Traitement mathématique des images (IV)
Recherche de contours

bruno.colombel@univ-amu.fr

IUT d'Aix-Marseille
Site d'Arles
DUT Informatique

2019–2020

Approximation du gradient

Gradient d'une image

Filtres dérivés du gradient

Opérateur Laplacien

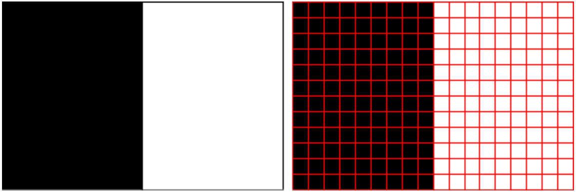
Sommaire

Opérateur de base

Nous nous intéressons ici à la détection de contours

- détection des lieux de sauts d'intensité
- petit exemple naïf afin de mieux saisir le problème

Opérateur de base



1. Quels sont sont les pixels du contours ?
   Quel sera alors l'épaisseur du contour ?

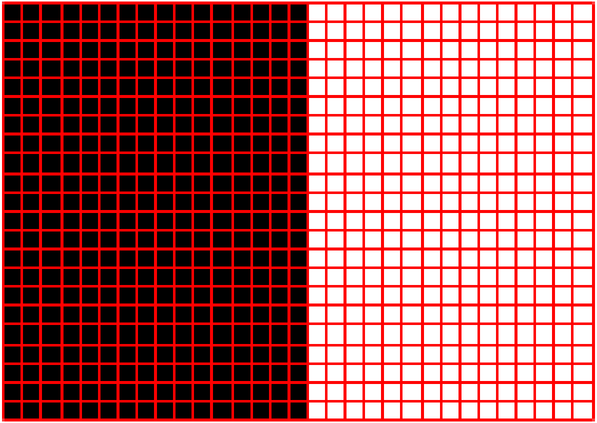
Opérateur de base

Il n'est pas aisé de construire un algorithme qui s'intéresse tantôt au voisin de gauche, tantôt au voisin de droite

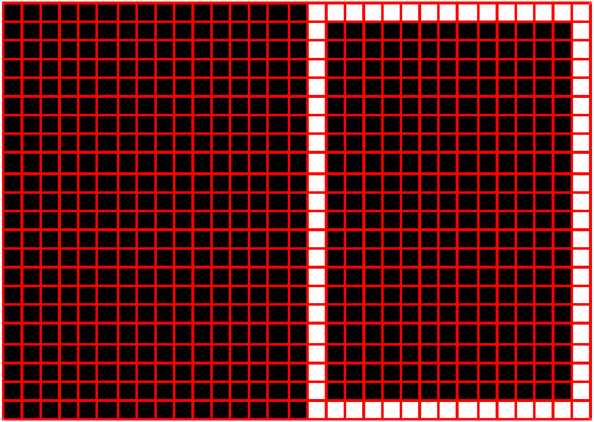
- Choix du voisin de gauche ;
- nouvelle image de même dimension ;
- chaque pixel prend pour valeur

