David Delahaye

Faculté des Sciences David.Delahaye@lirmm.fr

Master Informatique M2 2022-2023

Problème SMT

- Le problème SMT consiste à décider de la satisfiabilité de formules logiques contenant des symboles de théories particulières.
- Par exemple :

$$\exists x, y. (x \leq 0 \lor x + y \leq 0) \land y \geq 1 \land x \geq 1$$

(par la suite, on omettra les quantificateurs et on considérera que les variables libres de la formule sont existentiellement quantifiées)

Quelles formules? Quelles contraintes?

- En toute généralité, les solveurs SMT peuvent prendre en entrée des formules quelconques de la logique du premier ordre.
- En pratique, il y a des solveurs SMT qui prennent en entrée uniquement des formules booléennes avec une seule théorie (par ex. l'arithmétique linéaire sur les entiers).
- Mais il y a aussi des solveurs qui traitent toute la logique du premier ordre avec quantificateurs, des langages de types riches (polymorphisme, types algébriques, etc.) et des théories sur des objets complexes (par ex. ODEs)

Quelles théories?

- Des théories décidables (pour lesquelles il existe un algorithme).
- Exemples de théories :
 - Égalité avec symboles non interprétés.
 - Arithmétique.
 - Tableaux.
 - Types inductifs.
 - Vecteurs de bits.
 - Certains fragments de la théorie des ensembles.

Combinaison de théories

- En pratique, les théories ne sont pas isolées.
- La vérification de programmes a besoin d'aritmétique, de tableaux, de vecteurs de bits, etc.
- Il y a un réel besoin de combiner les théories.
- Le problème est difficile.
- Des méthodes existent : Shostak, Nelson-Oppen.

Principe

- On s'interface avec un solveur SAT.
- On fait des aller-retours entre le solveur SAT et la théorie.
- La méthode du solveur peut être quelconque (DPLL par exemple).
- Mais pour optimiser, il faut modifier la méthode du solveur.
- C'est ce que nous verrons dans ce cours (méthode DPLL(T)).

Principe (plus précisément)

On se donne une formule Φ et on se pose la question :

Φ est-elle satisfiable?

Pour répondre à cette question, on applique l'algorithme suivant :

- Convertir Φ en forme CNF.
- 2 Remplacer chaque littéral par une variable propositionnelle.
- **3** Appeler un solveur SAT afin d'obtenir un modèle $\mathcal M$ booléen de Φ .
- ullet Convertir ${\mathcal M}$ en contraintes pour la théorie et le faire vérifier par la procédure de décision de la théorie.

Si \mathcal{M} est satisfiable dans la théorie, alors la formule Φ l'est également, sinon on ajoute $\neg \mathcal{M}$ à Φ et on retourne en 2.

Exemple (informel)

On se donne la formule suivante :

$$(x \le 0 \lor x + y \le 0) \land y \ge 1 \land x \ge 1$$

- La formule est déjà en forme CNF.
- Abstraction booléenne : $(1 \lor 2) \land 3 \land 4$.
- Appel de SAT : modèle $\mathcal{M}_1=1\ \bar{2}\ 3\ 4$ Mais la théorie dit que 1 et 4 sont en contradiction! On ajoute $\neg \mathcal{M}_1: (1\lor 2)\land 3\land 4\land (\bar{1}\lor 2\lor \bar{3}\lor \bar{4})$
- Appel de SAT : modèle $\mathcal{M}_2 = \bar{1} \ 2 \ 3 \ 4$ Mais la théorie dit que 2, 3 et 4 sont en contradiction ! On ajoute $\neg \mathcal{M}_2 : (1 \lor 2) \land 3 \land 4 \land (\bar{1} \lor 2 \lor \bar{3} \lor \bar{4}) \land (1 \lor \bar{2} \lor \bar{3} \lor \bar{4})$

Exemple (informel)

On se donne la formule suivante :

$$(x \le 0 \lor x + y \le 0) \land y \ge 1 \land x \ge 1$$

- La formule est déjà en forme CNF.
- Abstraction booléenne : $(1 \lor 2) \land 3 \land 4$.
- Appel de SAT : modèle $\mathcal{M}_1=1\ \bar{2}\ 3\ 4$ Mais la théorie dit que 1 et 4 sont en contradiction! On ajoute $\neg \mathcal{M}_1: (1\lor 2)\land 3\land 4\land (\bar{1}\lor 2\lor \bar{3}\lor \bar{4})$
- Appel de SAT : modèle $\mathcal{M}_2 = \bar{1} \ 2 \ 3 \ 4$ Mais la théorie dit que 2, 3 et 4 sont en contradiction ! On ajoute $\neg \mathcal{M}_2 : (1 \lor 2) \land 3 \land 4 \land (\bar{1} \lor 2 \lor \bar{3} \lor \bar{4}) \land (1 \lor \bar{2} \lor \bar{3} \lor \bar{4})$

Exemple (informel)

On se donne la formule suivante :

$$(x \le 0 \lor x + y \le 0) \land y \ge 1 \land x \ge 1$$

- La formule est déjà en forme CNF.
- Abstraction booléenne : $(1 \lor 2) \land 3 \land 4$.
- Appel de SAT : modèle M₁ = 1 2 3 4
 Mais la théorie dit que 1 et 4 sont en contradiction!
 On ajoute ¬M₁ : (1 ∨ 2) ∧ 3 ∧ 4 ∧ (1 ∨ 2 ∨ 3 ∨ 4)
- Appel de SAT : modèle $\mathcal{M}_2 = \bar{1} \ 2 \ 3 \ 4$ Mais la théorie dit que 2, 3 et 4 sont en contradiction ! On ajoute $\neg \mathcal{M}_2 : (1 \lor 2) \land 3 \land 4 \land (\bar{1} \lor 2 \lor \bar{3} \lor \bar{4}) \land (1 \lor \bar{2} \lor \bar{3} \lor \bar{4})$

Exemple (informel)

On se donne la formule suivante :

$$(x \le 0 \lor x + y \le 0) \land y \ge 1 \land x \ge 1$$

- La formule est déjà en forme CNF.
- Abstraction booléenne : (1 ∨ 2) ∧ 3 ∧ 4.
- Appel de SAT : modèle $\mathcal{M}_1 = 1\ \bar{2}\ 3\ 4$ Mais la théorie dit que 1 et 4 sont en contradiction !
- Appel de SAT : modèle $\mathcal{M}_2 = \bar{1} \ 2 \ 3 \ 4$ Mais la théorie dit que 2, 3 et 4 sont en contradiction ! On ajoute $\neg \mathcal{M}_2 : (1 \lor 2) \land 3 \land 4 \land (\bar{1} \lor 2 \lor \bar{3} \lor \bar{4}) \land (1 \lor \bar{2} \lor \bar{3} \lor \bar{4})$

Exemple (informel)

On se donne la formule suivante :

$$(x \le 0 \lor x + y \le 0) \land y \ge 1 \land x \ge 1$$

- La formule est déjà en forme CNF.
- Abstraction booléenne : $(1 \lor 2) \land 3 \land 4$.
- Appel de SAT : modèle $\mathcal{M}_1=1\ \bar{2}\ 3\ 4$ Mais la théorie dit que 1 et 4 sont en contradiction ! On ajoute $\neg \mathcal{M}_1: (1\lor 2)\land 3\land 4\land (\bar{1}\lor 2\lor \bar{3}\lor \bar{4})$
- Appel de SAT : modèle $\mathcal{M}_2 = \overline{1} \ 2 \ 3 \ 4$ Mais la théorie dit que 2, 3 et 4 sont en contradiction! On ajoute $\neg \mathcal{M}_2 : (1 \lor 2) \land 3 \land 4 \land (\overline{1} \lor 2 \lor \overline{3} \lor \overline{4}) \land (1 \lor \overline{2} \lor \overline{3} \lor \overline{4})$

Exemple (informel)

On se donne la formule suivante :

$$(x \le 0 \lor x + y \le 0) \land y \ge 1 \land x \ge 1$$

- La formule est déjà en forme CNF.
- Abstraction booléenne : $(1 \lor 2) \land 3 \land 4$.
- Appel de SAT : modèle $\mathcal{M}_1=1\ \bar{2}\ 3\ 4$ Mais la théorie dit que 1 et 4 sont en contradiction ! On ajoute $\neg \mathcal{M}_1: (1\lor 2)\land 3\land 4\land (\bar{1}\lor 2\lor \bar{3}\lor \bar{4})$
- Appel de SAT : modèle $\mathcal{M}_2 = \overline{1} \ 2 \ 3 \ 4$ Mais la théorie dit que 2, 3 et 4 sont en contradiction ! On ajoute $\neg \mathcal{M}_2 : (1 \lor 2) \land 3 \land 4 \land (\overline{1} \lor 2 \lor \overline{3} \lor \overline{4}) \land (1 \lor \overline{2} \lor \overline{3} \lor \overline{4})$

Exemple (informel)

