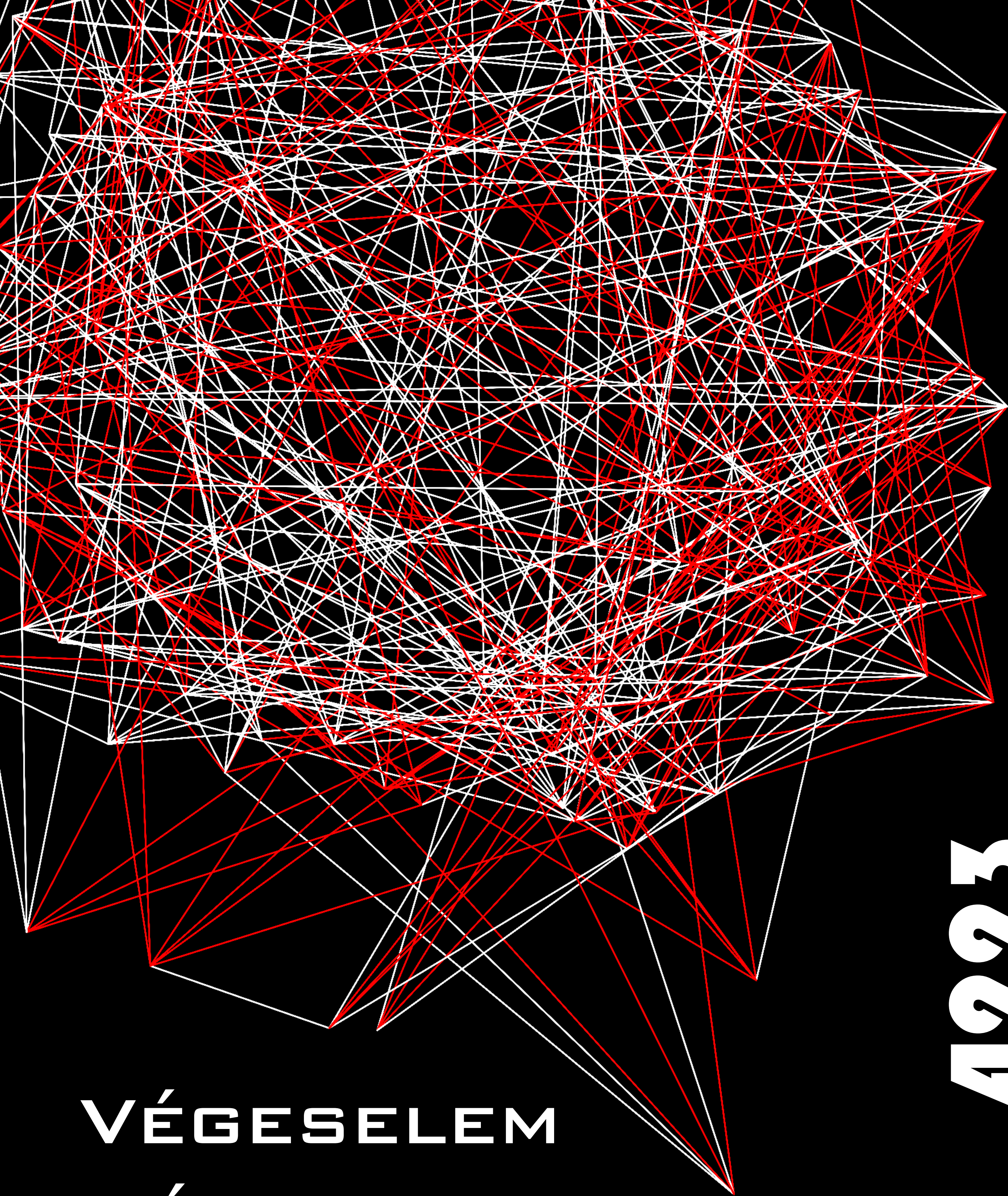


1223

Végeselem módszer alapjai

Oszlányi-Salacz Máté Iván

Bevezetés

Feladatunk egy két dimenziós, rudakból és ideálizált kapcscolódási pontjaikból álló szerkezet vizsgálata végeselem módszerrel. A modellünk könnyen kiterjeszthető három dimezióra. Megfelelő csatlakozási pontok és rudak választása esetén valós szerkezetek közelítésére is alkalmas lehet. A probléma megoldása a szerkezet pontjainak kimozdulását és a rudakban ébredő feszültség közelítését adja meg.

