

Formulario di Fisica

Mattia Cozzi

mattiacozzi.altervista.org

Indice

1	Vettori	3
1.1	Operazioni coi vettori	4
2	Misura	7
2.1	Unità di misura e costanti	7
2.2	Cifre significative ed errori nella misura	10
3	Meccanica	11
3.1	Definizioni fondamentali	11
3.2	Cinematica	11
3.2.1	Moto rettilineo uniforme	11
3.2.2	Moto uniformemente accelerato	12
3.2.3	Moto circolare uniforme	12
3.2.4	Moto armonico	13
3.3	Dinamica	13
3.4	Lavoro ed energia meccanica	15
3.5	Quantità di moto e momento angolare	16
3.6	Gravitazione	18
3.7	Meccanica dei fluidi	19
4	Termologia e termodinamica	20
4.1	Temperatura e dilazione termica	20
4.2	Gas perfetti	20
4.3	Calore	21
4.4	Modello microscopico della materia	22

4.5	Primo principio della termodinamica	22
4.6	Secondo principio della termodinamica	25
5	Onde	27
5.1	Onde elastiche	27
5.2	Suono	28
5.3	Onde luminose e ottica geometrica	29
6	Fenomeni elettrici e magnetici	32
6.1	Elettrostatica	32
6.2	Corrente elettrica	36
6.3	Elettromagnetismo	39
6.4	Induzione elettromagnetica	41
6.5	Equazioni di Maxwell e onde elettromagnetiche	45
7	Fisica moderna	47
7.1	Relatività di spazio e tempo	47
7.2	Fisica quantistica	50
8	Derivate e integrali notevoli	53
9	Timeline	55
10	Tavola periodica degli elementi	56

1 Vettori

Scalari e vettori Una grandezza può:

- essere espressa completamente tramite un valore numerico, come la massa: è uno *scalare*;
- richiedere l'esplicitazione anche di una direzione e di un verso, come la velocità o la forza: è un *vettore*.

Gli scalari sono indicati con lettere, i vettori con lettere sormontate da una freccia, come \vec{a} .

Il modulo del vettore \vec{a} viene indicato con $|\vec{a}|$ o più semplicemente con a .

Versore Un versore è un vettore di modulo 1. Vengono indicati con i simboli \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} , \hat{n} , ecc.

I versori possono essere usati per rappresentare la direzione e il verso di un vettore, indicando poi con uno scalare il modulo.

Ad esempio, $\vec{a} = 5\hat{i}$ indica un vettore \vec{a} con la stessa direzione e verso del versore \hat{i} e di modulo 5.

Solitamente i versori \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} sono usati per indicare gli assi cartesiani, mentre con \hat{n} si indica un versore normale (perpendicolare) ad un piano.

Seno e coseno In un triangolo rettangolo, possiamo distinguere i due cateti in *cateto opposto all'angolo θ* e *cateto adiacente a θ* , in base alla posizione che occupano rispetto all'angolo θ .

Definiamo le seguenti funzioni goniometriche:

$$\cos \theta = \frac{C_{adj}}{i}$$

$$\sin \theta = \frac{C_{opp}}{i}$$

$$\tan \theta = \frac{C_{opp}}{C_{adj}}$$

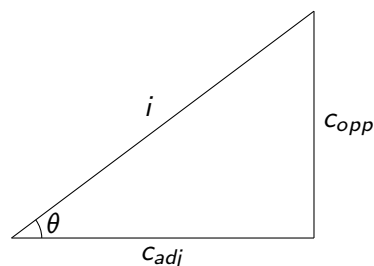


Figura 1: Notiamo che, essendo l'ipotenusa sempre maggiore di ognuno dei due cateti, seno e coseno di un angolo sono valori con modulo minore di 1.

Quando si eseguono calcoli con le funzioni goniometriche, assicurarsi che gli angoli siano espressi con l'unità di misura desiderata. La calcolatrice dovrà riportare esplicitamente **D** per i gradi (*degrees*) o **R** per i radianti (possiamo ignorare la dicitura **G**).

Scomposizione di un vettore Una volta stabilito un sistema di riferimento, possiamo determinare l'angolo che un vettore \vec{a} forma con l'asse x (la cui direzione è data dal versore \hat{i}).

Chiamiamo tale angolo θ e calcoliamo le componenti cartesiane del vettore (ovvero le sue proiezioni sugli assi cartesiani) utilizzando le formule precedenti:

$$a_x = a \cos \theta \quad a_y = a \sin \theta$$

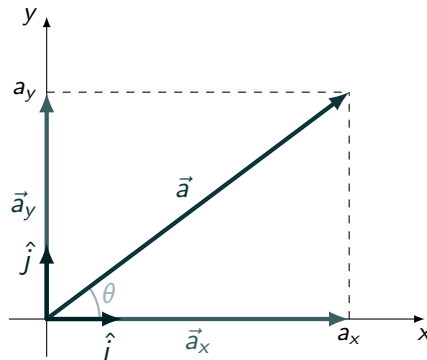


Figura 2: La scomposizione di un vettore nelle sue componenti lungo gli assi cartesiani (determinati dai versori \hat{i} e \hat{j}).

Possiamo ora esprimere il vettore \vec{a} mediante le sue componenti sugli assi.

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$$

Modulo e direzione di un vettore, note le componenti Dato un vettore $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$ possiamo risalire al suo modulo con il teorema di Pitagora:

$$a = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2}$$

Per ottenere l'angolo formato con l'asse x possiamo usare una tra le seguenti formule (che utilizzano le funzioni inverse delle funzioni goniometriche):

$$\theta = \arccos\left(\frac{a_x}{a}\right) = \arcsin\left(\frac{a_y}{a}\right) = \arctan\left(\frac{a_y}{a_x}\right)$$

Sulle calcolatrici scientifiche, le funzioni inverse delle funzioni goniometriche sono solitamente indicate come \cos^{-1} , \sin^{-1} e \tan^{-1} .

1.1 Operazioni coi vettori

Somma tra vettori, metodo grafico Regola del parallelogramma, mostrata in Figura 3.

Somma tra vettori, metodo algebrico Dati due vettori $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$ e $\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j}$ il vettore somma sarà:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x) \hat{i} + (a_y + b_y) \hat{j}$$

È sufficiente sommare le componenti sui rispettivi assi.

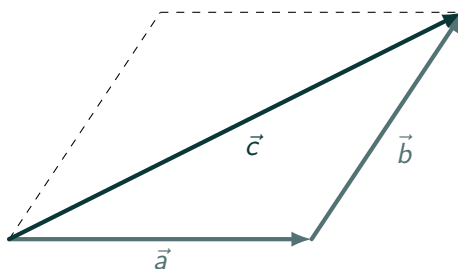


Figura 3: Regola del parallelogramma: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.

Differenza tra vettori Graficamente, basta invertire il verso del vettore da sottrarre e procedere come per la somma. Il metodo del parallelogramma viene applicato come in Figura 4.

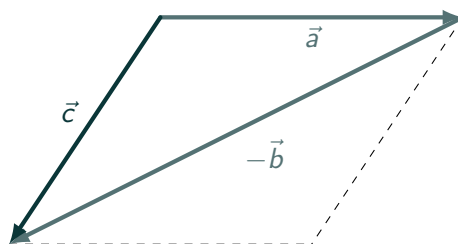


Figura 4: Regola del parallelogramma applicata alla sottrazione: $\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{c}$.

Algebricamente:

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\hat{i} + (a_y - b_y)\hat{j}$$

Attenzione! La moltiplicazione è un'operazione che ha senso solo su numeri (scalari). Quando abbiamo a che fare con dei vettori, parliamo di "prodotto tra vettori".

