



## NOTE DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Il presente documento è una raccolta di appunti accuratamente riorganizzati e arricchiti da un layout grafico migliorato, basato sul corso di Note di Algebra Lineare e Geometria tenuto dal docente Nome Docente per il Corso di Laurea in Informatica Un'introduzione concettuale dell'Università Federico II di Napoli.

Queste note sono una rielaborazione personale degli appunti del corso.

Si precisa che questo documento non è destinato a sostituire libri di testo, appunti del docente o lezioni frontaliali, pur essendo basato su tali fonti. Il suo scopo principale è offrire una risorsa unificata per lo studio dell'intero programma del corso, integrando il materiale più complesso con approfondimenti, esempi ed esercizi pensati per chiarire dubbi, colmare lacune e facilitare il superamento delle difficoltà riscontrate durante lo studio individuale.

Si ringrazia  **Valentino Bocchetti**, curatore dell'aspetto grafico di questo documento, per il prezioso contributo.

Un ringraziamento speciale va a tutti i revisori che hanno fornito consigli e proposte di modifica, migliorando ulteriormente la qualità del contenuto. Infine, si ringraziano i lettori per la loro attenzione e si invita chiunque riscontri errori o abbia suggerimenti a contattare gli autori, con l'augurio che questo lavoro possa essere di grande utilità per il loro percorso di studio.

*Redazione a cura di*  **Rielaborazione da Appunti**

*Revisione testo a cura di*

*Si ringraziano* per il materiale fornito

Documento aggiornato al **3 dicembre 2025** (Revisione documento **N/A**)

# INDICE

<b>0 IL PROBLEMA DI PARTENZA: SISTEMI LINEARI</b>	4
0.1 Equazioni e Sistemi	4
<b>1 IL METODO RISOLUTIVO: MATRICI E ALGORITMO DI GAUSS</b>	6
1.1 Il Linguaggio Compatto: Le Matrici	6
1.2 L'Algoritmo di Gauss sulle Matrici	6
1.3 Algoritmo di Gauss	8
<b>2 LA STRUTTURA ASTRATTA: SPAZI VETTORIALI</b>	11
2.1 Definizioni e Sottospazi	11
2.2 Come trattare Polinomi e Matrici come Vettori	11
2.2.1 Caso 1: Dai Polinomi ai Vettori	12
2.2.2 Caso 2: Dalle Matrici ai Vettori	12
<b>3 DESCRIVERE SPAZI VETTORIALI CON BASI E DIMENSIONE</b>	13
3.1 Generatori e Rappresentazioni Parametriche	13
3.2 Indipendenza Lineare	13
3.3 Basi e Dimensione	14
3.4 Rappresentazioni: Confronto tra Cartesiana e Parametrica	15
3.5 Coordinate: Il Ponte verso $\mathbb{K}^n$	16
<b>4 INTERAZIONE TRA SOTTOSPAZI</b>	18
4.1 Somma e Intersezione	18
4.2 La Formula di Grassmann e la Somma Diretta	20
<b>5 TRASFORMARE GLI SPAZI: APPLICAZIONI LINEARI</b>	22
5.1 Definizione e Proprietà	22
5.2 Nucleo e Immagine: L'Analisi di T	22
5.3 Lo Spazio delle Applicazioni Lineari	23
<b>6 OLTRE L'ORIGINE: SPAZI AFFINI</b>	25
6.1 Sottospazi Affini e Giacitura	25
6.2 Interazione fra Sottospazi Affini	26
<b>7 COSTRUIRE E INVERTIRE APPLICAZIONI LINEARI</b>	27
7.1 Il Teorema di Esistenza e Unicità	27
7.2 Esercizi di Esistenza: La Guida Pratica	27
7.3 Proiezioni	28
7.4 Inversa di un'Applicazione Lineare	28

# IL PROBLEMA DI PARTENZA: SISTEMI LINEARI

L'algebra lineare, nella sua essenza, nasce da un problema molto pratico: trovare un modo sistematico ed efficiente per risolvere insiemi di equazioni, specialmente quando le equazioni e le incognite diventano numerose.

0.1

## EQUAZIONI E SISTEMI



Iniziamo definendo il nostro oggetto di studio fondamentale.

**Definizione 0.1** (Sistema Lineare). Un **sistema lineare**  $m \times n$  (leggi: "m per n") è un insieme di  $m$  equazioni lineari in  $n$  incognite (o variabili)  $x_1, \dots, x_n$ . La sua forma canonica è:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dove i numeri  $a_{ij}$  sono i **coefficienti** e i  $b_i$  sono i **termini noti**.

**A cosa serve questa definizione?** Stabilisce il nostro campo di gioco. Qualsiasi problema lineare, dalla fisica all'economia, può essere modellato in questa forma.

### Esempio

1. **Sistema  $2 \times 2$ :** Due equazioni in due incognite.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

2. **Sistema  $2 \times 3$ :** Due equazioni in tre incognite.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

**La Forma della Soluzione: Vettori e n-uple** Quando risolviamo un sistema con  $n$  incognite, il risultato non è un numero singolo, ma una lista ordinata di  $n$  valori (uno per ogni variabile). In Algebra Lineare, chiamiamo questa lista **vettore** o **n-upla**.

Possiamo rappresentare la soluzione in due modi grafici equivalenti:

- **In orizzontale (n-upla):**  $v = (2, 4, -3, 1)$

- **In verticale (Vettore colonna):**  $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sebbene il significato sia lo stesso, nel contesto delle matrici e per scrivere l'insieme delle soluzioni  $V(S)$ , useremo quasi sempre la **notazione in colonna**.

**Definizione 0.2** (Soluzione e Compatibilità). Una **soluzione** del sistema è una  $n$ -upla di numeri  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  che, sostituiti alle incognite  $(x_1, \dots, x_n)$ , rendono vere *tutte* le equazioni simultaneamente. L'insieme di tutte le soluzioni si chiama  $V(S)$ .

- Se  $V(S) \neq \emptyset$  (esiste almeno una soluzione), il sistema è **compatibile**.
- Se  $V(S) = \emptyset$  (non esistono soluzioni), il sistema è **incompatibile**.

**A cosa serve?** Questa definizione classifica i sistemi in due categorie fondamentali: quelli che hanno una risposta (compatibili) e quelli che non ce l'hanno (incompatibili).

### Esempio

1. **Compatibile (Soluzione Unica):**  $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$

L'unica soluzione è  $V(S) = \{(5, 2)\}$ .

Vedremo più tardi che le soluzioni non saranno sempre così semplici da rappresentare.

**Definizione 0.3** (Sistema Omogeneo). Un sistema lineare si dice **omogeneo** se tutti i termini noti sono nulli ( $b_1 = \dots = b_m = 0$ ).

# IL METODO RISOLUTIVO: MATRICI E ALGORITMO DI GAUSS

Risolvere un sistema "a occhio" o per sostituzione diventa impossibile appena le dimensioni crescono. Abbiamo bisogno di un metodo sistematico. Per farlo, per prima cosa dobbiamo liberarci della notazione ingombrante ( $x, y, z, =, \dots$ ) e concentrarci solo sui numeri.

1.1

## IL LINGUAGGIO COMPATTO: LE MATRICI



Notiamo che in un sistema lineare, le incognite sono solo dei "segnaposto" ordinati. Ciò che determina la soluzione sono i coefficienti.

**Definizione 1.1** (Matrice Associata a un Sistema). Una **matrice** è una tabella rettangolare di numeri. Dato un sistema lineare, possiamo estrarre due matrici fondamentali:

- **Matrice Incompleta ( $A$ ):** Contiene solo i coefficienti delle incognite.
- **Matrice Completa o Aumentata ( $(A|b)$ ):** È la matrice  $A$  con l'aggiunta di una colonna finale separata (spesso da una linea verticale) che contiene i termini noti  $b$ .

**A cosa serve?** Un "sistema lineare"  $S$  è la sua matrice completa  $(A|b)$ . Lavorare sulla matrice è più pulito, più veloce e riduce gli errori di distrazione.

### Esempio

Dal Sistema alla Matrice:

$$S : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x + y = 5 \\ z = 2 \end{cases} \implies (A|b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Notare lo 0 inserito dove manca l'incognita (nella seconda e terza equazione).

1.2

## L'ALGORITMO DI GAUSS SULLE MATRICI



Ora che abbiamo la matrice, l'obiettivo è trovare le soluzioni. Questo processo si dividerà in 2 passi ben distinti:

- **Riduzione a Forma a Scala:** Usando operazioni sulle righe (mosse di riga), trasformiamo la matrice in una forma semplificata chiamata "forma a scala".
- **Sostituzione all'Indietro (Algoritmo di Gauss):** Una volta in forma a scala, riscriviamo il sistema e risolviamo partendo dall'ultima equazione verso la prima.

**Definizione 1.2** (Mosse di Riga). Le seguenti operazioni sulle righe della matrice producono una matrice **equivalente** (corrispondente a un sistema con le stesse soluzioni):

- Scambio** ( $R_{i \leftrightarrow j}$ ): Scambiare la riga  $i$  con la riga  $j$ .
- Moltiplicazione** ( $R_i \leftarrow \lambda R_i$ ): Moltiplicare tutti gli elementi della riga  $i$  per uno scalare  $\lambda \neq 0$ .
- Combinazione** ( $R_i \leftarrow R_i + \lambda R_j$ ): Sostituire la riga  $i$  con la somma di se stessa e un multiplo della riga  $j$ .

L'obiettivo di queste mosse è raggiungere la **Forma a Scala**.

**Definizione 1.3** (Forma a Scala e Pivot). Una matrice è detta **a scala** se soddisfa una precisa condizione visiva basata sulle colonne:

- Il primo numero non nullo di ogni riga è chiamato **Pivot**.
- Ogni Pivot deve trovarsi rigorosamente **più a destra** del Pivot della riga precedente.
- Sotto ogni Pivot, tutti gli elementi della colonna devono essere **zero**.