4223-as kódú modell egészére jellemző értékek a rúdátmérő illetve a rugalmassági modulusz értéke. Érdemes az átmérőből számítható rúd-keresztmetszeti felület érékét a feladat megoldása elött bevezetni;

$d = 45\ [\mathrm{mm}] = 0{,}045\ [\mathrm{m}]$ $\quad$ $A = A_k - A_b = \frac{(1{,}15\cdot d)^2\cdot\pi}{4} - \frac{d^2\cdot\pi}{4} = 0{,}0005\ [\mathrm{m}]$ $\quad$ $E = 170\ [\mathrm{GPa}]$

A megoldáshoz még szükségünk van a szerkezet geometriai adataira, illetve a terhelések hatáspontjának, irányának és nagysának ismeretére. A modell geometriai adataihoz először szükségünk van a pontok koordintáira illetve a befogásuk jellemző logikai értékeire. Továbbá a rudakat felírhatjuk az általuk összekötött pontok sorszámaival. Ennek megfelelően a három adatstruktúrát állíthatunk fel;

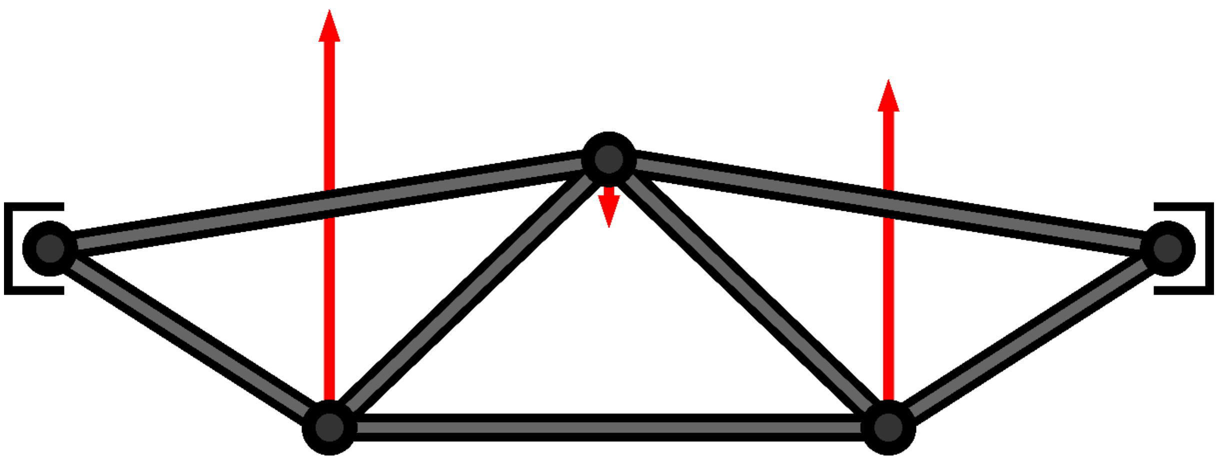
Pontok koordinátái	
x0	y0
x1	y1
x2	y2
…	…
xn	yn