On se donne la formule suivante :

$$(x \le 0 \lor x + y \le 0) \land y \ge 1 \land x \ge 1$$

- La formule est déjà en forme CNF.
- Abstraction booléenne : $(1 \lor 2) \land 3 \land 4$.
- Appel de SAT : modèle $\mathcal{M}_1=1\ \bar{2}\ 3\ 4$ Mais la théorie dit que 1 et 4 sont en contradiction ! On ajoute $\neg \mathcal{M}_1: (1\lor 2)\land 3\land 4\land (\bar{1}\lor 2\lor \bar{3}\lor \bar{4})$
- Appel de SAT : modèle M₂ = 1 2 3 4
 Mais la théorie dit que 2, 3 et 4 sont en contradiction!
 On ajoute ¬M₂ : (1 ∨ 2) ∧ 3 ∧ 4 ∧ (1 ∨ 2 ∨ 3 ∨ 4) ∧ (1 ∨ 2 ∨ 3 ∨ 4)

Exemple (informel)

On se donne la formule suivante :

$$(x \le 0 \lor x + y \le 0) \land y \ge 1 \land x \ge 1$$

- La formule est déjà en forme CNF.
- Abstraction booléenne : (1 ∨ 2) ∧ 3 ∧ 4.
- Appel de SAT : modèle $\mathcal{M}_1=1\ \bar{2}\ 3\ 4$ Mais la théorie dit que 1 et 4 sont en contradiction ! On ajoute $\neg \mathcal{M}_1: (1\lor 2)\land 3\land 4\land (\bar{1}\lor 2\lor \bar{3}\lor \bar{4})$
- Appel de SAT : modèle $\mathcal{M}_2 = \overline{1} \ 2 \ 3 \ 4$ Mais la théorie dit que 2, 3 et 4 sont en contradiction! On ajoute $\neg \mathcal{M}_2 : (1 \lor 2) \land 3 \land 4 \land (\overline{1} \lor 2 \lor \overline{3} \lor \overline{4}) \land (1 \lor \overline{2} \lor \overline{3} \lor \overline{4})$

Exemple (informel)

On se donne la formule suivante :

$$(x \le 0 \lor x + y \le 0) \land y \ge 1 \land x \ge 1$$

- Appel de SAT : modèle $\mathcal{M}_3=1\ 2\ 3\ 4$
 - Mais la théorie dit que 2, 3 et 4 sont toujours en contradiction !
 - $(1 \lor 2) \land 3 \land 4 \land (\overline{1} \lor 2 \lor \overline{3} \lor \overline{4}) \land (1 \lor \overline{2} \lor \overline{3} \lor \overline{4}) \land (\overline{1} \lor \overline{2} \lor \overline{3} \lor \overline{4})$
 - Appel de SAT : le problème est insatisfiable.

Exemple (informel)

On se donne la formule suivante :

$$(x \le 0 \lor x + y \le 0) \land y \ge 1 \land x \ge 1$$

- Appel de SAT : modèle $\mathcal{M}_3=1\ 2\ 3\ 4$ Mais la théorie dit que 2, 3 et 4 sont toujours en contradiction! On ajoute $\neg\mathcal{M}_3$:
- Appel de SAT : le problème est insatisfiable.

Exemple (informel)

On se donne la formule suivante :

$$(x \le 0 \lor x + y \le 0) \land y \ge 1 \land x \ge 1$$

- Appel de SAT : modèle $\mathcal{M}_3=1\ 2\ 3\ 4$ Mais la théorie dit que 2, 3 et 4 sont toujours en contradiction! On ajoute $\neg \mathcal{M}_3$: $(1\lor 2)\land 3\land 4\land (\bar{1}\lor 2\lor \bar{3}\lor \bar{4})\land (1\lor \bar{2}\lor \bar{3}\lor \bar{4})\land (\bar{1}\lor \bar{2}\lor \bar{3}\lor \bar{4})$
- Appel de SAT : le problème est insatisfiable.

Exemple (informel)

On se donne la formule suivante :

$$(x \le 0 \lor x + y \le 0) \land y \ge 1 \land x \ge 1$$

- Appel de SAT : modèle M₃ = 1 2 3 4
 Mais la théorie dit que 2, 3 et 4 sont toujours en contradiction!
 On ajoute ¬M₃ :
- $(1 \lor 2) \land 3 \land 4 \land (\overline{1} \lor 2 \lor \overline{3} \lor \overline{4}) \land (1 \lor \overline{2} \lor \overline{3} \lor \overline{4}) \land (\overline{1} \lor \overline{2} \lor \overline{3} \lor \overline{4})$
- Appel de SAT : le problème est insatisfiable.

Inconvénient de la méthode précédente

- La recherche de modèles n'est pas guidée par la théorie.
- Pour résoudre ce problème, on va intégrer directement le raisonnement modulo théories dans la méthode de recherche de preuve SAT.
- Dans notre cas, nous allons étendre DPLL.

Extensions de DPLL

DPLL abstrait

- Ce sont les règles de DPLL classique mais où les littéraux sont des littéraux du premier ordre et non plus des variables propositionnelles.
- On prépare le terrain pour intégrer les théories.

DPLL abstrait modulo théories = DPLL(T)

• Ce sont les règles de DPLL abstrait avec des règles permettant à la théorie d'injecter de nouvelles clauses (qui sont des tautologies pour la théorie) dans l'ensemble de clauses.

DPLL abstrait

Règles

$$M \parallel S, C \lor I \longrightarrow M, I \parallel S, C \lor I$$
 (unit prop) si $I \not\in M$ et $M \models \neg C$

$$M \parallel S \longrightarrow M, I^{d} \parallel S$$
 (decide) si $I \notin M$, et $I \in S$ ou $\neg I \in S$

$$M \parallel S, C \longrightarrow \mathrm{unsat}$$
 (unsat) si $M' \models \neg C$ t.q. $M' \subseteq M$ et il n'existe pas $I^{\mathrm{d}} \leq I'$ dans M pout tout $I' \in M'$

$$M, I^{\mathrm{d}}, M' \parallel S, C \longrightarrow M, I' \parallel S, C$$
 (backjump) si $M, I^{\mathrm{d}}, M' \models \neg C$, et il existe une clause $C' \lor I't.q.$:
$$I' \not\in M, \text{ et } I' \in S \text{ ou } \neg I' \in S$$
ou $I' \in M, I^{\mathrm{d}}, M'$ ou
$$\neg I' \in M, I^{\mathrm{d}}, M',$$
et $S, C \models C' \lor I', \text{ et } M \models \neg C'$

DPLL abstrait modulo théories = DPLL(T)

Règles

$$M \parallel S, C \lor I \longrightarrow M, I \parallel S, C \lor I$$
 (unit prop) si $I \not\in M$ et $M \models \neg C$

$$M \parallel S \longrightarrow M, I^{\mathrm{d}} \parallel S$$

si
$$I \not\in M$$
, et $I \in S$ ou $\neg I \in S$

$$M\parallel S,C\longrightarrow \mathrm{unsat}$$

si
$$M' \models \neg C$$
 t.q. $M' \subseteq M$
et il n'existe pas $I^{d} \le I'$ dans M
pout tout $I' \in M'$

$$M, I^{d}, M' \parallel S, C \longrightarrow M, I' \parallel S, C$$
 (backjump)

si
$$M, I^{d}, M' \models \neg C$$
, et il existe une clause $C' \lor l't.q.$: $l' \not\in M$, et $l' \in S$ ou $\neg l' \in S$ ou $l' \in M, I^{d}, M'$ ou $\neg l' \in M, I^{d}, M'$, et $S, C \models C' \lor l'$, et $S \models C' \lor l'$

$$M \parallel S \longrightarrow M \parallel S, S'$$

$$\models_T S'$$
, où T est une théorie

Égalité avec symboles non interprétés

$$g(a) = c \land (f(g(a)) \neq f(c) \lor g(a) = d) \land (c \neq d \lor g(a) \neq d)$$

$$1 \qquad \overline{2} \qquad 3 \qquad 4 \lor \overline{3} \qquad \text{(unit prop)}$$

$$1 \parallel 1, \overline{2} \lor 3, \overline{4} \lor \overline{3} \qquad \text{(decide)}$$

$$1 \parallel 1, \overline{2} \lor 3, \overline{4} \lor \overline{3} \qquad \text{(decide)}$$

$$1 \stackrel{d}{=} 4 \parallel 1, \overline{2} \lor 3, \overline{4} \lor \overline{3} \qquad \text{(learn)}$$

$$1 \stackrel{d}{=} 4 \parallel 1, \overline{2} \lor 3, \overline{4} \lor \overline{3}, \overline{1} \lor 2 \lor 4 \qquad \text{(backjump)}$$

$$1 \stackrel{d}{=} 4 \parallel 1, \overline{2} \lor 3, \overline{4} \lor \overline{3}, \overline{1} \lor 2 \lor 4 \qquad \text{(unit prop)}$$

$$1 \stackrel{d}{=} 4 \parallel 1, \overline{2} \lor 3, \overline{4} \lor \overline{3}, \overline{1} \lor 2 \lor 4 \qquad \text{(learn)}$$

$$1 \stackrel{d}{=} 4 \stackrel{d}{=} 1, \overline{2} \lor 3, \overline{4} \lor \overline{3}, \overline{1} \lor 2 \lor 4 \qquad \text{(learn)}$$

$$1 \stackrel{d}{=} 4 \stackrel{d}{=} 1, \overline{2} \lor 3, \overline{4} \lor \overline{3}, \overline{1} \lor 2 \lor 4, \overline{1} \lor 2 \lor \overline{4} \lor 3 \qquad \text{(backjump)}$$

$$1 \stackrel{d}{=} 1, \overline{2} \lor 3, \overline{4} \lor \overline{3}, \overline{1} \lor 2 \lor 4, \overline{1} \lor 2 \lor \overline{4} \lor 3 \qquad \text{(unit prop)}$$

$$1 \stackrel{d}{=} 1, \overline{2} \lor 3, \overline{4} \lor \overline{3}, \overline{1} \lor 2 \lor 4, \overline{1} \lor 2 \lor \overline{4} \lor 3 \qquad \text{(unit prop)}$$

$$1 \stackrel{d}{=} 1, \overline{2} \lor 3, \overline{4} \lor \overline{3}, \overline{1} \lor 2 \lor 4, \overline{1} \lor 2 \lor \overline{4} \lor 3 \qquad \text{(learn)}$$

