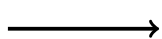
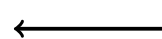


**CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA**  
**PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III)**  
**19 GIUGNO 2025**

Svolgere i seguenti esercizi,



*giustificando pienamente tutte le risposte.*



Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome, cognome, matricola, gruppo di appartenenza.**

**Non** è necessario consegnare la traccia.

**Esercizio 1.** Quale connettivo proposizionale tra  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$  va sostituito a  $\star$  in modo che la forma proposizionale  $(p \text{ XOR } q) \longleftrightarrow \neg((p \rightarrow q) \wedge (p \star (\neg q)))$  sia una tautologia?

**Esercizio 2.** Sia  $T = \{n \in \mathbb{Z} \mid -6 \leq n \leq 6\}$ . Tra i sottoinsiemi di  $T$  che contengono solo numeri primi, determinare il numero di quelli di cardinalità 7 e di quelli di cardinalità 4. Determinare poi, tra i sottoinsiemi di  $T$  a cui non appartengono numeri primi, il numero di quelli di cardinalità 7 e di quelli di cardinalità 4.

**Esercizio 3.** Per ogni numero intero  $n$  si consideri l'applicazione  $f_n: [a]_n \in \mathbb{Z}_n \mapsto [30a]_n \in \mathbb{Z}_n$ .

- (i) Determinare l'unico  $n$  in  $\{85, 86, 87, 88, 89\}$  tale che  $f_n$  sia biettiva.
- (ii) Per tale  $n$ , si determini  $(f_n)^{-1}$ .
- (iii) Calcolare  $\vec{f}_{40}(\mathbb{Z}_{40})$ ,  $\vec{f}_{40}(\emptyset)$ ,  $\overleftarrow{f}_{40}(\emptyset)$ ,  $\overleftarrow{f}_{40}(\mathbb{Z}_{40})$ ,  $\overleftarrow{f}_{40}(\{[20]_{40}\})$ ,  $\overleftarrow{f}_{40}(\{[2]_{40}\})$ .

**Esercizio 4.** Per ogni  $a \in \mathbb{N}$ , sia  $s_a$  la somma delle cifre di  $a$  nella sua rappresentazione in base 10. Sia  $\tau$  la relazione d'ordine definita in  $\mathbb{N}$  ponendo, per ogni  $a, b \in \mathbb{N}$ ,

$$a \tau b \iff (a = b \vee s_a \text{ è un divisore proprio di } s_b).$$

- (i) Determinare in  $(\mathbb{N}, \tau)$  eventuali minimo, massimo, elementi minimali, elementi massimali.
- (ii) Sempre in  $(\mathbb{N}, \tau)$ , determinare l'insieme dei minoranti di  $\{21, 22\}$ ; stabilire se esiste  $\inf \{21, 22\}$ .
- (iii)  $(\mathbb{N}, \tau)$  non è un reticolo; perché?

Sia  $M = \{13, 15, 22, 31, 66, 5106, 10001, 24288\}$ .

- (iv) Disegnare un diagramma di Hasse di  $(M, \tau)$ .
- (v) Individuare in  $(M, \tau)$  una catena massimale (cioè un elemento massimale in  $(C, \subseteq)$  dove  $C$  è l'insieme delle parti  $X$  di  $M$  tali che  $(X, \tau)$  sia totalmente ordinato).
- (vi) Stabilire se  $(M, \tau)$  è o meno un reticolo e, nel caso, se è distributivo e se è complementato.
- (vii) Determinare  $a \in M$  tale che  $(M \setminus \{a\}, \tau)$  sia un reticolo. Questo reticolo è distributivo? È complementato?

**Esercizio 5.** In  $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  di considerino le operazioni binarie  $+$  e  $\cdot$  definite da:  $\forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$

$$(a, b, c) + (d, e, f) = (a + d, b + e, c + f) \quad \wedge \quad (a, b, c) \cdot (d, e, f) = (ad, ae + bf, cf).$$

Dando per noto che  $(S, +, \cdot)$  è un anello unitario,

- (i) si determinino lo zero  $0_S$  e l'unità  $1_S$  di questo anello;
- (ii) si determinino, ove possibile, l'opposto e l'inverso di  $(1, 2, -1)$ .
- (iii) Data la definizione di divisore dello zero in un anello, decidere se entrambi, uno o nessuno degli elementi  $(1, 2, -1)$  e  $(1, 1, 0)$  è divisore dello zero in  $(S, +, \cdot)$ .

Solo per studenti immatricolati prima dell'a.a. 2024/25

**Esercizio 6.** Sia  $\rho$  la relazione binaria in  $\mathbb{Z}$  definita da:  $\forall a, b \in \mathbb{Z} \ (a + b - 1 \text{ è pari})$ .

- (i) Dare la definizione di grafo (semplice) e verificare che  $(\mathbb{Z}, \rho)$  è un grafo;
- (ii) Determinare un sottoinsieme  $X$  di  $\mathbb{Z}$  tale che  $|X| = 5$  e  $(X, \sigma)$  sia un albero, dove  $\sigma$  è la relazione indotta da  $\rho$  su  $X$ .

**Esercizio 7.** Per ogni  $m \in \mathbb{Z}$  sia  $f_m := \overline{5m}x^4 + \overline{3}x^2 + \overline{15}x + \overline{1} + \overline{m} \in \mathbb{Z}_7[x]$ . Stabilire:

- (i) per quali interi  $m$   $f_m$  è monico;
- (ii) per quali interi  $m$   $f_m$  è invertibile in  $\mathbb{Z}_7[x]$ ;
- (iii) per quali interi  $m$   $f_m$  è un divisore dello zero in  $\mathbb{Z}_7[x]$ ;
- (iv) per quali interi  $m$   $f_m$  è, in  $\mathbb{Z}_7[x]$ , divisibile per  $x + \overline{1}$ .