Kényszerek
True
True
False
…
bool2n

Pontok kapcsolatai	
0	1
0	2
2	4
m1	m2

A szerkezet csatlakozási pontjainak száma n, ezek x és y koordinátáit egy kétszer n nagyságú mátrixban tároljuk, hogy könnyebb legyen későbbiekben a távolság és a szögszámítás. A pontok kényszerei, jelen modellünk esetén csak x és y irányúak lehetnek. Egy pont egy irányú szabadrágfokának meglétét vagy hiányát leírhatjuk egy bool változóval. Ezen változók értékeit, a pontok sorrendjében, töretlen egymásutánban tároljuk el, mivel a mátrixredukálásnál, az egy ponthoz tartozó értékekhez külön oszlop és sor fog tartozni. Így az egy dimenziós kényszer/szabadságfok vektor elemszáma 2n lesz. A pont sorszámának kétszerese megadja a hozzá tartozó x irányú szabadsági bool indexét a kényszerek táblában, az ezutáni érték a ponthoz tartozó y irányú kényxszer bool értéke. A rudak kezdő és végpontjának számértéke egyenesen a pontok koordináta-indexére mutat. A rudak sorszámának csak minimum és maximum értéke van, nem függ a pontok számától, így a rudak számossága m.

Szerkezetrajz



[1] A 4223-as szerkezet méretarányos ábrázolása terhelések és kényszerek feltüntetésével.

Számítások I – az egyenlet felállítása

A megoldáshoz szükséges egyenlet az erő ($\underline{F}$) és elmozdulás ($\underline{U}$) vektorokból, illetve a merevségi mátrixból ($\underline{\underline{K}}$) áll. Ezek sorra 2n, illetve 2n x 2n dimenzióval rendelkeznek. Az elmozdulás vektor ismert elemei 0-k a befogott pontok kényszereinek irányában. Ugyanakkor ezen pontokban az erővektor elemei ismeretlenek, nem ismerjük a reakcióerők nagyságát. Ezzel szemben a szabad (kényszerekkel nem befogott) pontokban és irányokban az erő vektor értéke egyenértékű a pontra ható külső erőkkel. Belátható, hogy a rendszerben azonos számú egyenlet és változó van, így egyértelmű megoldást kapunk a problémára.

$$\underline{F} = \underline{\underline{K}} \cdot \underline{U}$$

Az erő és az elmozdulás vektor közt a merevségi mátrix teremt kapcsolatot. Ezt a mátrixot az egyes rúd elemek merevségi mátrixaiból származtathatjuk. Így az alábbi műveleti sort elemenként elvégezve megkaphatjuk a rendszer merevségi mátrixát, ahol a megoldás bemeneti értékei a rúdelem kiindulási pontjának (a) és a végpontjának sorszáma (b).

- Számítások a rúdelem geometriai és fizikai reprezentációráját jellemző értékekért:
  - a és b pontok távolságának (l) számítása
  - $\underline{ab}$ vektor x irányú bázisvektorral bezárt szögének (α) számítása
  - rúdelem mátrixára vonatkozó szorzótényező (C) számítása

$$l = \sqrt{(\mathrm{a}_x - \mathrm{b}_x)^2 + \left(\mathrm{a}_y - \mathrm{b}_y\right)^2} \qquad \alpha = \operatorname{atan2}(b_y - a_y, b_x - a_x) \qquad C = \frac{A \cdot E}{l}$$

- A rúdelem mátrixának ($\underline{\underline{E}}$) számítása a szorzótényező és a bezárt szög alapján:

$$\underline{\underline{E}} = \mathrm{C} \cdot \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\cdot\sin\alpha & -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\cdot\sin\alpha \\ \cos\alpha\cdot\sin\alpha & \sin^2\alpha & -\cos\alpha\cdot\sin\alpha & -\sin^2\alpha \\ -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\cdot\sin\alpha & \cos^2\alpha & \cos\alpha\cdot\sin\alpha \\ -\cos\alpha\cdot\sin\alpha & -\sin^2\alpha & \cos\alpha\cdot\sin\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{0,0} & e_{0,1} & e_{0,2} & e_{0,3} \\ e_{1,0} & e_{1,1} & e_{1,2} & e_{1,3} \\ e_{2,0} & e_{2,1} & e_{2,2} & e_{2,3} \\ e_{3,0} & e_{3,1} & e_{3,2} & e_{3,3} \end{bmatrix}$$

- A rúdelem kezdő és végpont értékei szerint a rugalmassági mátrix ($\underline{\underline{K}}$) megfelelő értékeihez hozzáadjuk a rúdelem mátrixának megfelelő elemeit. Itt a és b értéke alatt nem a pontok koordinátáit (a_x, a_y, b_x, b_y) értjük, hanem azok sorszámát.

