Exo 1

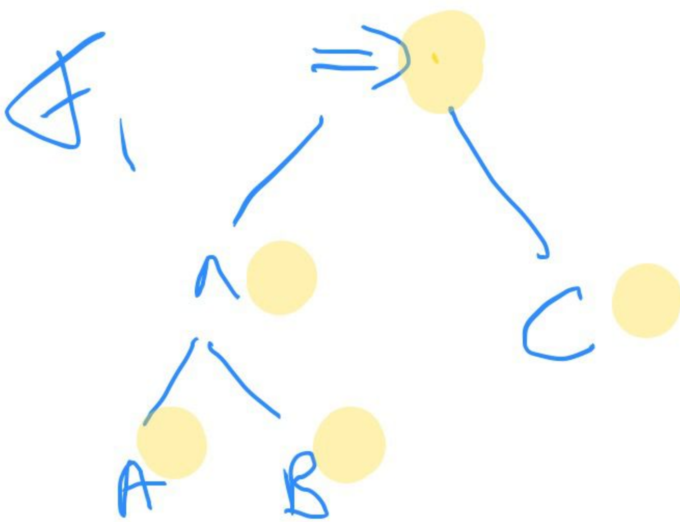
$F_1 : (A \wedge B) \Rightarrow C$

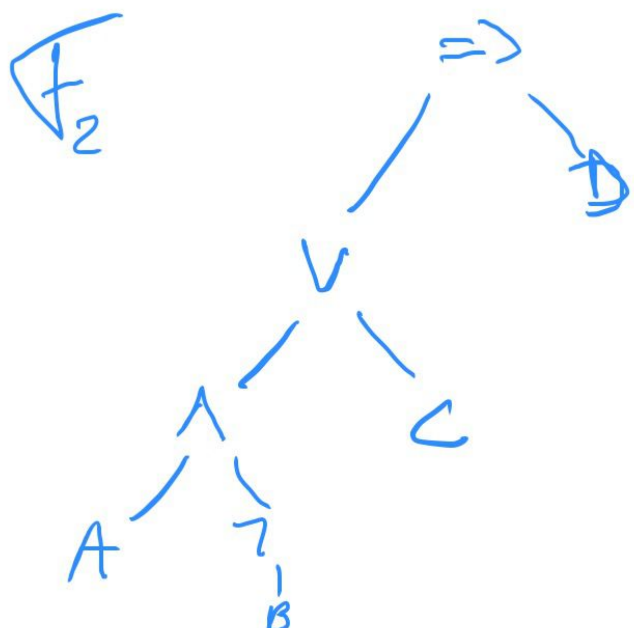
$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \Rightarrow \quad \Leftrightarrow$

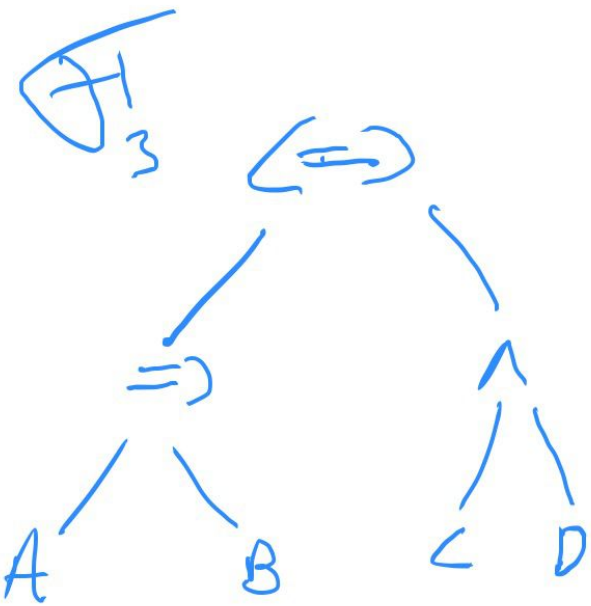
$F_2 : ((A \wedge \neg(B)) \vee C) \Rightarrow D$