 $123\overline{4} \parallel 1, \overline{2} \vee 3, \overline{4} \vee \overline{3}, \overline{1} \vee 2 \vee 4, \overline{1} \vee 2 \vee \overline{4} \vee 3, \overline{1} \vee \overline{2} \vee \overline{3} \vee 4 \longrightarrow \text{(unsat)}$

$$\underbrace{g(a) = c \land (f(g(a)) \neq f(c)) \lor g(a) = d) \land (c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{1} \land \underbrace{[g(a)] \neq f(c)] \lor g(a) = d}_{3} \land \underbrace{[g(a)] \neq d}_{3} \land \underbrace{[g(a)] \Rightarrow d}_{3} \land$$

$$\underbrace{g(a) = c \land (f(g(a)) \neq f(c) \lor g(a) = d) \land (c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{1} \land \underbrace{(f(g(a)) \neq f(c)) \lor g(a) = d}_{3} \land \underbrace{(f(g(a)) \neq d) \lor g(a) \neq d}_{3} \land \underbrace{(f(g(a)) \neq d) \lor g(a) \land g(a)$$

$$\underbrace{g(a) = c \land (f(g(a)) \neq f(c) \lor g(a) = d) \land (c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{1} \land \underbrace{[c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{[c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{4} \land \underbrace{[c \Rightarrow d \lor g(a) \land g(a) \land g(a) \land g(a) \land g(a)$$

$$\underbrace{g(a) = c \land (f(g(a)) \neq f(c) \lor g(a) = d) \land (c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{\bar{3}} \land \underbrace{(a) \neq d \lor g(a) \neq d}_{\bar{3}}$$

$$\emptyset \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{unit prop})$$

$$1 \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{decide})$$

$$1 \stackrel{d}{=} 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{decide})$$

$$1 \stackrel{d}{=} 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{decide})$$

$$1 \stackrel{d}{=} 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{decide})$$

$$1 \stackrel{d}{=} 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{learn})$$

$$1 \stackrel{d}{=} 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4 \longrightarrow (\text{backjump})$$

$$1 \stackrel{d}{=} 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4 \longrightarrow (\text{learn})$$

$$1 \stackrel{d}{=} 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{backjump})$$

$$1 \stackrel{d}{=} 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{unit prop})$$

$$1 \stackrel{d}{=} 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{unit prop})$$

$$1 \stackrel{d}{=} 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{learn})$$

$$1 \stackrel{d}{=} 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{learn})$$

$$1 \stackrel{d}{=} 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{learn})$$

$$1 \stackrel{d}{=} 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{learn})$$

$$1 \stackrel{d}{=} 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{learn})$$

$$1 \stackrel{d}{=} 1, \bar{1} \stackrel{d}{=} 1, \bar$$

$$\underbrace{g(a) = c \land (f(g(a)) \neq f(c) \lor g(a) = d) \land (c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{1} \land \underbrace{[c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{[c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{4} \land \underbrace{[c \Rightarrow d \lor g(a)$$

$$\underbrace{g(a) = c \land (f(g(a)) \neq f(c) \lor g(a) = d)}_{1} \land (c \neq d \lor g(a) \neq d)$$

$$\emptyset \parallel 1, \overline{2} \lor 3, \overline{4} \lor \overline{3} \longrightarrow (\text{unit prop})$$

$$1 \parallel 1, \overline{2} \lor 3, \overline{4} \lor \overline{3} \longrightarrow (\text{decide})$$

$$1 \stackrel{?}{=} 1, \overline{2} \lor 3, \overline{4} \lor \overline{3} \longrightarrow (\text{decide})$$

$$1 \stackrel{?}{=} 1, \overline{2} \lor 3, \overline{4} \lor \overline{3} \longrightarrow (\text{decide})$$

$$1 \stackrel{?}{=} 1, \overline{2} \lor 3, \overline{4} \lor \overline{3} \longrightarrow (\text{decide})$$

$$1 \stackrel{?}{=} 1, \overline{2} \lor 3, \overline{4} \lor \overline{3} \longrightarrow (\text{decide})$$

$$1 \stackrel{?}{=} 1, \overline{2} \lor 3, \overline{4} \lor \overline{3} \longrightarrow (\text{decide})$$

$$1 \stackrel{?}{=} 1, \overline{2} \lor 3, \overline{4} \lor \overline{3}, \overline{1} \lor 2 \lor 4 \longrightarrow (\text{backjump})$$

$$1 \stackrel{?}{=} 1, \overline{2} \lor 3, \overline{4} \lor \overline{3}, \overline{1} \lor 2 \lor 4 \longrightarrow (\text{learn})$$

$$1 \stackrel{?}{=} 1, \overline{2} \lor 3, \overline{4} \lor \overline{3}, \overline{1} \lor 2 \lor 4, \overline{1} \lor 2 \lor \overline{4} \lor 3 \longrightarrow (\text{backjump})$$

$$1 \stackrel{?}{=} 1, \overline{2} \lor 3, \overline{4} \lor \overline{3}, \overline{1} \lor 2 \lor 4, \overline{1} \lor 2 \lor \overline{4} \lor 3 \longrightarrow (\text{unit prop})$$

$$1 \stackrel{?}{=} 1, \overline{2} \lor 3, \overline{4} \lor \overline{3}, \overline{1} \lor 2 \lor 4, \overline{1} \lor 2 \lor \overline{4} \lor 3 \longrightarrow (\text{unit prop})$$

$$1 \stackrel{?}{=} 1, \overline{2} \lor 3, \overline{4} \lor \overline{3}, \overline{1} \lor 2 \lor 4, \overline{1} \lor 2 \lor \overline{4} \lor 3 \longrightarrow (\text{learn})$$

$$1 \stackrel{?}{=} 2, \overline{4} \downarrow \overline{3}, \overline{4} \lor \overline{3}, \overline{1} \lor 2 \lor 4, \overline{1} \lor 2 \lor \overline{4} \lor 3 \longrightarrow (\text{learn})$$

$$1 \stackrel{?}{=} 2, \overline{4} \downarrow \overline{3}, \overline{4} \lor \overline{3}, \overline{4} \lor \overline{3}, \overline{1} \lor 2 \lor 4, \overline{1} \lor 2 \lor \overline{4} \lor 3 \longrightarrow (\text{learn})$$

$$1 \stackrel{?}{=} 2, \overline{4} \downarrow \overline{3}, \overline{4} \lor \overline{3}, \overline{4} \lor$$

$$\underbrace{g(a) = c \land (f(g(a)) \neq f(c) \lor g(a) = d) \land (c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{\bar{3}} \land \underbrace{(a) \neq d \lor g(a) \neq d}_{\bar{3}}$$

$$\emptyset \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{unit prop})$$

$$1 \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{decide})$$

$$1 \stackrel{?}{2}^{d} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{decide})$$

$$1 \stackrel{?}{2}^{d} \stackrel{?}{4}^{d} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{decinde})$$

$$1 \stackrel{?}{2}^{d} \stackrel{?}{4}^{d} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{learn})$$

$$1 \stackrel{?}{2}^{d} \stackrel{?}{4}^{d} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4 \longrightarrow (\text{backjump})$$

$$1 \stackrel{?}{2}^{d} 4 \stackrel{?}{3} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4 \longrightarrow (\text{learn})$$

$$1 \stackrel{?}{2}^{d} 4 \stackrel{?}{3} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor 3 \longrightarrow (\text{backjump})$$

$$1 2 \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor 3 \longrightarrow (\text{unit prop})$$

$$1 2 3 \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor 3 \longrightarrow (\text{unit prop})$$

$$1 2 3 \stackrel{?}{4} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor 3 \longrightarrow (\text{learn})$$

$$1 2 3 \stackrel{?}{4} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor 3 \longrightarrow (\text{learn})$$

$$1 2 3 \stackrel{?}{4} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor 3 \longrightarrow (\text{learn})$$

$$1 2 3 \stackrel{?}{4} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor 3, \bar{1} \lor \bar{2} \lor \bar{3} \lor 4 \longrightarrow (\text{unsat})$$

$$\underbrace{g(a) = c \land (f(g(a)) \neq f(c) \lor g(a) = d) \land (c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{\bar{3}} \land \underbrace{(a) \neq d \lor g(a) \neq d}_{\bar{3}}$$

$$\emptyset \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{unit prop})$$

$$1 \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{decide})$$

$$1 $\bar{2}^d \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{decide})$

$$1 $\bar{2}^d \bar{4}^d \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{learn})$

$$1 \bar{2}^d \bar{4}^d \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4 \longrightarrow (\text{backjump})$$

$$1 \bar{2}^d 4 \bar{3} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4 \longrightarrow (\text{learn})$$