$$\begin{matrix} k_{2a,2a} + e_{0,0} & k_{2a,2a+1} + e_{0,1} & k_{2a,2b} + e_{0,2} & k_{2a,2b+1} + e_{0,3} \\ k_{2a+1,2a} + e_{1,0} & k_{2a+1,2a+1} + e_{1,1} & k_{2a+1,2b} + e_{1,2} & k_{2a+1,2b+1} + e_{1,3} \\ k_{2b,2a} + e_{2,0} & k_{2b,2a+1} + e_{2,1} & k_{2b,2b} + e_{2,2} & k_{2b,2b+1} + e_{2,3} \\ k_{2b+1,2a} + e_{3,0} & k_{2b+1,2a+1} + e_{3,1} & k_{2b+1,2b} + e_{3,2} & k_{2b+1,2b+1} + e_{3,3} \end{matrix}$$

Ezt megismételve minden rúdelemre, a teljes egyenletrendszerünk együtthatómátrixát meghatározhatjuk. A rugalmassági mátrixnak n x n, a két vektorunknak n dimenziója van. A mi esetünkben ezek

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -f \\ F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ 0 \\ 6\cdot f \\ 0 \\ 5\cdot f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}98 & -11{,}2 & -1{,}68 & -0{,}26 & -1{,}68 & 0{,}27 & -1{,}31 & -1{,}26 & -1{,}31 & 1{,}26 \\ -11{,}2 & 2{,}5 & -0{,}27 & -0{,}04 & 0{,}27 & -0{,}04 & -1{,}26 & -1{,}21 & 1{,}26 & -1{,}21 \\ -1{,}68 & -0{,}27 & 3{,}76 & -1{,}06 & 0 & 0 & -2{,}08 & 1{,}33 & 0 & 0 \\ -0{,}26 & -0{,}04 & -1{,}06 & 0{,}9 & 0 & 0 & 1{,}33 & -0{,}85 & 0 & 0 \\ -1{,}68 & 0{,}27 & 0 & 0 & 3{,}76 & 1{,}07 & 0 & 0 & -2{,}08 & -1{,}33 \\ 0{,}27 & -0{,}04 & 0 & 0 & 1{,}07 & 0{,}9 & 0 & 0 & -1{,}33 & -0{,}85 \\ -1{,}31 & -1{,}26 & -2{,}08 & 1{,}33 & 0 & 0 & 5{,}14 & -0{,}08 & -1{,}74 & 0 \\ -1{,}26 & -1{,}21 & 1{,}33 & -0{,}85 & 0 & 0 & -0{,}08 & 2{,}06 & 0 & 0 \\ -1{,}31 & 1{,}26 & 0 & 0 & -2{,}08 & -1{,}33 & -1{,}74 & 0 & 5{,}14 & 0{,}07 \\ 1{,}26 & -1{,}21 & 0 & 0 & -1{,}33 & -0{,}85 & 0 & 0 & 0{,}07 & 2{,}06 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \begin{bmatrix} U_{0x} \\ U_{0y} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_{3x} \\ U_{3y} \\ U_{4x} \\ U_{4y} \end{bmatrix}$$

Számítások II-az egyenlet megoldása

Az egyenletrendszer megoldásait, három lépésben állíthatjuk elő mátrix alakban. Először is az elmozdulás vektor ismeretlen tagjait számítjuk ki. Ehhez az első lépés a vektor és mátrix kondenzáció. Az elmozdulás vektor ismert, az erő vektor ismeretlenjeit tartozó koordináták sorait, illetve a merevségi mátrixban az ezekhez tartozó sorokat és oszlopokat is töröljük. Beláthatjuk, hogy ezzel, csak az egyenletrendszer azonosan nulla tagjait (K mátrix függőleges oszlopai) illetve az erővektor ismeretleneit tartalmazó egyenleteit vettük ki az egyenletrendszerből. Az így létrejövő kondenzált tagokra a fenti egyenlőség hasonló módon az eddigiekhez tobábbra is fennáll. Továbbá az új egyenletrendszer is megoldható, méghozzá egy lépésben.