Esistono tre tipi di prodotto che utilizzano i vettori. In nessun caso dobbiamo leggere i simboli \cdot e \times come dei "per".

Prodotto di uno scalare per un vettore Il prodotto di uno scalare per un vettore è un vettore che ha:

- la stessa direzione del vettore;
- stesso verso del vettore se lo scalare è positivo, verso opposto se lo scalare è negativo;
- modulo uguale al prodotto dello scalare per il modulo del vettore.

Intuitivamente, se eseguo il prodotto tra lo scalare 3 e il vettore \vec{a} , otterrò un vettore orientato come \vec{a} ma tre volte più lungo.

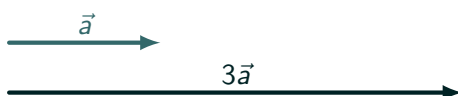


Figura 5: Prodotto del vettore \vec{a} per lo scalare 3.

Algebricamente:

$$k\vec{a} = (ka_x)\hat{i} + (ka_y)\hat{j}$$

Solitamente il prodotto di uno scalare per un vettore non viene indicato con alcun simbolo.

Prodotto scalare Il prodotto scalare (simbolo \cdot) si esegue tra due vettori e dà come risultato uno scalare.

Si moltiplica il modulo del primo vettore per la componente del secondo lungo il primo (o viceversa: il prodotto scalare è commutativo), come mostrato in Figura 6.

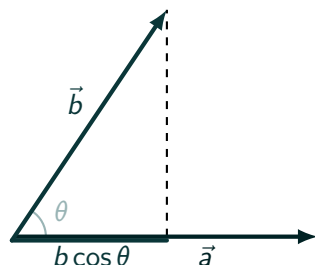


Figura 6: Rappresentazione della componente di \vec{b} su \vec{a} .

Se indichiamo con θ l'angolo tra i due vettori \vec{a} e \vec{b} , allora:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta$$

Prodotto vettoriale Il prodotto vettoriale (simbolo \times) si esegue tra due vettori e dà come risultato un vettore.

Il modulo del vettore $\vec{a} \times \vec{b}$ è dato dall'area del parallelogramma costruito coi vettori \vec{a} e \vec{b} .

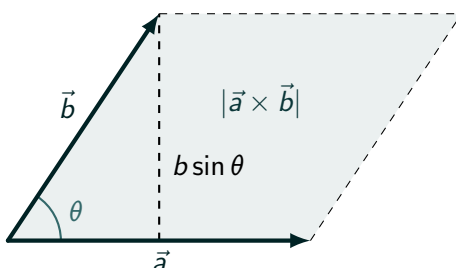


Figura 7: Il modulo del prodotto vettoriale come area del parallelogramma.

Se indichiamo con θ l'angolo tra i due vettori \vec{a} e \vec{b} , allora:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \theta$$

Poiché il risultato dell'operazione è un vettore, dobbiamo ancora indicarne direzione e verso:

- la direzione del prodotto vettoriale di \vec{a} e \vec{b} è perpendicolare al piano da essi formato;
- il verso è dato dalla *regola della mano destra*, ovvero ponendo il pollice della mano destra nel verso del vettore \vec{a} e le altre dita nel verso di \vec{b} , il vettore $\vec{a} \times \vec{b}$ sarà uscente dal palmo della mano, come indicato dalla Figura 8.

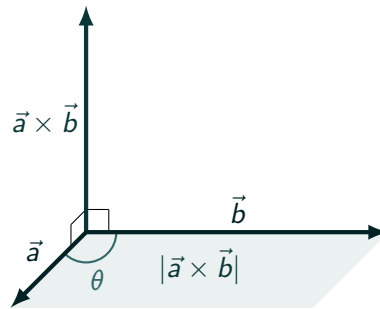


Figura 8: Rappresentazione tridimensionale del vettore ottenuto con il prodotto vettoriale.

2 Misura

2.1 Unità di misura e costanti

Unità di misura del Sistema Internazionale (SI) Tutto ciò che in Fisica viene misurato, viene misurato utilizzando le sette unità di misura riportate in Tabella 1 oppure unità di misura da esse derivate.

Quantità misurata	Nome	Simbolo
lunghezza	metro	<i>m</i>
massa	chilogrammo	<i>kg</i>
tempo, durata	secondo	<i>s</i>
corrente elettrica	ampere	<i>A</i>
temperatura assoluta	kelvin	<i>K</i>
quantità di sostanza	mole	<i>mol</i>
intensità luminosa	candela	<i>cd</i>

Tabella 1: Le sette unità di misura del SI.

Unità derivate È importante conoscere, oltre alle unità di misura derivate riportate in Tabella 2, anche la loro definizione in termini di grandezze del SI. Questo permette di eseguire correttamente i calcoli in Fisica.

Multipli e sottomultipli della unità di misura Il SI prevede l'utilizzo di opportuni multipli e sottomultipli delle unità di misura (riportati in Tabella 3), poiché in molti casi le unità di misura si dimostrano troppo grandi o troppo piccole per una determinata misura.

Costanti fisiche fondamentali In Tabella 4 sono riportati nomi, simboli e valori di alcune costanti.

Dati su alcuni corpi del Sistema Solare In Tabella 5 sono riportati alcuni dati utili per esercizi ed esempi.

Gradi e radianti Il procedimento generale per convertire tra gradi e radianti è la proporzione:

$$\frac{\theta_{rad}}{\theta_{gradi}} = \frac{2\pi}{360}$$

Riportiamo inoltre in Tabella 6 alcune conversioni veloci.

Quantità misurata	Nome	Simbolo	Definizione
area		m^2	m^2
volume		m^3	m^3
velocità		m/s	m/s
accelerazione		m/s^2	m/s^2
frequenza	hertz	Hz	$1/s, s^{-1}$
angolo	radiante	rad	
forza	Newton	N	$kg \cdot m/s^2$
pressione	Pascal	Pa	N/m^2
energia, lavoro, calore	Joule	J	$N \cdot m$
potenza	Watt	W	J/s
carica elettrica	Coulomb	C	$A \cdot s$
potenziale elettrico	Volt	V	$J/C, W/A$
capacità	Farad	F	C/V
resistenza	Ohm	Ω	V/A
campo magnetico	Tesla	T	$N/A \cdot m$
flusso magnetico	Weber	Wb	$T \cdot m^2$

Tabella 2: Alcune tra le più importanti unità di misura derivate.

Prefisso	Simbolo	Fattore di conversione
femto-	f-	$1/1\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{-15}$
pico-	p-	$1/1\,000\,000\,000\,000 = 10^{-12}$
nano-	n-	$1/1\,000\,000\,000 = 10^{-9}$
micro-	μ -	$1/1\,000\,000 = 10^{-6}$
milli-	m-	$1/1\,000 = 10^{-3}$
centi-	c-	10^{-2}
deci-	d-	10^{-1}
deca-	da-	10^1
etto-	h-	10^2
kilo-	k-	10^3
mega-	M-	10^6
giga-	G-	10^9
tera-	T-	10^{12}
peta-	P-	10^{15}

Tabella 3: Multipli e sottomultipli più usati.

Nome	Simbolo e valore
velocità della luce nel vuoto	$c = 299\,792\,458\text{ m/s} \simeq 3,0 \times 10^8\text{ m/s}$
costante dielettrica del vuoto	$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}\text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$
costante di Coulomb	$k_0 = 8,99 \times 10^9\text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$
permeabilità magnetica del vuoto	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\text{ N/A}^2$
costante di gravitazione universale	$G = 6,672 \times 10^{-11}\text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$
carica elementare	$e = 1,602 \times 10^{-19}\text{ C}$
massa dell'elettrone	$m_e = 9,109 \times 10^{-31}\text{ kg}$
massa del protone	$m_p = 1,673 \times 10^{-27}\text{ kg}$
massa del neutrone	$m_n = 1,675 \times 10^{-27}\text{ kg}$
numero di Avogadro	$N_A = 6,022 \times 10^{23}\text{ mol}^{-1}$
costante di Boltzmann	$k_B = 1,38 \times 10^{-23}\text{ J/K}$
costante dei gas	$R = 8,314\text{ J/mol} \cdot \text{K}$
costante di Planck	$h = 6,62607 \times 10^{-34}\text{ J} \cdot \text{s}$

Tabella 4: Simboli e valori delle più importanti costanti fisiche.