$$I(i;j) - I(i-1;j)$$

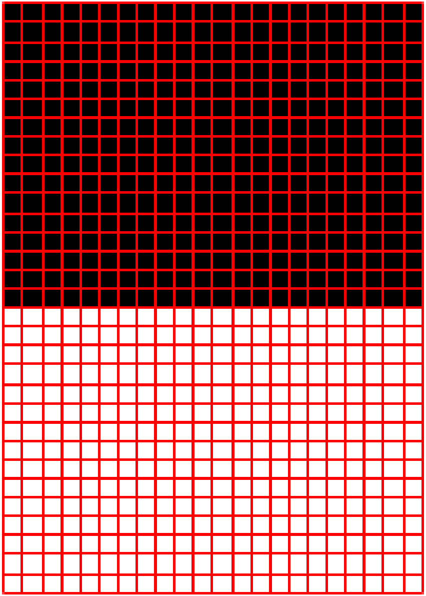
Opérateur de base



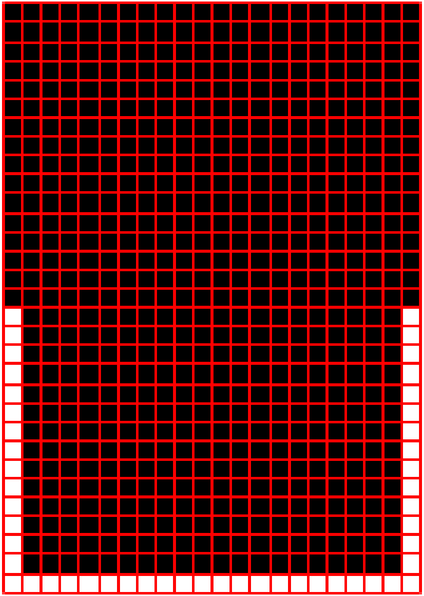
Opérateur de base



Opérateur de base



Opérateur de base

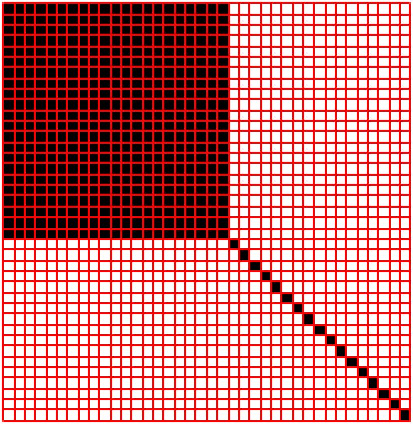


Opérateur de base

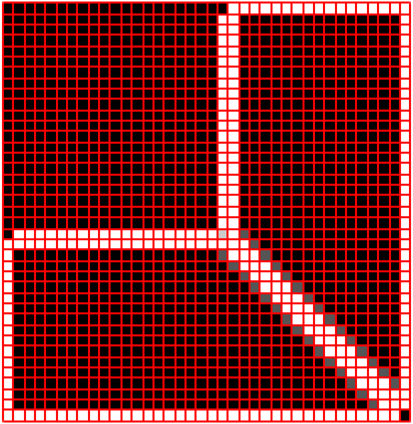
Notre détecteur naïf est maintenant décomposé en :

$$h_{\text{hor}} = \begin{array}{|c|c|}\hline -1 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad h_{\text{ver}} = \begin{array}{|c|}\hline -1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

Opérateur de base



Opérateur de base



obtenue norme du gradient

$$I_2(x,y) = \sqrt{h_{\text{ver}}(I(x,y))^2 + h_{\text{hor}}(I(x,y))^2}$$

normalisée au besoin

Détecteur de Roberts

Le détecteur de Roberts (1965) est assez similaire mais cherche les dérivées selon des directions diagonales

$$h_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad h_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sommaire

Gradient d'une image

En mathématiques, les variations sont modélisées par les dérivées.
Si $f(x)$ est une fonction continue, le lieu de contour correspond :

Gradient d'une image

En mathématiques, les variations sont modélisées par les dérivées.
Si $f(x)$ est une fonction continue, le lieu de contour correspond :

- aux variations brusques de $f(x)$

Gradient d'une image

En mathématiques, les variations sont modélisées par les dérivées.
Si $f(x)$ est une fonction continue, le lieu de contour correspond :

- aux variations brusques de $f(x)$
- aux pics de la dérivée

Gradient d'une image

Une image étant à deux dimensions, on utilise le gradient de l'image :

Définition

Si $I(x;y)$ est une fonction continue donnant les niveaux de gris d'une image, le gradient de I est le vecteur :

$$\nabla(x;y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x;y); \frac{\partial f}{\partial y}(x;y)\right)$$

Gradient d'une image

Une image étant à deux dimensions, on utilise le gradient de l'image :

Définition

Si $I(x;y)$ est une fonction continue donnant les niveaux de gris d'une image, le gradient de I est le vecteur :

$$\nabla(x;y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x;y); \frac{\partial f}{\partial y}(x;y)\right)$$

- $\frac{\partial f}{\partial x}$ correspond aux variations d'intensité dans la direction (Ox)

Gradient d'une image

Une image étant à deux dimensions, on utilise le gradient de l'image :

Définition

Si $I(x;y)$ est une fonction continue donnant les niveaux de gris d'une image, le gradient de I est le vecteur :

$$\nabla(x;y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x;y); \frac{\partial f}{\partial y}(x;y)\right)$$

