M4202Cip – Recherche opérationnelle (III)
Algorithme du simplexe

bruno.colombel@univ-amu.fr

IUT d'Aix-Marseille
Site d'Arles
DUT Informatique

2019–2020

Forme canonique et forme standart d'un programme linéaire

Bases et points extrêmes

Algorithme du simplexe

Sommaire

Forme standard et forme canonique

Forme standard

Un programme linéaire est sous *forme standard* lorsque

- c'est une maximisation
- toutes ses contraintes sont des *égalités*
- toutes ses variables sont non-négatives

Forme standard et forme canonique

Forme standard

Un programme linéaire est sous *forme standard* lorsque

- c'est une maximisation
- toutes ses contraintes sont des *égalités*
- toutes ses variables sont non-négatives

Écriture matricielle

$$\begin{aligned} \max z &= {}^t c x \\ \text{s.c.} \quad Ax &= b \\ x &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Forme standard et forme canonique

Forme canonique

Un programme linéaire est sous forme *canonique* lorsque

- c'est une maximisation
- toutes ses contraintes sont des *inégalités*
- toutes ses variables sont non-négatives

Forme standard et forme canonique

Forme canonique

Un programme linéaire est sous forme *canonique* lorsque

- c'est une maximisation
- toutes ses contraintes sont des *inégalités*
- toutes ses variables sont non-négatives

Écriture matricielle

$$\begin{aligned} \max z &= {}^t c x \\ \text{s.c.} \quad Ax &\leqslant b \\ x &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Forme standard et forme canonique

Théorème (Équivalence forme standard et canonique)

Tout programme linéaire peut s'écrire sous forme standard et sous forme canonique

Forme standard et forme canonique

Théorème (Équivalence forme standard et canonique)

Tout programme linéaire peut s'écrire sous forme standard et sous forme canonique

Une containte d'inégalité $Ax \leqslant b$ peut être transformée en égalité par l'introduction d'une variable d'écart :

$$Ax + s = b$$

Production de peinture

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.c.} \quad \left| \begin{array}{rcrl} 6x_1 & + & 4x_2 & \leq 24 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq 6 \\ & & x_2 & \leq 2 \\ -x_1 & + & x_2 & \leq 1 \\ x_1 & & & \geq 0 \\ & & x_2 & \geq 0 \end{array} \right.$$

Production de peinture

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.c.} \quad \left| \begin{array}{rcrl} 6x_1 & + & 4x_2 & \leq 24 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq 6 \\ & & x_2 & \leq 2 \\ -x_1 & + & x_2 & \leq 1 \\ x_1 & & & \geq 0 \\ & & x_2 & \geq 0 \end{array} \right.$$

Forme canonique

Production de peinture

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.c.} \quad \left|\begin{array}{rrrrrrl}
6x_1 & + 4x_2 & + s_1 & & & & = 24 \\
x_1 & + 2x_2 & & + s_2 & & & = 6 \\
 & x_2 & & & + s_3 & & = 2 \\
-x_1 & + \quad x_2 & & & & + s_4 & = 1 \\
x_1 & & & & & & \geq 0 \\
 & x_2 & & & & & \geq 0
\end{array}\right.$$

Production de peinture

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.c.} \quad \left| \begin{array}{rrrrrrl} 6x_1 & + 4x_2 & + s_1 & & & & = 24 \\ x_1 & + 2x_2 & & + s_2 & & & = 6 \\ & x_2 & & & + s_3 & & = 2 \\ -x_1 & + \ \ x_2 & & & & + s_4 & = 1 \\ x_1 & & & & & & \geq 0 \\ & x_2 & & & & & \geq 0 \end{array} \right.$$

Forme standard

s_i : variables d'écart avec $s_1, s_2, s_3, s_4 \geqslant 0$

Passage entre les formes

équation $\to$ inéquation

$$ax = b \iff \begin{cases} ax \leqslant b \\ ax \geqslant b \end{cases}$$

inéquation $\to$ équation

$$\begin{aligned} ax \leqslant b &\iff ax + s = b \\ ax \geqslant b &\iff ax - s = b \end{aligned}$$

min $\leftrightarrow$ max

$$\max f(x) = -\min(-f(x))$$

Feuille de TD

Formes canonique et standard

Sommaire

Rappel du contexte

$$\begin{aligned} \max z &= {}^t c x \\ \text{s.c.} \quad Ax &\leqslant b \\ x &\geqslant 0 \end{aligned}$$