$$\underline{\hat{F}} = \underline{\underline{\hat{K}}} \cdot \underline{\hat{U}}$$

A következő lépés az így kapott kondenzált mátrix-egyenlet megoldása. Ennek megoldásához a K mátrix inverzével kell az F vektort szorozni. Az inverz számításához a kondenzált merevségi mátrix szomszédsági mátrixát, illetve a determinánsát kell kiszámítani, majd ezek hányadosát venni. Ezzel biztos, hogy egzakt megoldást kapunk, mivel az inverz számításához a mátrix determinánsával kell osztanunk, amely így nem lehet 0. Ha a programkód lefut, már tudjuk, hogy ez a kikötés teljesül A számítást a NumPy modul használatával végeztem el.

$$\begin{bmatrix} U_{0x} \\ U_{0y} \\ U_{3x} \\ U_{3y} \\ U_{4x} \\ U_{4y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}98 & -11{,}2 & -1{,}31 & -1{,}26 & -1{,}31 & 1{,}26 \\ -11{,}2 & 2{,}5 & -1{,}26 & -1{,}21 & 1{,}26 & -1{,}21 \\ -1{,}31 & -1{,}26 & 5{,}14 & -0{,}08 & -1{,}74 & 0 \\ -1{,}26 & -1{,}21 & -0{,}08 & 2{,}06 & 0 & 0 \\ -1{,}31 & 1{,}26 & -1{,}74 & 0 & 5{,}14 & 0{,}07 \\ 1{,}26 & -1{,}21 & 0 & 0 & 0{,}07 & 2{,}06 \end{bmatrix}^{-1} \cdot 10^7 \begin{bmatrix} 0 \\ -f \\ 0 \\ 6 \cdot f \\ 0 \\ 5 \cdot f \end{bmatrix}$$

Végül a számított értékeket visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe annak megoldásával megkapjuk a teljes terhelés vektort. A megoldás a K mátrix és U vektor szorzata. Beláthatjuk, hogy n x n dimenziós mátrix és n dimenziós vektor szorzata n dimenziós vektort fog eredményezni. A szorzást A nem kondenzált F értékekkel ellenőrizhetjük az előző lépések helyességét.

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} k_{0,0} & \cdots & k_{0,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n,0} & \cdots & k_{n,n} \end{bmatrix} \underline{U}$$

Az így kapott reakcióerők, és a szabad csomópontok értékeivel kiegészített erő és elmozdulás vektorok táblázatos formában;

	x_0	y_0	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4
$\underline{U}$ [mm]	3,164	158,2	0	0	0	0	31,8	145,3	-29,1	133,1
$\underline{F}$ [kN]	0	170	796,7	-892,5	-796,7	-807,5	0	1020	0	850

Szemlélet és a kiindulási ábra alapán ellenőrizhetjük a numerikus megoldásokat. A reakcióerők a vízszintes irányban a szerkezet belseje felé mutatnak, mivel a rudak ezeket a pontokat kifelé irányuló szögben támasztják meg a felfelé ható terhelőerőkkel szemben. A függőleges irányú reakcióerők, a statika alaptörvényeinek megfelelően ellentétes irányúak a terhelésekkel. Az alsó pontok vízszintes elmozdulása befelé történik, a támasztó rudak befogásaik körüli felfelé fordulása miatt. Az összes szabad pont, pedig a túlnyomóan felfelé ható erők következtében felfelé mozdul el. A felső pont a rá ható, lefelé irányuló erő miatt a legkisebb kitérést tapasztalja a szabad pontok közül. Ez mind megfelel a kapott eredményeknek, így sejthetjük a helyes megoldást.