$$1 \bar{2}^d 4 \bar{3} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4 \longrightarrow (\text{learn})$$

$$1 \bar{2}^d 4 \bar{3} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{backjump})$$

$$1 2 \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{unit prop})$$

$$1 2 3 \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{unit prop})$$

$$1 2 3 \bar{4} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{learn})$$

$$1 2 3 \bar{4} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{learn})$$

$$1 2 3 \bar{4} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{learn})$$

$$1 2 3 \bar{4} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{learn})$$$$$$

$$\underbrace{g(a) = c \land (f(g(a)) \neq f(c) \lor g(a) = d) \land (c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{\bar{3}} \land \underbrace{(a) \neq d \lor g(a) \neq d}_{\bar{3}}$$

$$\emptyset \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{unit prop})$$

$$1 \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{decide})$$

$$1 $\bar{2}^d \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{decide})$

$$1 $\bar{2}^d \bar{4}^d \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{learn})$

$$1 \bar{2}^d \bar{4}^d \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4 \longrightarrow (\text{backjump})$$

$$1 \bar{2}^d 4 \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4 \longrightarrow (\text{unit prop})$$

$$1 \bar{2}^d 4 \bar{3} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4 \longrightarrow (\text{learn})$$

$$1 \bar{2}^d 4 \bar{3} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{backjump})$$

$$1 2 \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{unit prop})$$

$$1 2 3 \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{unit prop})$$

$$1 2 3 \bar{4} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{learn})$$

$$1 2 3 \bar{4} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{learn})$$

$$1 2 3 \bar{4} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{learn})$$

$$1 2 3 \bar{4} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{learn})$$$$$$

$$\underbrace{g(a) = c \land (f(g(a)) \neq f(c) \lor g(a) = d) \land (c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{\bar{3}} \land \underbrace{(decide)}_{\bar{3}} \land \underbrace{(decide)}_{\bar{3}}$$

$$\underbrace{g(a) = c \land (f(g(a)) \neq f(c) \lor g(a) = d) \land (c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{\bar{3}} \land \underbrace{(decide)}_{\bar{3}} \land \underbrace{(decide)}_{\bar{3}}$$

$$\underbrace{g(a) = c \land (f(g(a)) \neq f(c) \lor g(a) = d) \land (c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{\bar{3}} \land \underbrace{(decide)}_{\bar{3}} \land \underbrace{(decide)}_{\bar{3}}$$

$$\underbrace{g(a) = c \land (f(g(a)) \neq f(c) \lor g(a) = d) \land (c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{1} \land \underbrace{\tilde{2}}_{2} \qquad 3 \qquad \tilde{4} \qquad \tilde{3}$$

$$\emptyset \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{unit prop})$$

$$1 \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{decide})$$

$$1 \stackrel{?}{2}^{d} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{decide})$$

$$1 \stackrel{?}{2}^{d} \stackrel{?}{4}^{d} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{decide})$$

$$1 \stackrel{?}{2}^{d} \stackrel{?}{4}^{d} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow (\text{learn})$$

$$1 \stackrel{?}{2}^{d} \stackrel{?}{4}^{d} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4 \longrightarrow (\text{backjump})$$

$$1 \stackrel{?}{2}^{d} \stackrel{?}{4} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4 \longrightarrow (\text{learn})$$

$$1 \stackrel{?}{2}^{d} \stackrel{?}{4} \stackrel{?}{3} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor 3 \longrightarrow (\text{backjump})$$

$$1 2 \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor 3 \longrightarrow (\text{unit prop})$$

$$1 2 3 \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor 3 \longrightarrow (\text{unit prop})$$

$$1 2 3 \stackrel{?}{4} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor 3 \longrightarrow (\text{unit prop})$$

$$1 2 3 \stackrel{?}{4} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor 3 \longrightarrow (\text{learn})$$

$$1 2 3 \stackrel{?}{4} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor 3 \longrightarrow (\text{learn})$$

$$1 2 3 \stackrel{?}{4} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor 3 \longrightarrow (\text{learn})$$

$$\underbrace{g(a) = c \land (f(g(a)) \neq f(c) \lor g(a) = d) \land (c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{1} \land \underbrace{[g(a)]_{2} \lor g(a) \neq d}_{3} \lor \underbrace{[g(a)]_{2} \lor g(a) \neq$$

$$\underbrace{g(a) = c \land (f(g(a)) \neq f(c) \lor g(a) = d) \land (c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{1} \land \underbrace{[c \neq d \lor g(a) \neq d) \land [c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{[c \neq d \lor g(a) \neq d) \land [c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{[c \neq d \lor g(a) \neq d) \land [c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{[c \neq d \lor g(a) \neq d) \land [c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{[c \neq d \lor g(a) \neq d) \land [c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{[c \neq d \lor g(a) \neq d) \land [c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{[c \neq d \lor g(a) \neq d) \land [c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{[c \neq d \lor g(a) \neq d) \land [c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{[c \neq d \lor g(a) \neq d) \land [c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{[c \neq d \lor g(a) \neq d) \land [c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{[c \neq d \lor g(a) \neq d) \land [c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{[c \neq d \lor g(a) \neq d) \land [c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{[c \neq d \lor g(a) \neq d) \land [c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{[c \neq d \lor g(a) \neq d) \land [c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{[c \neq d \lor g(a) \neq d) \land [c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{[c \neq d \lor g(a) \neq d) \land [c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{[c \neq d \lor g(a) \neq d) \land [c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{[c \neq d \lor g(a) \neq d) \land [c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{[c \neq d \lor g(a) \neq d) \land [c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{[c \neq d \lor g(a) \neq d) \land [c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{[c \neq d \lor g(a) \neq d) \land [c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{[c \neq d \lor g(a) \neq d) \land [c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{[c \neq d \lor g(a) \neq d) \land [c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{[c \neq d \lor g(a) \neq d) \land [c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{[c \Rightarrow d \lor g(a) \neq d) \land [c \Rightarrow d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{[c \Rightarrow d \lor g(a) \neq d) \land [c \Rightarrow d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{[c \Rightarrow d \lor g(a) \land g(a)$$

$$\underbrace{g(a) = c \land (f(g(a)) \neq f(c) \lor g(a) = d) \land (c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{1} \land \underbrace{(f(g(a)) \neq f(c)) \lor g(a) = d) \land (c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{(f(g(a)) \neq d) \land (c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{(f(g(a)) \neq d) \land (c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{(f(g(a)) \neq d) \land (c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{(f(g(a)) \Rightarrow (f(a)) \land (f(a))$$

$$\underbrace{g(a) = c \land (f(g(a)) \neq f(c) \lor g(a) = d) \land (c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{1} \land \underbrace{(f(g(a)) \neq f(c)) \lor g(a) = d) \land (c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{(f(g(a)) \neq d) \land (c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{(f(g(a)) \neq d) \land (c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{(f(a)) \land (f(a)) \land$$

$$\underbrace{g(a) = c \land (f(g(a)) \neq f(c) \lor g(a) = d) \land (c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{\bar{3}} \land \underbrace{(decide)}_{\bar{3}} \land \underbrace{(decide)}_{\bar{3}}$$

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{(f(g(a)) \neq f(c))}_{2} \lor \underbrace{g(a) = d}_{3} \land \underbrace{(c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{\bar{3}}$$

$$\emptyset \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow \text{(unit prop)}$$

$$1 \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow \text{(decide)}$$

$$1 \bar{2}^{d} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow \text{(decide)}$$

$$1 \bar{2}^{d} \bar{4}^{d} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow \text{(learn)}$$

$$1 \bar{2}^{d} \bar{4}^{d} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4 \longrightarrow \text{(backjump)}$$

$$1 \bar{2}^{d} 4 \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4 \longrightarrow \text{(learn)}$$

$$1 \bar{2}^{d} 4 \bar{3} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4 \longrightarrow \text{(learn)}$$

$$1 \bar{2}^{d} 4 \bar{3} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor 3 \longrightarrow \text{(backjump)}$$

$$1 2 \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor 3 \longrightarrow \text{(unit prop)}$$

$$1 2 3 \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor 3 \longrightarrow \text{(unit prop)}$$

$$1 2 3 \bar{4} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor 3 \longrightarrow \text{(learn)}$$

$$1 2 3 \bar{4} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor 3 \longrightarrow \text{(learn)}$$

$$1 2 3 \bar{4} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor 3 \longrightarrow \text{(learn)}$$

$$1 2 3 \bar{4} \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor 3, \bar{1} \lor \bar{2} \lor \bar{3} \lor \bar{4} \longrightarrow \text{(unsat)}$$

$$\underbrace{g(a) = c \land (f(g(a)) \neq f(c) \lor g(a) = d) \land (c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{\bar{3}} \land \underbrace{(decide)}_{\bar{3}} \land \underbrace{(decide)}_{\bar{3}}$$

$$\underbrace{g(a) = c \land (f(g(a)) \neq f(c) \lor g(a) = d) \land (c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{1} \land \underbrace{[0]_{1} \land [0]_{2} \land [0]_{3} \land [0]_{4} \land [0]_{3}}_{3} \land \underbrace{[0]_{1} \land [0]_{2} \land [0]_{3} \land [0]_{4} \land [0]_{4}}_{3} \land \underbrace{[0]_{1} \land [0]_{2} \land [0]_{4} \land$$

