Codage des triplets et des n-uplets

- $h(x,y,z) = c(c(x,y), z)$ (où c est le codage des couples d'entiers)

  rappel : $c(x,y)=(x+y)(x+y+1)/2 + y$
- Pour les n-uplets, on peut appliquer (n-1) le codage c. Par exemple si $n=4$:

  $f(x,y,z,t)=c(c(x,y), c(z,t))$

Codage des Mots

- Mots finis sur un alphabet fini :

  Les mots les plus courts d'abord et à égalité l'ordre alphabétique :

  ϵ, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa, aab, ...
- Remarque l'ordre alphabétique seul ne fonctionne pas : b ne sera jamais codé.
- Exercice : Touver une solution si l'alphabet est infini mais dénombrable.

Codage des Listes d’Entiers

- A chaque liste λ on associe

  $v(\lambda)$ = sa longueur + la somme des entiers de la liste.
- On code dans cet ordre les listes et à valeur égale dans l’ordre lexico croissant (voir TD).

Codage des Procédures C

- int nom (int x) { ..... }
- Les procédures peuvent être considérées comme des textes (mots sur un alphabet fini et des séparateurs)
- cpt=0 ;

  on énumère les mots si on tombe sur une procédure valide on lui met le numéro cpt et on incrémente cpt

Codage des Procédures C

- On peut donc pour tout n trouver la n^{ième} procédure C et réciproquement toute procédure à un numéro.
- On peut donc écrire une procédure universelle qui permet de simuler n'importe quelle procédure sur n'importe quelle donnée. En effet à partir d'un couple (x,n), on peut générer la procédure p de numéro x et la faire exécuter sur la donnée n.

Conclusion

- Dans ce chapitre, on a vu des ensembles en bijection avec $\mathbb{N}$ (dénombrables).
- De plus nous avons pu donner des bijections calculables, ce qui permet entre autre d'afficher tous les éléments de ces ensembles à l'aide d'un algorithme.

Chapitre 2. Paradoxe de la diagonalisation et problème de l'arrêt

- La preuve de Cantor :

  Une fonction f est dite totale si elle est définie pour toute valeur ($\forall x$, $f(x)$ a une valeur)
- Théorème de Cantor : L'ensemble des fonctions totales de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable (i.e pas en bijection avec $\mathbb{N}$)

Chapitre 2. Paradoxe de la diagonalisation et problème de l'arrêt

- Par l'absurde. Soient T l'ensemble des fonctions totales de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et f une bijection de $\mathbb{N}$ dans T. On a donc
- $T = \{f_0, f_1, f_2, ..., f_i, ...\}$ où $f_i = f(i)$
- Définissons la fonction γ de la façon suivante : $\forall i, \gamma(i) = f_i(i)+1$. C'est une fonction totale donc qui appartient à T et il existe j tel que $\gamma = f_j$.

Chapitre 2. Paradoxe de la diagonalisation et problème de l’arrêt

- Que vaut $\gamma(j)$?
- Comme $\gamma = f_j$ on a $\gamma(j) = f_j(j)$

Chapitre 2. Paradoxe de la diagonalisation et problème de l’arrêt

- Que vaut $\gamma(j)$?
- Comme $\gamma = f_j$ on a $\gamma(j) = f_j(j)$
- Comme $\forall i$, $\gamma(i) = f_i(i)+1$ on a en remplaçant i par j : $\gamma(j) = f_j(j)+1$
- Donc une contradiction !!!!
- Ceci termine la preuve de Cantor.

Les fonctions calculables

- Si p est une procédure et n une donnée : p(n) désigne le résultat de la procédure p sur la donnée n. Ce résultat est un entier si la procédure termine et il est indéfini sinon.
- A une procédure p est donc associée une fonction mathématique.
- Une fonction est dite calculable s’il existe une procédure qui la calcule.

Les fonctions calculables

- Remarque : d'après Cantor il existe des fonctions non calculables.
- Soit P l'ensemble des procédures, on a $P=\{p_0, p_1, p_2, \ldots, p_i \ldots\}$ où p_i est la $i^{\text{ième}}$ procédure.
- Reprenons l'argument de Cantor soit

$$\forall i,\ \gamma(i) = p_i(i)+1$$

- γ est calculable !!!

Les fonctions calculables

- γ est calculable donc il existe j tel que p_j calcule γ : $\forall$ i, $p_j(i) = \gamma(i)$
- Comme $\forall i, \gamma(i) = p_i(i)+1$ on a $\gamma(j) = p_j(j)+1$
- Comme p_j calcule γ on a $\gamma(j) = p_j(j)$
- Contradiction ?

Les fonctions calculables

- γ est calculable donc il existe j tel que p_j calcule γ.
- Comme $\forall i, \gamma(i) = p_i(i)+1$ on a $\gamma(j) = p_j(j)+1$
- Comme p_j calcule γ on a $\gamma(j) = p_j(j)$
- Contradiction ? Non la seule solution est que $p_j(j)$ ne soit pas défini.

Les fonctions calculables

- Conclusion :

  Dans tout modèle de calcul raisonnable , il existe des fonctions calculables strictement partielles (non totales).

Fonctions calculables totales

- Il y en a un nombre dénombrable mais on ne peut pas les énumérer (les bijections ne sont pas calculables). Soit g une bijection quelconque.
- On a $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, \dots\ q_i\ \dots\}$ avec $q_i = g(i)$
- Soit $\forall i, \gamma(i) = q_i(i)+1$, γ est totale mais elle n'est pas calculable (elle ne peut pas appartenir à Q, on arriverait à la même contradiction donc g n'est pas calculable)

Indécidabilité du problème de l'arrêt

- Problème de l'arrêt $h(p,x)=1$ si $p(x)$ est défini et 0 sinon.
- Définissons la fonction suivante :

  $\gamma(n)=p_n(n)+1$ si $h(p_n,n)=$ et sinon.

- γ et h sont des fonctions totales.
- Si h est calculable alors γ l'est aussi et il existe j tel que $\gamma=p_j$ et on arrive à une contradiction.