Kiértékelés

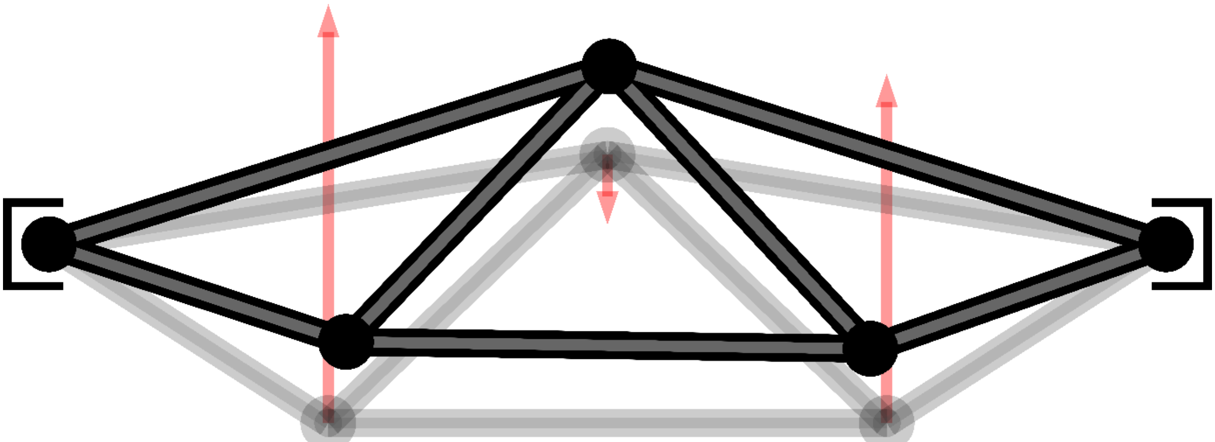
A rendszerünk terhelésének kiértékeléséhez meghatározzuk a rudak relatív megnyúlásának értékeit, illetve az azokat terhelő normál feszültségek nagyságát. Az általános képleteiket a már tárgyalt jelölésrendszerrel az alábbi módon írhatjuk fel:

$$\varepsilon_m = \frac{(U_b - U_a)\cdot\cos\alpha_m + (U_{b+1} - U_{a+1})\cdot\sin\alpha_m}{L_m} \qquad \sigma_m = E\cdot\varepsilon_m$$

Ennek megfelelően a számított eredmények táblázatos formában.

	0	1	2	3	4	5	6
Relatív hosszváltozás [%]	0,55	0,43	-0,34	-0,17	-1,74	-1,59	-1,22
Normál feszültég [MPa]	944,3	734,5	-574,4	-287,2	-2951,2	-2705,3	-2071,4

A feladat megoldásait a tanszéki 2009-es SIKER programmal ellenőriztem. A két program közötti eltérés megközelítőleg 2,8%. A számítógép architektúrája bár numerikus kerekítési hibával kell rendelkezzen, az nagyságrendileg 10^{-15} nagyságrendű. Jelen feladatban az eltérést valószínűleg az ellenőrző program modellében megjelenő nyomatékok eredményezik. Viszont az hiba mértéke egy egyéként is valóságot csak közelítő modell esetén - amelyet feltételezhetően a mérnöki gyakorlatban megszokott biztonsági fokokkal együtt érdemes alkalmazni – teljesen normális. A fentieknek alapján, a feladat numerikus megoldásait helyesnek ítélem, a megoldóprogram a tőle várható módon működik.



[2] A 4223-as szerkezet terhelések általi deformációjának méretarányos ábrázolása.

Az ábrázolt elmozdulás értéke a valós kimozdulás 400-szorosával méretarányos. A szerkezet kiindulási helyzete, átlátszó grafikával van ábrázolva. A deformált szerkezet, a reakciók feltüntetése nélkül az eredeti koordináta rendszerben van.

Függelékek

A megoldóprogramot Python 3.10.10 programnyelven írt általános megoldó-szoftverrel készült. A teljes programkód utolsó verziója, megtalálható a matti0112/FEM GitHubon. A dokumentáció a program ezt megelőző verzióival generált megoldásokat is tartalmazhat. A NumPy, Cairo, Math és Random modulokat használtam. Ennek megfelelően dokumentációban található grafikák, programkóddal készült SVG vektorgrafikák. A borítókép egy véletlenszerűen generált modell végeselem analízise.