**Interpretazione Pratica: La Regola delle Colonne** Guardando la matrice per colonne da sinistra a destra:

- Appena troviamo un Pivot in una colonna, quella colonna è "conquistata" da quella riga.
- Nessun'altra riga successiva può iniziare in quella colonna.
- La matrice deve assumere una forma a "triangolo di zeri" nell'angolo in basso a sinistra.

### Esempio

**Esempio di Riduzione  $4 \times 4$ :** Consideriamo la matrice completa associata a un sistema di 4 equazioni in 4 incognite:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 6 \end{array} \right)$$

#### Passo 1: Sistemare la Colonna 1

- Analisi:** Il pivot è l'1 in alto a sinistra ( $a_{11}$ ). Sotto di esso abbiamo un 2, uno 0 e un 1. Lo 0 va bene, ma il 2 e l'1 vanno eliminati.
- Azione:**
  - $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$  (per eliminare il 2)
  - $R_4 \leftarrow R_4 - R_1$  (per eliminare l'1)

$$\left( \begin{array}{cccc|c} \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

#### Passo 2: Sistemare la Colonna 2

- Analisi:** Ora ignoriamo la prima riga. Il nuovo "capo" è il pivot nella riga 2, colonna 2 (valore 1). Sotto di esso c'è un 2 e un 1. Dobbiamo fare pulizia.
- Azione:**
  - $R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2$
  - $R_4 \leftarrow R_4 - R_2$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

#### Passo 3: Sistemare la Colonna 3

- Analisi:** Siamo alla riga 3. Il candidato pivot è  $-2$ . Sotto di esso c'è un  $-1$ .
- Trucco (Scambio):** Notiamo che  $-1$  è aritmeticamente più semplice di  $-2$ . Scambiamo le righe 3 e 4 per comodità ( $R_3 \leftrightarrow R_4$ ), portando il  $-1$  in posizione di pivot.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & \underline{-1} & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 8 \end{array} \right)$$

- Azione Finale:** Ora usiamo il pivot  $-1$  per eliminare il  $-2$  sotto di esso:  $R_4 \leftarrow R_4 - 2R_3$ .

$$\left( \begin{array}{cccc|c} \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & \underline{-1} & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{-2} & -2 \end{array} \right)$$

**Verifica Finale:** Ogni riga inizia con un pivot (sottolineato) che è più a destra del precedente. Sotto ogni pivot ci sono solo zeri. La matrice è a scala.

## Classificazione delle Variabili

- **Variabili Dipendenti (VD):** Sono le incognite che corrispondono alle colonne contenenti i pivot.
- **Variabili Libere (VL):** Sono le incognite che corrispondono alle colonne *senza* pivot. Queste diventeranno i nostri parametri.

1.3

# ALGORITMO DI GAUSS



Ora che il sistema lineare è scala non ci resta altro che applicare l'algoritmo di Gauss. La 1° cosa da fare è riportare la matrice in sistema lineare. E poi eseguire i seguenti passi:

- **Controllo Compatibilità:** Se notiamo una riga del tipo  $(0 \dots 0 | k)$  con  $k \neq 0$  (cioè un pivot cade nell'ultima colonna, quella dei termini noti), il sistema è **impossibile**. In tal caso  $V(S) = \emptyset$ .
- Partendo dal basso verso l'alto, portiamo tutti i termini NON pivot a destra dell'uguale.
- Sostituendo il termine di pivot all'equazioni che sono sopra la riga designata.
- Ripetere il processo fino ad arrivare alla 1° riga.

**Nota bene:** Il numero di variabili libere determina la "dimensione" della soluzione (0 = soluzione unica, 1 = retta di soluzioni, ecc.).

### Esempio

**Conclusione Esempio  $4 \times 4$ :** Riprendiamo la matrice ridotta a scala ottenuta nel passo precedente:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right)$$

- **Analisi Compatibilità:** L'ultimo pivot (-2) è sulla quarta colonna (coefficiente di  $x_4$ ), e *non* sulla colonna dei termini noti. Il sistema è **compatibile**.
- **Analisi Variabili:**
  - Ci sono pivot nelle colonne 1, 2, 3 e 4. Quindi  $VD = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ .
  - Non ci sono colonne senza pivot. Quindi  $VL = \emptyset$ .

Poiché il numero di variabili libere è 0, la soluzione esiste ed è **unica**.

**Sostituzione all'indietro:** Riscriviamo il sistema partendo dall'ultima equazione e risalendo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = -3 \\ -x_3 + 2x_4 = 5 \\ -2x_4 = -2 \end{cases}$$

Calcoliamo i valori dal basso verso l'alto:

1. Dalla 4<sup>a</sup> eq:  $-2x_4 = -2 \implies x_4 = 1$ .
2. Sostituisco in 3<sup>a</sup>:  $-x_3 + 2(1) = 5 \implies -x_3 = 3 \implies x_3 = -3$ .
3. Sostituisco in 2<sup>a</sup>:  $x_2 + 2(-3) - (1) = -3 \implies x_2 - 7 = -3 \implies x_2 = 4$ .
4. Sostituisco in 1<sup>a</sup>:  $x_1 + 4 + (-3) + 1 = 4 \implies x_1 + 2 = 4 \implies x_1 = 2$ .

5. Per scrivere la soluzione finale, partiamo col creare un vettore colonna con i valori trovati dall'alto verso il basso.

**Scrittura finale della soluzione:**

$$V(S) = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

### Esempio

**Esempio Completo da Zero ( $4 \times 5$ )**

Risolviamo il seguente sistema di 4 equazioni in 5 incognite ( $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ ):

$$(A|b) = \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

### Fase 1: Riduzione a Scala (Gauss)

- Colonna 1:** Pivot  $a_{11} = 1$ . Eliminiamo il 2 (riga 2) e il  $-1$  (riga 3).

$$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1, \quad R_3 \leftarrow R_3 + R_1$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} \frac{1}{2} & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

- Colonna 2:** La riga 2 ha uno 0. Non c'è nessun numero diverso da zero sotto di essa nella colonna 2. Passiamo oltre.
- Colonna 3:** La riga 2 ha uno 0, ma la riga 4 ha un 1. Scambiamo  $R_2 \leftrightarrow R_4$ .

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} \frac{1}{2} & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

(Notiamo che la vecchia riga 2 è finita in fondo, ed è già pronta come pivot per la colonna 4).

- Riordino:** Spostiamo la riga di zeri ( $R_3$ ) in fondo per pulizia visiva ( $R_3 \leftrightarrow R_4$ ).

$$S = \left( \begin{array}{ccccc|c} \frac{1}{2} & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

### Fase 2: Analisi delle Variabili e Parametrizzazione

Identifichiamo i pivot e le variabili:

- Pivot:** Colonne 1 ( $x_1$ ), 3 ( $x_3$ ) e 4 ( $x_4$ ). Queste sono le **Variabili Dipendenti**.
- No Pivot:** Colonne 2 ( $x_2$ ) e 5 ( $x_5$ ). Queste sono le **Variabili Libere**.

**Perché usiamo  $\alpha$  e  $\beta$ ?** Le variabili libere ( $x_2, x_5$ ) non sono vincolate dal sistema: possono assumere *qualsiasi* valore reale. Per evidenziare che questi valori sono una nostra libera scelta (e non un'incognita da scoprire), li rinominiamo con lettere greche (parametri):

$$x_2 = \alpha, \quad x_5 = \beta \quad (\text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

Questo rende la soluzione leggibile come una "ricetta" che dipende da due ingredienti a scelta.

**Fase 3: Sostituzione all'Indietro** Riscriviamo il sistema ridotto mantenendo ancora le incognite originali ( $x_2$  e  $x_5$  sono le nostre variabili libere):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2 \\ x_3 + x_4 = 4 \\ x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

Risolviamo dal basso verso l'alto per esplicitare le variabili dipendenti ( $x_4, x_3, x_1$ ) in funzione di quelle libere:

- Dalla terza eq:  $x_4 = 1 - x_5$
- Dalla seconda eq:  $x_3 = 4 - x_4 = 4 - (1 - x_5) = 3 + x_5$
- Dalla prima eq:  $x_1 = 2 - 2x_2 + x_3 - x_5 = 2 - 2x_2 + (3 + x_5) - x_5 = 5 - 2x_2$

**Riepilogo della Soluzione (Il Sistema Finale):** Ora sostituiamo le variabili libere con i parametri scelti ( $x_2 = \alpha, x_5 = \beta$ ) e scriviamo l'elenco completo delle 5 soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 = 5 - 2\alpha \\ x_2 = \alpha \quad (\text{Variabile Libera}) \\ x_3 = 3 + \beta \\ x_4 = 1 - \beta \\ x_5 = \beta \quad (\text{Variabile Libera}) \end{cases}$$

**Come costruire la soluzione vettoriale (Guida Pratica)** Per passare dal sistema qui sopra alla forma vettoriale, dobbiamo "smontare" la soluzione in tre colonne (vettori), leggendo le righe **dall'alto verso il basso** (da  $x_1$  a  $x_5$ ).

1. **Vettore dei Termini Noti (Soluzione Particolare):** Scorri le 5 righe e copia solo i numeri che **non** hanno lettere greche vicino. Se una riga contiene solo parametri (es.  $x_2 = \alpha$  o  $x_5 = \beta$ ), scrivi 0.
2. **Vettore di  $\alpha$  (Coeffienti del primo parametro):** Scorri le righe e copia il numero che moltiplica  $\alpha$ .
  - Se  $\alpha$  non c'è, scrivi 0.
  - **Attenzione alla riga 2 ( $x_2$ ):** Poiché abbiamo posto  $x_2 = \alpha$ , il coefficiente è **1** (perché è come scrivere  $1 \cdot \alpha$ ).
3. **Vettore di  $\beta$  (Coeffienti del secondo parametro):** Scorri le righe e copia il numero che moltiplica  $\beta$ .
  - Anche qui, attenzione alla riga 5 ( $x_5$ ): poiché  $x_5 = \beta$ , il coefficiente da inserire è **1**.