Égalité avec symboles non interprétés

$$\underbrace{g(a) = c \land (f(g(a)) \neq f(c)) \lor g(a) = d) \land (c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{1} \land \underbrace{[0]_{2} \lor 3, \overline{4} \lor \overline{3} \longrightarrow (\text{unit prop})}_{3} \land \underbrace{[0]_{3} \lor 3, \overline{4} \lor \overline{3} \longrightarrow (\text{decide})}_{3} \land \underbrace{[0]_{4} \lor 3, \overline{4} \lor \overline{3} \longrightarrow (\text{decide})}_{4} \land \underbrace{[0]_{4} \lor 4, \overline{4} \lor 3, \overline{4} \lor \overline{3} \longrightarrow (\text{decide})}_{4} \land \underbrace{[0]_{4} \lor 4, \overline{4} \lor 3, \overline{4}$$

มารสเ

Égalité avec symboles non interprétés

$$\underbrace{g(a) = c \land (f(g(a)) \neq f(c) \lor g(a) = d) \land (c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{1} \land \underbrace{(f(g(a)) \neq f(c)) \lor g(a) = d) \land (c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{(f(g(a)) \neq d) \land (c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{(f(g(a)) \neq d) \land (c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{(f(g(a)) \neq d) \land (c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{3} \land \underbrace{(f(g(a)) \Rightarrow (f(a)) \land (f(a))$$

ulisat

Égalité avec symboles non interprétés

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{(f(g(a)) \neq f(c))}_{2} \lor \underbrace{g(a) = d}_{3} \land \underbrace{(c \neq d \lor g(a) \neq d)}_{\bar{3}}$$
 $\emptyset \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow \text{(unit prop)}$
$$1 \parallel 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow \text{(decide)}$$

$$1 \mid 2^d \mid 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow \text{(decide)}$$

$$1 \mid 2^d \mid 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow \text{(decide)}$$

$$1 \mid 2^d \mid 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow \text{(learn)}$$

$$1 \mid 2^d \mid 4^d \mid 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4 \longrightarrow \text{(backjump)}$$

$$1 \mid 2^d \mid 4^d \mid 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4 \longrightarrow \text{(learn)}$$

$$1 \mid 2^d \mid 4^d \mid 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4 \longrightarrow \text{(learn)}$$

$$1 \mid 2^d \mid 4^d \mid 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor 3 \longrightarrow \text{(backjump)}$$

$$1 \mid 2^d \mid 4^d \mid 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor 3 \longrightarrow \text{(unit prop)}$$

$$1 \mid 2^d \mid 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor 3 \longrightarrow \text{(unit prop)}$$

$$1 \mid 2 \mid 3^d \mid 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor 3 \longrightarrow \text{(learn)}$$

$$1 \mid 2 \mid 3^d \mid 4 \mid 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor 3 \longrightarrow \text{(learn)}$$

$$1 \mid 2 \mid 3^d \mid 1, \bar{2} \lor 3, \bar{4} \lor \bar{3}, \bar{1} \lor 2 \lor 4, \bar{1} \lor 2 \lor \bar{4} \lor \bar{3} \longrightarrow \text{(learn)}$$

unsat

Améliorations de DPLL(T)

Plusieurs améliorations possibles

- Minimiser les clauses apprises
- Détecter les conflits plus tôt
- Faire de la propagation avec la théorie

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(f(g(a)) \neq f(c)\right)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{3} \right) \land \underbrace{\left(c \neq d \lor g(a) \neq d\right)}_{\bar{3}}$$

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \wedge \underbrace{\left(\underbrace{f(g(a)) \neq f(c)}_{\bar{2}} \vee \underbrace{g(a) = d}_{3}\right) \wedge \left(\underbrace{c \neq d}_{\bar{4}} \vee \underbrace{g(a) \neq d}_{\bar{3}}\right)}_{3}$$

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(f(g(a)) \neq f(c)\right)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{3} \right) \land \underbrace{\left(c \neq d\right)}_{\bar{4}} \lor \underbrace{g(a) \neq d}_{\bar{3}})$$

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(f(g(a)) \neq f(c)\right)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{3} \right) \land \underbrace{\left(c \neq d\right)}_{\bar{4}} \lor \underbrace{g(a) \neq d}_{\bar{3}})$$

```
\begin{array}{c|c} \emptyset \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} & \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} & \longrightarrow \text{(decide)} \\ 1 \ \bar{2}^d \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} & \longrightarrow \text{(decide)} \\ 1 \ \bar{2}^d \ \bar{4}^d \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} & \longrightarrow \text{(learn)} \\ 1 \ \bar{2}^d \ \bar{4}^d \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3}, \bar{1} \vee 2 & \longrightarrow \text{(backjump)} \\ 1 \ 2 \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3}, \bar{1} \vee 2 & \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \ 2 \ 3 \ \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3}, \bar{1} \vee 2 & \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \ 2 \ 3 \ \bar{4} \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3}, \bar{1} \vee 2 & \longrightarrow \text{(learn)} \\ 1 \ 2 \ 3 \ \bar{4} \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3}, \bar{1} \vee 2, \bar{1} \vee \bar{3} \vee 4 & \longrightarrow \text{(unsat)} \\ \end{array}
```

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(f(g(a)) \neq f(c)\right)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{3}\right) \land \underbrace{\left(c \neq d \lor g(a) \neq d\right)}_{\bar{3}}$$

```
\begin{array}{c|c}\emptyset \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} &\longrightarrow \text{(unit prop)}\\1 \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} &\longrightarrow \text{(decide)}\\1 \bar{2}^d \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} &\longrightarrow \text{(decide)}\\1 \bar{2}^d \bar{4}^d \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} &\longrightarrow \text{(learn)}\\1 \bar{2}^d \bar{4}^d \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 &\longrightarrow \text{(backjump)}\\1 2 \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 &\longrightarrow \text{(unit prop)}\\1 2 3 \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 &\longrightarrow \text{(unit prop)}\\1 2 3 \bar{4} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 &\longrightarrow \text{(learn)}\\1 2 3 \bar{4} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2,\bar{1}\vee \bar{3}\vee 4 &\longrightarrow \text{(unsat)}\\1 \end{array}
```

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(f(g(a)) \neq f(c)\right)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{3}\right) \land \underbrace{\left(c \neq d \lor g(a) \neq d\right)}_{\bar{3}}$$

```
\begin{array}{c|c}\emptyset \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} &\longrightarrow \text{(unit prop)}\\1 \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} &\longrightarrow \text{(decide)}\\1\;\bar{2}^d \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} &\longrightarrow \text{(decide)}\\1\;\bar{2}^d\;\bar{4}^d \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} &\longrightarrow \text{(learn)}\\1\;\bar{2}^d\;\bar{4}^d \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 &\longrightarrow \text{(backjump)}\\1\;2 \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 &\longrightarrow \text{(unit prop)}\\1\;2\;3 \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 &\longrightarrow \text{(unit prop)}\\1\;2\;3\;\bar{4} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 &\longrightarrow \text{(learn)}\\1\;2\;3\;\bar{4} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2,\bar{1}\vee \bar{3}\vee 4 &\longrightarrow \text{(unsat)}\\1\;2\;3\;\bar{4} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2,\bar{1}\vee \bar{3}\vee 4 &\longrightarrow \text{(unsat)}\\1\;2\;3\;\bar{4} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2,\bar{1}\vee \bar{3}\vee 4 &\longrightarrow \text{(unsat)}\\1\;2\;3\;\bar{4} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2,\bar{1}\vee \bar{3}\vee 4 &\longrightarrow \text{(unsat)}\\1\;2\;3\;\bar{4} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2,\bar{1}\vee \bar{3}\vee 4 &\longrightarrow \text{(unsat)}\\1\;2\;3\;\bar{4} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2,\bar{1}\vee \bar{3}\vee 4 &\longrightarrow \text{(unsat)}\\1\;2\;3\;\bar{4} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2,\bar{1}\vee \bar{3}\vee 4 &\longrightarrow \text{(unsat)}\\1\;2\;3\;\bar{4} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2,\bar{1}\vee \bar{3}\vee 4 &\longrightarrow \text{(unsat)}\\1\;2\;3\;\bar{4} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2,\bar{1}\vee \bar{3}\vee 4 &\longrightarrow \text{(unsat)}\\1\;2\;3\;\bar{4} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2,\bar{1}\vee \bar{3}\vee 4 &\longrightarrow \text{(unsat)}\\1\;2\;3\;\bar{4} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2,\bar{1}\vee \bar{3}\vee 4 &\longrightarrow \text{(unsat)}\\1\;2\;3\;\bar{4} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2,\bar{1}\vee \bar{3}\vee 4 &\longrightarrow \text{(unsat)}\\1\;2\;3\;\bar{4} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2,\bar{1}\vee \bar{3}\vee 4 &\longrightarrow \text{(unsat)}\\1\;2\;3\;\bar{4} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2,\bar{1}\vee \bar{3}\vee 4 &\longrightarrow \text{(unsat)}\\1\;2\;3\;\bar{4} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2,\bar{1}\vee \bar{3}\vee 4 &\longrightarrow \text{(unsat)}\\1\;2\;3\;\bar{4} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2,\bar{1}\vee \bar{3}\vee 4 &\longrightarrow \text{(unsat)}\\1\;3\;\bar{4} \parallel 1,\bar{4}\vee 1,\bar{4}\vee
```