$F_3 : (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (C \wedge D)$

principal



Exo 2

Sous formule $\equiv$ sous arbre de l'arbre syntaxique

1) si $F$ atomique $F$ $\quad sub(F) = \{F\}$ $\quad A, B, \ldots, \bot, \top$ atomique

si $F = \neg G$ $\quad sub(\neg G) = sub(G) \cup \{\neg G\}$

connecteur unaire

nbc() si $F = F_1 * F_2$ $\quad sub(F_1 * F_2) = sub(F_1) \cup sub(F_2) \cup \{F_1 \vee F_2\}$

nombre de connecteur

avec $* : \wedge \vee \Rightarrow \Leftrightarrow$ i.e. un connecteur binaire

2) nbc : nombre de connecteur

si $F$ atomique $\quad nbc(F) = 0$

si $F = \neg G$ $\quad nbc(F) = 1 + nbc(G)$

si $F = F_1 * F_2$ $\quad nbc(F) = 1 + nbc(F_1) + nbc(F_2)$

3)

3Fi

$$F_1 \quad sub((A \wedge B) \Rightarrow C) = \{(A \wedge B) \Rightarrow C\} \cup sub(A \wedge B) \cup sub(C)$$

$$= \{(A \wedge B) \Rightarrow C\} \cup \{A \wedge B\} \cup sub(A) \cup sub(B) \cup \{C\}$$

$$= \{(A \wedge B) \Rightarrow C\} \cup \{A \wedge B\} \cup \{A\} \cup \{B\} \cup \{C\}$$

$$= \underbrace{\{(A \wedge B) \Rightarrow C, A \wedge B, A, B, C\}}_{\text{}} \text{ 5 sous formules}$$

$$nbc((A \wedge B) \Rightarrow C) = 1 + nbc(A \wedge B) + nbc(C)$$

$$= 1 + 1 + nbc(A) + nbc(B) + 0$$

$$= 1 + 1$$

$$= 2$$

---

question 4

$$\underset{|sub|}{5} \leq 2 \times \underset{nbc}{2} + 1 = 5$$

3 $F_2$

$$F_2 = ((A \wedge \neg B) \vee C) \Rightarrow D$$

$$= \{ ((A \wedge \neg B) \vee C) \Rightarrow D,\ D,\ (A \wedge \neg B) \vee C,\ C,\ A \wedge \neg B,\ A,\ \neg B,\ B \}$$

$|sub| = 8$

question 4

$8 \leq 2 \times 4 + 1$

$|sub|$ nbc

$$nbc(F_2) = 1 + \underbrace{nbc((A \wedge \neg B) \vee C)} + nbc(D)$$

$$= 1 + 1 + nbc(A \wedge \neg B) + nbc(C) + 0$$

$$= 1 + 1 + 1 + nbc(A) + nbc(\neg B) + nbc(C) + 0$$

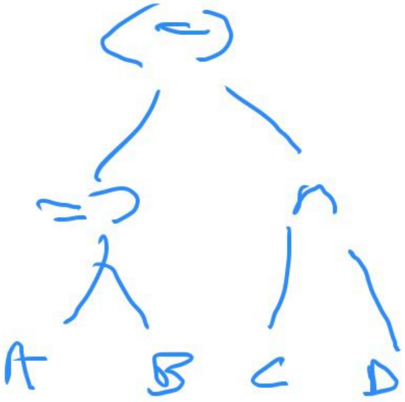
$$= 1 + 1 + 1 + \cancel{0} + 1 + \cancel{nbc(B) + nbc(C) + 0}$$

$$= 4$$

3 $F_3$

$F_3 = (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (C \wedge D)$

$sub(F_3) = \{ (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (C \wedge D),$
$(A \Rightarrow B),$
$A,$
$B,$
$(C \wedge D),$
$C,$
$D \}$




$|sub| = 7$

$\underbrace{7}_{|sub|} \le 2 \cdot \underbrace{3}_{nbc} + 1$

$nbc(F_3) = 1 + nbc(A \Rightarrow B) + nbc(C \wedge D)$
$= 1 + 1 + \cancel{nbc(A)} + \cancel{nbc(B)} + 1 + \cancel{nbc(C)} + \cancel{nbc(D)}$
$= 3$

5 $$|sub(F)| \leq 2\, nbc(F)+1$$

- Si F atomique $1 \leq 2 * 0 + 1$ ok.