Nome	Valore e unità di misura
massa della Terra	$m_T = 5,98 \times 10^{24}\text{ kg}$
raggio della Terra	$r_T = 6\,378\text{ km}$
massa della Luna	$m_L = 7,35 \times 10^{22}\text{ kg}$
raggio della Luna	$r_L = 1\,737\text{ km}$
massa del Sole	$m_S = 1,99 \times 10^{30}\text{ kg}$
raggio del Sole	$r_S = 695\,508\text{ km}$
massa di Marte	$m_M = 6,24 \times 10^{26}\text{ kg}$
raggio di Marte	$r_M = 3\,397\text{ km}$

Tabella 5: Dati sul Sistema Solare.

θ_{gradi}	0	30	45	60	90	180	270	360
θ_{rad}	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

Tabella 6: È possibile ottenere velocemente anche i multipli degli angoli indicati.

Ad esempio: $120^\circ = 2 \cdot 60^\circ \rightarrow 2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

2.2 Cifre significative ed errori nella misura

Riconoscere le cifre significative (CS) Le CS di una misura sono tutti i numeri che vi compaiono *tranne gli zeri iniziali*. Gli zeri finali sono significativi.

- 12, 00 ha quattro CS;
- 12, 0 ha tre CS;
- 0, 012 ha due CS.

Cifre significative e cifre decimali Attenzione a non confondere le CS con le cifre decimali. Le CS comprendono anche la parte intera del numero (tranne gli zeri iniziali), le cifre decimali sono semplicemente quelle dopo la virgola.

Regole per i calcoli sulle CS A seconda che si stiano eseguendo somme/sottrazioni oppure prodotti/quotienti si stabilisce il numero di CS del risultato in base alle seguenti regole:

- prodotti di numeri interi o frazioni per una misura: il risultato ha tante CS quante la misura di partenza;
- somme e sottrazioni tra misure: nel risultato sono significative tutte le cifre ottenute sommando o sottraendo CS;
- prodotti tra misure: nel risultato si hanno tante CS quante se ne hanno nella misura che possiede meno CS.

Regola da applicare *con giudizio*. Ad esempio:

$$9,8 \cdot 1,03 = 10,1$$

perché in questo caso 9,8 ha sì due CS, ma è un numero molto prossimo ad averne tre, per cui il prodotto potrebbe essere anche efficacemente espresso con tre CS.

Arrotondamento Quando si esegue un calcolo con il corretto numero di CS, dobbiamo arrotondare il risultato. Se la cifra successiva all'ultima cifra che dobbiamo scrivere è:

- 0, 1, 2, 3, 4 si arrotonda per *difetto*;
- 5, 6, 7, 8, 9 si arrotonda per *eccesso*.

Ad esempio:

- 3,257 con *una* CS diventa 3;
- 3,257 con *due* CS diventa 3,3;
- 3,257 con *tre* CS diventa 3,26.

3 Meccanica

3.1 Definizioni fondamentali

Densità

$$d = \frac{m}{V} \quad \left[\frac{kg}{m^3} \right]$$

m = massa del corpo $[kg]$

V = volume del corpo $[m^3]$

Variazione Δ Data una grandezza g , il simbolo $\Delta g = g_1 - g_0$ indica la variazione di g quando essa varia da g_0 a g_1 .

Velocità media

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \left[\frac{m}{s} \right]$$

Δs = spostamento $[m]$

Δt = durata dello spostamento $[s]$

Conversione tra m/s e km/h Possiamo convertire tra le due unità di misura moltiplicando o dividendo per uno stesso valore.

$$\frac{km}{h} \xrightarrow{:3,6} \frac{m}{s}$$

$$\frac{m}{s} \xrightarrow{\cdot 3,6} \frac{km}{h}$$

Accelerazione media

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

Δv = variazione di velocità $[m/s]$

Δt = durata della variazione $[s]$

Definizione operativa Una definizione operativa è il procedimento con cui si introducono le grandezze fisiche. È composta da:

- descrizione degli strumenti di misura che si utilizzano per misurare la grandezza in esame;
- specificazione di un «protocollo di misura», cioè la procedura corretta con cui utilizzare gli strumenti.

3.2 Cinematica

3.2.1 Moto rettilineo uniforme

Legge oraria

$$s(t) = vt + s_0$$

v = velocità del moto $[m/s]$

s_0 = posizione iniziale nel SDR $[m]$

3.2.2 Moto uniformemente accelerato

Legge oraria

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$$

$$v(t) = at + v_0$$

a = accelerazione del moto [m/s^2]

s_0 = posizione iniziale nel SDR [m]

v_0 = velocità iniziale del moto [m/s]

Moto parabolico È la composizione di un moto rettilineo uniforme sull'asse orizzontale con un moto uniformemente accelerato ($a = g = 9,81 m/s^2$) sull'asse verticale. Per la posizione nel sistema di riferimento:

$$\begin{cases} x = v_{0x}t + x_0 \\ y = \frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0 \end{cases}$$

Per le componenti della velocità in ogni istante del moto:

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = gt + v_{0y} \end{cases}$$

Gittata e altezza massima si ottengono ponendo condizioni su queste equazioni.

Per un proiettile sparato da terra, la gittata massima si ha se $\theta = \pi/4$.

3.2.3 Moto circolare uniforme

Periodo Durata di un giro completo della traiettoria circolare.

$$T \quad [s]$$

Frequenza Numero di periodi nell'unità di tempo.

$$f = \frac{1}{T} \quad [s^{-1}] = [Hz]$$

Velocità angolare (pulsazione) Angolo spazzato nell'unità di tempo.

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad \left[\frac{rad}{s} \right]$$

Velocità tangenziale Velocità sempre tangente alla traiettoria circolare.

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r f = \omega r \quad \left[\frac{m}{s} \right]$$

Accelerazione centripeta Accelerazione necessaria a modificare la direzione del vettore velocità tangenziale. È sempre perpendicolare alla velocità tangenziale, cioè rivolta verso il centro della circonferenza.

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

Forza centripeta Forza necessaria ad avere l'accelerazione centripeta.

$$F_c = ma_c = m \frac{v^2}{r} \quad [N]$$

3.2.4 Moto armonico

Legge oraria

$$s(t) = r \cos(\omega t)$$

$$v(t) = -\omega r \sin(\omega t)$$

$$a(t) = -\omega^2 r \cos(\omega t)$$

3.3 Dinamica

Primo principio della dinamica (principio d'inerzia) Un punto materiale mantiene la propria velocità costante se e solo se è soggetto ad una forza totale nulla.

$$\sum \vec{F} = 0 \iff \vec{a} = 0$$

\sum è il simbolo di *sommatoria* e che ci permette di esprimere la somma di un certo numero di addendi. Nella formula precedente, leggeremo: "somma (vettoriale) di tutte le forze".

Sistema di riferimento inerziale Sistema di riferimento (SDR) in cui vale il primo principio della dinamica.

Principio di relatività galileiana Le leggi della meccanica sono le stesse in tutti i SDR inerziali.

Trasformazioni di Galileo Permettono di convertire la posizione di un corpo/punto in due diversi SDR.