- A matrice $m \times n$
- $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$
- $b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{pmatrix}$
- $c = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots c_n \end{pmatrix}$

- Les contraintes définissent un polyèdre
- Une solution optimale est un sommet du polyèdre

Rappel du contexte

$$\begin{aligned} \max z = {}^t c x \\ \text{s.c.} \quad Ax \leqslant b \\ x \geqslant 0 \end{aligned}$$

- A matrice $m \times n$
- $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$
- $b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{pmatrix}$
- $c = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots c_n \end{pmatrix}$

- Les contraintes définissent un polyèdre
- Une solution optimale est un sommet du polyèdre

Question

Comment énumérer les sommets d'un polyèdre ?

Passage à la forme standard

$$\begin{aligned} \max z = {}^t cx \\ \text{s.c.} \quad Ax = b \\ x \geqslant 0 \end{aligned}$$

- Une containte d'inégalité $Ax \leqslant b$ est transformée en égalité par l'introduction d'une variable d'écart
- espace de dimension plus grande, mais toutes les contraintes sont des égalités
- Manipulations algébriques plus aisées

Production de peinture

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.c.} \left|\begin{array}{rrrrrrl} 6x_1 & + 4x_2 & + s_1 & & & & = 24 \quad (1) \\ x_1 & + 2x_2 & & + s_2 & & & = 6 \quad (2) \\ & x_2 & & & + s_3 & & = 2 \quad (3) \\ -x_1 & + \ x_2 & & & & + s_4 & = 1 \quad (4) \\ x_1 & & & & & & \geq 0 \quad (5) \\ & x_2 & & & & & \geq 0 \quad (6) \\ & & s_1 & & & & \geq 0 \quad (7) \\ & & & s_2 & & & \geq 0 \quad (8) \\ & & & & s_3 & & \geq 0 \quad (9) \\ & & & & & s_4 & \geq 0 \quad (10) \end{array}\right.$$

Solution de base

- Système de m équations linéaires à n inconnues ($m < n$) : infinité de solutions

Solution de base

- Système de m équations linéaires à n inconnues ($m < n$) : infinité de solutions
- Si on fixe à zéro $n - m$ variables : système de m équations à m inconnues possédant une solution unique (si la matrice est inversible). C'est une *solution de base*

Solution de base

- Système de m équations linéaires à n inconnues ($m < n$) : infinité de solutions
- Si on fixe à zéro $n - m$ variables : système de m équations à m inconnues possédant une solution unique (si la matrice est inversible). C'est une *solution de base*

Solution de base

Une *solution de base* d'un programme linéaire est la solution unique du système de m équations à m inconnues obtenu en fixant à zéro $n - m$ variables (pourvu que la matrice du système soit inversible). Les variables fixées à zéro sont appelées *variables hors base* et les autres *variables en base*.

Production de peinture

Penons comme base $\mathcal{B} = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$

Production de peinture

Penons comme base $\mathcal{B} = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$
On peut exprimer s_1, s_2, s_3 et s_4 en fonction de x_1 et x_2

Production de peinture

Penons comme base $\mathcal{B} = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$
On peut exprimer s_1, s_2, s_3 et s_4 en fonction de x_1 et x_2

$$\begin{cases} z = & & + 5x_1 & + 4x_2 \\ s_1 = & 24 & - 6x_1 & - 4x_2 \\ s_2 = & 6 & - x_1 & - 2x_2 \\ s_3 = & 2 & & - x_2 \\ s_4 = & 1 & + x_1 & - x_2 \end{cases}$$

