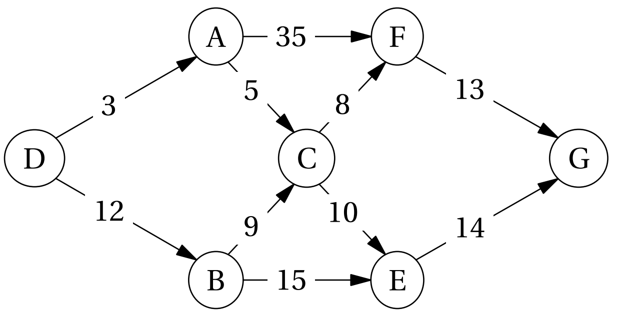
M4202Cip : TD 1

Recherche de plus court chemin
Ordonancement

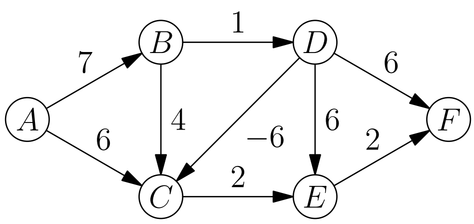
13 janvier 2020 – B. Colombel

1 Recherche de plus courte chaîne

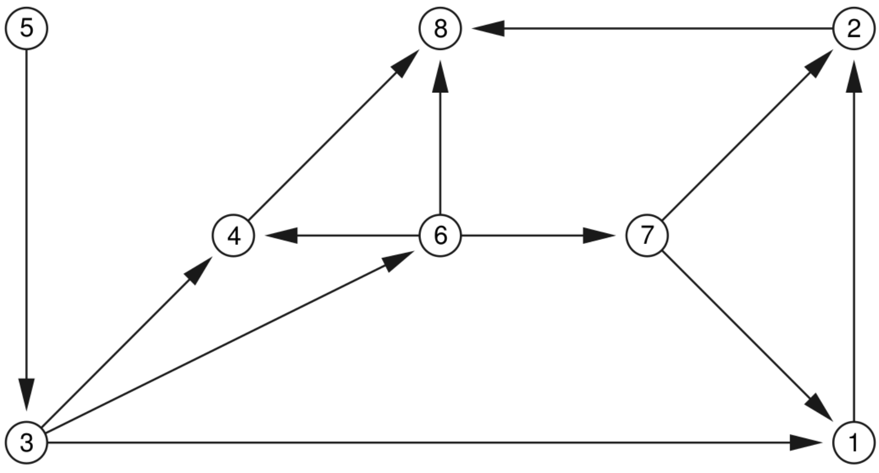
Exercice 1 : **Algorithme de Dijkstra**
Déterminer le chemin de poids minimal entre D et G du garphe suivant en utilisant l'algorithme de Dijkstra.