**Scrittura Finale:** Applicando la procedura dall'alto in basso ( $x_1 \rightarrow x_5$ ):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Termini Noti}} + \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Coeff. di } \alpha} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Coeff. di } \beta}$$

# LA STRUTTURA ASTRATTA: SPAZI VETTORIALI

2.1

## DEFINIZIONI E SOTTOSPAZI



**Definizione 2.1** (K-Spazio Vettoriale). Un **K-Spazio Vettoriale** (o spazio vettoriale sul campo  $\mathbb{K}$ ) è un insieme non vuoto  $V$  dotato di due operazioni:

1. **Somma Interna** (+):  $V \times V \rightarrow V$ ,  $(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$
2. **Prodotto per Scalare** ( $\cdot$ ):  $\mathbb{K} \times V \rightarrow V$ ,  $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$

Queste operazioni devono soddisfare 8 assiomi (associatività, commutatività, esistenza dell'elemento neutro  $O_V$ , esistenza dell'opposto, distributività, ecc.).

**A cosa serve?** In poche parole ci dice che qualsiasi altro "oggetto matematico" che rispetta quelle caratteristiche può essere ricondotto a vettore, vediamo quali "oggetti matematici" incontreremo

### Esempio

1. **Vettori**: Già noti
2.  **$M_{2,2}(\mathbb{R})$  (Matrici)**: L'insieme delle matrici  $2 \times 2$ .

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} \quad e \quad \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$$

3.  **$\mathbb{R}_{\leq 2}[T]$  (Polinomi)**: L'insieme dei polinomi di grado  $\leq 2$ ,  $P(T) = aT^2 + bT + c$ . La somma e il prodotto per scalare sono le usuali operazioni tra polinomi.

**Definizione 2.2** (Sottospazio Vettoriale). Un sottoinsieme non vuoto  $W \subseteq V$  è un **sottospazio vettoriale** se è esso stesso uno spazio vettoriale (usando le stesse operazioni di  $V$ ).

**Proposizione 2.3** (Test del Sottospazio).  $W \subseteq V$  (con  $W \neq \emptyset$ ) è un sottospazio se e solo se:

1.  $\forall w_1, w_2 \in W \implies w_1 + w_2 \in W$  (Chiuso per la somma).
2.  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall w \in W \implies \lambda w \in W$  (Chiuso per il prodotto scalare).

(Nota: queste due condizioni implicano che  $O_V \in W$ ).

2.2

## COME TRATTARE POLINOMI E MATRICI COME VETTORI



Finora abbiamo applicato l'Algoritmo di Gauss a vettori colonna standard (elementi di  $\mathbb{R}^n$ ). Ma l'Algebra Lineare si applica anche a oggetti più complessi, come polinomi o intere matrici. Possiamo "tradurre" qualsiasi spazio vettoriale di dimensione finita in vettori colonna tramite il concetto di **Coordinate**.

## 2.2.1 Caso 1: Dai Polinomi ai Vettori

Un polinomio è definito dai suoi coefficienti. La variabile  $t$  (o  $x$ ) è solo un segnaposto per indicare la posizione. Per trasformare un polinomio in un vettore, fissiamo un ordine delle potenze (solitamente crescente:  $1, t, t^2, \dots$ ) ed estraiamo i coefficienti.

$$P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n \quad \longleftrightarrow \quad v_P = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

### Esempio

**Traduzione di Polinomi** Siamo nello spazio dei polinomi di grado  $\leq 2$ .

- $P_1(t) = 3 - 5t + t^2 \implies v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $P_2(t) = t^2 - 4 \implies v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  (Attenzione al termine  $t$  mancante!)
- $P_3(t) = 2t \implies v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ora possiamo mettere  $v_1, v_2, v_3$  in una matrice e usare Gauss per vedere se sono indipendenti!

## 2.2.2 Caso 2: Dalle Matrici ai Vettori

Anche le matrici possono essere "srotolate" (o appiattite) per diventare un unico lungo vettore. L'importante è decidere un ordine di lettura e mantenerlo costante per tutti gli oggetti del problema. Il metodo standard è leggere la matrice elemento per elemento (riga per riga o colonna per colonna). Dato uno spazio di matrici  $2 \times 2$ :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \longleftrightarrow \quad v_A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

### Esempio

**Traduzione di Matrici** Vogliamo studiare la dipendenza di queste due matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Le trasformiamo in vettori di lunghezza 4:

$$v_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ora il problema è ridotto a lavorare con vettori colonna standard.

**Regola d'Oro:** Quando traduci, fai attenzione agli "zeri nascosti". Se in un polinomio manca una potenza o in una matrice un posto è vuoto, nel vettore corrispondente **devi inserire uno 0**. La posizione nel vettore è sacra: il primo numero deve sempre rappresentare la stessa cosa (es. il termine noto o l'elemento  $a_{11}$ ) per tutti i vettori del sistema.

# DESCRIVERE SPAZI VETTORIALI CON BASI E DIMENSIONE

Un sottospazio  $W$  (come un piano) contiene infiniti vettori. Come possiamo descriverlo in modo finito ed efficiente? Dobbiamo trovare un insieme finito di "mattoni" (generatori) con cui costruire l'intero spazio.

3.1

## GENERATORI E RAPPRESENTAZIONI PARAMETRICHE



**Definizione 3.1** (Combinazione Lineare e Span). Dato un insieme di vettori  $U = \{v_1, \dots, v_s\}$  in  $V$ .

- Una **combinazione lineare** è un qualsiasi vettore  $v$  della forma:

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_s v_s, \quad \text{con } \alpha_i \in \mathbb{K}$$

- Lo **Span** di  $U$ ,  $\text{Span}(U)$ , è l'insieme di *tutte* le possibili combinazioni lineari di  $U$ .

Lo  $\text{Span}(U)$  è il più piccolo sottospazio vettoriale di  $V$  che contiene  $U$ .  $U$  è un **insieme di generatori** per  $\text{Span}(U)$ .

**A cosa serve?** Lo  $\text{Span}$  ci fornisce un modo *costruttivo* per descrivere un sottospazio. Dire  $W = \text{Span}\{v_1, v_2\}$  (un piano in  $\mathbb{R}^3$ ) è molto più compatto che elencare tutti i suoi infiniti punti. Questa è una **presentazione parametrica**.

3.2

## INDIPENDENZA LINEARE



A volte potrebbe capitare che in qualche esercizio ci vengano dati dei vettori ma non "tutti sono necessari" per generare lo spazio. Alcuni potrebbero essere "ridondanti", cioè ottenibili come combinazione lineare (somma o prodotto) degli altri.

**Definizione 3.2** (Indipendenza Lineare). Un insieme di vettori  $U = \{v_1, \dots, v_s\}$  si dice **linearmente indipendente** se nessun vettore è combinazione lineare degli altri. Formalmente (e operativamente): l'unica soluzione dell'equazione omogenea

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_s v_s = O_V$$

è la soluzione **banale**  $\alpha_1 = \cdots = \alpha_s = 0$ . Se esistono soluzioni non banali (almeno un  $\alpha_i \neq 0$ ), sono **linearmente dipendenti**.

**A cosa serve?** L'indipendenza lineare ci dice se i nostri generatori sono **efficienti**. Un insieme indipendente è un insieme di generatori "minimo", senza ridondanze. Ogni vettore aggiunge una "nuova direzione".

### Esempio

1. **Indipendenti (Vettori canonici):** In  $\mathbb{R}^2$ ,  $v_1 = (1, 0)$ ,  $v_2 = (0, 1)$ . L'equazione  $\alpha_1(1, 0) + \alpha_2(0, 1) = (0, 0)$  diventa  $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0)$ , che implica  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 0$ . Sono indipendenti.
2. **Dipendenti (Collineari):** In  $\mathbb{R}^2$ ,  $v_1 = (1, 1)$ ,  $v_2 = (2, 2)$ . Sono dipendenti perché  $v_2 = 2v_1$ . L'equazione  $\alpha_1(1, 1) + \alpha_2(2, 2) = (0, 0)$  ha la soluzione non banale  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = -1$ .
3. **Dipendenti (Tre vettori in  $\mathbb{R}^2$ ):** In  $\mathbb{R}^2$ ,  $\{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ . Sono dipendenti perché  $(1, 1) = 1 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (0, 1)$ . L'equazione  $1(1, 0) + 1(0, 1) - 1(1, 1) = (0, 0)$  ha  $\alpha_i$  non nulli.

- Insieme contenente  $O_V$ :** Qualsiasi insieme che contiene il vettore nullo,  $\{v_1, \dots, v_s, O_V\}$ , è *sempre* linearmente dipendente. Basta prendere  $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_s = 0$  e  $\alpha_{s+1} = 1$  (non nullo):  $0v_1 + \dots + 0v_s + 1 \cdot O_V = O_V$ .
- Polinomi Indipendenti:** In  $\mathbb{R}_{\leq 2}[T]$ ,  $\{1, T, T^2\}$ . L'equazione  $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 T + \alpha_3 T^2 = 0$  (il polinomio nullo) è vera se e solo se  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . Sono indipendenti.

3.3

## BASI E DIMENSIONE



Vogliamo una descrizione dello spazio  $V$  che sia sia completa (generatori) sia efficiente (indipendente).