- si F est $\neg G$

par hypothèse d'induction on sait que $|sub(G)| \leq 2nbc(G)+1$
parce que la hauteur de G est inférieure à celle de F

$$
\begin{aligned}
|sub(F)| &= 1 + |sub(G)| \\
&\leq 1 + 2\, nbc(G) + 1 \\
&\leq 2\,(1 + nbc(G)) \\
&\leq 2\, nbc(F) < 2\, nbc(F)+1
\end{aligned}
$$

si $F = F_1 \ast F_2$ $\quad (\ast : \Leftrightarrow \ \Rightarrow \ \vee \ \wedge)$

par hypothèse d'induction on sait que

$$|sub(F_1)| \leq 2\, nbc(F_1) + 1$$
$$|sub(F_2)| \leq 2\, nbc(F_2) + 1$$

$$|sub(F_1 \ast F_2)| = |sub(F_1) \cup sub(F_2) \cup \{F_1 \ast F_2\}|$$
$$\leq |sub F_1| + |sub(F_2)| + 1$$
$$\leq 2\,(nbc\, F_1) + 1 + 2\, nbc(F_2) + 1 + 1 \quad \text{hyp ind}$$
$$= 2\,(\underbrace{nbc(F_1) + nbc(F_2) + 1}) + 1$$
$$= 2\, nbc(F_1 \ast F_2) + 1$$

$|A \cup B| \leq |A| + |B|$

2 élt 3 élt

$\{a, b\} \cup \{b, c, d\}$

$= \{a, b, c, d\}$

4 élts

Exo 3

$A \Rightarrow B$

Si $A$ alors $B$

quand on a $A$ on a nécessairement $B$

il suffit d'avoir $A$ pour avoir $B$

1) $a$ : Eric assiste aux cours et aux TD

$m$ : Eric a la moyenne

on peut séparer : $(EaCM \wedge EaTD) \Rightarrow Em$

$a \Rightarrow m$

2) $Req \Leftrightarrow (Rrefl \wedge Rsym \wedge Rtrans)$

propositions

3) $\neg RoseVac \Rightarrow (RoseCoupure \Rightarrow \Diamond RoseTétanos)$ en logique modale

$\Diamond \longrightarrow$ "il est possible que"

**Remarque**

$$\begin{aligned} A &\Rightarrow (B \Rightarrow C) \\ &\equiv (A \& B) \Rightarrow C \\ &\equiv (B \& A) \Rightarrow C \\ &\equiv B \Rightarrow (A \Rightarrow C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \Rightarrow (B \Rightarrow C) &= \neg A \vee (B \Rightarrow C) \\ &= \neg A \vee \neg B \vee C \\ &= \neg (A \wedge B) \vee C \\ &= (A \wedge B) \Rightarrow C \end{aligned}$$

4) pierre est chez lui : home
pierre lit : l
pierre écoute de la musique : m

$$\text{home} \Rightarrow (l \vee m)$$

5) le sida sera éradiqué finsida
un vaccin est découvert vaccin

$$\text{finsida} \Rightarrow \text{vaccin}$$
$$\text{fin sida} \Leftrightarrow \text{vaccin} \text{ (pas faux)}$$
$$\text{fin sida} \not\Leftarrow \text{vaccin}$$

6)

escalader atte:perai $\Longrightarrow$ habileté $\wedge$ courage

$\cancel{\Longleftarrow}$

RdV pour la suite à
11:40

Exo 4

$F_1 \quad A \wedge (\neg B \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \quad (\equiv A)$