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(f(g(a)) \neq f(c)\right)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{3}\right) \land \underbrace{\left(c \neq d \lor g(a) \neq d\right)}_{\bar{3}}$$

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(f(g(a)) \neq f(c)\right)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{3}\right) \land \underbrace{\left(c \neq d \lor g(a) \neq d\right)}_{\bar{3}}$$

```
\begin{array}{c} \emptyset \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} \longrightarrow \text{(decide)} \\ 1 \; \bar{2}^{\mathrm{d}} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} \longrightarrow \text{(decide)} \\ 1 \; \bar{2}^{\mathrm{d}} \; \bar{4}^{\mathrm{d}} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} \longrightarrow \text{(learn)} \\ 1 \; \bar{2}^{\mathrm{d}} \; \bar{4}^{\mathrm{d}} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow \text{(backjump)} \\ 1 \; 2 \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \; 2 \; 3 \; \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \; 2 \; 3 \; \bar{4} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow \text{(learn)} \\ 1 \; 2 \; 3 \; \bar{4} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2,\bar{1}\vee \bar{3}\vee 4 \longrightarrow \text{(unsat)} \\ \end{array}
```

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(f(g(a)) \neq f(c)\right)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{3}\right) \land \underbrace{\left(c \neq d \lor g(a) \neq d\right)}_{\bar{3}}$$

```
\begin{array}{c} \emptyset \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} \longrightarrow \text{(decide)} \\ 1 \; \bar{2}^d \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} \longrightarrow \text{(decide)} \\ 1 \; \bar{2}^d \; \bar{4}^d \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} \longrightarrow \text{(learn)} \\ 1 \; \bar{2}^d \; \bar{4}^d \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow \text{(backjump)} \\ 1 \; 2 \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \; 2 \; 3 \; \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \; 2 \; 3 \; \bar{4} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow \text{(learn)} \\ 1 \; 2 \; 3 \; \bar{4} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2,\bar{1}\vee \bar{3}\vee 4 \longrightarrow \text{(unsat)} \\ \end{array}
```

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(f(g(a)) \neq f(c)\right)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{3}\right) \land \underbrace{\left(c \neq d \lor g(a) \neq d\right)}_{\bar{3}}$$

```
\begin{array}{c} \emptyset \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} \longrightarrow \text{(decide)} \\ 1 \; \bar{2}^d \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} \longrightarrow \text{(decide)} \\ 1 \; \bar{2}^d \; \bar{4}^d \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} \longrightarrow \text{(learn)} \\ 1 \; \bar{2}^d \; \bar{4}^d \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow \text{(backjump)} \\ 1 \; 2 \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \; 2 \; 3 \; \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \; 2 \; 3 \; \bar{4} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow \text{(learn)} \\ 1 \; 2 \; 3 \; \bar{4} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2,\bar{1}\vee \bar{3}\vee 4 \longrightarrow \text{(unsat)} \\ \end{array}
```

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(f(g(a)) \neq f(c)\right)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{3}\right) \land \underbrace{\left(c \neq d \lor g(a) \neq d\right)}_{\bar{3}}$$

```
\begin{array}{c} \emptyset \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} \longrightarrow \text{(decide)} \\ 1 \; \bar{2}^{\mathrm{d}} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} \longrightarrow \text{(decide)} \\ 1 \; \bar{2}^{\mathrm{d}} \; \bar{4}^{\mathrm{d}} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} \longrightarrow \text{(learn)} \\ 1 \; \bar{2}^{\mathrm{d}} \; \bar{4}^{\mathrm{d}} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} \longrightarrow \text{(learn)} \\ 1 \; \bar{2}^{\mathrm{d}} \; \bar{4}^{\mathrm{d}} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow \text{(backjump)} \\ 1 \; 2 \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \; 2 \; 3 \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \; 2 \; 3 \; \bar{4} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow \text{(learn)} \\ 1 \; 2 \; 3 \; \bar{4} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2,\bar{1}\vee \bar{3}\vee 4 \longrightarrow \text{(unsat)} \end{array}
```

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(f(g(a)) \neq f(c)\right)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{3}\right) \land \underbrace{\left(c \neq d \lor g(a) \neq d\right)}_{\bar{3}}$$

```
\begin{array}{c} \emptyset \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow \text{(decide)} \\ 1 \; \bar{2}^{\mathrm{d}} \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow \text{(decide)} \\ 1 \; \bar{2}^{\mathrm{d}} \; \bar{4}^{\mathrm{d}} \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow \text{(learn)} \\ 1 \; \bar{2}^{\mathrm{d}} \; \bar{4}^{\mathrm{d}} \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3}, \bar{1} \vee 2 \longrightarrow \text{(backjump)} \\ 1 \; 2 \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3}, \bar{1} \vee 2 \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \; 2 \; 3 \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3}, \bar{1} \vee 2 \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \; 2 \; 3 \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3}, \bar{1} \vee 2 \longrightarrow \text{(learn)} \\ 1 \; 2 \; 3 \; \bar{4} \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3}, \bar{1} \vee 2, \bar{1} \vee \bar{3} \vee 4 \longrightarrow \text{(unsat)} \\ \end{array}
```

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(f(g(a)) \neq f(c)\right)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{3}\right) \land \underbrace{\left(c \neq d \lor g(a) \neq d\right)}_{\bar{3}}$$

```
\begin{array}{c} \emptyset \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} \longrightarrow \text{(decide)} \\ 1 \; \bar{2}^{\mathrm{d}} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} \longrightarrow \text{(decide)} \\ 1 \; \bar{2}^{\mathrm{d}} \; \bar{4}^{\mathrm{d}} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} \longrightarrow \text{(learn)} \\ 1 \; \bar{2}^{\mathrm{d}} \; \bar{4}^{\mathrm{d}} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow \text{(backjump)} \\ 1 \; 2 \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \; 2 \; 3 \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \; 2 \; 3 \; \bar{4} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow \text{(learn)} \\ 1 \; 2 \; 3 \; \bar{4} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2,\bar{1}\vee \bar{3}\vee 4 \longrightarrow \text{(unsat)} \end{array}
```

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(f(g(a)) \neq f(c)\right)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{3}\right) \land \underbrace{\left(c \neq d \lor g(a) \neq d\right)}_{\bar{3}}$$

```
\begin{array}{c} \emptyset \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow \text{(decide)} \\ 1 \; \bar{2}^{\mathrm{d}} \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow \text{(decide)} \\ 1 \; \bar{2}^{\mathrm{d}} \; \bar{4}^{\mathrm{d}} \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow \text{(learn)} \\ 1 \; \bar{2}^{\mathrm{d}} \; \bar{4}^{\mathrm{d}} \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3}, \bar{1} \vee 2 \longrightarrow \text{(backjump)} \\ 1 \; 2 \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3}, \bar{1} \vee 2 \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \; 2 \; 3 \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3}, \bar{1} \vee 2 \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \; 2 \; 3 \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3}, \bar{1} \vee 2 \longrightarrow \text{(learn)} \\ 1 \; 2 \; 3 \; \bar{4} \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3}, \bar{1} \vee 2, \bar{1} \vee \bar{3} \vee 4 \longrightarrow \text{(unsat)} \\ \end{array}
```

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(f(g(a)) \neq f(c)\right)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{3}\right) \land \underbrace{\left(c \neq d \lor g(a) \neq d\right)}_{\bar{3}}$$

```
\begin{array}{c} \emptyset \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow \text{(decide)} \\ 1 \; \bar{2}^{\mathrm{d}} \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow \text{(decide)} \\ 1 \; \bar{2}^{\mathrm{d}} \; \bar{4}^{\mathrm{d}} \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow \text{(learn)} \\ 1 \; \bar{2}^{\mathrm{d}} \; \bar{4}^{\mathrm{d}} \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3}, \bar{1} \vee 2 \longrightarrow \text{(backjump)} \\ 1 \; 2 \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3}, \bar{1} \vee 2 \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \; 2 \; 3 \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3}, \bar{1} \vee 2 \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \; 2 \; 3 \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3}, \bar{1} \vee 2 \longrightarrow \text{(learn)} \\ 1 \; 2 \; 3 \; \bar{4} \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3}, \bar{1} \vee 2, \bar{1} \vee \bar{3} \vee 4 \longrightarrow \text{(unsat)} \end{array}
```

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(f(g(a)) \neq f(c)\right)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{3}\right) \land \underbrace{\left(c \neq d \lor g(a) \neq d\right)}_{\bar{3}}$$

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(f(g(a)) \neq f(c)\right)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{3}\right) \land \underbrace{\left(c \neq d \lor g(a) \neq d\right)}_{\bar{3}}$$

