M4202C Recherche opérationnelle (II)
Programmation linéaire

bruno.colombel@univ-amu.fr

IUT d'Aix-Marseille
Site d'Arles
DUT informatique

2019–2020

Programmation linéaire : Introduction

Résolution graphique

Analyse de sensibilité

Sommaire

Problèmes de PL

Programmation linéaire (PL)

Modèle mathématique dans lequel la fonction objectif et les contraintes sont linéaires en les variables.

Problèmes de PL

Programmation linéaire (PL)

Modèle mathématique dans lequel la fonction objectif et les contraintes sont linéaires en les variables.

Applications

- Optimisation de l'usage de ressources limitées dans les domaines militaire, industriel, agricole, économique, etc.

Problèmes de PL

Programmation linéaire (PL)

Modèle mathématique dans lequel la fonction objectif et les contraintes sont linéaires en les variables.

Applications

- Optimisation de l'usage de ressources limitées dans les domaines militaire, industriel, agricole, économique, etc.
- Existence d'algorithmes très efficaces pour résoudre des problèmes de très grande taille (simplexe, points intérieurs)

Production de peinture

Une société produit de la peinture d'intérieur et d'extérieur à partir de deux produits de base M1 et M2.

Données

	Quantité utilisée par tonne		Quantité disponible par jour
	Extérieure	Intérieure	
M1	6	4	24
M2	1	2	6
Profit par tonne	5	4	

Contraintes supplémentaires

- Demande maximum en peinture d'intérieur : 2 tonnes/jour
- La production en peinture d'intérieure ne peut dépasser que d'une tonne celle d'extérieure

Production de peinture

Variables

x_1 : tonnes de peinture d'extérieur produites par jour
x_2 : tonnes de peinture d'intérieur produites par jour

Production de peinture

Variables

x_1 : tonnes de peinture d'extérieur produites par jour
x_2 : tonnes de peinture d'intérieur produites par jour

Fonction objectif (à optimiser)

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

Production de peinture

Contraintes

$$
\begin{aligned}
6x_1 + 4x_2 &\leqslant 24 \\
x_1 + 2x_2 &\leqslant 6 \\
x_2 &\leqslant 2 \\
-x_1 + x_2 &\leqslant 1 \\
x_1, x_2 &\geqslant 0
\end{aligned}
$$

Écriture matricielle

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ : variables de décisions} \qquad c = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ : coût ou profit}$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ : second membre}$$

Production de peinture

Écriture matricielle

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ : variables de décisions} \qquad c = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ : coût ou profit}$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ : second membre}$$

$$\begin{aligned} \max z &= {}^t cx \\ \text{s.c.} \quad Ax &\leqslant b \\ x &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Diet problem

- On désire déterminer la composition, à coût minimal, d'un aliment pour bétail qui est obtenu en mélangeant au plus deux produits bruts : orge et arachide.
- La quantité nécessaire par portion est de 400g
- L'aliment ainsi fabriqué devra comporter au moins 30 % de protéines et au plus 5 % de fibres.

Données

	Quantité par gramme d'aliment		Coût
Aliment	Protéines	Fibres	(€ /kg)
Orge	0.09	0.02	1.5
Arachide	0.60	0.06	4.5

Diet problem

Variables

x_1 : grammes d'orge par portion

x_2 : grammes d'arachide par portion

Diet problem

Variables

x_1 : grammes d'orge par portion
x_2 : grammes d'arachide par portion

Objectif

$$\max z = 0,0015x_1 + 0,0045x_2$$

Diet problem

Contraintes

Diet problem

Contraintes

- **Quantité totale** : $x_1 + x_2 \geqslant 400$

Diet problem

Contraintes

- **Quantité totale** : $x_1 + x_2 \geqslant 400$
- **Protéines** : $0,09x_1 + 0,06x_2 \geqslant 0,3(X_1 + x_2)$

Diet problem

Contraintes

- **Quantité totale** : $x_1 + x_2 \geqslant 400$
- **Protéines** : $0,09x_1 + 0,06x_2 \geqslant 0,3(X_1 + x_2)$
- **Fibres** : $0,02x_1 + 0,06x_2 \leqslant 0,05(x_1 + x_2)$

Diet problem

Contraintes

- **Quantité totale** : $x_1 + x_2 \geqslant 400$
- **Protéines** : $0,09x_1 + 0,06x_2 \geqslant 0,3(X_1 + x_2)$
- **Fibres** : $0,02x_1 + 0,06x_2 \leqslant 0,05(x_1 + x_2)$
- **Non négativité** : $x_1, x_2 \geqslant 0$

