Opérateur de fermeture

Une application h est un opérateur de fermeture sur un ensemble ordonné $(E, \leq_E)$ si :

- h est croissante : $x \leq_E y \Rightarrow h(x) \leq_E h(y)$
- h est extensive : $x \leq_E h(x)$
- h est idempotente : $h(h(x)) = h(x)$

Elément fermé pour h

x est un élément fermé ssi $h(x) = x$

Opérateur de fermeture

Exemple : fermeture en coordonnées entières

Soit l'ensemble des points dans le plan en coordonnées réelles $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, muni de l'ordre $\leq_E$ avec $(x_1, y_1) \leq_E (x_2, y_2)$ ssi $x_1 \leq x_2$ et $y_1 \leq y_2$
et $h : E \longrightarrow E$, avec $h(x, y) = (\lceil x \rceil, \lceil y \rceil)$
où $\lceil x \rceil$ est la partie entière supérieure de x
Exemple : $h(3.2, 6.8) = (4, 7)$

h est un opérateur de fermeture

- h est croissante : $(x_1, y_1) \leq_E (x_2, y_2) \Rightarrow (\lceil x_1 \rceil, \lceil y_1 \rceil) \leq_E (\lceil x_2 \rceil, \lceil y_2 \rceil)$
- h est extensive : $(x_1, y_1) \leq_E (\lceil x_1 \rceil, \lceil y_1 \rceil)$
- h est idempotente : $h(h((x_1, y_1))) = h((\lceil x_1 \rceil, \lceil y_1 \rceil)) = (\lceil x_1 \rceil, \lceil y_1 \rceil) = h((x_1, y_1))$

Elément fermé pour h

(x_1, y_1) est un élément fermé si x_1 et y_1 sont des entiers

Opérateur de fermeture

Exemple : fermeture transitive d'une relation

Soit un ensemble E, une relation R sur E est un élément de $P = 2^{E \times E}$.
On munit P de l'ordre $\subseteq$.
Soit $h : P \longrightarrow P$, avec $h(R) = R_{trans}$
où R_{trans} est la fermeture transitive de R (plus petite relation transitive contenant R) :
(1) $R \subseteq R_{trans}$
(2) si $x, y, z \in E$, $(x, y) \in R$ et $(y, z) \in R$ alors $(x, z) \in R_{trans}$

h est un opérateur de fermeture

- h est croissante : si $R_1 \subseteq R_2$ alors $R_{1_{trans}} \subseteq R_{2_{trans}}$
- h est extensive : $R \subseteq R_{trans}$
- h est idempotente : $h(h(R)) = h(R_{trans}) = R_{trans} = h(R)$

Elément fermé pour h

R est un élément fermé si R est transitive.

Exercice : Formaliser la notion de fermeture réflexive d'une relation binaire sur un ensemble E.

Treillis des fermés

Treillis des fermés

Soit h un opérateur de fermeture sur un treillis T et F l'ensemble des fermés de h.
$(F, \wedge_F, \vee_F)$ est un treillis avec :
$x \wedge_F y = x \wedge_T y$
$x \vee_F y = h(x \vee_T y)$

Exemple : Treillis des relations binaires transitives sur un ensemble E

Soit h l'opérateur de fermeture sur le treillis $(2^{E \times E}, \subseteq)$ qui associe à une relation binaire sur un ensemble E sa fermeture transitive et F l'ensemble des relations binaires transitives sur E.
$(F, \wedge_F, \vee_F)$ est un treillis et plus précisément :
$R_1 \wedge_F R_2 = R_1 \cap R_2$
$R_1 \vee_F R_2 = h(R_1 \cup R_2)$ c'est-à-dire la fermeture transitive de $R_1 \cup R_2$

Exercice : Dessiner une petite partie du treillis des relations transitives sur l'ensemble $E = \{a, b, c\}$ en partant du top.

Correspondance de Galois

Une correspondance de Galois exprime une correspondance "inverse" deux ensembles ordonnés.

Correspondance de Galois

Soient deux ensembles ordonnés $(A, \leq_A)$ and $(B, \leq_B)$,
et deux applications $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow A$
Le couple d'applications (f, g) est une correspondance de Galois si :
$\forall a \in A$ and $\forall b \in B$, $a \leq_A g(b) \Leftrightarrow b \leq_B f(a)$.

Cette notion nous intéresse particulièrement à cause de la propriété suivante :

Correspondance de Galois et fermeture

Si (f, g) est une correspondance de Galois entre $(A, \leq_A)$ et $(B, \leq_B)$
$h_A = g \circ f$ et $h_B = f \circ g$ sont des opérateurs de fermeture

Exemple de correspondance de Galois

Une correspondance de Galois exprime en correspondance "inverse" deux ensembles ordonnés.

Atomes d'un treillis

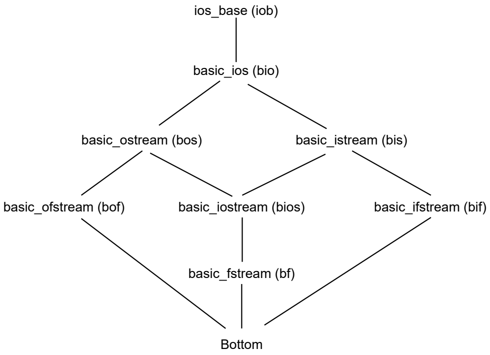
Les atomes d'un treillis $T = (X, \leq_T)$ sont les éléments minimaux de $X \setminus \{\bot\}$

Correspondance de Galois entre le treillis des ensembles d'atomes d'un treillis et les éléments de ce treillis

Soit un treillis fini T et E l'ensemble de ses atomes.
Soient les deux applications :
$f : 2^E \to T$ avec $\forall Y \subseteq E$, $f(Y) = \vee_T Y$
f associe à un sous-ensemble de E sa borne supérieure dans T)
$g : T \to 2^E$ avec $\forall x \in X$, $g(x) = \{e \in E : e \leq_T x\}$
g associe à un élément x de T les atomes qui sont plus petits que x
(f, g) forme une correspondance de Galois entre $(2^E, \subseteq)$ et $(X, \geq_T)$.

Correspondance de Galois entre ensembles d'atomes d'un treillis et éléments de ce treillis

Exercice : dessinez la correspondance de Galois entre ensembles d'atomes d'un treillis et éléments de ce treillis pour le treillis ci-dessous. Observez et commentez quels sont les éléments fermés pour chacun des opérateurs de fermeture.



Correspondance de Galois associée à une relation binaire

Contexte formel (O, A, R)

- O et A sont deux ensembles finis (par exemple représentant des objets et leurs attributs)
- $R \subseteq O \times A$ est une relation binaire (par exemple "possède")

Applications associées à R

- f associe à un ensemble d'objets les attributs qu'ils partagent
  $f : \mathcal{P}(O) \to \mathcal{P}(A)$
  $X \longmapsto f(X) = \{y \in A \mid \forall x \in X, (x, y) \in R\} = X'$
- g associe à un ensemble d'attributs les objets qui les possèdent tous
  $g : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(O)$
  $Y \longmapsto g(Y) = \{x \in O \mid \forall y \in Y, (x, y) \in R\} = Y'$

Rappel, on note $\mathcal{P}(O)$ ou 2^O l'ensemble des parties de O

Opérateurs de fermeture associées à R

$f \circ g$ et $g \circ f$ sont des opérateurs de fermetures.

$f \circ g$ est un opérateur de fermeture sur $(2^A, \subseteq)$

$g \circ f$ est un opérateur de fermeture sur $(2^O, \subseteq)$