Rappel des Principaux Résultats

- Soit P un prédicat non trivial défini sur l'ensemble des procédures.
- Théorème de Rice : P n'est pas calculable

  (il n'existe pas de procédure procP qui permette de calculer P)

Rappel des Principaux Résultats

- Un ensemble E est décidable si sa fonction caractéristique est calculable.
- Conséquence pour montrer qu'un ensemble est décidable, il faut écrire sa fonction caractéristique.

Rappel des Principaux Résultats

- Un ensemble E est récursivement énumérable (ré) si il est l'image d'une fonction f calculable et totale.
- i.e. E={f(0), f(1), f(2) .....} . On dit que f énumère E.
- De façon équivalente, un ensemble est ré si on peut afficher tous ses éléments par un algorithme.
- Pour montrer qu'un ensemble est ré il faut soit donner f qui l'énumère, soit donner un algorithme qui affiche tous ses éléments.

Petit Exercice pour commencer.

- On a vu dans le cours que si E est ré alors on peut écrire sa fonction semi-caractéristique :
- int fsc (int x) {

```
int fsc (int x) {
    for (int n=0;;n++)
        if (f(n)==x) return 1 ;
}
```

Cette propriété est appelé la semi-décidabilité.

- Montrer que si E est semi-décidable E est ré.

Petit Exercice pour commencer.

Montrer que si E est semi-décidable E est ré.

- E est semi-décidable. Soit fsc sa fonction semi-caractéristique.
- Algorithme pour afficher E :

pour tout couple (x, t)

si h(fsc, x, t) alors afficher x ;

Petit Exercice pour commencer.

Montrer que si E est semi-décidable E est ré.

- E est semi-décidable. Soit fsc sa fonction semi-caractéristique.
- Algorithme pour afficher E :

pour tout couple (x, t)

si h(fsc, x, t) alors afficher x ;

- Remarque

pour tout x si fsc(x) alors afficher x ;

ne fonctionne pas

Petit Exercice pour commencer.

Montrer que si E est semi-décidable E est ré.

- E est semi-décidable. Soit fsc sa fonction semi-caractéristique.
- Algorithme pour afficher E :

pour tout couple (x, t)

si h(fsc, x, t) alors afficher x ;

- Donc E est ré ssi E est semi-décidable.

Correction du test

Soit E = { q | q(3) est défini } (ensemble des procédures telles que q(3) s'arrête).

Correction du test

Soit E = { q | q(3) est défini } (ensemble des procédures telles que q(3) s’arrête).

- Soit le prédicat P(q)=1 si et seulement si q(3) est défini. La fonction caractéristique est égale à P. Or P n’est pas trivial donc E est indécidable (application du théorème de Rice).

Correction du test

Soit E = { q | q(3) est défini } (ensemble des procédures telles que q(3) s'arrête).

- Soit le prédicat P(q)=1 si et seulement si q(3) est défini. La fonction caractéristique est égale à P. Or P n'est pas trivial donc E est indécidable.
- int f(int x) { while(1) ; return 0;}
- int g(int x) {return 0;}
- On a P(f) ≠ P(g) donc p n'est pas trivial

Correction du test

Soit E = { q | q(3) est défini } (ensemble des procédures telles que q(3) s'arrête).

- E est ré.
- Pour chaque couple (p, t)

  si h(p, 3, t) alors afficher(p) ;

Correction du test

Soit E = { q | q(3) est défini } (ensemble des procédures telles que q(3) s’arrête).

- F = { q| q(3) n’est pas défini }

Correction du test

Soit E = { q | q(3) est défini } (ensemble des procédures telles que q(3) s’arrête).

- F = { q| q(3) n’est pas défini }
- F est le complémentaire de E.

Correction du test

Soit E = { q | q(3) est défini } (ensemble des procédures telles que q(3) s’arrête).

- F = { q| q(3) n’est pas défini }
- F est le complémentaire de E.
- Théorème : Si E et son complétaire sont re alors E est décidable.

Correction du test

Soit E = { q | q(3) est défini } (ensemble des procédures telles que q(3) s’arrête).

- F = { q| q(3) n’est pas défini }
- F est le complémentaire de E.
- Théorème : Si E et son complétaire sont re alors E est décidable.
- Comme on a vu que E est indécidable on en déduit que F n’est pas ré.

Question 2

Soient f et g, 2 fonctions calculables.

$E=\{ x \mid f(x)*g(x) = 0\}$

- E est ré

Question 2

Soient f et g, 2 fonctions calculables.