Production de peinture

Penons comme base $\mathcal{B} = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$
On peut exprimer s_1, s_2, s_3 et s_4 en fonction de x_1 et x_2

$$\begin{cases} z = & & + 5x_1 + 4x_2 \\ s_1 = & 24 & - 6x_1 - 4x_2 \\ s_2 = & 6 & - x_1 - 2x_2 \\ s_3 = & 2 & - x_2 \\ s_4 = & 1 & + x_1 - x_2 \end{cases}$$

Si $x_1 = x_2 = 0$, alors :

- $s_1 = 24$, $s_2 = 6$, $s_3 = 2$, $s_4 = 1$

Production de peinture

Penons comme base $\mathcal{B} = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$
On peut exprimer s_1, s_2, s_3 et s_4 en fonction de x_1 et x_2

$$\begin{cases} z = & & + 5x_1 + 4x_2 \\ s_1 = & 24 & - 6x_1 - 4x_2 \\ s_2 = & 6 & - x_1 - 2x_2 \\ s_3 = & 2 & - x_2 \\ s_4 = & 1 & + x_1 - x_2 \end{cases}$$

Si $x_1 = x_2 = 0$, alors :

- $s_1 = 24$, $s_2 = 6$, $s_3 = 2$, $s_4 = 1$
- Toutes ces valeurs sont non-négatives

Production de peinture

Penons comme base $\mathcal{B} = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$
On peut exprimer s_1, s_2, s_3 et s_4 en fonction de x_1 et x_2

$$\begin{cases} z = & & + 5x_1 + 4x_2 \\ s_1 = & 24 & - 6x_1 - 4x_2 \\ s_2 = & 6 & - x_1 - 2x_2 \\ s_3 = & 2 & - x_2 \\ s_4 = & 1 & + x_1 - x_2 \end{cases}$$

Si $x_1 = x_2 = 0$, alors :

- $s_1 = 24$, $s_2 = 6$, $s_3 = 2$, $s_4 = 1$
- Toutes ces valeurs sont non-négatives
- la solution est réalisable

Solution de base réalisable

Définition

Une solution de base telle que toutes les variables prennent des valeurs **non-négatives** est appelée *solution de base réalisable*.

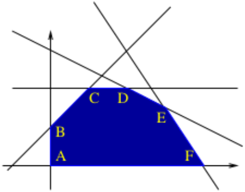
Géométrie des solutions de base

$\mathcal{B} = \{s_1, s_2, s_3, s_4\} \implies x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ s_1 = 24,\ s_2 = 6,\ s_3 = 2,$
$s_4 = 1$

- Cette solution de base réalisable correspond au sommet $(0, 0)$

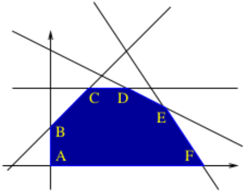
Géométrie des solutions de base

Base	Solution	Objectif	Sommet
$\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$(0, 0)$	0	A
$\{x_1, s_2, s_3, s_4\}$	$(4, 0)$	20	F
$\{s_1, x_1, s_3, s_4\}$	$(6, 0)$	$-$	Non réalisable
$\{x_1, x_2, s_3, s_4\}$	$(3, 1.5)$	21	E



Géométrie des solutions de base

Base	Solution	Objectif	Sommet
$\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$(0,0)$	0	A
$\{x_1, s_2, s_3, s_4\}$	$(4,0)$	20	F
$\{s_1, x_1, s_3, s_4\}$	$(6,0)$	$-$	Non réalisable
$\{x_1, x_2, s_3, s_4\}$	$(3,1.5)$	21	E



Théorème

Toute solution de base réalisable correspond à un sommet du polyèdre

Solution de base

Feuille de TD

- Bases d'un système linéaire
- Bases d'un programme linéaire

Sommaire

Détermination de la solution de base optimale

- Nombre maximum de solutions de base :
$$\binom{n}{m} = \frac{n\,!}{m\,!(n-m)\,!}$$

Détermination de la solution de base optimale

- Nombre maximum de solutions de base :
$$\binom{n}{m} = \frac{n\,!}{m\,!(n-m)\,!}$$
- Algorithme « bête et méchant » : énumération de toutes les bases.