Le quantità con apice sono misurate in un SDR S' in moto a velocità \vec{v} rispetto ad un SDR S .

$$\begin{cases} s = s' + vt \\ u = u' + v \\ t = t' \end{cases}$$

s = posizione di un corpo/punto in S

s' = posizione di un corpo/punto in S'

u = velocità del corpo/punto in S

u' = velocità del corpo/punto in S'

t = istante di tempo in S

t' = istante di tempo in S'

Secondo principio della dinamica (legge fondamentale della dinamica) Un corpo subisce un'accelerazione direttamente proporzionale alla forza che viene esercitata su di esso.

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad [N] = [kg \cdot m/s^2]$$

\vec{F} = forza sul corpo $[N]$

\vec{a} = accelerazione $[m/s^2]$

m = massa inerziale del corpo $[kg]$

Terzo principio della dinamica (principio di azione e reazione) Se un corpo A agisce con una forza su un corpo B , anche il corpo B esercita una forza sul corpo A : le due forze hanno lo stesso modulo, la stessa direzione e versi opposti.

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$$

Condizione di equilibrio per corpi puntiformi

$$\sum \vec{F} = 0$$

Forza peso Forza di attrazione che un corpo di massa m subisce per effetto del pianeta su cui si trova, sempre rivolta verso il centro del pianeta.

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

\vec{g} = intensità del campo gravitazionale o accelerazione di gravità (sulla Terra, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$)

Attrito statico La forza di attrito ha sempre verso tale da opporsi al moto che il corpo avrebbe se non ci fosse attrito.

La sua intensità massima vale:

$$\vec{F}_{A \max} = \mu_s \vec{F}_{\perp}$$

μ_s = coefficiente di attrito statico (numero puro) \vec{F}_{\perp} = forza premente sulla superficie $[N]$

Forza di richiamo di una molla (legge di Hooke) Il segno negativo indica che la forza elastica è una forza di richiamo, sempre opposta allo spostamento della molla rispetto alla posizione di equilibrio.

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

k = costante elastica della molla $[N/m]$

\vec{x} = spostamento da posizione di equilibrio $[m]$

Sistema massa-molla Sistema meccanico con una massa m collegata ad una molla con costante elastica k . La forza della molla è una forza di richiamo proporzionale allo spostamento dalla posizione di equilibrio. Senza attrito, la massa si muove di moto armonico con periodo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Pendolo Sistema meccanico formato da una massa m collegata ad un filo di lunghezza L che oscilla per effetto della forza di gravità. Segue le leggi del moto armonico, con una forza di richiamo direttamente proporzionale allo spostamento dalla posizione di equilibrio. Il periodo di oscillazione vale:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

3.4 Lavoro ed energia meccanica

Lavoro Variazione di energia di un corpo, ottenuta esercitando su di esso una forza.

È il prodotto scalare tra la forza esercitata e lo spostamento del corpo.

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs \cos \theta \quad [J] = [N \cdot m]$$

θ = angolo tra i vettori \vec{F} e \vec{s} [rad]

In particolare:

- se $0 \leq \theta < \pi/2$ il lavoro è positivo e viene detto *lavoro motore*;
- se $\pi/2 < \theta \leq \pi$ il lavoro è negativo e viene detto *lavoro resistente*;
- se $\theta = \pi/2$ il lavoro è nullo.

Potenza media Indica quanto lavoro viene fatto nell'unità di tempo.

$$\bar{P} = \frac{L}{\Delta t} \quad [W] = [J/s]$$

Energia cinetica di traslazione È quella forma di energia che un corpo possiede in virtù della sua velocità.

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad [J]$$

m = massa del corpo [kg]

v = velocità del corpo [m/s]

Energia potenziale gravitazionale È l'energia che un corpo possiede in virtù della sua posizione in un campo gravitazionale.

Ricordando che il punto ad energia potenziale nulla (cioè rispetto al quale calcolare h) può essere scelto in modo arbitrario:

$$U_g = mgh \quad [J]$$

Variazione di energia potenziale gravitazionale È il lavoro che una forza compie *contro* la forza peso per portare un corpo da una certa altezza A ad un'altra altezza B.

$$\Delta U_g = -L_{A \rightarrow B} = L_{B \rightarrow A}$$

Energia potenziale elastica Energia immagazzinata in un corpo elastico (ad esempio una molla):

$$U_{elastica} = \frac{1}{2}k(\Delta s)^2 \quad [J]$$

k = costante elastica della molla [N/m]

\vec{x} = spostamento da posizione di equilibrio [m]

Conservazione dell'energia meccanica totale In un sistema isolato si conserva l'energia meccanica.

$$U_0 + K_0 = U_1 + K_1$$

3.5 Quantità di moto e momento angolare

Quantità di moto

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad [kg \cdot m/s]$$

Teorema dell'impulso È una diversa formulazione del secondo principio della dinamica.

$$\Delta\vec{p} = \vec{I} = \vec{F}\Delta t$$

Urti su una retta La quantità di moto totale iniziale è uguale alla quantità di moto totale finale.

$$m_1 v_0 + m_2 w_0 = m_1 v_1 + m_2 w_1$$

m_1, m_2 = masse dei due corpi

v, w = velocità dei due corpi

Urti elastici Urti in cui si conservano sia la quantità di moto totale sia l'energia cinetica.

Urti anelastici Urti in cui si conserva solo la quantità di moto totale, ma non l'energia cinetica (che viene dissipata).

Urti completamente anelastici Urti in cui i due corpi rimangono uniti l'uno all'altro e si muovono dopo l'urto alla stessa velocità.

$$v_{finale} = \frac{m_1 v_0 + m_2 w_0}{m_1 + m_2}$$

Momento di una forza (momento torcente)

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad [N \cdot m]$$

\vec{r} = vettore da un punto al punto di applicazione della forza

Condizioni di equilibrio per corpi rigidi

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \text{e} \quad \sum \vec{M} = 0$$

Momento angolare È un vettore che permette di descrivere, rispetto ad un punto O , la rotazione di un punto materiale.

È il prodotto vettoriale tra il vettore \vec{r} (dal punto O al punto materiale) e la quantità di moto della particella:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

In quanto prodotto vettoriale, \vec{L} è perpendicolare al piano formato da \vec{r} e \vec{p} e, detto θ l'angolo tra \vec{r} e \vec{p} , il suo modulo vale:

$$L = rp \sin \theta$$

Nel caso del moto circolare uniforme \vec{r} e \vec{p} sono perpendicolari e vale:

$$L = rp = rmv$$

Conservazione del momento angolare Il momento angolare di un sistema di corpi si conserva nel tempo se è nullo il momento totale delle forze esterne che agiscono su di esso.

Variazione del momento angolare Se sul sistema agisce un momento di una forza \vec{M} per un tempo Δt , la variazione del momento angolare vale:

$$\Delta \vec{L} = \vec{M} \Delta t$$

Momento d'inerzia Intuitivamente, indica quanto è difficile modificare la velocità angolare di un corpo che ruota intorno ad un asse di rotazione. Il momento d'inerzia I dipende dalla forma del corpo, come mostrato in Tabella 7.

Corpo	Momento d'inerzia
guscio cilindrico rispetto al suo asse	$I = mr^2$
cilindro pieno rispetto al suo asse	$I = \frac{1}{2}mr^2$
sfera piena rispetto a un diametro	$I = \frac{2}{5}mr^2$

Tabella 7: Il momento d'inerzia di alcuni corpi rigidi.