- $\frac{\partial f}{\partial x}$ correspond aux variations d'intensité dans la direction (Ox)
- $\frac{\partial f}{\partial y}$ dans la direction (Oy)

Module du gradient

Le **module du gradient** permet de quantifier l'importance du contour mis en évidence, c'est-à-dire l'amplitude du saut d'intensité relevé dans l'image :

$$\|\nabla(x;y)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

Module du gradient

Le **module du gradient** permet de quantifier l'importance du contour mis en évidence, c'est-à-dire l'amplitude du saut d'intensité relevé dans l'image :

$$\|\nabla(x;y)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

Remarque

On utilise quelquefois

$$\max\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|;\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\right)$$

Direction du gradient

La direction du gradient permet de déterminer l'arête présente dans l'image. En effet, la direction du gradient est orthogonale à celle du contour :

$$\Phi = \arctan\left(\frac{\partial f / \partial y}{\partial f / \partial x}\right)$$

Principe de la détection de contours par l'utilisation du gradient

Principe de la détection de contours par l'utilisation du gradient

1. Calcul du gradient dans deux directions orthogonales ;

Principe de la détection de contours par l'utilisation du gradient

1. Calcul du gradient dans deux directions orthogonales ;
2. calcul du module du gradient ;

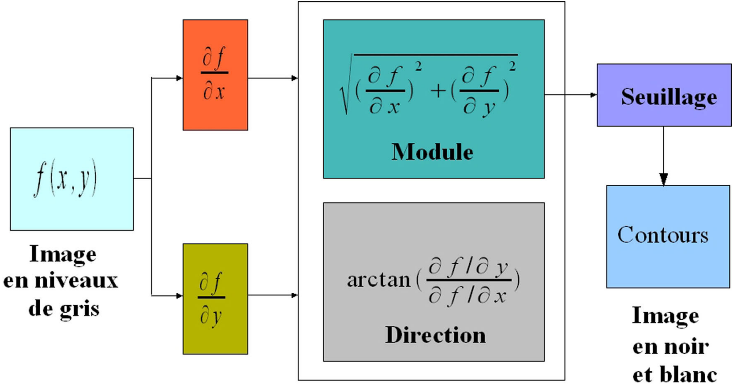
Principe de la détection de contours par l'utilisation du gradient

1. Calcul du gradient dans deux directions orthogonales ;
2. calcul du module du gradient ;
3. sélection des contours les plus marqués ;

Principe de la détection de contours par l'utilisation du gradient

1. Calcul du gradient dans deux directions orthogonales ;
2. calcul du module du gradient ;
3. sélection des contours les plus marqués ;
   - seuillage ;
   - direction des contours orthogonale à Φ.

Principe de la détection de contours par l'utilisation du gradient



Gradient d'une image

L'image est discrète par nature

Gradient d'une image

L'image est discrète par nature

- approximations de gradients

Gradient d'une image

L'image est discrète par nature

- approximations de gradients

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Gradient d'une image

L'image est discrète par nature

- approximations de gradients

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- La plus petite valeur de h vaut 1 (ou -1)

Gradient d'une image

L'image est discrète par nature

- approximations de gradients

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- La plus petite valeur de h vaut 1 (ou -1)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x; y) \approx f(x+1, y) - f(x, y)$$

Gradient d'une image

Approximation du gradient d'une image discrète :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) \approx f(x+1,y) - f(x,y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) \approx f(x,y+1) - f(x,y)$$

Gradient d'une image

Approximation du gradient d'une image discrète :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) \approx f(x+1,y) - f(x,y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) \approx f(x,y+1) - f(x,y)$$

On retrouve le détecteur de base :