Détermination de la solution de base optimale

- Nombre maximum de solutions de base :
  $\binom{n}{m} = \dfrac{n\,!}{m\,!(n-m)\,!}$
- Algorithme « bête et méchant » : énumération de toutes les bases.
  - fonctionne : nombre fini de sommets

Détermination de la solution de base optimale

- Nombre maximum de solutions de base :
  $$\binom{n}{m} = \frac{n\,!}{m\,!(n-m)\,!}$$
- Algorithme « bête et méchant » : énumération de toutes les bases.
  - fonctionne : nombre fini de sommets
  - limitation : ce nombre peut être très grand en général

Détermination de la solution de base optimale

- Nombre maximum de solutions de base :
$$\binom{n}{m} = \frac{n\,!}{m\,!(n-m)\,!}$$
- Algorithme « bête et méchant » : énumération de toutes les bases.
    - fonctionne : nombre fini de sommets
    - limitation : ce nombre peut être très grand en général

Algorithme du simplexe (G. B. Dantzig 1947)

Algorithme itératif permettant de résoudre un problème de programmation linéaire.

Méthode du simplexe principe

- partir d'une solution de base admissible et passer à une solution de base voisine qui améliore la valeur de l'objectif

Méthode du simplexe principe

- partir d'une solution de base admissible et passer à une solution de base voisine qui améliore la valeur de l'objectif
- Solution voisine : changement d'une variable en base

Méthode du simplexe principe

- partir d'une solution de base admissible et passer à une solution de base voisine qui améliore la valeur de l'objectif
- Solution voisine : changement d'une variable en base
- 3 étapes :

Méthode du simplexe principe

- partir d'une solution de base admissible et passer à une solution de base voisine qui améliore la valeur de l'objectif
- Solution voisine : changement d'une variable en base
- 3 étapes :
    1. Détermination de la variable entrante

Méthode du simplexe principe

- partir d'une solution de base admissible et passer à une solution de base voisine qui améliore la valeur de l'objectif
- Solution voisine : changement d'une variable en base
- 3 étapes :
    1. Détermination de la variable entrante
    2. Détermination de la variable sortante

Méthode du simplexe principe

- partir d'une solution de base admissible et passer à une solution de base voisine qui améliore la valeur de l'objectif
- Solution voisine : changement d'une variable en base
- 3 étapes :
    1. Détermination de la variable entrante
    2. Détermination de la variable sortante
    3. Pivotage

Production de peinture

$$\begin{cases} z = 0 + 5x_1 + 4x_2 \\ s_1 = 24 - 6x_1 - 4x_2 \\ s_2 = 6 - x_1 - 2x_2 \\ s_3 = 2 - x_2 \\ s_4 = 1 + x_1 - x_2 \end{cases}$$

$\mathcal{B} = \{s_1, s_2, s_3, s_4\} \implies x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ s_1 = 24,\ s_2 = 6,\ s_3 = 2,$
$s_4 = 1$

$$\boxed{z = 0}$$

Production de peinture

$$\begin{cases} z = 0 + 5x_1 + 4x_2 \\ s_1 = 24 - 6x_1 - 4x_2 \\ s_2 = 6 - x_1 - 2x_2 \\ s_3 = 2 \qquad\quad - x_2 \\ s_4 = 1 + x_1 - x_2 \end{cases}$$

$\mathcal{B} = \{s_1, s_2, s_3, s_4\} \implies x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ s_1 = 24,\ s_2 = 6,\ s_3 = 2,$
$s_4 = 1$

$$\boxed{z = 0}$$

Question

Quel changement de base faire pour augmenter z ?

