Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione

# Esperimenti MIP per una classe di problemi di assegnamento quadratico

Laureando: Mattia Toffolon
Relatore: Prof. Domenico Salvagnin

*Padova, 18 luglio 2023*

# Indice

# Quadratic assignment problem

DIPARTIMENTO
DI INGEGNERIA
DELL'INFORMAZIONE

Il problema di ottimizzazione di assegnamento quadratico (QAP) consiste nell'assegnare ***n* unità** in ***n* posizioni** differenti.
Sono noti il flusso di informazioni da trasferire da ogni unità alle altre e per ogni coppia di posizioni la distanza che le separa.

L'assegnamento ottimale è quello che rende **minima** la **somma dei prodotti flusso x distanza** relativi ad ogni coppia di unità.

Matematicamente, il problema può essere espresso come segue

$$\min_{\pi \in P(n)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{\pi_i \pi_j}$$

# Istanze Tai*c



La classe di problemi QAP studiata è quella delle istanze **Tai*c**.

Tali istanze sono generate dal metodo ***Densità di grigio***. Questo si fonda sull'uso di un'apposita griglia composta da $n$ caselle ed un valore di densità per ottenere i parametri di distanza e flusso.

Le soluzioni a queste istanze possono essere visualizzate come griglie e combinate per ottenere la tonalità di grigio desiderata.

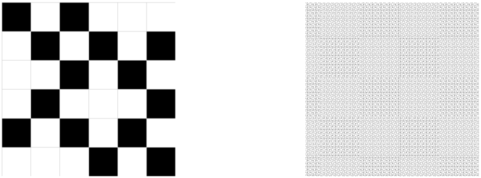


Figura: Esempio per un'istanza di dimensione 36 a densità 40%

# Modellazione algebrica - 1



Le diverse fasi in cui si è articolata la modellazione algebrica del problema di ottimizzazione sono state:

- individuazione degli insiemi
- individuazione dei parametri
- individuazione delle variabili
- definizione dei vincoli e della funzione obiettivo
- linearizzazione del modello
- semplificazione del modello

Le ultime due fasi sono state necessarie per adattare il modello alla **forma MIP** e per **ridurre il costo computazionale** richiesto per risolvere le verie istanze del problema.

# Modellazione algebrica - 2

DIPARTIMENTO
DI INGEGNERIA
DELL'INFORMAZIONE

Il risultato dalla modellazione algebrica è il seguente modello:

$$
\begin{array}{ll}
\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} b_{ij} \cdot y_{ij} & \\
\sum_{i \in I} x_i = n_1 & \\
y_{ij} \leq x_i & \forall\, i, j \in I \\
y_{ij} \leq x_j & \forall\, i, j \in I \\
y_{ij} \geq x_i + x_j - 1 & \forall\, i, j \in I \\
x_i,\, y_{ij} \in \{0, 1\} & \forall\, i, j \in I
\end{array}
$$

Si nota come, dato $n$ il numero di unità e di posizioni, è necessario prendere in esame $\boldsymbol{n^2}$ **variabili**. Da qui deriva l'elevata complessità di risoluzione delle istanze del problema in oggetto.

# Risultati sperimentali - 1

DIPARTIMENTO
DI INGEGNERIA
DELL'INFORMAZIONE

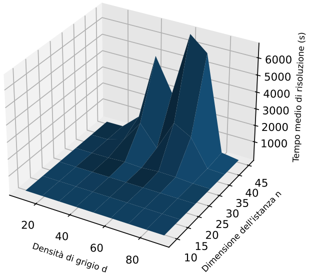
Tramite alcuni script *Python* ed il software risolutore *CPLEX* è stato possibile trovare le soluzioni ad alcune istanze del problema e ricavare i **tempi medi di risoluzione** riportati qui in secondi.

| | 9 | 16 | 25 | 36 | 42 | 45 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10% | 0.2 | 0.1 | 0.3 | 0.6 | 0.8 | 1.1 |
| 20% | 0.1 | 0.1 | 0.3 | 0.9 | 5.0 | 13.0 |
| 30% | 0.1 | 0.1 | 0.3 | 13.0 | 296.4 | 913.0 |
| 40% | 0.1 | 0.2 | 1.6 | 66.9 | 1611.0 | 4896.7 |
| 50% | 0.1 | 0.2 | 2.6 | 18.4 | 373.0 | 2942.4 |
| 60% | 0.1 | 0.2 | 2.5 | 97.7 | 2209.5 | 6708.0 |
| 70% | 0.1 | 0.1 | 0.7 | 70.8 | 1641.5 | 5853.2 |
| 80% | 0.1 | 0.1 | 0.5 | 6.4 | 36.4 | 158.7 |
| 90% | 0.1 | 0.1 | 0.3 | 0.8 | 1.3 | 5.7 |

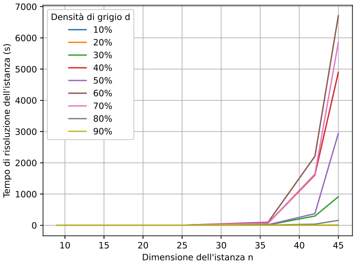
# Risultati sperimentali - 2

DIPARTIMENTO
DI INGEGNERIA
DELL'INFORMAZIONE

I dati ottenuti dalle sperimentazioni sono stati utilizzati per tracciare i seguenti grafici. Essi rappresentano l'andamento dei tempi rispetto alla dimensione dell'istanza e alla densità di grigio.




(a) Grafico 3D

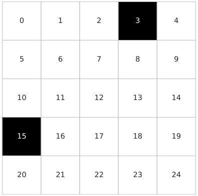



(b) Grafico 2D

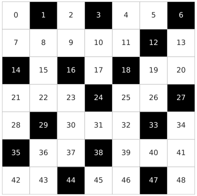
# Risultati sperimentali - 3



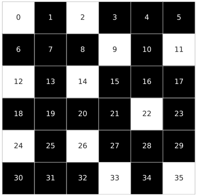
Le soluzioni ottime delle istanze possono essere visulizzate come griglie "densità di grigio". Quelle qui riportate corrispondono alle soluzioni trovate per tre istanze differenti.




(a) n=25 d=10%




(b) n=49 d=30%




(c) n=36 d=70%

# Conclusioni



**Risultati**

- L'andamento dei tempi medi di risoluzione rispetto alla dimensione dell'istanza è generalmente esponenziale.
  Al variare del valore di densità si notano differenze minori.
- Tramite la visualizzazione per griglie si può confermare la validità delle soluzioni rispetto al metodo di generazione.

**Possibili futuri sviluppi**

- estensione del time limit imposto al risolutore CPLEX
- utilizzo di un calcolatore più potente per risolvere istanze di dimensione maggiore
- ricerca di un modello più efficiente

# Ringraziamenti

DIPARTIMENTO
DI INGEGNERIA
DELL'INFORMAZIONE

Grazie per l'attenzione!

Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione

# Esperimenti MIP per una classe di problemi di assegnamento quadratico

Laureando: Mattia Toffolon
Relatore: Prof. Domenico Salvagnin

*Padova, 18 luglio 2023*