**Definizione 3.3** (Base). Una **Base**  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  di uno spazio vettoriale  $V$  è un insieme di vettori che soddisfa due condizioni:

1.  $\text{Span}(\mathcal{B}) = V$  (Sono generatori di tutto lo spazio).
2.  $\mathcal{B}$  è linearmente indipendente (Non sono ridondanti).

**A cosa serve?** Una base è il "vocabolario" minimo e completo per descrivere ogni vettore. È l'ossatura, il "sistema di riferimento" dello spazio vettoriale.

**Definizione 3.4** (Le Basi Canoniche). Per gli spazi vettoriali più comuni, esiste una scelta "standard" di vettori di base, chiamata **Base Canonica**. Quando non viene specificata un'altra base, usiamo sempre questa per calcolare le coordinate.

- **Vettori Colonna ( $\mathbb{R}^n$ )**: La base è  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ , dove  $e_i$  ha 1 nella posizione  $i$ -esima e 0 altrove.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \dots$$

**Dimensione:**  $n$ .

- **Polinomi ( $\mathbb{R}_{\leq d}[t]$ )**: La base è formata dalle potenze crescenti della variabile:

$$\mathcal{B} = \{1, t, t^2, \dots, t^d\}$$

**Dimensione:**  $d + 1$  (attenzione: contiamo anche il termine noto  $1 = t^0$ ).

- **Matrici ( $M_{m,n}$ )**: La base è formata dalle matrici  $E_{ij}$  che hanno un 1 solo nella posizione  $(i, j)$ . Esempio  $2 \times 2$ :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Dimensione:**  $m \times n$ .

**Teorema 3.5** (Invarianza della Dimensione). Sebbene uno spazio  $V$  possa avere infinite basi diverse, **tutte** le basi di  $V$  hanno lo stesso numero di elementi.

**A cosa serve?** Questo teorema è profondo. Ci dice che il "numero di vettori" in una base non è una coincidenza, ma una proprietà intrinseca dello spazio.

**Definizione 3.6** (Dimensione). Questo numero unico è la proprietà più importante dello spazio. Si chiama **Dimensione** di  $V$ ,  $\dim(V)$ .

**A cosa serve?** La dimensione è il "numero di coordinate" necessarie per descrivere un punto nello spazio. È il numero di "gradi di libertà".

### Esempio

1.  $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$  (dalla base canonica  $\mathcal{E}_3$ ).
2.  $\dim(\mathbb{R}_{\leq 2}[T]) = 3$  (dalla base  $\{1, T, T^2\}$ ).
3.  $\dim(M_{2,2}(\mathbb{R})) = 4$  (dalla base nell'esempio precedente).
4.  $\dim(W) = 2$ , dove  $W$  è il piano  $x + y + z = 0$  (dalla sua base  $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ ).
5.  $\dim(\{O_V\}) = 0$  (Lo spazio nullo ha come base l'insieme vuoto  $\emptyset$ ).



Ora possiamo collegare la dimensione ai nostri due modi di descrivere i sottospazi.

- **Presentazione Cartesiana:**  $W = V(S) \subset \mathbb{K}^n$ . La dimensione  $W$  è legata al numero di equazioni *indipendenti* che lo definiscono.  $\dim(W) = n - \text{rk}(A)$ .
- **Presentazione Parametrica:**  $W = \text{Span}(U) \subset V$ . La dimensione  $W$  è il numero di generatori in una base  $\mathcal{B} \subseteq U$ .  $\dim(W) = |\mathcal{B}|$ .

## Da Cartesiana ( $V(S)$ ) a Parametrica (Span)

Questo è l'esercizio più semplice: **significa risolvere il sistema omogeneo  $S$**  trovando i generatori delle soluzioni. Sia  $W = V(S) \subset \mathbb{R}^4$  definito dal sistema:

$$S : \begin{cases} x + y - 2z + t = 0 \\ x + 2z + t = 0 \end{cases}$$

**Svolgimento:**

1. **Riduzione a Scala:** Scriviamo la matrice e usiamo Gauss.

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \left( \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

2. **Analisi del Sistema Ridotto:** Osserviamo i pivot (sottolineati) nella matrice ridotta.

- **Variabili Dipendenti (VD):** Colonne 1 e 2  $\implies \{x, y\}$ .
- **Variabili Libere (VL):** Colonne 3 e 4  $\implies \{z, t\}$ .

La dimensione sarà 2 (due parametri liberi).

3. **Scrittura del Sistema Ridotto e Parametrizzazione:** Riscriviamo il sistema associato alla matrice a scala, assegnando parametri alle variabili libere ( $z = \alpha, t = \beta$ ):

$$\begin{cases} x + y - 2\alpha + \beta = 0 \\ -y + 4\alpha = 0 \end{cases}$$

4. **Sostituzione all'Indietro:** Ricaviamo le variabili dipendenti in funzione dei parametri.

- Dalla seconda eq:  $y = 4\alpha$
- Dalla prima eq:  $x = -y + 2\alpha - \beta = -(4\alpha) + 2\alpha - \beta = -2\alpha - \beta$

5. **Forma Vettoriale e Span:** Scriviamo il vettore generico e separiamo i parametri:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha - \beta \\ 4\alpha \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$W = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

## Da Parametrica (Span) a Cartesiana ( $V(S)$ )

Questo è più complesso: dobbiamo **trovare le equazioni** che hanno come soluzioni i nostri generatori. Sia  $W = \text{Span} \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4$ . Un vettore  $\mathbf{x}$  appartiene a  $W$  se soddisfa certe equazioni lineari  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$ .

Il nostro obiettivo è trovare i coefficienti  $(a, b, c, d)$  tali che l'equazione valga per *tutti* i generatori. **Svolgimento:**

1. **Impostazione del Sistema "Duale":** Sostituiamo le coordinate dei generatori nell'equazione generica. Le incognite ora sono i coefficienti  $a, b, c, d$ .

- Per  $\mathbf{v}_1$ :  $a(1) + b(1) + c(-1) + d(0) = 0$
- Per  $\mathbf{v}_2$ :  $a(2) + b(0) + c(-1) + d(2) = 0$

2. **Riduzione a Scala (sui coefficienti):** Risolviamo il sistema omogeneo nelle incognite  $(a, b, c, d)$ .

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \left( \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

3. **Analisi del Sistema Ridotto:**

- **Variabili Dipendenti (VD):** Colonne 1 e 2  $\implies \{a, b\}$ .
- **Variabili Libere (VL):** Colonne 3 e 4  $\implies \{c, d\}$ .

Dato che ci sono 2 variabili libere, troveremo 2 soluzioni indipendenti per  $(a, b, c, d)$ , e quindi **2 equazioni cartesiane**.

4. **Parametrizzazione e Soluzione:** Assegniamo i parametri liberi:  $c = \alpha, d = \beta$ . Il sistema ridotto è:

$$\begin{cases} a + b - \alpha = 0 \\ -2b + \alpha + 2\beta = 0 \end{cases}$$

Ricaviamo  $b$  e  $a$ :

- $2b = \alpha + 2\beta \implies b = \frac{1}{2}\alpha + \beta$
- $a = -b + \alpha = -(\frac{1}{2}\alpha + \beta) + \alpha = \frac{1}{2}\alpha - \beta$

5. **Estrazione delle Equazioni:** Il "vettore dei coefficienti" è  $(a, b, c, d) = (\frac{1}{2}\alpha - \beta, \frac{1}{2}\alpha + \beta, \alpha, \beta)$ . Troviamo le due equazioni scegliendo valori comodi per  $\alpha$  e  $\beta$ :

- **Eq. 1 (poniamo  $\alpha = 2, \beta = 0$ ):**  $a = 1, b = 1, c = 2, d = 0 \implies 1x + 1y + 2z + 0t = 0$ .
- **Eq. 2 (poniamo  $\alpha = 0, \beta = 1$ ):**  $a = -1, b = 1, c = 0, d = 1 \implies -1x + 1y + 0z + 1t = 0$ .

6. **Conclusione:** Il sistema che definisce  $W$  è:

$$S : \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -x + y + t = 0 \end{cases}$$

3.5

## COORDINATE: IL PONTE VERSO $\mathbb{K}^n$



**Definizione 3.7** (Coordinate). Data una base *ordinata*  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ , ogni vettore  $v \in V$  si può scrivere in modo **unico** come combinazione lineare dei vettori della base:

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

Il vettore colonna  $\varphi_{\mathcal{B}}(v) = v_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$  è il **vettore delle coordinate** di  $v$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$ .

**A cosa serve?** Le coordinate sono un ponte tra il mondo astratto (Polinomi, Matrici, ecc.) e il mondo concreto dei vettori colonna  $\mathbb{K}^n$ . La mappa  $\varphi_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{K}^n$  è un "traduttore" che ci permette di usare gli algoritmi di Gauss (sviluppati per  $\mathbb{K}^n$ ) su spazi astratti.

### Calcolo delle Coordinate

Sia  $V = \mathbb{R}^2$  con la base  $\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ . Trovare le coordinate del vettore  $v = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$  rispetto a  $\mathcal{B}$ . **Svolgimento:** Dobbiamo trovare  $\alpha_1, \alpha_2$  tali che  $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ .

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Questo è un sistema lineare nelle incognite  $\alpha_1, \alpha_2$ :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 5 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

Risolvendo (es. sommando le righe  $2\alpha_1 = 6 \implies \alpha_1 = 3$ ), troviamo  $\alpha_1 = 3$  e  $\alpha_2 = 2$ . Quindi, il vettore delle coordinate è  $v_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

## Esempio

1. **Coordinate in  $\mathbb{R}^n$  (Base Canonica):**  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{E}_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ .  $v = (5, 2)$ .  $v = 5e_1 + 2e_2 \implies v_{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ . (Le coordinate rispetto alla base canonica sono il vettore stesso).
2. **Coordinate in  $\mathbb{R}^n$  (Altra Base):** (Vedi Esercizio Prototipo sopra).  $v = (5, 1)$ ,  $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, -1)\}$ .  $v_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .
3. **Coordinate di Polinomi (Base Canonica):**  $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[T]$ ,  $\mathcal{B} = \{1, T, T^2\}$ .  $P(T) = 3T^2 - 2T + 5$ .  $P(T) = 5 \cdot (1) + (-2) \cdot (T) + 3 \cdot (T^2) \implies P_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .
4. **Coordinate di Polinomi (Altra Base):**  $V = \mathbb{R}_{\leq 1}[T]$ ,  $\mathcal{B} = \{T + 1, T - 1\}$ .  $P(T) = 2T + 4$ . Dobbiamo risolvere  $2T + 4 = \alpha_1(T + 1) + \alpha_2(T - 1) = (\alpha_1 + \alpha_2)T + (\alpha_1 - \alpha_2)$ .  $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 4 \end{cases} \implies \alpha_1 = 3, \alpha_2 = -1$ .  $P_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ .
5. **Coordinate di Matrici (Base Canonica):**  $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$ .  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . Usando la base  $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ , le coordinate sono  $A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

# INTERAZIONE TRA SOTTOSPAZI

Una volta definiti i sottospazi  $W$  e  $W'$  all'interno di uno spazio vettoriale  $V$ , è naturale chiedersi come questi interagiscano. Ci sono due operazioni fondamentali che li collegano: la somma (che unisce i vettori) e l'intersezione (che trova i vettori comuni).

4.1

## SOMMA E INTERSEZIONE



**Definizione 4.1** (Somma di Sottospazi). Dati due sottospazi  $W$  e  $W'$  di  $V$ , la loro **somma**  $W + W'$  è l'insieme (che è anch'esso un sottospazio) formato dalla somma di ogni vettore di  $W$  con ogni vettore di  $W'$ .

$$W + W' = \{w + w' \mid w \in W, w' \in W'\}$$

. Se  $W = \text{Span}(U)$  e  $W' = \text{Span}(U')$ , allora  $W + W' = \text{Span}(U \cup U')$ . Per trovare la base, si mettono tutti i generatori di  $U$  e  $U'$  in una matrice e si estraggono le colonne L.I. (colonne pivot).

### Esempio

1. **Somma di vettori indipendenti:** Siano dati i sottospazi di  $\mathbb{R}^3$ :

$$W = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W' = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

La loro somma è generata dall'unione dei generatori:

$$W + W' = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

2. **Somma che genera l'intero spazio:** Siano dati:

$$W = \text{Span}\{e_1, e_2\}, \quad W' = \text{Span}\{e_3\}$$

Unendo i generatori otteniamo la base canonica completa:

$$W + W' = \text{Span}\{e_1, e_2, e_3\} = \mathbb{R}^3$$

3. **Somma con generatori ridondanti (Caso di Inclusione):** Siano dati:

$$W = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad W' = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Notiamo che il generatore di  $W'$  è già combinazione lineare di quelli di  $W$  (è la somma  $e_1 + e_2$ ). Essendo  $W' \subset W$ :

$$W + W' = W$$

4. **Somma con vettori in comune (Sovrapposizione):** Siano dati:

$$W = \text{Span}\{e_1, e_2\}, \quad W' = \text{Span}\{e_2, e_3\}$$

L'unione dei generatori è  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . Eliminando il doppione  $e_2$ :

$$W + W' = \text{Span}\{e_1, e_2, e_3\} = \mathbb{R}^3$$

**5. Somma con il Sottospazio Nullo:** Per qualsiasi sottospazio  $W$ :

$$W + \{O_V\} = W$$

**Definizione 4.2** (Intersezione di Sottospazi). Dati due sottospazi  $W$  e  $W'$  di  $V$ , la loro **intersezione**  $W \cap W'$  è l'insieme (anch'esso un sottospazio) di tutti i vettori che appartengono sia a  $W$  che a  $W'$ :

$$W \cap W' = \{v \in V \mid v \in W \text{ e } v \in W'\}$$

. Dati  $W = V(S)$  e  $W' = V(S')$ , allora l'intersezione è il sistema ottenuto unendo tutte le equazioni:  $W \cap W' = V(S \cup S')$ . Per trovare la base, si risolve il sistema combinato

### Esempio

**1. Intersezione di sottospazi definiti da equazioni (Cartesiana):** Siano dati in  $\mathbb{R}^3$ :

$$W = \{(x, y, z) \mid z = 0\}, \quad W' = \{(x, y, z) \mid x = 0\}$$

L'intersezione deve soddisfare entrambe le condizioni simultaneamente. Mettiamo le equazioni a sistema:

$$W \cap W' : \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

La variabile  $y$  è libera. Il risultato è:

$$W \cap W' = \{(0, t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

**2. Intersezione con solo il vettore nullo (Somma Diretta):** Siano dati in  $\mathbb{R}^2$ :

$$W = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W' = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Un vettore appartiene all'intersezione se è multiplo sia del primo che del secondo generatore. L'unica possibilità è che i coefficienti siano zero.

$$W \cap W' = \{(0, 0)\} = \{O_V\}$$

**3. Intersezione tra Cartesiana e Parametrica:** Siano dati in  $\mathbb{R}^3$ :

$$W = \{(x, y, z) \mid z = 0\}, \quad W' = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

I vettori di  $W'$  sono del tipo  $(0, 0, k)$ . Per stare in  $W$ , la terza componente ( $z$ ) deve essere 0. Quindi  $k = 0$ .

$$W \cap W' = \{(0, 0, 0)\}$$

**4. Intersezione nel caso di Inclusione ( $W' \subset W$ ):** Siano dati in  $\mathbb{R}^3$ :

$$W = \{(x, y, z) \mid z = 0\}, \quad W' = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Notiamo che il generatore di  $W'$ ,  $(1, 0, 0)$ , soddisfa l'equazione di  $W$  ( $z = 0$ ). Quindi tutto  $W'$  è contenuto in  $W$ .

$$W \cap W' = W'$$

**5. Intersezione tra Sottospazi di Polinomi:** In  $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[T]$ , siano dati:

$$W = \text{Span}\{1, T\}, \quad W' = \text{Span}\{T, T^2\}$$

Cerchiamo i vettori comuni. Un polinomio in  $W$  ha la forma  $a + bT$ . Un polinomio in  $W'$  ha la forma  $cT + dT^2$ . Uguagliandoli:  $a + bT = cT + dT^2$ . Per il principio di identità dei polinomi:  $d = 0$  (manca  $T^2$  a sinistra) e  $a = 0$  (manca il termine noto a destra). Resta solo il termine di primo grado.

$$W \cap W' = \text{Span}\{T\}$$



Il Teorema di Grassmann stabilisce una relazione fondamentale tra le dimensioni della somma e dell'intersezione, permettendoci di calcolare una dimensione se conosciamo le altre.

**Definizione 4.3** (Formula di Grassmann). Dati due sottospazi  $W$  e  $W'$  di uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione finita:

$$\dim(W + W') = \dim(W) + \dim(W') - \dim(W \cap W')$$

**A cosa serve?** È una "legge di conservazione" per le dimensioni. Ci dice che se due sottospazi si sovrappongono molto (grande  $\dim(W \cap W')$ ), la loro somma sarà più piccola del previsto. Se si sovrappongono poco, la loro somma sarà grande.

**Definizione 4.4** (Somma Diretta). Due sottospazi  $W$  e  $W'$  si dicono in **Somma Diretta** se la loro intersezione è il solo vettore nullo:

$$W \cap W' = \{O_V\}$$

In questo caso, la loro somma si indica con  $W \oplus W'$ .

**Proposizione 4.5** (Proprietà della Somma Diretta). Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1.  $W$  e  $W'$  sono in somma diretta ( $W \cap W' = \{O_V\}$ ).
2. (Dalla Formula di Grassmann)  $\dim(W \oplus W') = \dim(W) + \dim(W')$ .
3. L'unione di una base di  $W$  e una base di  $W'$  è una base per  $W + W'$ .
4. Ogni vettore  $v \in W + W'$  si scrive in modo **unico** come  $v = w + w'$ .

### Esempio

1. **Verifica di Somma Diretta** ( $W \cap W' = \{O_V\}$ ): In  $\mathbb{R}^2$ , siano dati:

$$W = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad W' = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

L'intersezione contiene i vettori che sono multipli sia di  $(1, 0)$  che di  $(0, 1)$ . L'unico vettore possibile è  $(0, 0)$ .

$$\dim(W) = 1, \quad \dim(W') = 1, \quad \dim(W \cap W') = 0$$

Per Grassmann:  $\dim(W + W') = 1 + 1 - 0 = 2$ . Poiché l'intersezione è nulla, scriviamo  $W \oplus W'$ .

2. **Verifica di Somma NON Diretta (Intersezione non nulla):** In  $\mathbb{R}^3$ , siano dati:

$$W = \text{Span}\{e_1, e_2\}, \quad W' = \text{Span}\{e_2, e_3\}$$

Notiamo subito che il vettore  $e_2$  appartiene a entrambi i sottospazi. Quindi  $W \cap W' = \text{Span}\{e_2\} \neq \{O_V\}$ .

$$\dim(W) = 2, \quad \dim(W') = 2, \quad \dim(W \cap W') = 1$$

Per Grassmann:  $\dim(W + W') = 2 + 2 - 1 = 3$ . La somma riempie  $\mathbb{R}^3$ , ma non è diretta.

3. **Sottospazi Supplementari:** Due sottospazi  $W, W'$  si dicono **supplementari** in  $V$  se soddisfano due condizioni contemporaneamente: 1. Sono in somma diretta ( $W \cap W' = \{O_V\}$ ). 2. La loro somma genera tutto lo spazio ( $W + W' = V$ ).

