



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA



DIPARTIMENTO  
DI INGEGNERIA  
DELL'INFORMAZIONE

# Esperimenti MIP per una classe di problemi di assegnamento quadratico

Laureando: Mattia Toffolon

Relatore: Prof. Domenico Salvagnin

*Padova, 18 luglio 2023*

- Introduzione al problema di assegnamento quadratico
- Istanze Tai\*c
- Modellazione algebrica
- Risultati sperimentali
- Conclusioni

# Quadratic assignment problem

Il problema di ottimizzazione di assegnamento quadratico (QAP) consiste nell'assegnare  **$n$  unità** in  **$n$  posizioni** differenti. Sono noti il flusso di informazioni da trasferire da ogni unità alle altre e per ogni coppia di posizioni la distanza che le separa.

L'assegnamento ottimale è quello che rende **minima** la **somma dei prodotti flusso x distanza** relativi ad ogni coppia di unità.

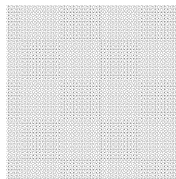
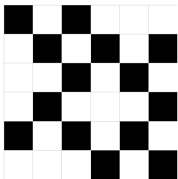
Matematicamente, il problema può essere espresso come segue

$$\min_{\pi \in P(n)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{\pi_i \pi_j}$$

La classe di problemi QAP studiata è quella delle istanze **Tai\*c**.

Tali istanze sono generate dal metodo **Densità di grigio**. Questo si fonda sull'uso di un'apposita griglia composta da  $n$  caselle ed un valore di densità per ottenere i parametri di distanza e flusso.

Le soluzioni a queste istanze possono essere visualizzate come griglie e combinate per ottenere la tonalità di grigio desiderata.



**Figura:** Esempio per un'istanza di dimensione 36 a densità 40%

Le diverse fasi in cui si è articolata la modellazione algebrica del problema di ottimizzazione sono state:

- individuazione degli insiemi
- individuazione dei parametri
- individuazione delle variabili
- definizione dei vincoli e della funzione obiettivo
- linearizzazione del modello
- semplificazione del modello

Le ultime due fasi sono state necessarie per adattare il modello alla **forma MIP** e per **ridurre il costo computazionale** richiesto per risolvere le vere istanze del problema.

Il risultato dalla modellazione algebrica è il seguente modello:

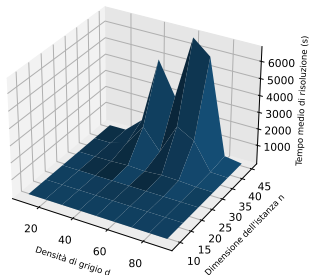
$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} b_{ij} \cdot y_{ij} \\ \sum_{i \in I} x_i &= n_1 \\ y_{ij} &\leq x_i \quad \forall i, j \in I \\ y_{ij} &\leq x_j \quad \forall i, j \in I \\ y_{ij} &\geq x_i + x_j - 1 \quad \forall i, j \in I \\ x_i, y_{ij} &\in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in I \end{aligned}$$

Si nota come, dato  $n$  il numero di unità e di posizioni, è necessario prendere in esame  **$n^2$  variabili**. Da qui deriva l'elevata complessità di risoluzione delle istanze del problema in oggetto.

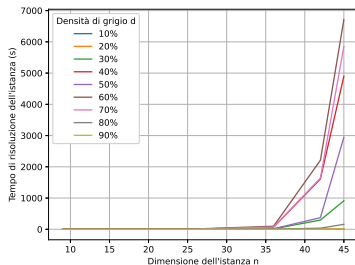
Tramite alcuni script *Python* ed il software risolutore *CPLEX* è stato possibile trovare le soluzioni ad alcune istanze del problema e ricavare i **tempi medi di risoluzione** riportati nella seguente tabella.

	9	16	25	36	42	45
10%	0.2	0.1	0.3	0.6	0.8	1.1
20%	0.1	0.1	0.3	0.9	5.0	13.0
30%	0.1	0.1	0.3	13.0	296.4	913.0
40%	0.1	0.2	1.6	66.9	1611.0	4896.7
50%	0.1	0.2	2.6	18.4	373.0	2942.4
60%	0.1	0.2	2.5	97.7	2209.5	6708.0
70%	0.1	0.1	0.7	70.8	1641.5	5853.2
80%	0.1	0.1	0.5	6.4	36.4	158.7
90%	0.1	0.1	0.3	0.8	1.3	5.7

I dati ottenuti dalle sperimentazioni sono stati utilizzati per tracciare i seguenti grafici. Essi rappresentano l'andamento dei tempi rispetto alla dimensione dell'istanza e alla densità di grigio.



(a) Grafico 3D



(b) Grafico 2D



Le soluzioni ottime delle istanze possono essere visualizzate come griglie "densità di grigio". Quelle qui riportate corrispondono alle soluzioni trovate per tre istanze differenti.

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24

(a)  $n=25$   $d=10\%$

0	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34
35	36	37	38	39	40	41
42	43	44	45	46	47	48

(b)  $n=49$   $d=30\%$

0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35

(c)  $n=36$   $d=70\%$

## Risultati

- L'andamento dei tempi medi di risoluzione rispetto alla dimensione dell'istanza è generalmente esponenziale. Al variare del valore di densità si notano differenze minori.
- Tramite la visualizzazione per griglie si può confermare la validità delle soluzioni rispetto al metodo di generazione.

## Possibili futuri sviluppi

- estensione del time limit imposto al risolutore CPLEX
- utilizzo di un calcolatore più potente per risolvere istanze di dimensioni maggiori
- ricerca di un modello più efficiente

Grazie per l'attenzione!



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA



DIPARTIMENTO  
DI INGEGNERIA  
DELL'INFORMAZIONE

# Esperimenti MIP per una classe di problemi di assegnamento quadratico

Laureando: Mattia Toffolon

Relatore: Prof. Domenico Salvagnin

*Padova, 18 luglio 2023*