



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA



DIPARTIMENTO  
DI INGEGNERIA  
DELL'INFORMAZIONE

# Esperimenti MIP per una classe di problemi di assegnamento quadratico

Laureando: Mattia Toffolon

Relatore: Prof. Domenico Salvagnin

*Padova, 18 luglio 2023*

- Introduzione al problema di assegnamento quadratico
- Istanze Tai\*c
- Modellazione algebrica
- Risultati sperimentali
- Conclusioni

# Quadratic assignment problem

Il problema di ottimizzazione di assegnamento quadratico (QAP) consiste nell'assegnare  **$n$  unità** in  **$n$  posizioni** differenti. Sono noti il flusso di informazioni da trasferire da ogni unità alle altre e per ogni coppia di posizioni la distanza che le separa.

L'assegnamento ottimale è quello che rende **minima** la **somma dei prodotti flusso x distanza** relativi ad ogni coppia di unità.

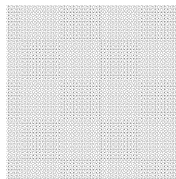
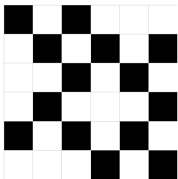
Matematicamente, il problema può essere espresso come segue

$$\min_{\pi \in P(n)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{\pi_i \pi_j}$$

La classe di problemi QAP studiata è quella delle istanze **Tai\*c**.

Tali istanze sono generate dal metodo **Densità di grigio**. Questo si fonda sull'uso di un'apposita griglia composta da  $n$  caselle ed un valore di densità per ottenere i parametri di distanza e flusso.

Le soluzioni a queste istanze possono essere visualizzate come griglie e combinate per ottenere la tonalità di grigio desiderata.



**Figura:** Esempio per un'istanza di dimensione 36 a densità 40%

Le diverse fasi in cui si è articolata la modellazione algebrica del problema di ottimizzazione sono state:

- individuazione degli insiemi
- individuazione dei parametri
- individuazione delle variabili
- definizione dei vincoli e della funzione obiettivo
- linearizzazione del modello
- semplificazione del modello

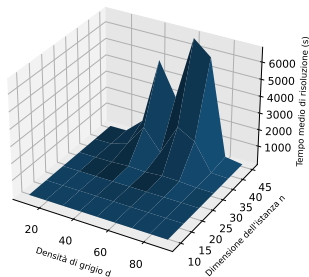
Le ultime due fasi sono state necessarie per adattare il modello alla **forma MIP** e per **ridurre il costo computazionale** richiesto per risolvere le vere istanze del problema.

Il risultato dalla modellazione algebrica è il seguente modello:

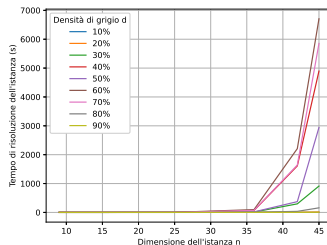
$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} b_{ij} \cdot y_{ij} \\ \sum_{i \in I} x_i &= n_1 \\ y_{ij} &\leq x_i \quad \forall i, j \in I \\ y_{ij} &\leq x_j \quad \forall i, j \in I \\ y_{ij} &\geq x_i + x_j - 1 \quad \forall i, j \in I \\ x_i, y_{ij} &\in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in I \end{aligned}$$

Si nota come, dato  $n$  il numero di unità e di posizioni, è necessario prendere in esame  **$n^2$  variabili**. Da qui deriva l'elevata complessità di risoluzione delle istanze del problema in oggetto.

Tramite alcuni script *Python* ed il software risolutore *CPLEX* è stato possibile trovare le soluzioni ad alcune istanze del problema e ricavare i **tempi medi di risoluzione**. I dati ottenuti dalle sperimentazioni sono stati utilizzati per tracciare i seguenti grafici.



(a) Grafico 3D



(b) Grafico 2D

Dai grafici è possibile osservare una correlazione di tipo **esponenziale** tra il tempo medio di risoluzione e la dimensione dell'istanza per ogni valore di densità preso in esame.

L'unica differenza tra i diversi casi risiede nella velocità con cui i valori dei tempi divergono. Per densità prossime al 50% il fenomeno è più marcato, mentre per quelle vicine allo 0% o al 100% esso tende ad essere più fievole.

Tali risultati risultano compatibili con le ipotesi formulabili limitandosi ad osservare le teoria.



# Conclusioni

Grazie per l'attenzione!



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA



DIPARTIMENTO  
DI INGEGNERIA  
DELL'INFORMAZIONE

# Esperimenti MIP per una classe di problemi di assegnamento quadratico

Laureando: Mattia Toffolon

Relatore: Prof. Domenico Salvagnin

*Padova, 18 luglio 2023*