4. **Conseguenza: Unicità della scomposizione:** Nell'esempio 1 ( $W \oplus W'$ ), prendiamo il vettore  $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Esiste un **unico** modo per scriverlo come somma  $w + w'$ :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in W} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\in W'}$$

Non esistono altre combinazioni.

5. **Conseguenza: Non unicità della scomposizione:** Nell'esempio 2 (non somma diretta), prendiamo  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

Possiamo scriverlo in modi diversi spostando il "pezzo comune" ( $e_2$ ) da una parte all'altra:

- Modo A:  $v = \underbrace{(e_1 + 2e_2)}_{\in W} + \underbrace{(3e_3)}_{\in W'}$
- Modo B:  $v = \underbrace{(e_1)}_{\in W} + \underbrace{(2e_2 + 3e_3)}_{\in W'}$

Entrambe le scritture sono valide. La mancanza di somma diretta fa perdere l'unicità.

Fare una 2° revisione prima di andare avanti

# TRASFORMARE GLI SPAZI: APPLICAZIONI LINEARI

Ora che capiamo gli spazi (tramite le basi) e il linguaggio concreto (le coordinate in  $\mathbb{K}^n$ ), definiamo le "funzioni" che ci permettono di passare da uno spazio all'altro in modo strutturato.

## 5.1

## DEFINIZIONE E PROPRIETÀ



**Definizione 5.1** (Applicazione Lineare). Un'applicazione (una funzione)  $T : V \rightarrow W$  tra due K-spazi vettoriali  $V$  e  $W$  è **lineare** se conserva le operazioni:

1. **Additività (Conserva la somma):**  $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$
2. **Omogeneità (Conserva il prodotto scalare):**  $T(\lambda v) = \lambda T(v)$

per ogni  $v, v_1, v_2 \in V$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

**A cosa serve?** Queste sono le uniche funzioni che "rispettano" la struttura di spazio vettoriale. Geometricamente, trasformano linee in linee (o punti) e, soprattutto, mantengono l'origine.

**Osservazione 5.2.** Una condizione necessaria per la linearità (che deriva dall'omogeneità ponendo  $\lambda = 0$ ) è che l'origine sia mappata nell'origine:

$$T(O_V) = O_W$$

Se  $T(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$ , l'applicazione non può essere lineare.

### Esempio

1. **Lineare (Moltiplicazione per Matrice):**  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$ . Questa è l'applicazione lineare prototipo.  $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .
2. **Lineare (La Derivata):**  $D : \mathbb{R}_{\leq 3}[T] \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[T]$ ,  $D(P(T)) = P'(T)$ .  $D(P + Q) = (P + Q)' = P' + Q' = D(P) + D(Q)$ .  $D(\lambda P) = (\lambda P)' = \lambda P' = \lambda D(P)$ . La derivata è lineare.
3. **Lineare (La Mappa delle Coordinate):**  $T = \varphi_B : V \rightarrow \mathbb{K}^n$  (definita nel capitolo precedente). È lineare, come dimostrato negli appunti.
4. **NON Lineare (Termine costante):**  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $T(x) = x + 1$ . Fallisce il test dell'origine:  $T(0) = 1 \neq 0$ .
5. **NON Lineare (Termine quadratico):**  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $T(x) = x^2$ . Supera il test dell'origine:  $T(0) = 0$ . Ma fallisce l'additività:  $T(1 + 1) = T(2) = 4$ .  $T(1) + T(1) = 1^2 + 1^2 = 2$ .  $4 \neq 2$ .

## 5.2

## NUCLEO E IMMAGINE: L'ANALISI DI T



Per capire come "funziona" un'applicazione lineare  $T : V \rightarrow W$ , dobbiamo farci due domande fondamentali:

1. **Cosa viene annullato?** Quali vettori di  $V$  vengono "schiacciati" sull'origine  $O_W$ ?
2. **Cosa viene prodotto?** Qual è l'insieme dei vettori in  $W$  che vengono effettivamente "raggiunti" da  $T$ ?

La risposta a queste domande sono il Nucleo e l'Immagine.

**Definizione 5.3** (Nucleo (Kernel)). Il **Nucleo** di  $T$  (scritto  $\text{Ker}(T)$ ) è l'insieme dei vettori del dominio  $V$  che vengono mappati nel vettore nullo del codominio  $W$ :

$$\text{Ker}(T) = \{v \in V \mid T(v) = O_W\}$$

È un sottospazio vettoriale di  $V$ .

**A cosa serve?** Il Nucleo misura la **perdita di informazione** della trasformazione. Se  $\text{Ker}(T) = \{O_V\}$  (contiene solo lo zero), l'applicazione è **iniettiva** (vettori diversi vanno in posti diversi). Se  $\text{Ker}(T)$  è grande,  $T$  "collassa" molti vettori in un unico punto.

### Esempio

- Nucleo della Derivata:**  $D : \mathbb{R}_{\leq 2}[T] \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[T]$ .  $\text{Ker}(D) = \{P \mid P'(T) = 0\}$ . Questi sono i polinomi la cui derivata è nulla: le costanti.  $\text{Ker}(D) = \{a \mid a \in \mathbb{R}\} = \text{Span}\{1\}$ .
- Nucleo della Proiezione:**  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(x, y, z) = (x, y, 0)$ . (Proiezione sul piano  $xy$ ).  $\text{Ker}(T) = \{(x, y, z) \mid (x, y, 0) = (0, 0, 0)\}$ . Questo richiede  $x = 0, y = 0$ .  $z$  è libero.  $\text{Ker}(T) = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \text{Span}\{e_3\}$ . (L'asse  $z$ ).
- Nucleo Iniettivo (Rotazione):**  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , rotazione di 90 gradi. L'unico vettore che viene mandato in  $(0, 0)$  è  $(0, 0)$  stesso.  $\text{Ker}(T) = \{0\}$ .
- Nucleo di una Mappa**  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ :  $T(x, y) = x + y$ .  $\text{Ker}(T) = \{(x, y) \mid x + y = 0\}$ . È la retta  $y = -x$ .  $\text{Ker}(T) = \text{Span}\{(1, -1)\}$ .
- Nucleo della Mappa Nulla:**  $T : V \rightarrow W$ ,  $T(v) = O_W$  per ogni  $v$ .  $\text{Ker}(T) = V$ . (Tutto lo spazio di partenza viene annullato).

**Definizione 5.4** (Immagine (Image)). L'**Immagine** di  $T$  (scritto  $\text{Im}(T)$ ) è l'insieme dei vettori del codominio  $W$  che sono "raggiunti" dalla trasformazione. È il "range" o l'output effettivo di  $T$ :

$$\text{Im}(T) = \{w \in W \mid \exists v \in V \text{ t.c. } T(v) = w\}$$

È un sottospazio vettoriale di  $W$ .

**A cosa serve?** L'Immagine ci dice "dove va a finire" la trasformazione. Se  $\text{Im}(T) = W$ , l'applicazione è **suriettiva** (tutto  $W$  viene "coperto").

### Esempio

- Immagine della Derivata:**  $D : \mathbb{R}_{\leq 2}[T] \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[T]$ .  $D(aT^2 + bT + c) = 2aT + b$ . L'immagine è l'insieme di tutti i polinomi di grado al più 1.  $\text{Im}(D) = \mathbb{R}_{\leq 1}[T] = \text{Span}\{1, T\}$ .
- Immagine della Proiezione:**  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(x, y, z) = (x, y, 0)$ . L'output è sempre un vettore con l'ultima componente nulla.  $\text{Im}(T) = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Span}\{e_1, e_2\}$ . (Il piano  $xy$ ).
- Immagine di una Mappa**  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ :  $T(t) = (t, 2t)$ .  $\text{Im}(T) = \{(t, 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ . È la retta  $y = 2x$  in  $\mathbb{R}^2$ .  $\text{Im}(T) = \text{Span}\{(1, 2)\}$ .
- Immagine Suriettiva (Rotazione):**  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , rotazione di 90 gradi. Ogni vettore di  $\mathbb{R}^2$  può essere raggiunto (ruotando un altro vettore).  $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^2$ .
- Immagine della Mappa Nulla:**  $T : V \rightarrow W$ ,  $T(v) = O_W$  per ogni  $v$ . L'unico output possibile è  $O_W$ .  $\text{Im}(T) = \{O_W\}$ .

**Teorema 5.5** (Rango-Nullità (o Teorema delle Dimensioni)). Per un'applicazione lineare  $T : V \rightarrow W$  (con  $V$  di dimensione finita), le dimensioni del dominio, del nucleo e dell'immagine sono legate da una relazione fondamentale:

$$\dim(V) = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T))$$

dove  $\dim(\text{Ker}(T))$  si chiama **nullità** e  $\dim(\text{Im}(T))$  si chiama **rango** di  $T$ .

**A cosa serve?** È una "legge di conservazione" della dimensione. La dimensione dello spazio di partenza  $V$  si "distribuisce" tra ciò che viene annullato (Ker) e ciò che viene prodotto (Im). È lo strumento di calcolo e verifica più potente per le applicazioni lineari.

## 5.3

# LO SPAZIO DELLE APPLICAZIONI LINEARI



Gli appunti introducono un concetto affascinante: le applicazioni lineari stesse possono essere trattate come vettori.

**Definizione 5.6** ( $\text{Hom}(V, W)$ ). L'insieme di **tutte** le applicazioni lineari da  $V$  a  $W$  si indica con  $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ . Possiamo definire su questo insieme una somma e un prodotto per scalare:

- Somma**  $(T + F)$ :  $(T + F)(v) = T(v) + F(v)$
- Prodotto**  $(\lambda T)$ :  $(\lambda T)(v) = \lambda T(v)$

**Proposizione 5.7.** Con le operazioni di somma e prodotto definite sopra, l'insieme  $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$  è esso stesso un K-Spazio Vettoriale.