E={ x | f(x)*g(x) = 0}

- E est ré
- Pour tout couple (x, t)

    si h(f, x, t) et h(g, x, t) et (f(x)=0 ou g(x)=0)

        alors afficher x ;

Question 3

- Soient A et B : A décidable et B ré mais non décidable.
- $A \cap B$ décidable :
- $A \cup B$ décidable :
- $A \cap B$ ré mais non décidable :
- $A \cup B$ ré mais non décidable :

Question 3

- Soient A et B : A décidable et B ré mais non décidable.
- $A \cap B$ décidable : $A = \{ \}$
- $A \cup B$ décidable :
- $A \cap B$ ré mais non décidable :
- $A \cup B$ ré mais non décidable :

Question 3

- Soient A et B : A décidable et B ré mais non décidable.
- $A \cap B$ décidable : $A = \{ \}$
- $A \cup B$ décidable : $A = \mathbb{N}$
- $A \cap B$ ré mais non décidable :
- $A \cup B$ ré mais non décidable :

Question 3

- Soient A et B : A décidable et B ré mais non décidable.
- $A \cap B$ décidable : $A = \{\ \}$
- $A \cup B$ décidable : $A = \mathbb{N}$
- $A \cap B$ ré mais non décidable : $A = \mathbb{N}$
- $A \cup B$ ré mais non décidable :

Question 3

- Soient A et B : A décidable et B ré mais non décidable.
- $A \cap B$ décidable : $A = \{ \}$
- $A \cup B$ décidable : $A = \mathbb{N}$
- $A \cap B$ ré mais non décidable : $A = \mathbb{N}$
- $A \cup B$ ré mais non décidable :$A = \{ \}$

Correction de la partie calculabilité de l’examen de Mai 2017

Exercice 1.1

$\forall i,\ g(i) = f_i(i)+1.$

- g est bien totale mais elle ne peut pas appartenir à F

Correction de la partie calculabilité de l'examen de Mai 2017

Exercice 1.1

- $\forall i\ , g(i) = f_i(i)+1.$

g est bien totale mais elle ne peut pas appartenir à F

- En effet supposons $\exists$ j avec $f_j = g$
- Que vaut g(j) ?

Correction de la partie calculabilité de l'examen de Mai 2017

Exercice 1.1

- $\forall i\ , g(i) = f_i(i)+1.$

g est bien totale mais elle ne peut pas appartenir à F

- En effet supposons $\exists$ j avec $f_j = g$
- Que vaut g(j) ?

$f_j(j)$ car $g=f_j$

$f_j(j)+1$ car $\forall i\ , g(i) = f_i(i)+1.$

Exercice 1.2

- Soient $D = \{d_0, d_1, d_2, ...\}$ et

  $E=\{e_0, e_1, e_2, ...\}$
- On construit F qui contient tous les ensembles de $D \cup E$

Exercice 1.2

- Soient $D = \{d_0, d_1, d_2, ...\}$ et

  $E=\{e_0, e_1, e_2, ...\}$

- $F = \{d_0, e_0, d_1, e_1, ...\}=\{f_0, f_1, f_2, ...\}$

  avec $f_i = d_{i/2}$ si i est pair

  et $f_i = e_{(i-1)/2}$ si i est impair

Exercice 1.2

- $F = \{d_0, e_0, d_1, e_1, \ldots.\} = \{f_0, f_1, f_2, \ldots\}$

  avec $f_i = d_{i/2}$ si i est pair

  et $f_i = e_{(i-1)/2}$ si i est impair

- $g = \{ i \mid i \notin f_i\}$, g ne peut pas être un élément de F

Correction de l’exercice 2.1

- P(q) est VRAI ssi $\exists x$ tel que q(x) est impair.
- Version 1 : P est non trivial en effet

  int p (int x) {return 2*x ; }

  int q (int x) {return 3*x; }

  on a $P(p) \neq P(q)$
- Donc le théorème de Rice s’applique et P est indécidable.

Correction de l’exercice 2.1

- P(q) est VRAI ssi $\exists$x tel que q(x) est impair.
- Version 2 : Supposons qu’il existe une procédure procP qui calcule P alors on peut écrire la fonction contradictoire suivante :
- int gamma (int x) {if (procP(gamma)) return 2*x ;

  else return 3*x;}
- Quel que soit la valeur de P(gamma) on arrive à une contradiction.

Correction de l’exercice 2.2

- E = { q | P(q) est VRAI }
- sfc (p)

  pour tous les couples (x, t)

  si (h(p,x,t) et p(x)%2=1) alors return 1 ;

Correction de l'exercice 2.3

- E = { q | P(q) est VRAI}
- Pour tous les triplets (p, x,t)

  si (h(p,x,t) et p(x)%2=1) afficher p ;

Correction de l’exercice 2.4

- R(q) est VRAI ssi $\forall x$, q(x) n’est pas impair
- E = { q | P(q) est VRAI}

  rappel : P(q) est VRAI ssi $\exists x$ tel que q(x) est impair.

Correction de l'exercice 2.4

- R(q) est VRAI ssi $\forall x$, q(x) n'est pas impair
- On a défini E = { q | P(q) est VRAI}

Correction de l’exercice 2.4

- R(q) est VRAI ssi $\forall x$, q(x) n’est pas impair
- On a défini E = { q | P(q) est VRAI}

  P(q) est VRAI ssi $\exists x$ tel que q(x) est impair.
- On a donc R(q) = q $\notin$ E
- Donc F = {q |R(q) est VRAI} = $\overline{E}$

Correction de l'exercice 2.4

- R(q) est VRAI ssi $\forall x$, q(x) n'est pas impair
- On a défini E = { q | P(q) est VRAI}
- Donc F = {q |R(q) est VRAI} = $\overline{E}$

- D'après le théorème vu en cours si F était ré, on en déduirait que E est décidable. Ce qui est faux.
- Donc F n'est pas ré.