CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II E III) — 11 SETTEMBRE 2025

Svolgere i seguenti esercizi,

⟶ $\boxed{\textit{giustificando pienamente tutte le risposte.}}$ ⟵

Sui fogli consegnati vanno indicati: **nome**, **cognome**, **matricola**, **gruppo di appartenenza**.
Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. La forma proposizionale $p \to (p \to (p \to (p \to (p \to (p \to p)))))$ è una tautologia?

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione $f\colon (x,y) \in \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S) \mapsto (x \triangle \{1\}, x \cap \{1\}) \in \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S)$, dove $S = \{1,2,3\}$. Determinare:

- (i) $\overleftarrow{f}(\{(\varnothing,\varnothing)\})$, $\overleftarrow{f}(\{(\{1\},\varnothing)\})$ e $\overleftarrow{f}(\{(\varnothing,\{1\})\})$;
- (ii) $\overrightarrow{f}(\mathcal{P}(S) \times \{\{2\}\})$ e $\overrightarrow{f}\big(\{\{2\}\} \times \mathcal{P}(S)\big)$.
- (iii) f è iniettiva? È suriettiva? È invertibile?
- (iv) Indicata con $\Re_f$ la relazione di equivalenza associata ad f (cioè il nucleo di equivalenza di f), determinare $\big[(S,\{2,3\})\big]_{\Re_f}$ e $\big|\big[(S,\{2,3\})\big]_{\Re_f}\big|$.

Esercizio 3. Sia τ la relazione binaria in $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ definita da: $\forall x,y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ($x\ \tau\ y \iff x \triangle y$ è infinito). Stabilire se τ è una relazione di equivalenza e, nel caso, descrivere in modo esplicito $[\{0,5\}]_\tau$ e decidere se τ è compatibile con l'operazione $\cap$ in $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Ripetere l'esercizio dopo aver sostituito τ con σ, definita sempre in $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ da: $\forall x,y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ($x\ \sigma\ y \iff x \triangle y$ è finito).

Esercizio 4. Sia $S = \{1,2,3\}$ e sia ρ la relazione d'ordine in $\mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S)$ definita da: per ogni $a,b,c,d \in \mathcal{P}(S)$
$$(a,b)\ \rho\ (c,d) \longleftrightarrow \big((a,b) = (c,d) \vee |a|\cdot|b| < |c|\cdot|d|\big)$$
In $\big(\mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S), \rho\big)$, determinare:

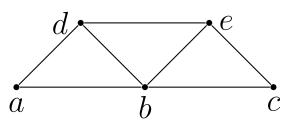
- (i) eventuali minimo, massimo, elementi minimali, elementi massimali;
- (ii) l'insieme dei minoranti e l'eventuale estremo inferiore di $X = \{(\{1\},\{2,3\}),(\{2,3\},\{2\})\}$, l'insieme dei maggioranti e l'eventuale estremo superiore di $Y = \{(S,\{1,2\}),(S,\{1,3\})\}$;
- (iii) una catena (cioè un sottoinsieme totalmente ordinato) di cardinalità massima.
- (iv) $\big(\mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S), \rho\big)$ è un reticolo?
- (v) Sia $L = \{(\{1\},\{1\}),(\{1\},\{2\}),(\{1\},\{1,2\}),(\{1\},S),(\{1,2\},S),(S,\{1,2\}),(S,\varnothing),(S,\{1\}),(S,S)\}$. Dopo averne disegnato un diagramma di Hasse, si stabilisca se l'insieme ordinato (L,ρ) è un reticolo. Se lo è, è distributivo? È complementato? È booleano?
- (vi) Che cardinalità può avere un reticolo booleano finito?
- (vii) Tutti i reticoli di cardinalità 8 sono booleani?

Esercizio 5. Sia $*$ l'operazione binaria in $\mathbb{Z}_{21}$ definita da:
$$\forall a,b \in \mathbb{Z}_{21} \quad \big(a * b = a + \bar{7}b\big).$$

- (i) Che tipo di struttura (semigruppo, monoide, gruppo, ...) è $(\mathbb{Z}_{21},*)$?
- (ii) Determinare in $(\mathbb{Z}_{21},*)$ gli elementi neutri a destra e quelli neutri a sinistra.
- (iii) $A = \{\bar{0},\bar{6},\bar{9},\overline{15}\}$ è una parte stabile (ovvero chiusa) in $(\mathbb{Z}_{21},*)$? Se lo è, che tipo di struttura è $(A,*)$? Rispondere alle stesse domande per $B = \{\bar{0},\bar{7},\overline{14}\}$ al posto di A.

Solo per studenti immatricolati prima dell'a.a. 2024/25

Esercizio 6. Se possibile, aggiungere al grafo a destra un vertice e due lati in modo che il grafo risultante abbia un circuito euleriano. È possibile farlo in più di un modo, ottenendo due grafi semplici tra loro non isomorfi?



Esercizio 7. Sia f il polinomio $x^4 + \bar{8}x^2 + \bar{2} \in \mathbb{Z}_{11}$.

- (i) Dopo aver calcolato $f(\bar{1})$, scrivere f come prodotto di polinomi irriducibili monici;
- (ii) decidere se f ha divisori di grado tre con coefficiente direttore $\bar{5}$; nel caso ne esistano, esibirne uno;
- (iii) determinare l'insieme degli $a \in \mathbb{Z}_{11}$ tali che $f + a$ sia associato a f in $\mathbb{Z}_{11}[x]$.