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(\underbrace{f(g(a)) \neq f(c)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{3}\right) \land \left(\underbrace{c \neq d}_{\bar{4}} \lor \underbrace{g(a) \neq d}_{\bar{3}}\right)}_{3}$$

```
\begin{array}{c} \emptyset \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee\bar{3} \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee\bar{3} \longrightarrow \text{(decide)} \\ 1 \; \bar{2}^{\mathrm{d}} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee\bar{3} \longrightarrow \text{(decide)} \\ 1 \; \bar{2}^{\mathrm{d}} \; \bar{4}^{\mathrm{d}} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee\bar{3} \longrightarrow \text{(learn)} \\ 1 \; \bar{2}^{\mathrm{d}} \; \bar{4}^{\mathrm{d}} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee\bar{3},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow \text{(backjump)} \\ 1 \; 2 \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee\bar{3},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \; 2 \; 3 \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee\bar{3},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \; 2 \; 3 \; \bar{4} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee\bar{3},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow \text{(learn)} \\ 1 \; 2 \; 3 \; \bar{4} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee\bar{3},\bar{1}\vee 2,\bar{1}\vee\bar{3}\vee 4 \longrightarrow \text{(unsat)} \end{array}
```

Égalité avec symboles non interprétés

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(\underbrace{f(g(a)) \neq f(c)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}\right)}_{\bar{3}} \land \underbrace{\left(\underbrace{c \neq d}_{\bar{4}} \lor \underbrace{g(a) \neq d}\right)}_{\bar{3}}$$

```
\begin{array}{c} \emptyset \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee\bar{3} \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee\bar{3} \longrightarrow \text{(decide)} \\ 1 \; \bar{2}^{\mathrm{d}} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee\bar{3} \longrightarrow \text{(decide)} \\ 1 \; \bar{2}^{\mathrm{d}} \; \bar{4}^{\mathrm{d}} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee\bar{3} \longrightarrow \text{(learn)} \\ 1 \; \bar{2}^{\mathrm{d}} \; \bar{4}^{\mathrm{d}} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee\bar{3},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow \text{(backjump)} \\ 1 \; 2 \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee\bar{3},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \; 2 \; 3 \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee\bar{3},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \; 2 \; 3 \; \bar{4} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee\bar{3},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow \text{(learn)} \\ 1 \; 2 \; 3 \; \bar{4} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee\bar{3},\bar{1}\vee 2,\bar{1}\vee\bar{3}\vee 4 \longrightarrow \text{(unsat)} \end{array}
```

unsat

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(f(g(a)) \neq f(c)\right)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{3} \land \underbrace{\left(c \neq d \lor g(a) \neq d\right)}_{\bar{3}}$$

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(f(g(a)) \neq f(c)\right)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{3}\right) \land \underbrace{\left(c \neq d \lor g(a) \neq d\right)}_{\bar{3}}$$

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(\underbrace{f(g(a)) \neq f(c)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{\bar{3}}\right) \land \left(\underbrace{c \neq d}_{\bar{4}} \lor \underbrace{g(a) \neq d}_{\bar{3}}\right)}_{\bar{3}}$$

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(\underbrace{f(g(a)) \neq f(c)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}\right)}_{\bar{3}} \land \underbrace{\left(\underbrace{c \neq d}_{\bar{4}} \lor \underbrace{g(a) \neq d}\right)}_{\bar{3}}$$

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(\underbrace{f(g(a)) \neq f(c)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}\right)}_{\bar{3}} \land \underbrace{\left(\underbrace{c \neq d}_{\bar{4}} \lor \underbrace{g(a) \neq d}\right)}_{\bar{3}}$$

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(\underbrace{f(g(a)) \neq f(c)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{3}\right) \land \left(\underbrace{c \neq d}_{\bar{4}} \lor \underbrace{g(a) \neq d}_{\bar{3}}\right)}_{\bar{3}}$$

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(\underbrace{f(g(a)) \neq f(c)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{3}\right) \land \left(\underbrace{c \neq d}_{\bar{4}} \lor \underbrace{g(a) \neq d}_{\bar{3}}\right)}_{\bar{3}}$$

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(\underbrace{f(g(a)) \neq f(c)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{\bar{3}}\right) \land \left(\underbrace{c \neq d}_{\bar{4}} \lor \underbrace{g(a) \neq d}_{\bar{3}}\right)}_{\bar{3}}$$

```
\begin{array}{c|c}\emptyset \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} &\longrightarrow \text{(unit prop)}\\1 \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} &\longrightarrow \text{(decide)}\\1\;\bar{2}^{\mathrm{d}} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} &\longrightarrow \text{(learn)}\\1\;\bar{2}^{\mathrm{d}} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 &\longrightarrow \text{(backjump)}\\1\;2 \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 &\longrightarrow \text{(unit prop)}\\1\;2\;3 \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 &\longrightarrow \text{(unit prop)}\\1\;2\;3\;\bar{4} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 &\longrightarrow \text{(learn)}\\1\;2\;3\;\bar{4} \parallel 1,\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2,\bar{1}\vee \bar{3}\vee 4 &\longrightarrow \text{(unsat)}\\\text{unsat}\end{array}
```

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(\underbrace{f(g(a)) \neq f(c)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}\right)}_{\bar{3}} \land \underbrace{\left(\underbrace{c \neq d}_{\bar{4}} \lor \underbrace{g(a) \neq d}\right)}_{\bar{3}}$$

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(\underbrace{f(g(a)) \neq f(c)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}\right)}_{\bar{3}} \land \underbrace{\left(\underbrace{c \neq d}_{\bar{4}} \lor \underbrace{g(a) \neq d}\right)}_{\bar{3}}$$

```
\begin{array}{c} \emptyset \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow \text{(decide)} \\ 1 \; \bar{2}^{\mathrm{d}} \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow \text{(learn)} \\ 1 \; \bar{2}^{\mathrm{d}} \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3}, \bar{1} \vee 2 \longrightarrow \text{(backjump)} \\ 1 \; 2 \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3}, \bar{1} \vee 2 \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \; 2 \; 3 \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3}, \bar{1} \vee 2 \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \; 2 \; 3 \; \bar{4} \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3}, \bar{1} \vee 2 \longrightarrow \text{(learn)} \\ 1 \; 2 \; 3 \; \bar{4} \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3}, \bar{1} \vee 2, \bar{1} \vee \bar{3} \vee 4 \longrightarrow \text{(unsat)} \\ \text{unsat} \end{array}
```

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(\underbrace{f(g(a)) \neq f(c)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}\right)}_{\bar{3}} \land \underbrace{\left(\underbrace{c \neq d}_{\bar{4}} \lor \underbrace{g(a) \neq d}\right)}_{\bar{3}}$$

```
\begin{array}{c} \emptyset \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow \text{(decide)} \\ 1 \; \bar{2}^{\mathrm{d}} \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow \text{(learn)} \\ 1 \; \bar{2}^{\mathrm{d}} \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3}, \bar{1} \vee 2 \longrightarrow \text{(backjump)} \\ 1 \; 2 \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3}, \bar{1} \vee 2 \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \; 2 \; 3 \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3}, \bar{1} \vee 2 \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \; 2 \; 3 \; \bar{4} \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3}, \bar{1} \vee 2 \longrightarrow \text{(learn)} \\ 1 \; 2 \; 3 \; \bar{4} \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3}, \bar{1} \vee 2, \bar{1} \vee \bar{3} \vee 4 \longrightarrow \text{(unsat)} \\ \text{unsat} \end{array}
```

 $\emptyset \parallel 1, \overline{2} \vee 3, \overline{4} \vee \overline{3} \longrightarrow (unit prop)$

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(\underbrace{f(g(a)) \neq f(c)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}\right)}_{\bar{3}} \land \underbrace{\left(\underbrace{c \neq d}_{\bar{4}} \lor \underbrace{g(a) \neq d}\right)}_{\bar{3}}$$

```
\begin{array}{c} 1\parallel \mathbf{1},\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} \longrightarrow (\mathsf{decide}) \\ 1\bar{2}^{\mathsf{d}}\parallel \mathbf{1},\bar{\mathbf{2}}\vee \mathbf{3},\bar{4}\vee \bar{3} \longrightarrow (\mathsf{learn}) \\ 1\bar{2}^{\mathsf{d}}\parallel \mathbf{1},\bar{\mathbf{2}}\vee \mathbf{3},\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow (\mathsf{backjump}) \\ 12\parallel \mathbf{1},\bar{\mathbf{2}}\vee \mathbf{3},\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee \mathbf{2} \longrightarrow (\mathsf{unit\ prop}) \\ 123\parallel \mathbf{1},\bar{\mathbf{2}}\vee \mathbf{3},\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee \mathbf{2} \longrightarrow (\mathsf{unit\ prop}) \\ 123\frac{\bar{4}}{4}\parallel \mathbf{1},\bar{\mathbf{2}}\vee \mathbf{3},\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee \mathbf{2} \longrightarrow (\mathsf{learn}) \\ 123\frac{\bar{4}}{4}\parallel \mathbf{1},\bar{\mathbf{2}}\vee \mathbf{3},\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee \mathbf{2},\bar{1}\vee \bar{3}\vee \mathbf{4} \longrightarrow (\mathsf{unsat}) \\ \mathsf{unsat} \end{array}
```

 $\emptyset \parallel 1, \overline{2} \vee 3, \overline{4} \vee \overline{3} \longrightarrow (unit prop)$

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(\underbrace{f(g(a)) \neq f(c)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}\right)}_{\bar{3}} \land \underbrace{\left(\underbrace{c \neq d}_{\bar{4}} \lor \underbrace{g(a) \neq d}\right)}_{\bar{3}}$$

 $\emptyset \parallel 1, \overline{2} \vee 3, \overline{4} \vee \overline{3} \longrightarrow (unit prop)$