Variable entrante

$$z = 5x_1 + 4x_2$$

Variable entrante

$$z = 5x_1 + 4x_2$$

- Si x_1 (ou x_2) augmente (entre en base), la valeur de la fonction objectif z augmente

Variable entrante

$$z = 5x_1 + 4x_2$$

- Si x_1 (ou x_2) augmente (entre en base), la valeur de la fonction objectif z augmente
- Principe heuristique :
  - faire rentrer en base la variable avec le coefficient le plus grand

Variable entrante

$$z = 5x_1 + 4x_2$$

- Si x_1 (ou x_2) augmente (entre en base), la valeur de la fonction objectif z augmente
- Principe heuristique :
  - faire rentrer en base la variable avec le coefficient le plus grand
  - si tous les coefficients sont négatifs, l'algorithme s'arrête

Variable entrante

$$z = 5x_1 + 4x_2$$

- Si x_1 (ou x_2) augmente (entre en base), la valeur de la fonction objectif z augmente
- Principe heuristique :
  - faire rentrer en base la variable avec le coefficient le plus grand
  - si tous les coefficients sont négatifs, l'algorithme s'arrête
- x_1 entre en base ; qui doit sortir ?

Variable sortante

- x_1 entre en base ; qui doit sortir ?

Variable sortante

- x_1 entre en base ; qui doit sortir ?
- *Contrainte* : les autres variables doivent rester positives

Variable sortante

- x_1 entre en base ; qui doit sortir ?
- *Contrainte* : les autres variables doivent rester positives

Question

Quelle est la valeur maximale pour x_1 ?

Variable sortante

- x_1 entre en base ; qui doit sortir ?
- *Contrainte* : les autres variables doivent rester positives

Question

Quelle est la valeur maximale pour x_1 ?

$$s_1 = 24 - 6x_1 \geqslant 0 \to x_1 \leqslant 4$$

Variable sortante

- x_1 entre en base ; qui doit sortir ?
- *Contrainte* : les autres variables doivent rester positives

Question

Quelle est la valeur maximale pour x_1 ?

$$\begin{aligned} s_1 = 24 - 6x_1 \geqslant 0 \rightarrow x_1 \leqslant 4 \\ s_2 = 6 - x_1 \geqslant 0 \rightarrow x_1 \leqslant 6 \end{aligned}$$

Variable sortante

- x_1 entre en base ; qui doit sortir ?
- *Contrainte* : les autres variables doivent rester positives

Question

Quelle est la valeur maximale pour x_1 ?

$$\begin{aligned} s_1 = 24 - 6x_1 \geqslant 0 &\rightarrow x_1 \leqslant 4 \\ s_2 = 6 - x_1 \geqslant 0 &\rightarrow x_1 \leqslant 6 \\ s_3 = 2 \geqslant 0 &\rightarrow 2 \geqslant 0 \text{ toujours !} \end{aligned}$$

Variable sortante

- x_1 entre en base ; qui doit sortir ?
- *Contrainte* : les autres variables doivent rester positives

Question

Quelle est la valeur maximale pour x_1 ?

$$\begin{aligned}
s_1 = 24 - 6x_1 \geqslant 0 &\rightarrow x_1 \leqslant 4 \\
s_2 = 6 - x_1 \geqslant 0 &\rightarrow x_1 \leqslant 6 \\
s_3 = 2 \geqslant 0 &\rightarrow 2 \geqslant 0 \text{ toujours !} \\
s_4 = 1 + x_1 \geqslant 0 &\rightarrow x_1 \geqslant -1 \text{ toujours !}
\end{aligned}$$

Variable sortante

- x_1 entre en base ; qui doit sortir ?
- *Contrainte* : les autres variables doivent rester positives

Question

Quelle est la valeur maximale pour x_1 ?

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 24 - 6x_1 \geqslant 0 \rightarrow x_1 \leqslant 4 \\
s_2 &= 6 - x_1 \geqslant 0 \rightarrow x_1 \leqslant 6 \\
s_3 &= 2 \geqslant 0 \rightarrow 2 \geqslant 0 \text{ toujours !} \\
s_4 &= 1 + x_1 \geqslant 0 \rightarrow x_1 \geqslant -1 \text{ toujours !}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{x_1 \leqslant 4}$$

Pivotage

- Si $x_1 = 4$, alors $s_1 = 0$;

Pivotage

- Si $x_1 = 4$, alors $s_1 = 0$;
- x_1 entre en base et s_1 sort de la base

Pivotage

- Si $x_1 = 4$, alors $s_1 = 0$;
- x_1 entre en base et s_1 sort de la base
- Substitution :
$$x_1 = 4 - \frac{1}{6}s_1 - \frac{2}{3}x_2$$