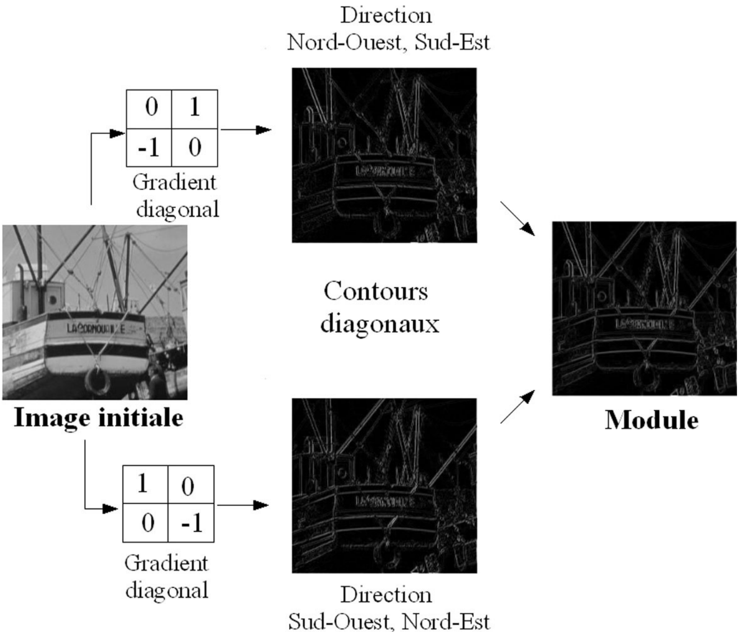
$$h_{\text{hor}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad h_{\text{ver}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gradient d'une image

Le détecteur de Roberts est assez similaire à notre détecteur de base mais cherche les dérivées selon des directions diagonales :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple



Direction
Nord-Ouest, Sud-Est
0
1
-1
0
Gradient
diagonal
Contours
diagonaux
Image initiale
Module
1
0
0
-1
Gradient
diagonal
Direction
Sud-Ouest, Nord-Est

Sommaire

Filtres dérivés du gradient

Les détecteurs de contours vus jusqu'à présent possèdent plusieurs avantages :

Filtres dérivés du gradient

Les détecteurs de contours vus jusqu'à présent possèdent plusieurs avantages :

- très simple à comprendre et à implémenter

Filtres dérivés du gradient

Les détecteurs de contours vus jusqu'à présent possèdent plusieurs avantages :

- très simple à comprendre et à implémenter
- rapide d'exécution.

Filtres dérivés du gradient

Les détecteurs de contours vus jusqu'à présent possèdent plusieurs avantages :

- très simple à comprendre et à implémenter
- rapide d'exécution.

Par contre :

- sensible au bruit

Filtres dérivés du gradient

Les détecteurs de contours vus jusqu'à présent possèdent plusieurs avantages :

- très simple à comprendre et à implémenter
- rapide d'exécution.

Par contre :

- sensible au bruit
- détecte trop de contours

Filtres dérivés du gradient

Les détecteurs de contours vus jusqu'à présent possèdent plusieurs avantages :

- très simple à comprendre et à implémenter
- rapide d'exécution.

Par contre :

- sensible au bruit
- détecte trop de contours
- détecte mieux certains types de contours

Filtres dérivés du gradient

Pour réduire la sensibilité au bruit, on combine :

Filtres dérivés du gradient

Pour réduire la sensibilité au bruit, on combine :

- lissage et approximation du gradient

Filtres dérivés du gradient

Pour réduire la sensibilité au bruit, on combine :

- lissage et approximation du gradient
- Filtres de Sobel et filtres de Prewitt

Filtres de Sobel et de Prewitt

Ces deux filtres s'appuient sur la dérivée :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Filtres de Sobel et de Prewitt

Ces deux filtres s'appuient sur la dérivée :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) \approx \frac{1}{2}\left(f(x+1,y) - f(x-1,y)\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) \approx \frac{1}{2}\left(f(x,y+1) - f(x,y-1)\right)$$

Filtres de Sobel et de Prewitt

Ces deux filtres s'appuient sur la dérivée :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x; y) \approx \frac{1}{2}\left(f(x+1, y) - f(x-1, y)\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x; y) \approx \frac{1}{2}\left(f(x, y+1) - f(x, y-1)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \approx \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Filtres de Sobel

Les filtres de Sobel utilisent un lissage par le filtre gaussien séparable :

$$G = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Filtres de Sobel

Les filtres de Sobel utilisent un lissage par le filtre gaussien séparable :

$$G = \frac{1}{16}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix} \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

1. lissage dans une direction

Filtres de Sobel

Les filtres de Sobel utilisent un lissage par le filtre gaussien séparable :

$$G = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. lissage dans une direction
2. puis recherche de contours dans la direction orthogonale