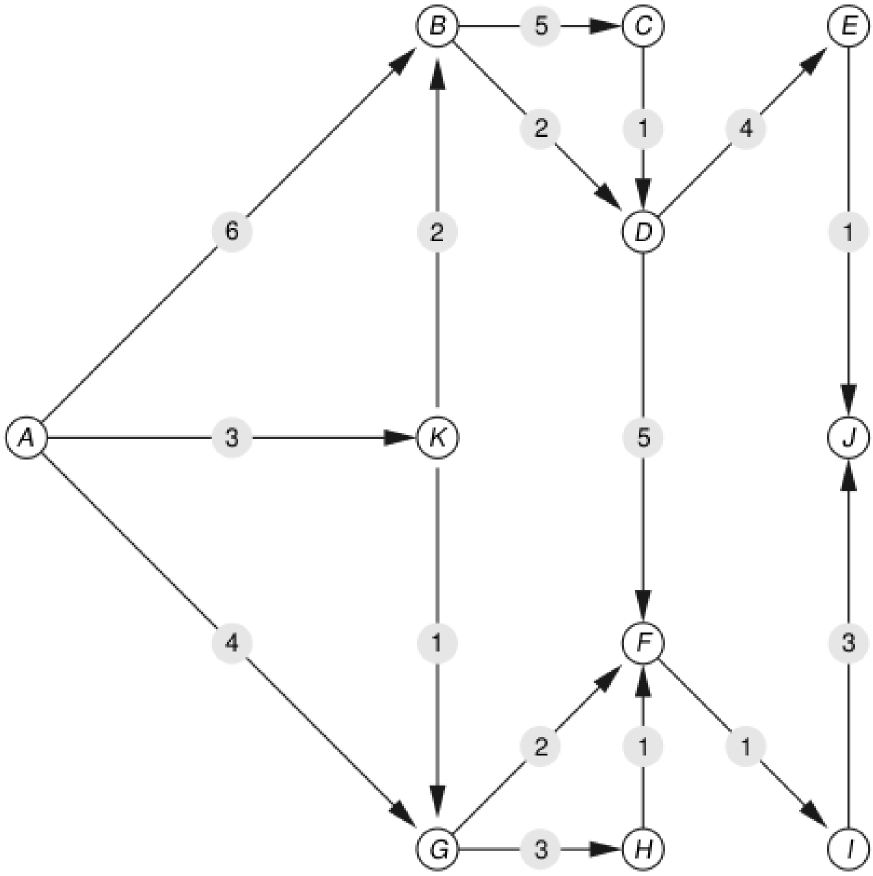
Exercice 2 : **Algorithme de Bellman-Ford**
Déterminer le chemin de poids minimal entre A et F du graphe suivant en utilisant l'algorithme de Bellman-Ford.



Exercice 3 : **Tri topologique**
Redessiner le graphe ci-dessous en utilisant la numérotation topologique.



Exercice 4 : **Algorithme de Bellman**
Déterminer le chemin de poids minimal entre A et J du garphe suivant en utilisant l'algorithme de Bellman.



2 Ordonnancement : Méthode des Potentiels Metra (MPM)

2.1 Un premier exemple

2.1.1 Le problème

La réalisation d'une recette de cuisine, la construction d'un pont ou d'une maison, l'élaboration d'un logiciel, le fonctionnement d'une chaîne de fabrication , etc., demandent une coordination d'un ensemble complexe « d'unités de travail ».

Les problèmes d'ordonnancement sont de ce type. Ils se présentent sous la forme d'un objectif que l'on souhaite atteindre et dont la réalisation demande l'exécution d'un certains nombre de tâches soumises à de nombreuses contraintes (durée, matériels, moyen humains, météo, etc.).

Nous allons étudier ici le cas particulier de base : les seules contraintes sont du type :

- la tâche j ne peut commencer que si la tâche i est terminée ou achevée ;
- la durée de chaque tâche est une durée certaine.

Problème : La réalisation d'un projet nécessite un certain nombre de tâches dont les durées et les contraintes d'antériorité (ou de postériorité) sont les suivantes :

Tâches	**Durée**	Tâches antérieures
A	7	–
B	3	A
C	1	B
D	8	A
E	2	D, C
F	1	D, C
G	1	D, C
H	3	F
I	2	H
J	1	E, G, I

Pour cela, étudions la représentation MPM (*Méthode des Potentiels Metra*).

Remarque. Metra était, dans les années 1970, une société franco-britannique, associé à la SIA (Société d'Informatique Appliquée) et à la SEMA (Société de Mathématiques Appliquées) où beaucoup de chercheurs français de très haut niveau ont travaillé.

2.1.2 Description de la méthode

On représente le problème par un graphe tel que :

1. On associe à chaque tâche un sommet du graphe.
2. On définit l'arc $(i; j)$ de valuation ou de longueur d_i si la tâche i a une durée d_i et si la tâche i doit être terminée avant que la tâche j ne puisse commencer.

   $$i \xrightarrow{d_i} j$$

   Ce graphe se lisant : la tâche i a une durée d_i et la tâche j ne peut démarrer qu'après la réalisation de la tâche i.
3. On introduit deux tâches fictives, la tâche début des travaux représentée par le sommet α et la tâche fin des travaux représentée par le sommet ω.