Pivotage

- Si $x_1 = 4$, alors $s_1 = 0$;
- x_1 entre en base et s_1 sort de la base
- Substitution :

$$x_1 = 4 - \frac{1}{6}s_1 - \frac{2}{3}x_2$$

- Nouveau système :

$$\begin{array}{rcrcrcr} z & = & 20 & - & \frac{5}{6}s_1 & + & \frac{2}{3}x_2 \\ x_1 & = & 4 & - & \frac{1}{6}s_1 & - & \frac{2}{3}x_2 \\ s_2 & = & 2 & + & \frac{1}{6}s_1 & - & \frac{4}{3}x_2 \\ s_3 & = & 2 & & & - & x_2 \\ s_4 & = & 5 & - & \frac{1}{6}s_1 & - & \frac{5}{3}x_2 \end{array}$$

Règles de pivotage

- Variable entrante : plus grand coefficient positif dans la fonction objectif

Règles de pivotage

- Variable entrante : plus grand coefficient positif dans la fonction objectif
  - Si tous les coefficients sont négatifs : l'algoritme s'arrête

Règles de pivotage

- Variable entrante : plus grand coefficient positif dans la fonction objectif
  - Si tous les coefficients sont négatifs : l'algoritme s'arrête
- Variable sortante :
  - minimum du rapport du coefficient du membre de droite sur le coefficient de la variable entrante dans la même ligne lorsque celui-ci est positif

Règles de pivotage

- Variable entrante : plus grand coefficient positif dans la fonction objectif
  - Si tous les coefficients sont négatifs : l'algoritme s'arrête
- Variable sortante :
  - minimum du rapport du coefficient du membre de droite sur le coefficient de la variable entrante dans la même ligne lorsque celui-ci est positif
  - la variable sortante est celle dont on lit la valeur dans la ligne où ce minimum se produit

Production de peinture

$$\begin{cases} z = 0 + \boxed{5x_1} + 4x_2 \\ s_1 = 24 - \boxed{6x_1} - 4x_2 \\ s_2 = 6 - x_1 - 2x_2 \\ s_3 = 2 - x_2 \\ s_4 = 1 + x_1 - x_2 \end{cases}$$

Production de peinture

$$\begin{cases} z = 0 + \boxed{5x_1} + 4x_2 \\ s_1 = 24 - \boxed{6x_1} - 4x_2 \\ s_2 = 6 - x_1 - 2x_2 \\ s_3 = 2 - x_2 \\ s_4 = 1 + x_1 - x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 20 - \frac{5}{6}s_1 + \boxed{\frac{2}{3}x_2} \\ x_1 = 4 - \frac{1}{6}s_1 - \frac{2}{3}x_2 \\ s_2 = 2 + \frac{1}{6}s_1 - \boxed{\frac{4}{3}x_2} \\ s_3 = 2 - x_2 \\ s_4 = 5 - \frac{1}{6}s_1 - \frac{5}{3}x_2 \end{cases}$$

Production de peinture

$$\begin{cases} z = 0 + \boxed{5x_1} + 4x_2 \\ s_1 = 24 - \boxed{6x_1} - 4x_2 \\ s_2 = 6 - x_1 - 2x_2 \\ s_3 = 2 - x_2 \\ s_4 = 1 + x_1 - x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 20 - \frac{5}{6}s_1 + \boxed{\frac{2}{3}x_2} \\ x_1 = 4 - \frac{1}{6}s_1 - \frac{2}{3}x_2 \\ s_2 = 2 + \frac{1}{6}s_1 - \boxed{\frac{4}{3}x_2} \\ s_3 = 2 - x_2 \\ s_4 = 5 - \frac{1}{6}s_1 - \frac{5}{3}x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 21 - \frac{3}{4}s_1 - \frac{1}{2}s_2 \\ x_1 = 3 - \frac{1}{4}s_1 + \frac{1}{2}s_2 \\ x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{8}s_1 - \frac{3}{4}s_2 \\ s_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}s_1 + \frac{3}{4}s_2 \\ s_4 = \frac{5}{2} - \frac{3}{8}s_1 + \frac{5}{4}s_2 \end{cases}$$

