Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione

Esperimenti MIP per una classe di problemi di assegnamento quadratico

Laureando: Mattia Toffolon
Relatore: Prof. Domenico Salvagnin

Padova, 18 luglio 2023

Indice

DIPARTIMENTO
DI INGEGNERIA
DELL'INFORMAZIONE

Quadratic assignment problem

DIPARTIMENTO
DI INGEGNERIA
DELL'INFORMAZIONE

Il problema di ottimizzazione di assegnamento quadratico (QAP) consiste nell'assegnare ***n* unità** in ***n* posizioni** differenti.
Sono noti il flusso di informazioni da trasferire da ogni unità alle altre e per ogni coppia di posizioni la distanza che le separa.

L'assegnamento ottimale è quello che rende **minima** la **somma dei prodotti flusso x distanza** relativi ad ogni coppia di unità.

Matematicamente, il problema può essere espresso come segue

$$\min_{\pi \in P(n)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{\pi_i \pi_j}$$

Istanze Tai*c

La classe di problemi QAP studiata è quella delle istanze **Tai*c**.

Tali istanze sono generate dal metodo ***Densità di grigio***. Questo si fonda sull'uso di un'apposita griglia composta da n caselle ed un valore di densità per ottenere i parametri di distanza e flusso.

Le soluzioni a queste istanze possono essere visulizzate come griglie e combinate per ottenere la tonalità di grigio desiderata.

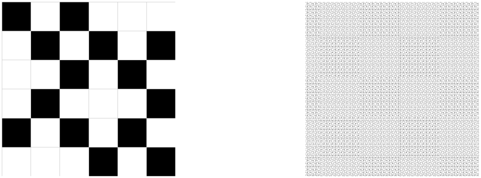


Figura: Esempio per un'istanza di dimensione 36 a densità 40%

Modellazione algebrica - 1

Le diverse fasi in cui si è articolata la modellazione algebrica del problema di ottimizzazione sono state:

- individuazione degli insiemi
- individuazione dei parametri
- individuazione delle variabili
- definizione dei vincoli e della funzione obiettivo
- linearizzazione del modello
- semplificazione del modello

Le ultime due fasi sono state necessarie per adattare il modello alla **forma MIP** e per **ridurre il costo computazionale** richiesto per risolvere le verie istanze del problema.

Modellazione algebrica - 2

DIPARTIMENTO
DI INGEGNERIA
DELL'INFORMAZIONE

Il risultato dalla modellazione algebrica è il seguente modello:

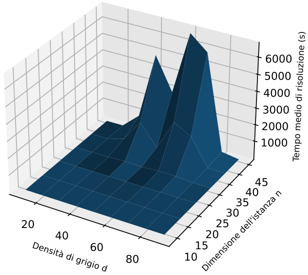
$$\begin{array}{ll}
\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} b_{ij} \cdot y_{ij} & \\
\sum_{i \in I} x_i = n_1 & \\
y_{ij} \leq x_i & \forall\, i, j \in I \\
y_{ij} \leq x_j & \forall\, i, j \in I \\
y_{ij} \geq x_i + x_j - 1 & \forall\, i, j \in I \\
x_i,\, y_{ij} \in \{0, 1\} & \forall\, i, j \in I
\end{array}$$

Si nota come, dato n il numero di unità e di posizioni, è necessario prendere in esame $\boldsymbol{n^2}$ **variabili**. Da qui deriva l'elevata complessità di risoluzione delle istanze del problema in oggetto.

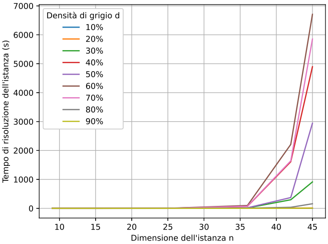
Risultati sperimentali - 1

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

Tramite alcuni script *Python* ed il software risolutore *CPLEX* è stato possibile trovare le soluzioni ad alcune istanze del problema e ricavare i **tempi medi di risoluzione**. I dati ottenuti dalle sperimentazioni sono stati utilizzati per tracciare i seguenti grafici.



(a) Grafico 3D



(b) Grafico 2D

Risultati sperimentali - 2

Dai grafici è possibile osservare una correlazione di tipo **esponenziale** tra il tempo medio di risoluzione e la dimensione dell'istanza per ogni valore di densità preso in esame.

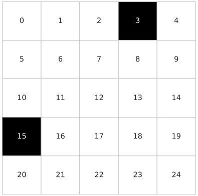
L'unica differenza tra i diversi casi consiste nella velocità con cui i valori dei tempi divergono. Per densità prossime al 50% il fenomeno è più marcato, mentre per quelle vicine allo 0% o al 100% esso tende ad essere più fievole.

Tali risultati risultano compatibili con le ipotesi formulabili limitandosi ad osservare le teoria.

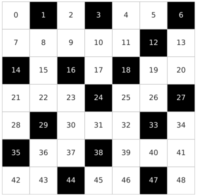
Risultati sperimentali - 3

DIPARTIMENTO
DI INGEGNERIA
DELL'INFORMAZIONE

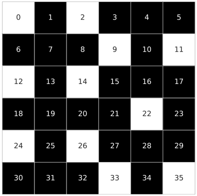
Le soluzioni ottime delle istanze possono essere visulizzate come griglie "densità di grigio". Quelle qui riportate corrispondono alle soluzioni trovate per tre istanze differenti.



(a) n=25 d=10%



(b) n=49 d=30%



(c) n=36 d=70%

Conclusioni

Ringraziamenti

DIPARTIMENTO
DI INGEGNERIA
DELL'INFORMAZIONE

Grazie per l'attenzione!

Università
degli Studi
di Padova

Dipartimento
di Ingegneria
dell'Informazione

Esperimenti MIP per una classe di problemi di assegnamento quadratico

Laureando: Mattia Toffolon
Relatore: Prof. Domenico Salvagnin

Padova, 18 luglio 2023