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(\underbrace{f(g(a)) \neq f(c)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}\right)}_{\bar{3}} \land \underbrace{\left(\underbrace{c \neq d}_{\bar{4}} \lor \underbrace{g(a) \neq d}\right)}_{\bar{3}}$$

```
\begin{array}{c} 1\parallel \mathbf{1},\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} \longrightarrow (\mathsf{decide}) \\ 1\bar{2}^{\mathrm{d}}\parallel \mathbf{1},\bar{\mathbf{2}}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} \longrightarrow (\mathsf{learn}) \\ 1\bar{2}^{\mathrm{d}}\parallel \mathbf{1},\bar{\mathbf{2}}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow (\mathsf{backjump}) \\ 12\parallel \mathbf{1},\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow (\mathsf{unit\ prop}) \\ 123\parallel \mathbf{1},\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow (\mathsf{unit\ prop}) \\ 123\bar{4}\parallel \mathbf{1},\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow (\mathsf{learn}) \\ 123\bar{4}\parallel \mathbf{1},\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2,\bar{1}\vee \bar{3}\vee 4 \longrightarrow (\mathsf{unsat}) \\ \end{array}
```

 $\emptyset \parallel 1, \overline{2} \vee 3, \overline{4} \vee \overline{3} \longrightarrow (unit prop)$

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(\underbrace{f(g(a)) \neq f(c)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{\bar{3}}\right) \land \left(\underbrace{c \neq d}_{\bar{4}} \lor \underbrace{g(a) \neq d}_{\bar{3}}\right)}_{\bar{3}}$$

 $\emptyset \parallel 1, \overline{2} \vee 3, \overline{4} \vee \overline{3} \longrightarrow (unit prop)$

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(\underbrace{f(g(a)) \neq f(c)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{\bar{3}}\right) \land \left(\underbrace{c \neq d}_{\bar{4}} \lor \underbrace{g(a) \neq d}_{\bar{3}}\right)}_{\bar{3}}$$

 $\emptyset \parallel 1, \overline{2} \vee 3, \overline{4} \vee \overline{3} \longrightarrow (unit prop)$

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(\underbrace{f(g(a)) \neq f(c)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}\right)}_{\bar{3}} \land \underbrace{\left(\underbrace{c \neq d}_{\bar{4}} \lor \underbrace{g(a) \neq d}\right)}_{\bar{3}}$$

```
\begin{array}{c} 1\parallel \mathbf{1},\bar{2}\vee 3,\bar{4}\vee \bar{3} \longrightarrow (\mathsf{decide}) \\ 1\bar{\,}^{\underline{d}}\parallel \mathbf{1},\bar{\mathbf{2}}\vee \mathbf{3},\bar{4}\vee \bar{3} \longrightarrow (\mathsf{learn}) \\ 1\bar{\,}^{\underline{d}}\parallel \mathbf{1},\bar{\mathbf{2}}\vee \mathbf{3},\bar{4}\vee \bar{3},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow (\mathsf{backjump}) \\ 12\parallel \mathbf{1},\bar{\mathbf{2}}\vee \mathbf{3},\bar{4}\vee \bar{\mathbf{3}},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow (\mathsf{unit\ prop}) \\ 123\parallel \mathbf{1},\bar{\mathbf{2}}\vee \mathbf{3},\bar{4}\vee \bar{\mathbf{3}},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow (\mathsf{unit\ prop}) \\ 123\bar{\,}^{\underline{d}}\parallel \mathbf{1},\bar{\mathbf{2}}\vee \mathbf{3},\bar{4}\vee \bar{\mathbf{3}},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow (\mathsf{learn}) \\ 123\bar{\,}^{\underline{d}}\parallel \mathbf{1},\bar{\mathbf{2}}\vee \mathbf{3},\bar{4}\vee \bar{\mathbf{3}},\bar{1}\vee 2 \longrightarrow (\mathsf{learn}) \\ 123\bar{\,}^{\underline{d}}\parallel \mathbf{1},\bar{\mathbf{2}}\vee \mathbf{3},\bar{4}\vee \bar{\mathbf{3}},\bar{1}\vee 2,\bar{1}\vee \bar{\mathbf{3}}\vee 4 \longrightarrow (\mathsf{unsat}) \\ \mathsf{unsat} \end{array}
```

Règle

- On rajoute une règle au système de règles de DPLL(T)
- La règle est très similaire à la propagation unitaire
- La différence est que la validation sémantique se fait avec la théorie
- La règle est la suivante :

 $M \parallel S \longrightarrow M, I \parallel S \text{ (theory prop) si } I \not\in M, \text{ et } I \in S \text{ ou } \neg I \in S, \text{ et } M \models_{\mathcal{T}} \neg I$

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{(f(g(a)) \neq f(c)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{3}) \land \underbrace{(c \neq d)}_{\bar{4}} \lor \underbrace{g(a) \neq d}_{\bar{3}})$$

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{(f(g(a)) \neq f(c)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{3}) \land \underbrace{(c \neq d)}_{\bar{4}} \lor \underbrace{g(a) \neq d}_{\bar{3}})$$

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(f(g(a)) \neq f(c)\right)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{3} \right) \land \underbrace{\left(c \neq d \lor g(a) \neq d\right)}_{\bar{3}}$$

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{(f(g(a)) \neq f(c)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{3}) \land \underbrace{(c \neq d)}_{\bar{4}} \lor \underbrace{g(a) \neq d}_{\bar{3}})$$

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(f(g(a)) \neq f(c)\right)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{3} \land \underbrace{\left(c \neq d \lor g(a) \neq d\right)}_{\bar{3}}$$

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{(f(g(a)) \neq f(c)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{3}) \land \underbrace{(c \neq d)}_{\bar{4}} \lor \underbrace{g(a) \neq d}_{\bar{3}})$$

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{(f(g(a)) \neq f(c)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{3}) \land \underbrace{(c \neq d)}_{\bar{4}} \lor \underbrace{g(a) \neq d}_{\bar{3}})$$

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{\left(f(g(a)) \neq f(c)\right)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{3} \right) \land \underbrace{\left(c \neq d \lor g(a) \neq d\right)}_{\bar{3}}$$

```
\begin{array}{c} \emptyset \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow \text{(theory prop)} \\ 1 2 \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow \text{(unit prop)} \\ 1 2 3 \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow \text{(theory prop)} \\ 1 2 3 4 \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow \text{(unsat)} \\ \end{array}
```

Égalité avec symboles non interprétés

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{(f(g(a)) \neq f(c)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{3}) \land \underbrace{(c \neq d)}_{\bar{4}} \lor \underbrace{g(a) \neq d}_{\bar{3}})$$

$$\emptyset \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow \text{(unit prop)}$$

$$1 \parallel \mathbf{1}, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow (\text{theory prop})$$

$$1 \ 2 \parallel \mathbf{1}, \overline{2} \lor 3, \overline{4} \lor \overline{3} \longrightarrow (unit prop)$$

1 2 3
$$\parallel$$
 1, $\bar{2} \vee$ 3, $\bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow$ (theory prop)

1 2 3 4
$$\parallel$$
 1. $\overline{2} \vee$ 3. $\overline{4} \vee \overline{3} \longrightarrow \text{(unsat)}$

unsat

Égalité avec symboles non interprétés

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{(f(g(a)) \neq f(c)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{3}) \land \underbrace{(c \neq d)}_{\bar{4}} \lor \underbrace{g(a) \neq d}_{\bar{3}})$$

$$\emptyset \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow (\mathsf{unit\ prop})$$

$$1 \parallel \mathbf{1}, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow (\text{theory prop})$$

$$1 \ 2 \parallel \mathbf{1}, \overline{2} \lor 3, \overline{4} \lor \overline{3} \longrightarrow (unit prop)$$

$$1\ 2\ 3\ \|\ 1, \overline{2} \lor 3, \overline{4} \lor \overline{3} \longrightarrow \text{(theory prop)}$$

1 2 3
$$\overline{4} \parallel 1, \overline{2} \vee 3, \overline{4} \vee \overline{3} \longrightarrow \text{(unsat)}$$

unsat

Égalité avec symboles non interprétés

$$\underbrace{g(a) = c}_{1} \land \underbrace{(f(g(a)) \neq f(c)}_{\bar{2}} \lor \underbrace{g(a) = d}_{3}) \land \underbrace{(c \neq d)}_{\bar{4}} \lor \underbrace{g(a) \neq d}_{\bar{3}})$$

$$\emptyset \parallel 1, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow (unit prop)$$

$$1 \parallel \mathbf{1}, \bar{2} \vee 3, \bar{4} \vee \bar{3} \longrightarrow \text{(theory prop)}$$

$$1 \ 2 \parallel \mathbf{1}, \overline{2} \lor 3, \overline{4} \lor \overline{3} \longrightarrow (unit prop)$$

$$1\ 2\ 3\ \|\ \mathbf{1}, \mathbf{\bar{2}} \lor \mathbf{3}, \mathbf{\bar{4}} \lor \mathbf{\bar{3}} \longrightarrow \text{(theory prop)}$$

1 2 3 4
$$\parallel$$
 1, $\bar{\mathbf{2}} \vee \mathbf{3}$, $\bar{\mathbf{4}} \vee \bar{\mathbf{3}} \longrightarrow \text{(unsat)}$

unsat