_{x \in \mathcal{S}} d^+(x) = \sum_{x \in \mathcal{S}} d^-(x) = m$$

2. En conséquence, si $\mathscr{G}'$ est le graphe non-orienté déduit de $\mathscr{G}$:

$$\sum_{x \in \mathcal{S}} d(x) = \sum_{x \in \mathcal{S}} d^+(x) + \sum_{x \in \mathcal{S}} d^-(x) = 2m$$

Exercice 5 : **Craquage de digicode**

L'accès d'un bâtiment est contrôlé par un digicode dont la combinaison est formée d'une suite de 3 lettres $X_1X_2X_3$ ne pouvant prendre que 2 valeurs $X_i = A$ ou B. Pour entrer, sans connaître le code, il faut normalement tenter chacune des combinaisons possibles (AAA, AAB, $\ldots$) mais dans les faits il est possible d'entrer avec bien moins de tentatives.
En effet lorsqu'on saisit une chaîne de p lettres $X_1X_2X_3 \ldots X_p$ le digicode teste successivement les sous-chaînes $X_1X_2X_3$, $X_2X_3X_4$, $\ldots$, $X_{p-2}X_{p-1}X_p$ (par exemple taper $AAABB$ revient à tester AAA, AAB, ABB).

Pour trouver la chaîne la plus courte possible permettant d'entrer dans le bâtiment sans connaître le code, on représente le problème par un graphe orienté G dont :

— les sommets représentent les différentes combinaisons $X_1X_2X_2$
— les arcs joignent des combinaisons obtenues successivement par ajout d'une lettre à la fin de la combinaison précédente, par exemple en ajoutant B à la fin de AAA, on obtient une nouvelle chaîne $AAAB$ qui testera la combinaison AAB donc on aura un arc : $AAA \to AAB$.

1. Quel est l'ordre du graphe (c'est à dire le nombre de combinaisons possibles) ?
   Combien de lettres faut-il saisir pour essayer toutes ces combinaisons une à une ?
2. Quel sont les degrés entrant et sortant de chaque sommet ? En déduire la taille du graphe G (c'est à dire le nombre d'arcs) à l'aide du lemme des poignées de mains.
3. Représenter le graphe G du problème de telle sorte qu'il soit planaire.
4. À quel type de chemin du graphe G correspond la solution du problème ? Trouver la solution à partir du graphe (sous forme d'une chaîne de caractères composée de suite d'une de A et de B) et préciser la longueur de la chaîne trouvée.