Vocabulaire

- x_i **variable** de décision du problème

Vocabulaire

- x_i **variable** de décision du problème
- $x = (x_1, \ldots, x_n)$ **solution réalisable** (admissible) si elle satisfait toutes les contraintes

Vocabulaire

- x_i **variable** de décision du problème
- $x = (x_1, \ldots, x_n)$ **solution réalisable** (admissible) si elle satisfait toutes les contraintes
- ensemble des solutions réalisables = **domaine** ou **région** admissible

Vocabulaire

- x_i **variable** de décision du problème
- $x = (x_1, \ldots, x_n)$ **solution réalisable** (admissible) si elle satisfait toutes les contraintes
- ensemble des solutions réalisables = **domaine** ou **région** admissible
- $x = (x_1, \ldots, x_n)$ solution **optimale** si elle est réalisable et optimise la fonction-objectif

Critiques de la PL

Intérets

- existence de méthodes de résolution générales et efficaces
- ces méthodes sont efficaces en théorie et en pratique (existence de nombreux logiciels de résolution)

Critiques de la PL

Intérets

- existence de méthodes de résolution générales et efficaces
- ces méthodes sont efficaces en théorie et en pratique (existence de nombreux logiciels de résolution)

Restrictions

- variables réelles
- contraintes linéaires
- objectif linéaire

Feuille de TD

- **Production de vins**
- **Problème de mélange**
- **Problème de fabrication**

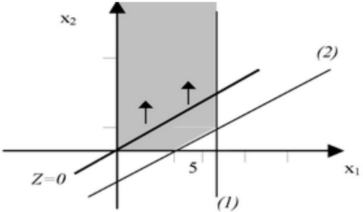
Sommaire

Résolution graphique

Problème avec solution non bornée

$$\max z = -2x_1 + 3x_2$$

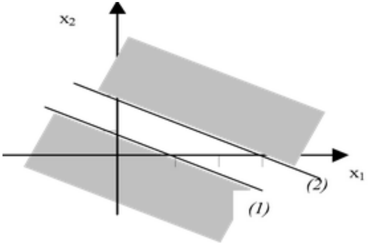
$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} x_1 & \leq 5 \\ 2x_1 - 3x_2 & \leq 6 \\ x_1 & \geq 0 \\ x_2 & \geq 0 \end{cases}$$



Problème impossible

$$\min z = 3x_1 + 2x_2$$

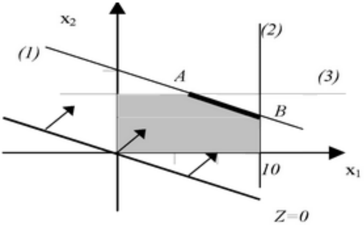
$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} \quad x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ 2x_1 \quad + 4x_2 = > 8 \\ x_1 \qquad\qquad \geq 0 \\ \qquad\qquad x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Problème à solutions multiples

$$\max z = x_1 + 3x_2$$

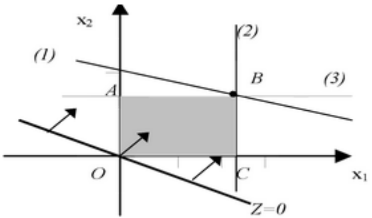
$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \leq 10 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Problème de dégénerescence

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ x_1 \leq 10 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Feuille de TD

Résolution graphique

Sommaire

Analyse de sensibilité

Une analyse de sensibilité se résume à la recherche des intervalles de variations possibles des paramètres du programme linéaire sans que la solution optimale ne soit modifiée

Analyse de sensibilité

Une analyse de sensibilité se résume à la recherche des intervalles de variations possibles des paramètres du programme linéaire sans que la solution optimale ne soit modifiée

- De combien peut-on faire varier la quantité x_1 de peinture d'extérieur sans changer la solution optimale ?

Analyse de sensibilité

Une analyse de sensibilité se résume à la recherche des intervalles de variations possibles des paramètres du programme linéaire sans que la solution optimale ne soit modifiée

- De combien peut-on faire varier la quantité x_1 de peinture d'extérieur sans changer la solution optimale ?
- De combien peut-on faire varier la quantité x_2 de peinture d'extérieur sans changer la solution optimale ?

Analyse de sensibilité

Une analyse de sensibilité se résume à la recherche des intervalles de variations possibles des paramètres du programme linéaire sans que la solution optimale ne soit modifiée

- De combien peut-on faire varier la quantité x_1 de peinture d'extérieur sans changer la solution optimale ?
- De combien peut-on faire varier la quantité x_2 de peinture d'extérieur sans changer la solution optimale ?
- De combien peut-on faire varier le profit par tonne de peinture extérieure (ou intérieure) sans changer la solution optimale ?