Production de peinture

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} z & = & 21 & - & \frac{3}{4}s_1 & - & \frac{1}{2}s_2 \\ x_1 & = & 3 & - & \frac{1}{4}s_1 & + & \frac{1}{2}s_2 \\ x_2 & = & \frac{3}{2} & + & \frac{1}{8}s_1 & - & \frac{3}{4}s_2 \\ s_3 & = & \frac{1}{2} & - & \frac{1}{8}s_1 & + & \frac{3}{4}s_2 \\ s_4 & = & \frac{5}{2} & - & \frac{3}{8}s_1 & + & \frac{5}{4}s_2 \end{array}\right.$$

Production de peinture

$$\begin{cases} z = 21 - \frac{3}{4}s_1 - \frac{1}{2}s_2 \\ x_1 = 3 - \frac{1}{4}s_1 + \frac{1}{2}s_2 \\ x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{8}s_1 - \frac{3}{4}s_2 \\ s_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}s_1 + \frac{3}{4}s_2 \\ s_4 = \frac{5}{2} - \frac{3}{8}s_1 + \frac{5}{4}s_2 \end{cases}$$

- z ne peut plus être augmentée (coef. de s_1 et s_2 négatifs)

Production de peinture

$$\begin{cases} z = 21 - \frac{3}{4}s_1 - \frac{1}{2}s_2 \\ x_1 = 3 - \frac{1}{4}s_1 + \frac{1}{2}s_2 \\ x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{8}s_1 - \frac{3}{4}s_2 \\ s_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}s_1 + \frac{3}{4}s_2 \\ s_4 = \frac{5}{2} - \frac{3}{8}s_1 + \frac{5}{4}s_2 \end{cases}$$

- z ne peut plus être augmentée (coef. de s_1 et s_2 négatifs)
- $z \leqslant 21$

Production de peinture

$$\begin{cases} z = 21 - \frac{3}{4}s_1 - \frac{1}{2}s_2 \\ x_1 = 3 - \frac{1}{4}s_1 + \frac{1}{2}s_2 \\ x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{8}s_1 - \frac{3}{4}s_2 \\ s_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}s_1 + \frac{3}{4}s_2 \\ s_4 = \frac{5}{2} - \frac{3}{8}s_1 + \frac{5}{4}s_2 \end{cases}$$

- z ne peut plus être augmentée (coef. de s_1 et s_2 négatifs)
- $z \leqslant 21$
- Si $s_1 = s_2 = 0$ alors $z = 21$ c'est l'optimum

Production de peinture

$$\begin{cases} z = 21 - \frac{3}{4}s_1 - \frac{1}{2}s_2 \\ x_1 = 3 - \frac{1}{4}s_1 + \frac{1}{2}s_2 \\ x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{8}s_1 - \frac{3}{4}s_2 \\ s_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}s_1 + \frac{3}{4}s_2 \\ s_4 = \frac{5}{2} - \frac{3}{8}s_1 + \frac{5}{4}s_2 \end{cases}$$

- z ne peut plus être augmentée (coef. de s_1 et s_2 négatifs)
- $z \leqslant 21$
- Si $s_1 = s_2 = 0$ alors $z = 21$ c'est l'optimum
- atteint pour $(x_1; x_2) = (3; \frac{3}{2})$

Terminaison de l'algorithme du simplexe

Solution de base dégénérée

Solution de base dégénérée si une ou plusieurs variables de base sont zéros (plus de bijection entre les solutions de base admissibles et les points extrêmes)

Terminaison de l'algorithme du simplexe

Solution de base dégénérée

Solution de base dégénérée si une ou plusieurs variables de base sont zéros (plus de bijection entre les solutions de base admissibles et les points extrêmes)

Terminaison de l'algorithme

Si toutes les solutions de base admissibles sont non dégénérées, l'algorithme du simplexe termine après un nombre fini d'itérations