

TD preuves en logique du premier ordre

David Delahaye

Faculté des Sciences
David.Delahaye@lirmm.fr

Master Informatique M2 2022-2023

Exercices en logique propositionnelle

Propositions à démontrer

- ❶ $A \Rightarrow B \Rightarrow A$
- ❷ $(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow C$
- ❸ $A \wedge B \Rightarrow B$
- ❹ $B \Rightarrow A \vee B$
- ❺ $(A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Rightarrow C$
- ❻ $A \Rightarrow \perp \Rightarrow \neg A$
- ❼ $\perp \Rightarrow A$
- ❽ $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow B$
- ❾ $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow B \Rightarrow A$
- ❿ $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B)$

Exercices en logique du premier ordre

Propositions à démontrer

- ❶ $\forall x. P(x) \Rightarrow \exists y. P(y) \vee Q(y)$
- ❷ $(\exists x. P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists x. P(x)) \vee (\exists x. Q(x))$
- ❸ $(\forall x. P(x)) \wedge (\forall x. Q(x)) \Rightarrow \forall x. P(x) \wedge Q(x)$
- ❹ $(\forall x. P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\forall x. P(x)) \wedge (\forall x. Q(x))$
- ❺ $(\forall x. \neg P(x)) \Rightarrow \neg(\exists x. P(x))$
- ❻ $\neg(\forall x. P(x)) \Rightarrow \exists x. \neg P(x)$

Exercices en Coq

Propositions à démontrer

- Exercices en logique propositionnelle ;
- Exercices en logique du premier ordre.
- À faire chez soi.

Installation de Coq

- Tout est indiqué ici : <https://coq.inria.fr/>.

Calcul des séquents intuitionniste (LJ)

Règles

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A} \text{ ax}$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B} \text{ cont}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash C} \Rightarrow_{\text{left}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \Rightarrow_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \Leftrightarrow B \vdash C} \Leftrightarrow_{\text{left1}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash B \quad \Gamma, A \vdash C}{\Gamma, A \Leftrightarrow B \vdash C} \Leftrightarrow_{\text{left2}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma, B \vdash A}{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow B} \Leftrightarrow_{\text{right}}$$

Calcul des séquents intuitionniste (LJ)

Règles

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C} \wedge_{\text{left}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C} \vee_{\text{left}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_{\text{right1}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_{\text{right2}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \neg A \vdash B} \neg_{\text{left}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} \neg_{\text{right}}$$

$$\frac{}{\Gamma, \perp \vdash A} \perp_{\text{left}}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top} \top_{\text{right}}$$

Calcul des séquents intuitionniste (LJ)

Règles

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash B}{\Gamma, \forall x. A(x) \vdash B} \forall_{\text{left}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(x)}{\Gamma \vdash \forall x. A(x)} \forall_{\text{right}}, x \notin \Gamma$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash B}{\Gamma, \exists x. A(x) \vdash B} \exists_{\text{left}}, x \notin \Gamma, B$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash \exists x. A(x)} \exists_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B} \text{cut}$$

Calcul des séquents classique (LJ_{em})

Règles

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash B}{\Gamma, \forall x. A(x) \vdash B} \forall_{\text{left}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(x)}{\Gamma \vdash \forall x. A(x)} \forall_{\text{right}}, x \notin \Gamma$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash B}{\Gamma, \exists x. A(x) \vdash B} \exists_{\text{left}}, x \notin \Gamma, B$$

$$\frac{\Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash \exists x. A(x)} \exists_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B} \text{cut}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A} \text{em}$$

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash \Delta, A} \text{ ax}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, B} \text{ cut}$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \text{ cont}_{\text{left}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A} \text{ cont}_{\text{right}}$$

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta} \Rightarrow_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B} \Rightarrow_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B \quad \Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Leftrightarrow B \vdash \Delta} \Leftrightarrow_{\text{left}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B \quad \Gamma, B \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \Leftrightarrow B} \Leftrightarrow_{\text{right}}$$

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \wedge_{\text{left}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} \wedge_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee_{\text{left}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \vee_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg_{\text{left}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} \neg_{\text{right}}$$

$$\frac{}{\Gamma, \perp \vdash \Delta} \perp_{\text{left}}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \Delta, \top} \top_{\text{right}}$$

Calcul des séquents classique (LK)

Règles

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x. A(x) \vdash \Delta} \forall_{\text{left}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A(x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x. A(x)} \forall_{\text{right}}, x \notin \Gamma, \Delta$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x. A(x) \vdash \Delta} \exists_{\text{left}}, x \notin \Gamma, \Delta$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A(t)}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x. A(x)} \exists_{\text{right}}$$