   Ces deux tâches ont chacune une durée nulle.
4. On relie le sommet α par un arc de valuation nulle à tout sommet i représentant une tâche ne possédant pas de contrainte d'antériorité.

   $$\alpha \xrightarrow{0} i$$

5. On relie le sommet i au sommet ω par un arc de valuation égale à la durée de la tâche i si la tâche i ne possède pas de contrainte de postériorité.

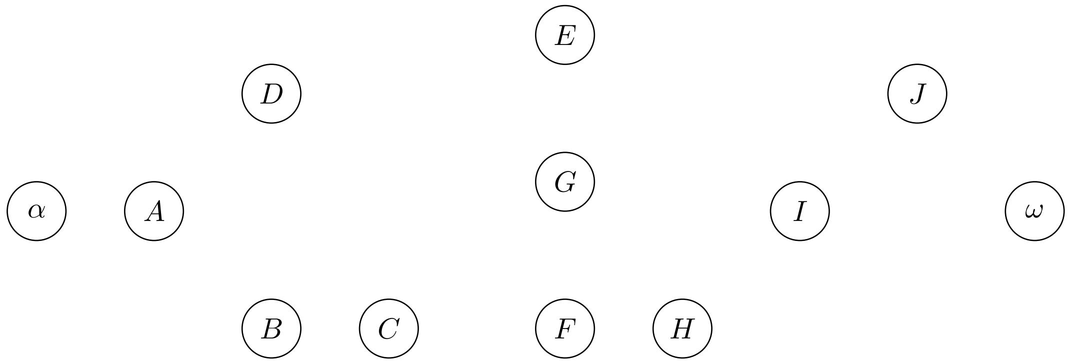
   $$i \xrightarrow{d_i} \omega$$

Exercice 5 : Expliquer pourquoi ce graphe ne doit pas admettre de circuit.

2.1.3 Résolution

Exercice 6 :

1. Tracer les arêtes du graphe ci-dessous afin qu'il représente le projet.



Remarque. Un graphe représentant un tel projet s'appelle un graphe *potentiels-tâches*.

Supposons que le projet débute à la date $t_\alpha = 0$. Notons t_i la date *au plus tôt* à laquelle peut commencer la tâche i.

2. (a) Montrer que $t_C = 10$. Quelle est la valeur de t_F ?
   (b) Interpréter alors le problème du calcul des valeurs t_i en terme de problème de chemins optimal. Quel algorithme peut-être appliquer pour résoudre ce problème ?
   (c) Appliquer cet algorithme et déterminer la durée minimale t_ω du projet.

La date *au plus tard* T_i d'une tâche i est la date au plus tard à laquelle peut commencer une tâche i sans augmenter la durée t_ω du projet.

3. (a) Que valent T_ω et T_α ?
   (b) Donnez les dates au plus tard pour tous les sommets du graphe construit à la question 1.
   (c) Pour un sommet quelconque i, exprimez T_i en fonction de t_ω et de la valeur d'un plus long chemin de i à ω.
   (d) Quel algorithme pouvez vous utiliser pour calculer les T_i ?

La marge m_i de la tâche i est la différence entre la date au plus tard et la date au plus tôt :

$$m_i = T_i - t_i$$

— Une tâche de marge nulle est une tâche critique.
— Un chemin critique est un chemin de α à ω n'empruntant que des tâches critiques.

4. (a) Donner un chemin critique.
   (b) De combien de jours au maximum peut-on retarder la tâche E sans retarder l'ensemble du projet ?

Remarque. Un graphe potentiels-tâches possède toujours au moins un chemin critique.