Filtres de Sobel

Filtres de Sobel

$$S_{\text{ver}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & -2 & -1\\0 & 0 & 0\\1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Filtres de Sobel

$$S_{\text{ver}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & -2 & -1\\0 & 0 & 0\\1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$S_{\text{hor}} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\-2 & 0 & 2\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Filtres de Prewitt

Les filtres de Prewitt utilisent un lissage par le filtre de moyenne séparable :

$$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Filtres de Prewitt

Filtres de Prewitt

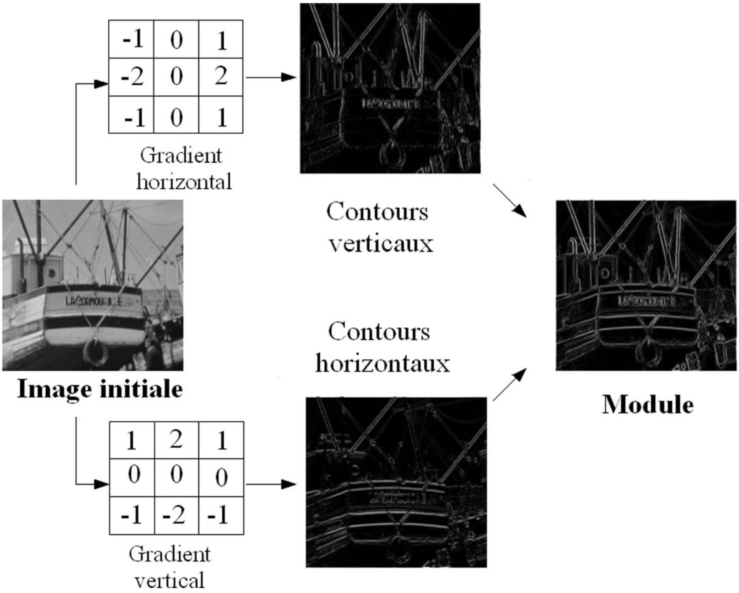
$$S_{\text{ver}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\0 & 0 & 0\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Filtres de Prewitt

$$S_{\text{ver}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{\text{hor}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple (Sobel)



Sommaire

Opérateur Laplacien

Principes des opérateurs de gradient

- un contour dans une image correspond au maximum du gradient dans la direction orthogonale au contour

Opérateur Laplacien

Principes des opérateurs de gradient

- un contour dans une image correspond au maximum du gradient dans la direction orthogonale au contour

Équivalent à :

- passage par zéro de la dérivée seconde et changement de signe

Opérateur Laplacien

Principes des opérateurs de gradient

- un contour dans une image correspond au maximum du gradient dans la direction orthogonale au contour

Équivalent à :

- passage par zéro de la dérivée seconde et changement de signe

En deux dimensions, la dérivée seconde est donnée par le *laplacien* :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} f \left(\frac{\partial}{\partial x} f \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} f \right)$$

Opérateur Laplacien

$$\frac{\partial}{\partial x} f \left(\frac{\partial}{\partial x} f \right) \approx \frac{\partial}{\partial x} \left(f \left(x + 1, y \right) - f \left(x, y \right) \right)$$

Opérateur Laplacien

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} f \left(\frac{\partial}{\partial x} f \right) &\approx \frac{\partial}{\partial x} \left(f(x+1, y) - f(x, y) \right) \\
&\approx f(x+1, y) - f(x, y) - \left(f(x, y) - f(x-1, y) \right)
\end{aligned}$$

Opérateur Laplacien

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} f\left(\frac{\partial}{\partial x} f\right) &\approx \frac{\partial}{\partial x}\left(f(x+1, y) - f(x, y)\right) \\
&\approx f(x+1, y) - f(x, y) - (f(x, y) - f(x-1, y)) \\
&\approx f(x-1, y) - 2f(x, y) + f(x+1, y)
\end{aligned}
$$

Opérateur Laplacien

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} f \left(\frac{\partial}{\partial x} f \right) &\approx \frac{\partial}{\partial x} \left(f(x+1,y) - f(x,y) \right) \\
&\approx f(x+1,y) - f(x,y) - \left(f(x,y) - f(x-1,y) \right) \\
&\approx f(x-1,y) - 2f(x,y) + f(x+1,y)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Opérateur Laplacien

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Opérateur Laplacien

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Opérateur Laplacien

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où une approximation du laplacien :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$