Vale la seguente relazione:

$$L = I\omega$$

e, ovviamente:

$$\Delta L = I\Delta\omega = M\Delta t$$

ω = velocità angolare [rad/s]

Energia cinetica di un corpo in rotazione

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Accelerazione angolare

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad \left[\frac{rad}{s^2} \right]$$

Momento torcente e momento d'inerzia

$$M = I\alpha$$

Confronto tra moti traslazionali e moti rotatori Le quantità e le relazioni individuate per i moti traslazionali hanno un analogo per i moti rotazionali, come mostrato in Tabella 8.

Traslazione	Rotazione
velocità tangenziale v	velocità angolare ω
accelerazione tangenziale a	accelerazione angolare α
massa m	momento d'inerzia I
forza \vec{F}	momento torcente \vec{M}
quantità di moto \vec{p}	momento angolare \vec{L}
$F = ma$	$M = I\alpha$
$p = mv$	$L = I\omega$
$K = \frac{1}{2}mv^2$	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
$\Delta p = F\Delta t$	$\Delta L = M\Delta t$

Tabella 8: Confronto tra i due tipi di moto.

3.6 Gravitazione

Prima legge di Keplero I pianeti descrivono orbite ellittiche di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.

Seconda legge di Keplero Il raggio vettore che va dal Sole ad un pianeta spazza aree uguali in tempi uguali.

Terza legge di Keplero Il rapporto tra il cubo del semiasse maggiore dell'orbita e il quadrato del periodo di rivoluzione è lo stesso per tutti i pianeti del Sistema Solare.

Legge di gravitazione universale La forza è sempre attrattiva e agisce lungo la congiungente tra i due centri di massa.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$G = \text{costante di gravitazione universale} = 6,672 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$

Forza peso Attrazione che un corpo esercita su un corpo posto sulla sua superficie:

$$F_P = G \frac{m_c m_T}{r_T^2} = m_c \left(\frac{G m_T}{r_T^2} \right) = m_c g$$

Accelerazione di gravità sulla superficie della Terra

$$g = 9,807 \frac{m}{s^2}$$

Vettore campo gravitazionale

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \left[\frac{N}{kg} \right]$$

Campo gravitazionale di una massa puntiforme È un vettore rivolto sempre verso la massa puntiforme M .

$$g = G \frac{M}{r^2}$$

Energia potenziale gravitazionale di un sistema di due masse

$$U(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r} \quad [J]$$

3.7 Meccanica dei fluidi

Pressione Se una forza \vec{F} agisce su una superficie S , essa esercita una pressione:

$$p = \frac{F}{S} \quad [Pa] = [N/m^2]$$

Pressione atmosferica

$$1 \text{ atm} = 1,01 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Principio di Pascal Una variazione di pressione applicata ad un liquido chiuso in un contenitore viene trasmessa integralmente in ogni punto del liquido e alle pareti del contenitore.

Legge di Stevino

$$p = dgh + p_{atm}$$

d = densità del liquido

h = profondità

Principio di Archimede Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verso l'alto pari al peso del volume di fluido spostato dal corpo. Tale spinta vale:

$$S = g \cdot d_{fluido} \cdot V_{corpo} \quad [N]$$

Se la spinta è maggiore del peso del corpo, il corpo galleggia nel fluido.

Corrente Una corrente in un fluido è un movimento ordinato di particelle.

Portata

$$q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = S v$$

ΔV = volume di fluido che attraversa una sezione trasversale della condotta nel tempo Δt [m^3]

S = area di una sezione trasversale della condotta [m^2]

v = velocità del fluido [m/s]

4 Termologia e termodinamica

4.1 Temperatura e dilazione termica

Celsius e kelvin Detta T_K la temperatura assoluta (in kelvin) e $T_{\circ C}$ la temperatura in gradi centigradi:

$$T_K = T_{\circ C} + 273,15$$

$$T_{\circ C} = T_K - 273,15$$

$$\Delta T_K = \Delta T_{\circ C}$$

Dilatazione lineare dei solidi

$$\Delta \ell = \ell_0 \lambda \Delta T$$

$$\ell_1 = \ell_0 (1 + \lambda \Delta T)$$

λ = coefficiente di dilatazione lineare [$^{\circ}C^{-1}$ o K^{-1}]

Dilatazione volumica dei solidi e dei liquidi

$$\Delta V = V_0 \alpha \Delta T$$

$$V_1 = V_0 (1 + \alpha \Delta T)$$

α = coefficiente di dilatazione volumica (per i solidi, $\alpha = 3\lambda$) [$^{\circ}C^{-1}$ o K^{-1}]

4.2 Gas perfetti

Massa e moli Detti M la massa molare di una sostanza, n il numero di moli di quella sostanza e $m_{[g]}$ la massa della sostanza espressa in grammi, vale:

$$m_{[g]} = nM$$

Detto altrimenti, una mole di sostanza ha una massa numericamente uguale alla massa molare di quella sostanza, ma espressa in grammi.

Moli e numero di particelle Detto n il numero di moli, N il numero di particelle e N_A il numero di Avogadro, vale:

$$n = \frac{N}{N_A}$$

N_A = numero di Avogadro = $6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Trasformazioni dei gas Distinguiamo le trasformazioni che un gas può subire in base alla variabile di stato (pressione, volume, temperatura) che rimane costante, come riportato in Tabella 9.

Nome	Q.tà costante	Legge sperimentale	Formula	Legge
isoterma	temperatura	legge di Boyle	$pV = \text{costante}$	$p_0V_0 = p_1V_1$
isòbara	pressione	I legge di Gay-Lussac	$V/T = \text{costante}$	$V_0/T_0 = V_1/T_1$
isocòra	volume	II legge di Gay-Lussac	$p/T = \text{costante}$	$p_0/T_0 = p_1/T_1$

Tabella 9: Tre trasformazioni dei gas.

Formula dei gas perfetti Ricordando che è possibile utilizzare una qualunque unità di misura adatta per pressione e volume, mentre la temperatura *deve* essere espressa in kelvin, vale:

$$\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{p_1V_1}{T_1}$$

Equazione di stato dei gas perfetti

$$pV = nRT$$

p = pressione [Pa]

T = temperatura assoluta [K]

V = volume [m^3]

R = costante dei gas = $8,314 \text{ J/mol} \cdot K$

n = numero di moli [mol]

4.3 Calore

Joule e calorie

$$1 \text{ cal} = 4,186 \text{ J}$$

$$1 \text{ Cal} = 1 \text{ kcal} = 4186 \text{ J}$$

Legge fondamentale della calorimetria

$$Q = cm\Delta T$$

Q = calore scambiato [J]

m = massa del corpo [kg]

c = calore specifico [$J/kg \cdot K$]

ΔT = variazione di temperatura [K]

Calore specifico dell'acqua

$$c_{H_2O} = 4,186 \times 10^3 \frac{J}{kg \cdot K}$$

Potere calorifico Misura quanto calore Q è prodotto nella combustione completa di una massa di 1 kg di combustibile.

$$P_c = \frac{Q}{m} \quad \left[\frac{J}{kg} \right]$$

Propagazione del calore Il calore può propagarsi per *conduzione*, *convezione* o *irraggiamento*, a seconda del mezzo e dello spostamento o meno di materia. La Tabella 10 riporta le caratteristiche di ciascun meccanismo.

Meccanismo	Mezzi	Trasferimento
Conduzione	Solidi	Solo energia
Convezione	Fluidi	Energia e materia
Irraggiamento	Vuoto e corpi trasparenti	Solo energia

Tabella 10: I meccanismi di propagazione del calore.

Passaggi di stato Per la fusione vale:

$$Q = L_f m$$

L_f = calore latente di fusione [J/kg]

Per la vaporizzazione:

$$Q = L_v m$$

L_v = calore latente di vaporizzazione [J/kg]

4.4 Modello microscopico della materia

Energia cinetica media di un gas L'energia cinetica di una particella di gas dipende dalla sua struttura molecolare.