$F_2 \quad (A \vee B \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B))$

(a) $\rho(A) = F \ (0, \bot) \qquad \rho(B) = T \ (1, T)$

$\rho(F_1) = F \qquad \rho(F_2) = T$

(b) $\rho'(A) = T \qquad \rho'(B) = F$

$\rho'(F_1) = T \qquad \rho'(F_2) = T$

(c) $\rho''(A) = F \qquad \rho''(F_1) = F$

$\rho''(F_2) = ((F \vee \rho''(B)) \Leftrightarrow (T \vee \rho''(B))) = (\rho''(B) \Leftrightarrow T) = \rho''(B)$

(d) $\rho''(B) = T$ $\qquad\qquad \rho'''(F_1) = \rho'''(A)$ ?

$$\rho'''(F_2) = (\rho'''(A) \vee T) \Leftrightarrow (\neg \rho'''(A) \vee F)$$
$$= T \Leftrightarrow \neg \rho'''(A)$$
$$= \neg \rho''(A)$$

---

2) $F_1 \equiv A$ $\qquad$ $F_1$ est contingente :
- des fois vrai satisfiable
- des fois fausse pas valide

$F_2$ ~~de~~ contingente
- satisfiable $\rho(A) = F$ $\rho(B) = T$
- pas valide $\rho'(A) = T$ $\rho'(B) = T$

Principe : remontes les $\Rightarrow l$ en premier

exo5 (2)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, B \vdash C, A}\,\text{axiome} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A, B \vdash C, B}\,\text{axiome} \quad \dfrac{}{C, A, B \vdash C}\,\text{axiome}}{B \Rightarrow C, A, B \vdash C}\Rightarrow l}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A, B \vdash C}\Rightarrow l \qquad \dfrac{}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \vdash C, A}\,\text{axiome}}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B, A \vdash C}\Rightarrow l$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B, A \vdash C}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow C}\Rightarrow r}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)}\Rightarrow r}{\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))}\Rightarrow r$$

chercher une preuve dans $LK_0$ :
algo on choisit une formule F dans le séquent et on remonte la règle correspondant au connecteur principal de F

(b)

$\bot \Rightarrow (\ldots)$ tjs vrai

$(a \wedge \bot) \Rightarrow (v \; v)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, \bot \vdash \neg A}\ \bot\,\text{left (axiome)}}{A \vdash \bot \Rightarrow \neg A}\ \Rightarrow d}{\vdash A \Rightarrow (\bot \Rightarrow \neg A)}\ \Rightarrow d$$

(1 [illegible])

remarque

axiome

$$C, C, D, A \vee B \vdash C \Rightarrow D, A \vee B$$

ax — ax — ax — ax

$$B, B \Rightarrow A, A \vdash B \qquad B \Rightarrow A, A \vdash B, A \qquad B, A \Rightarrow B, A \vdash A \qquad B, A \Rightarrow B \vdash B, A$$

$$A \Rightarrow B, B \Rightarrow A, A \vdash B \qquad\qquad B, A \Rightarrow B, B \Rightarrow A \vdash A$$

$$(A \Rightarrow B), (B \Rightarrow A) \vdash A \Leftrightarrow B \quad \Leftrightarrow d$$

$$A \Rightarrow B \vdash (B \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B) \quad \Rightarrow d$$

$$\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B)) \quad \Rightarrow d$$

exo 6

jules est en vacances $v$

jules est à la mer $m$

c'est l'été $e$

jules est en forme $f$

jules lit le journal $j$

$H_1 \quad j \Rightarrow \neg v = \neg j \vee \neg v$

$H_2 \quad e \Rightarrow m = \neg e \vee m$

$H_3 \quad (m \wedge \neg f) \Rightarrow j = \neg m \vee f \vee j$

$H_4 \quad \neg(\neg e \wedge \neg m) = e \vee m$

$H_5 \quad \neg v \Rightarrow \neg j = v \vee \neg j$

en contradiction avec $\neg f$

négation début

$\neg e \vee j$

$m \vee j$

$\neg m \vee j$

$j$

$v$

$\neg j$