**A cosa serve?** Questo ci permette di trattare le funzioni come "oggetti" algebrici. La proposizione (tratta dagli appunti) che  $T + F$  e  $\lambda T$  sono ancora lineari se  $T$  e  $F$  lo sono, è la dimostrazione che  $\text{Hom}(V, W)$  è un sottospazio dello spazio di *tutte* le funzioni (anche non lineari) da  $V$  a  $W$ .

**Definizione 5.8** (Composizione di Applicazioni Lineari). Date due applicazioni lineari  $T : V \rightarrow W$  e  $F : W \rightarrow U$ , la loro **composizione**  $F \circ T$  (prima  $T$ , poi  $F$ ) è un'applicazione  $F \circ T : V \rightarrow U$  definita da  $(F \circ T)(v) = F(T(v))$ .

**Proposizione 5.9.** La composizione di applicazioni lineari è ancora un'applicazione lineare.

**A cosa serve?** Questo ci dice che possiamo "concatenare" trasformazioni lineari. Come vedremo, la composizione  $F \circ T$  corrisponderà al **prodotto tra le matrici** associate.

### Calcolo di Basi per Nucleo e Immagine

Questo è l'esercizio riassuntivo che unisce tutti i concetti visti finora. Consideriamo  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da  $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ 3x - y \\ 2x - y + z \end{pmatrix}$ . Trovare una base di  $\text{Ker}(T)$  e  $\text{Im}(T)$ .

**Svolgimento:**

1. **Trovare la Matrice Associata  $A$ :** La maggior parte delle applicazioni lineari tra  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$  è una moltiplicazione per matrice. La matrice  $A$  tale che  $T(\mathbf{v}) = A \cdot \mathbf{v}$  si ottiene leggendo i coefficienti:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. **Base del Nucleo  $\text{Ker}(T)$ :** Il Nucleo è l'insieme dei  $\mathbf{v}$  tali che  $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ . Questo è *esattamente*  $V(S^0)$  per il sistema omogeneo  $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Riduciamo  $A$  a scala (come visto in precedenza):

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema ridotto è  $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases}$ . La variabile  $z$  è libera ( $\text{VL} = \{z\}$ ). La  $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$ . Risolvendo:

$y = 3z$ , e  $x = y - 2z = (3z) - 2z = z$ . Il vettore soluzione è  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} z \\ 3z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Una **base di  $\text{Ker}(T)$**  è  $\mathcal{B}_{\text{Ker}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

3. **Base dell'Immagine  $\text{Im}(T)$ :** L'Immagine è l'insieme di tutti i risultati  $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ . Questo è, per definizione, lo **Span delle colonne** della matrice  $A$ .

$$\text{Im}(T) = \text{Span}\{\text{Col 1, Col 2, Col 3}\} = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Per trovare una base, dobbiamo solo estrarre i generatori L.I. **Regola Pratica:** Una base per  $\text{Im}(T)$  è data dalle **colonne della matrice  $A$  ORIGINALE** che corrispondono alle **colonne PIVOT** della matrice ridotta. I nostri pivot (dalla riduzione di Gauss) erano nelle colonne 1 e 2.

Una **base di  $\text{Im}(T)$**  è  $\mathcal{B}_{\text{Im}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ . La  $\dim(\text{Im}(T)) = 2$ .

4. **Verifica (Teorema Rango-Nullità):**  $\dim(V) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$ .  $\dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = 1 + 2 = 3$ . La verifica torna:  $\dim(V) = 3$ .

# OLTRE L'ORIGINE: SPAZI AFFINI

Abbiamo visto che  $V(S^0)$  (omogeneo) è un sottospazio vettoriale, ma  $V(S)$  (non omogeneo) non lo è, perché non contiene  $\mathbf{0}$ . Che cos'è allora? È un sottospazio vettoriale "spostato".

6.1

## SOTTOSPAZI AFFINI E GIACITURA



**Definizione 6.1** (Spazio Affine  $A^n(\mathbb{K})$ ). Mentre  $\mathbb{K}^n$  è lo spazio vettoriale (frecce dall'origine),  $A^n(\mathbb{K})$  è lo **spazio affine**, cioè lo spazio dei **punti**. La distinzione è sottile:  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  è un vettore,  $[1, 2] \in A^2(\mathbb{R})$  è un punto. L'operazione fondamentale è  $P + v = Q$  (Punto + Vettore = Punto).

**Definizione 6.2** (Sottospazio Affine). Un **sottospazio affine**  $H$  è un sottoinsieme di  $A^n(\mathbb{K})$  che è la soluzione di un sistema lineare  $S$ . Equivalentemente, è un insieme della forma:

$$H = P_0 + W = \{P_0 + w \mid w \in W\}$$

dove  $P_0$  è un punto (una soluzione particolare di  $S$ ) e  $W$  è un sottospazio vettoriale (la soluzione  $V(S^0)$  dell'omogeneo associato), chiamato **Giacitura** di  $H$ . La dimensione di  $H$  è la dimensione della sua giacitura  $W$ .  $\dim(H) = \dim(W)$ .

**A cosa serve?** Questa definizione ci "libera" dall'origine. Ci permette di descrivere geometricamente rette, piani, iperpiani, ecc., che *non* passano per l'origine.

**Osservazione 6.3.** La soluzione di un sistema lineare  $V(S)$  è **sempre** un sottospazio affine. Se  $\mathbf{v}_p$  è una soluzione particolare (il nostro "punto  $P_0$ ") e  $W = V(S^0)$  è la giacitura (lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato), allora:

$$V(S) = \mathbf{v}_p + W$$

Questo collega l'algebra dei sistemi lineari alla geometria degli spazi affini.

### Esempio

1. **Una retta in  $A^2(\mathbb{R})$  (non per l'origine):**  $H = [1, 0] + \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ .  $P_0 = [1, 0]$  (punto),  $W = \text{Span}\{(1, 1)\}$  (giacitura,  $\dim = 1$ ). In forma cartesiana:  $x - y = 1$ .
2. **Un piano in  $A^3(\mathbb{R})$  (non per l'origine):**  $H = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 1\}$ . La giacitura è  $W = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$ ,  $\dim(W) = 2$ . Un punto  $P_0$  è una soluzione particolare, es.  $P_0 = [1, 0, 0]$ .
3. **Un punto (Dimensione 0):**  $H = \{[1, 2, 3]\}$ . Questo è  $P_0 = [1, 2, 3]$  e  $W = \{O_V\}$ .  $\dim(H) = 0$ .
4. **Un sottospazio vettoriale è anche affine:** Se  $H$  è un sottospazio vettoriale, è  $H = O_V + H$ . È un sottospazio affine che "passa per l'origine"  $P_0 = O_V$ .

5. **Soluzione di un sistema non omogeneo:** Dall'esercizio nel Capitolo 2,  $V(S) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ .

Questa è la forma  $P_0 + W$ . È un sottospazio affine di  $A^5(\mathbb{R})$  di dimensione 2.



Come per i sottospazi vettoriali, possiamo studiare l'intersezione e la "somma" di sottospazi affini  $H = P_0 + W$  e  $H' = Q_0 + W'$ .

**Definizione 6.4** (Intersezione Affine). L'**intersezione**  $H \cap H'$  è l'insieme dei punti che appartengono a entrambi.

$$H \cap H' = \{P \in A^n(\mathbb{K}) \mid P \in H \text{ e } P \in H'\}$$

**A cosa serve?** Se  $H = V(S)$  e  $H' = V(S')$ , allora l'intersezione  $H \cap H'$  è semplicemente la soluzione del sistema combinato  $V(S \cup S')$ . A differenza dei sottospazi vettoriali, l'intersezione affine può essere **vuota** ( $\emptyset$ ).

**Definizione 6.5** (Somma Affine (Chiusura Affine)). La **somma affine** di  $H$  e  $H'$ , indicata con  $\overline{HH'}$ , è il **più piccolo sottospazio affine** che contiene sia  $H$  che  $H'$ .

**Proposizione 6.6** (Calcolo della Somma Affine). Dati  $H = P_0 + W$  e  $H' = Q_0 + W'$ , la giacitura della loro somma è:

$$\text{Giac}(\overline{HH'}) = W + W' + \text{Span}\{\vec{P_0Q_0}\}$$

dove  $\vec{P_0Q_0}$  è il vettore che congiunge i due punti base.

**A cosa serve?** La somma affine è più complicata della somma vettoriale. Non basta sommare le giaciture ( $W + W'$ ), ma bisogna includere anche la "direzione" che collega i due sottospazi, data dal vettore  $\vec{P_0Q_0}$ .

**Definizione 6.7** (Parallelismo). Due sottospazi affini  $H = P_0 + W$  e  $H' = Q_0 + W'$  si dicono **paralleli** se la giacitura di uno è contenuta nell'altra (o viceversa). Il caso più comune è  $\text{Giac}(H) = \text{Giac}(H')$ .

**A cosa serve?** Questa definizione formale cattura la nostra intuizione geometrica. Due rette sono parallele se i loro vettori di direzione (le loro giaciture  $W$  e  $W'$ ) sono collineari (cioè  $\text{Span}\{v_1\} = \text{Span}\{v_2\}$ ).

### Esempio

Siano  $H, H' \subset A^3(\mathbb{R})$ .