- $\bar{K} = \frac{3}{2} k_B T$ per gas con tre gradi di libertà (monoatomici);
- $\bar{K} = \frac{5}{2} k_B T$ per gas con cinque gradi di libertà (biatomici);
- $\bar{K} = 6 k_B T$ per strutture molecolari non lineari.

k_B = costante di Boltzmann = $1,38 \times 10^{-23} J/K$

Energia interna di un gas perfetto Indicando con ℓ il numero dei gradi di libertà del gas, vale:

$$U = \frac{\ell}{2} N k_B T = \frac{\ell}{2} n R T$$

4.5 Primo principio della termodinamica

Principio zero della termodinamica Se un corpo A è in equilibrio termico con un corpo B e il corpo B è in equilibrio termico con un corpo C , allora A e C sono in equilibrio termico tra loro.

Primo principio della termodinamica (PPT) La variazione di energia interna è uguale alla differenza tra il calore scambiato e il lavoro.

$$\Delta U = Q - L$$

Se il sistema riceve calore, Q è positivo; se il sistema cede calore Q è negativo.

Se il sistema compie lavoro (sull'ambiente), L è positivo; se il sistema subisce lavoro, L è negativo.

Trasformazioni cicliche e adiabatiche Oltre alle trasformazioni già riportate in Tabella 9 a pagina 21, aggiungiamo le trasformazioni *adiabatiche* (senza scambi di calore con l'ambiente) e quelle *cicliche* (che iniziano e si concludono con gli stessi valori delle variabili di stato).

Piano di Clapeyron È un piano volume/pressione su vengono rappresentate le trasformazioni termodinamiche.

Lavoro termodinamico Il lavoro compiuto durante una trasformazione termodinamica è uguale all'area sottesa dalla curva nel piano di Clapeyron.

Particolarmente facile nel caso delle trasformazioni isobare, poiché risulta essere l'area di un rettangolo.

Trasformazione isobara Il PPT assume la forma $\Delta U = Q - p\Delta V$. Grafico in Figura 9.

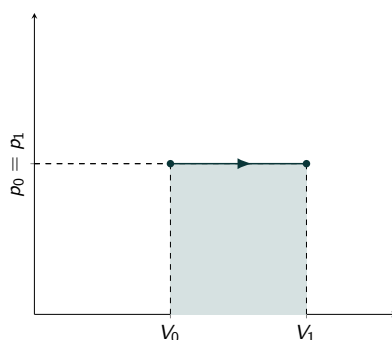


Figura 9: Una trasformazione isobara è rappresentata da un segmento orizzontale, pertanto il lavoro termodinamico è uguale all'area del rettangolo sotteso alla curva.

Trasformazione isocora Il PPT assume la forma $\Delta U = Q$. Grafico in Figura 10.

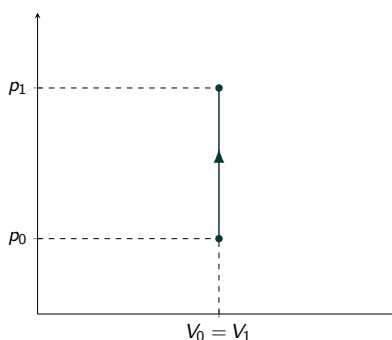


Figura 10: Una trasformazione isocora è rappresentata da un segmento verticale, e pertanto il lavoro termodinamico è nullo.

Trasformazione isoterma Il PPT assume la forma $Q = L$. Grafico in Figura 11.

Trasformazione adiabatica Il PPT assume la forma $\Delta U = -L$. Grafico in Figura 12.

Trasformazione ciclica Il PPT assume la forma $Q = L$. Grafico in Figura 13.

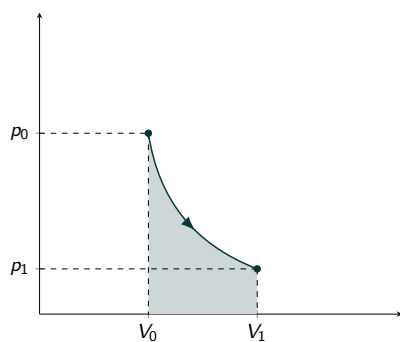


Figura 11: Una trasformazione isoterma è rappresentata da un ramo di iperbole.

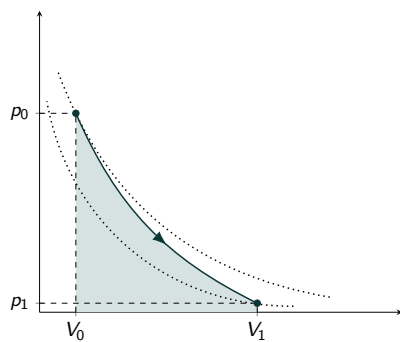


Figura 12: Una trasformazione adiabatica è rappresentata da una curva che unisce due punti delle isoterme corrispondenti all'inizio e alla fine della trasformazione.

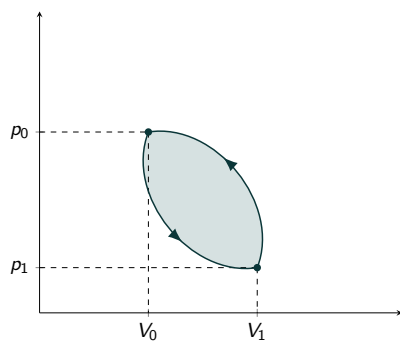


Figura 13: Una trasformazione ciclica è rappresentata da una linea chiusa.

4.6 Secondo principio della termodinamica

Enunciato di Lord Kelvin È impossibile realizzare una trasformazione termodinamica il cui *unico* risultato sia quello di assorbire una certa quantità di calore da un'unica sorgente e trasformarla *integralmente* in lavoro.

Una macchina termica reale assorbe calore Q_2 dalla sorgente calda, compie un lavoro $L < Q_2$ e cede l'energia rimanente alla sorgente fredda.

Enunciato di Clausius È impossibile realizzare una trasformazione termodinamica il cui *unico* risultato sia quello di trasferire calore da un corpo più freddo a uno più caldo.

Soltanto un lavoro esterno provoca il passaggio di calore da un corpo a temperatura minore ad un corpo a temperatura maggiore.

Rendimento di una macchina termica

$$\eta = \frac{L}{Q_2} = 1 - \frac{|Q_1|}{Q_2}$$

L = lavoro in un ciclo

Q_2 = calore assorbito in un ciclo

Q_1 = calore ceduto in un ciclo

Enunciato del rendimento È impossibile realizzare una macchina termica che abbia rendimento uguale a 1.

$$0 \leq \eta < 1$$

Macchina reversibile Macchina ideale che compie una trasformazione ciclica reversibile.

Teorema di Carnot Il rendimento di una macchina reversibile è sempre maggiore o uguale al rendimento di una macchina qualunque che lavora tra le stesse temperature:

$$\eta_R \leq \eta_S$$

Ciclo di Carnot È un ciclo composto da quattro trasformazioni termodinamiche reversibili:

1. espansione isoterma;
2. espansione adiabatica;
3. compressione isoterma;
4. compressione adiabatica.

Rendimento della macchina di Carnot

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Disuguaglianza di Clausius

$$\frac{\Delta Q_1}{T_1} + \frac{\Delta Q_2}{T_2} + \dots + \frac{\Delta Q_n}{T_n} \leq 0$$

Se la macchina è reversibile il membro di sinistra è uguale a zero.

Entropia

$$\Delta S = S(B) - S(A) = \left(\sum_i \frac{\Delta Q_i}{T_i} \right)_{A \rightarrow B}^{rev} \quad \left[\frac{J}{K} \right]$$

L'entropia è una funzione di stato: la sua variazione non dipende dal tipo di trasformazione, ma solo dallo stato B e dallo stato A .

Come l'energia potenziale, il suo valore zero può essere scelto in modo arbitrario.

Se nel sistema avvengono solo trasformazioni reversibili, l'entropia rimane costante. L'entropia aumenta se le trasformazioni sono irreversibili.

5 Onde

5.1 Onde elastiche

Onda trasversale Si ha quando gli elementi del mezzo materiale si spostano *perpendicolarmente* al moto dell'onda.

Onda longitudinale Si ha quando gli elementi del mezzo materiale si spostano *parallelamente* al moto dell'onda.

Onda elastica È un'onda che si propaga grazie alle proprietà elastiche del mezzo materiale che le fa da supporto.

Fronte d'onda Insieme di tutti i punti in cui l'onda vibra allo stesso modo, cioè in cui la grandezza che oscilla ha lo stesso valore.

Raggi dell'onda Sono le rette perpendicolari ai fronti d'onda.

Onda periodica È un'onda che si ripete identica dopo un intervallo di tempo costante.

Periodo Tempo che un punto del mezzo materiale impiega per compiere un'oscillazione completa.

$$T \quad [s]$$

Frequenza Numero di oscillazioni al secondo.

$$f = \frac{1}{T} \quad [s^{-1}] = [Hz]$$

Pulsazione dell'onda

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad \left[\frac{rad}{s} \right]$$

Velocità di propagazione dell'onda

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \quad \left[\frac{m}{s} \right]$$

λ = lunghezza d'onda [m]

Legge oraria delle onde in un punto fissato Il grafico è mostrato in Figura 14.

$$y = a \cos \left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0 \right) = a \cos (\omega t + \varphi_0)$$

a = ampiezza dell'oscillazione

ω = pulsazione

φ_0 = sfasamento

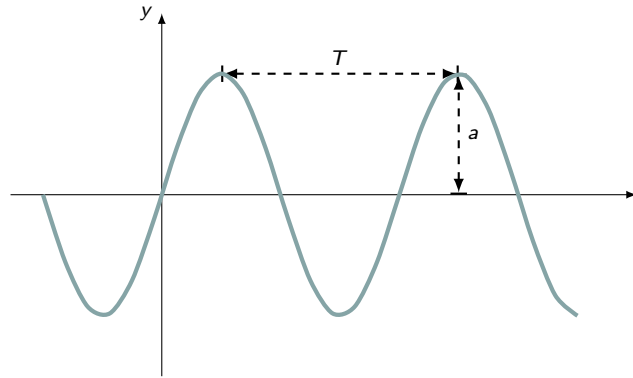


Figura 14: Grafico della legge oraria delle onde armoniche in un punto fissato.

Legge delle onde in un istante fissato Il grafico è mostrato in Figura 15.

$$y = a \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} x + \varphi_0 \right)$$

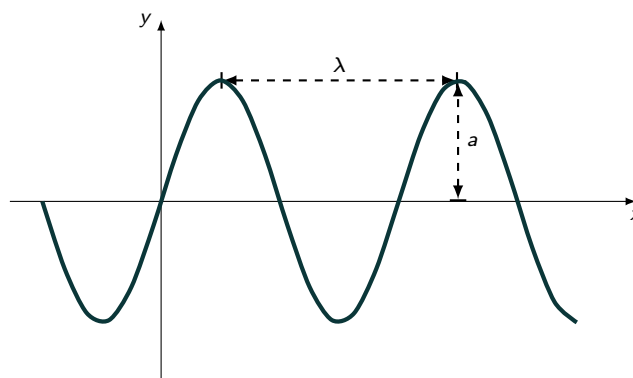


Figura 15: Grafico della legge delle onde armoniche in un istante fissato.

Principio di sovrapposizione Due o più onde che si propagano nello stesso mezzo generano una perturbazione che è la somma delle perturbazioni che ciascuna onda produrrebbe da sola.

Interferenza costruttiva Gli effetti di due o più onde si rafforzano a vicenda.

Interferenza distruttiva Gli effetti di due o più onde si annullano a vicenda.

5.2 Suono

Definizione Il suono è un'onda longitudinale generata da successive rarefazioni e compressioni del mezzo in cui si propaga. La sorgente del suono è un corpo che vibra.

Velocità del suono nell'aria Alla pressione atmosferica e a 293 K vale circa 340 m/s.

Altezza Distingue un suono più acuto da uno più grave e cresce all'aumentare della frequenza dell'onda sonora.

Intensità Distingue un suono ad un volume basso da un suono a volume alto. Cresce all'aumentare dell'ampiezza dell'onda sonora.

$$I = \frac{E}{A\Delta t} \quad \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

E = energia che attraversa la superficie A nel tempo Δt

Timbro Distingue il suono prodotto da strumenti diversi. Dipende dalla particolare legge periodica con cui oscilla l'onda sonora.

Limiti di udibilità L'orecchio umano può percepire suoni con frequenza compresa tra 20 e 20 000 Hz . A frequenze inferiori si trovano gli infrasuoni, a frequenze superiori si trovano gli ultrasuoni.

Livello di intensità sonora

$$L_s = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad [dB]$$

I_0 = minima intensità sonora udibile = $10^{-12} W/m^2$

Si assegna il valore 0 dB alla soglia di udibilità, il valore 130 dB alla soglia del dolore.

Effetto Doppler La frequenza di un'onda periodica, rilevata da un ricevitore in moto rispetto alla sorgente dell'onda, è diversa da quella rilevata da un ricevitore in quiete rispetto alla sorgente.

Sorgente ferma e ricevitore in moto

$$f' = \frac{v_s \pm v}{v_s} f$$

f' = frequenza rilevata

v = velocità del ricevitore

v_s = velocità del suono

f = frequenza emessa

Usiamo il segno $+$ se il ricevitore si avvicina alla sorgente (la frazione vale più di 1 e $f' > f$), il segno $-$ se il ricevitore si allontana dalla sorgente (la frazione vale meno di 1 e $f' < f$).

Sorgente in moto e ricevitore fermo

$$f' = \frac{v_s}{v_s \pm v} f$$

Usiamo il segno $+$ se la sorgente si allontana dal ricevitore (la frazione vale meno di uno e $f' < f$), il segno $-$ se la sorgente si avvicina al ricevitore (la frazione vale più di uno e $f' > f$).

5.3 Onde luminose e ottica geometrica

Natura della luce A seconda delle situazioni, la luce può essere descritta come un'onda elettromagnetica (modello ondulatorio) costituita da campi elettrici e magnetici oscillanti che si propagano anche nel vuoto, o come un insieme di corpuscoli chiamati fotoni (modello corpuscolare).

Legge della riflessione Il raggio incidente, il raggio riflesso e la perpendicolare alla superficie riflettente nel punto di incidenza appartengono allo stesso piano.

L'angolo di incidenza è uguale all'angolo di riflessione.

Indice di rifrazione Rapporto tra la velocità della luce nel vuoto e la velocità della luce nel mezzo materiale.

$$n = \frac{c}{v}$$

Poiché la luce ha la sua massima velocità nel vuoto, l'indice di rifrazione è sempre maggiore di uno.

Legge della rifrazione (legge di Snell)

$$\frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}} = \frac{n_2}{n_1}$$

\hat{i}, \hat{r} = angolo di incidenza e rifrazione

n_1, n_2 = indici di rifrazione dei due mezzi

Riflessione totale Fenomeno per cui oltre un certo angolo di incidenza (detto *angolo limite*) non si ha più alcun raggio rifratto. L'angolo limite si ottiene dalla legge di Snell ponendo $\hat{r} = \frac{\pi}{2}$ (cioè $\sin \hat{r} = 1$) e quindi:

$$\sin \hat{i}_{lim} = \frac{n_2}{n_1}$$

da cui:

$$\hat{i}_{lim} = \arcsin \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$$

Spettro visibile Insieme delle lunghezze d'onda tra i 380 nm (violetto) e i 750 nm (rosso) circa, mostrato in Figura 16.