1. **Due Rette parallele (non incidenti):**  $H = [1, 0, 0] + \text{Span}\{(1, 1, 0)\}$ .  $H' = [0, 0, 1] + \text{Span}\{(1, 1, 0)\}$ . Le giaciture sono uguali ( $W = W'$ ), quindi sono parallele.  $H \cap H' = \emptyset$ .
2. **Due Rette Sghembe (non parallele, non incidenti):**  $H = [0, 0, 0] + \text{Span}\{(1, 0, 0)\}$  (asse  $x$ ).  $H' = [0, 1, 1] + \text{Span}\{(0, 0, 1)\}$  (retta parallela all'asse  $z$ , passante per  $[0, 1, 1]$ ). Le giaciture  $W = \text{Span}\{e_1\}$  e  $W' = \text{Span}\{e_3\}$  non sono parallele.  $H \cap H' = \emptyset$ .
3. **Retta e Piano Parallel:**  $H = [0, 0, 5] + \text{Span}\{e_1\}$  (retta parallela all'asse  $x$ , a quota 5).  $H' = [0, 0, 0] + \text{Span}\{e_1, e_2\}$  (piano  $xy$ ).  $\text{Giac}(H) \subset \text{Giac}(H')$ , quindi sono paralleli.  $H \cap H' = \emptyset$ .
4. **Retta e Piano Incidenti:**  $H = [0, 0, 0] + \text{Span}\{e_3\}$  (asse  $z$ ).  $H' = [1, 1, 0] + \text{Span}\{e_1, e_2\}$  (piano  $z = 0$ , traslato). No,  $H' = \{(x, y, z) \mid z = 0\}$ . Rifacciamo:  $H' = \{(x, y, z) \mid z = 5\}$  (piano a quota 5).  $H \cap H' = [0, 0, 5]$ . Si incontrano in un punto.
5. **Due Piani Parallel:**  $H = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 1\}$ .  $H' = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 2\}$ . Hanno la stessa giacitura  $W = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$ . Sono paralleli.

# COSTRUIRE E INVERTIRE APPLICAZIONI LINEARI

Abbiamo visto che un'applicazione lineare è determinata da come agisce sui vettori. Ma quanti vettori dobbiamo conoscere per "conoscere" tutta la funzione? E possiamo sempre costruire un'applicazione lineare a nostro piacimento?

7.1

## IL TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ



Questo è il teorema fondamentale per gli esercizi di costruzione delle applicazioni lineari (come l'esercizio 1 del foglio). Ci dice che non serve definire la funzione su infiniti vettori: basta definirla su una **base**.

**Teorema 7.1** (Esistenza e Unicità). Siano  $V$  e  $W$  due spazi vettoriali su un campo  $\mathbb{K}$ , e sia  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base di  $V$ . Comunque scelti  $n$  vettori arbitrari  $w_1, \dots, w_n$  in  $W$ , esiste un'**unica** applicazione lineare  $T : V \rightarrow W$  tale che:

$$T(v_1) = w_1, \quad T(v_2) = w_2, \quad \dots, \quad T(v_n) = w_n$$

**A cosa serve?** Ci dà un potere enorme: possiamo "programmare" un'applicazione lineare decidendo dove mandare i vettori della base. Una volta fissate le immagini della base, il destino di tutti gli altri vettori di  $V$  è segnato dalla linearità. Infatti, per ogni  $v \in V$ , scriviamo  $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ . Allora:

$$T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_n T(v_n) = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n$$

7.2

## ESERCIZI DI ESISTENZA: LA GUIDA PRATICA



Spesso negli esercizi (es. Es 1 del foglio) non ci viene fornita una base, ma un insieme generico di vettori di partenza e le loro immagini desiderate. Ci viene chiesto: *"Esiste questa applicazione lineare? È unica?"*.

Sia la richiesta:  $T(v_i) = w_i$  per  $i = 1, \dots, k$ . Dobbiamo analizzare i vettori di partenza  $\{v_1, \dots, v_k\}$ .

### Esempio

[Algoritmo di Verifica Esistenza]

- Caso 1: I vettori di partenza sono una Base.** Se  $\{v_1, \dots, v_n\}$  sono una base di  $V$ , allora l'applicazione esiste ed è **unica** (per il Teorema sopra).
- Caso 2: I vettori sono L.I. ma non generano tutto  $V$  (sono pochi).** Se  $\{v_1, \dots, v_k\}$  sono linearmente indipendenti ma  $k < \dim(V)$ , l'applicazione **esiste ma non è unica**. Possiamo completare l'insieme a una base  $\{v_1, \dots, v_k, \dots, v_n\}$  e mandare i vettori aggiunti dove vogliamo (infinte scelte).
- Caso 3: I vettori sono Linearmente Dipendenti (c'è ridondanza).** Questo è il caso critico. Se un vettore è combinazione lineare degli altri, ad esempio  $v_3 = v_1 + v_2$ , allora per la linearità *deve* valere la stessa relazione tra le immagini:

$$T(v_3) \text{ deve essere uguale a } T(v_1) + T(v_2) \implies w_3 = w_1 + w_2$$

- Se la condizione ( $w_3 = w_1 + w_2$ ) è **soddisfatta**: L'applicazione esiste (potrebbe essere unica o no, dipende se generano  $V$ ).
- Se la condizione **non è soddisfatta**: L'applicazione **non esiste**. È impossibile.

### Esempio tratto da Es 1

Determinare se esiste  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Svolgimento:** Chiamiamo i vettori di partenza  $v_1, v_2, v_3$ . Controlliamo se sono una base o se sono dipendenti. Si nota a occhio che  $v_3 = v_1 + v_2$ :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Perché  $T$  sia lineare, deve valere  $T(v_3) = T(v_1) + T(v_2)$ . Verifichiamo le immagini date  $(w_1, w_2, w_3)$ :

$$w_1 + w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ma il testo richiede  $w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Poiché  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ , l'applicazione **non esiste**.

## 7.3

# PROIEZIONI



Le proiezioni sono un tipo speciale di applicazione lineare legata alla somma diretta (Esercizio 2 del foglio).

**Definizione 7.2** (Proiezione). Sia  $V = U \oplus W$ . Ogni vettore  $v \in V$  si scrive in modo unico come  $v = u + w$  con  $u \in U, w \in W$ . La **Proiezione su  $U$  lungo  $W$**  (indicata con  $\pi_U^W$  o  $P$ ) è l'applicazione che "butta via" la componente  $W$  e tiene solo  $U$ :

$$\pi_U^W(v) = u$$

**Proprietà chiave:**

1. È lineare.
2.  $P(u) = u$  per ogni  $u \in U$  (i vettori su cui proietto restano fermi).
3.  $P(w) = \mathbf{0}$  per ogni  $w \in W$  (la direzione di proiezione viene annullata).
4.  $P \circ P = P$  (Proiettare due volte è come proiettare una volta sola).
5.  $\text{Im}(P) = U$  e  $\text{Ker}(P) = W$ .

### Calcolo della Proiezione

Dati  $V = \text{Span}\{v_1\}$  e  $W$  definito da un'equazione in  $\mathbb{R}^3$ . Trovare la matrice di proiezione su  $V$  lungo  $W$ . **Strategia:**

1. Trovare una base di  $V$  (diciamo  $\{b_1\}$ ) e una base di  $W$  (diciamo  $\{b_2, b_3\}$ ).
2. Poiché  $V \oplus W = \mathbb{R}^3$ , l'insieme  $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$  è una base di tutto lo spazio.
3. Sappiamo come agisce la proiezione sulla base  $\mathcal{B}$ :

$$P(b_1) = b_1 \quad (\text{perché } b_1 \in V)$$

$$P(b_2) = \mathbf{0}, \quad P(b_3) = \mathbf{0} \quad (\text{perché } b_2, b_3 \in W)$$

4. Costruiamo la matrice associata rispetto a questa base comoda  $\mathcal{B}$  (sarà quasi vuota!) oppure usiamo il cambio di base per trovarla rispetto alla canonica.

## 7.4

# INVERSA DI UN'APPLICAZIONE LINEARE



Come per le funzioni, ci chiediamo se possiamo "tornare indietro".

**Definizione 7.3** (Applicazione Invertibile). Un'applicazione lineare  $T : V \rightarrow W$  è **invertibile** se esiste  $T^{-1} : W \rightarrow V$  tale che  $T^{-1} \circ T = id_V$  e  $T \circ T^{-1} = id_W$ .

**Proposizione 7.4.**  $T$  è invertibile  $\iff T$  è bigettiva (Isomorfismo)  $\iff$  la matrice associata  $A$  è quadrata e  $\det(A) \neq 0$  (o  $\text{rk}(A) = n$ ).

**Calcolo dell'Inversa (Metodo Gauss-Jordan)** Se  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ , allora l'inversa è data da  $T^{-1}(\mathbf{y}) = A^{-1}\mathbf{y}$ . Per calcolare  $A^{-1}$ :

1. Scriviamo la matrice a blocchi  $(A|I_n)$ , dove  $I_n$  è la matrice identità.
2. Usiamo le mosse di Gauss per trasformare la parte sinistra  $(A)$  nell'identità  $(I)$ .
3. Le stesse mosse trasformeranno la parte destra  $(I)$  nell'inversa  $(A^{-1})$ .

$$(A|I) \xrightarrow{\text{Gauss}} (I|A^{-1})$$

### Inversa di polinomi - Esercizio 3

Sia  $F(P) = P - P'$ . Trovare l'inversa. Se  $F$  agisce su polinomi di grado  $\leq 2$ , troviamo la matrice  $A$  rispetto alla base  $\{1, t, t^2\}$ . Se  $P(t) = 1 \implies F(1) = 1 - 0 = 1$ . Se  $P(t) = t \implies F(t) = t - 1$ . Se  $P(t) = t^2 \implies F(t^2) = t^2 - 2t$ . Matrice (per colonne):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice è triangolare con pivot non nulli  $\implies$  invertibile. Per trovare l'inversa  $A^{-1}$ , usiamo Gauss-Jordan o i sistemi lineari.