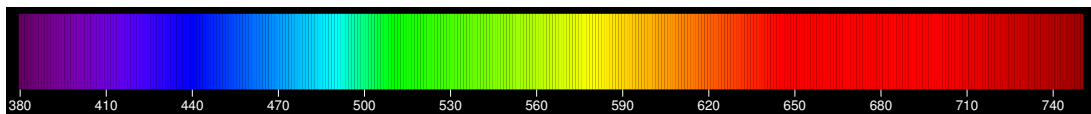


Figura 16: Corrispondenza tra colori della luce visibile e lunghezze d'onda.

Specchi sferici concavi La distanza focale di uno specchio sferico concavo è pari alla metà del raggio dello specchio.

$$f = \frac{R}{2}$$

Formula dei punti coniugati per gli specchi

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f} = \frac{2}{R}$$

p = distanza dell'oggetto dallo specchio

f = distanza focale

i = distanza dell'immagine dallo specchio

Se i è positivo l'immagine è situata di fronte allo specchio (immagine reale), se i è negativo l'immagine si trova dietro di esso (immagine virtuale).

Ingrandimento

$$M = \frac{i}{p}$$

Se $|M| < 1$, l'immagine è rimpicciolita rispetto all'oggetto, se $|M| > 1$ l'immagine è ingrandita. Se $M > 0$, l'immagine è dritta rispetto all'oggetto, se $M < 0$, l'immagine è capovolta rispetto all'oggetto.

Formula dei punti coniugati per le lenti sottili

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f}$$

Se l'oggetto a distanza p è reale, p è positivo, altrimenti è negativo.

Se l'immagine a distanza i è reale, i è positivo, se è virtuale è negativo.

Se la lente è convergente, f è positivo, se la lente invece è divergente è negativo.

Diffrazione Fenomeno per cui le onde sono in grado di aggirare un ostacolo e passare nella zona posta al di là dell'ostacolo stesso. La diffrazione è notevole quando il diametro dell'ostacolo è confrontabile con la lunghezza d'onda delle onde.

Principio di Huygens Ogni punto su di un fronte d'onda funge da sorgente puntiforme di nuove onde.

Interferenza con due sorgenti (esperimento di Young) Quando due sorgenti luminose sono separate da una distanza d ed emettono identiche onde in fase, si osserva interferenza costruttiva tra le onde nelle direzioni date da:

$$\sin \theta_m = \frac{m\lambda}{d}$$

e interferenza distruttiva nelle direzioni date da:

$$\sin \theta_m = \frac{(m + \frac{1}{2})\lambda}{d}$$

L'angolo θ è misurato a partire dall'asse del segmento avente le sorgenti come estremi. m è un numero intero, il cui valore è chiamato ordine dell'interferenza costruttiva.

Sfasamento delle onde riflesse Quando un'onda che si propaga in un mezzo con indice di rifrazione n_1 viene riflessa da un mezzo con indice di rifrazione n_2 , se $n_2 > n_1$ l'onda riflessa subisce uno sfasamento di mezzo ciclo rispetto all'onda incidente. Se invece $n_2 < n_1$, la riflessione non provoca sfasamento.

6 Fenomeni elettrici e magnetici

6.1 Elettrostatica

Elettrizzazione di un corpo In Tabella 11 sono riassunti i tre modi di elettrizzare un corpo, ovvero portare ad uno squilibrio tra cariche positive e negative.

Metodo	Descrizione	Meccanismo	Materiali
Strofinio	Si ottiene strofinando tra loro due corpi.	Elettroni passano da un oggetto (che si carica positivamente) ad un altro (che si carica negativamente).	Isolanti o conduttori impugnati con un manico isolante.
Contatto	Si ottiene mettendo a contatto un corpo elettricamente neutro con uno caricato in precedenza.	Una parte delle cariche che si trovano sul corpo elettrizzato si sposta su quello che era neutro.	Avviene in maniera molto efficace tra corpi conduttori. Un corpo isolante può cedere solo le cariche che si trovano su quella parte che è in diretto contatto con il corpo neutro.
Induzione	Si pone un corpo carico (induttore) in prossimità di un conduttore scarico (indotto) costruito in modo da poterlo suddividere in due parti. Senza allontanare il corpo induttore, si separano le due parti del conduttore indotto.	A causa dell'induzione elettrostatica le cariche del corpo neutro si separano: quelle dello stesso segno della carica inducente si allontanano da essa, quelle di segno opposto le si avvicinano.	Due conduttori posti dapprima vicini e poi allontanati.

Tabella 11: I metodi di elettrizzazione.

Legge di Coulomb Fornisce il modulo della forza, attrattiva o repulsiva, tra due cariche elettriche. Tale forza ha come direzione la congiungente tra le due cariche e vale:

$$F = k_0 \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

k_0 = costante elettrica del vuoto

r = distanza tra le cariche [m]

q_1, q_2 = moduli delle due cariche [C]

Costante elettrica del vuoto (costante di Coulomb)

$$k_0 = 8,99 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$$

Costante dielettrica del vuoto (permittività elettrica del vuoto)

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

Tra k_0 e ϵ_0 vale la seguente relazione:

$$k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Costante dielettrica di un mezzo È il rapporto tra la forza di Coulomb nel vuoto e la forza nel mezzo.

Essendo la forza massima nel vuoto, tale rapporto è sempre superiore a uno.

$$\epsilon_r = \frac{F_{vuoto}}{F_{mezzo}}$$

Viene sostanzialmente affiancata a ϵ_0 quando non si lavora nel vuoto.

Campo elettrico Il campo elettrico è una funzione che ad ogni punto dello spazio circostante una carica (identificato con la sua distanza r da essa) associa una forza elettrica. Vale:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_P} \quad \left[\frac{N}{C} \right]$$

q_P = carica di prova, positiva

\vec{F} = forza subita dalla carica di prova

L'intensità del campo elettrico può essere espressa in funzione della carica sorgente (Q_S) e della distanza da essa (r):

$$E = k_0 \frac{Q_S}{r^2}$$

Flusso del campo elettrico È il prodotto scalare del vettore campo elettrico \vec{E} e del vettore superficie \vec{S} .

$$\Phi_S(E) = \vec{E} \cdot \vec{S} = ES \cos \theta \quad \left[\frac{N \cdot m^2}{C} \right]$$

θ = angolo tra i vettori \vec{E} e \vec{S}

Intuitivamente, indica quanto e come le linee di campo attraversano una superficie.

Teorema di Gauss per il campo elettrico Il flusso del campo elettrico attraverso la superficie chiusa/gaussiana S è direttamente proporzionale alla quantità di carica racchiusa all'interno della superficie.

$$\Phi_S(E) = \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0}$$

Lavoro in un campo elettrico Assumendo un campo elettrico \vec{E} di intensità costante, per portare una carica q da un punto A fino ad un punto B è necessario un lavoro, cioè:

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s} = q\vec{E} \cdot \vec{s}$$

Energia potenziale elettrica in A (rispetto a B) È il lavoro che una forza compie *contro* al campo elettrico per portare un corpo da una certo punto B ad un altro punto A .

$$U_A = L_{B \rightarrow A}$$

Energia potenziale elettrica di un sistema di due cariche Se vogliamo porre due cariche nel vuoto a distanza r l'una dall'altra, notiamo che per porre la prima non è necessario lavoro, mentre per porre la

seconda dovremo avere un lavoro pari a:

$$L = \Delta U = k_0 \frac{q_1 q_2}{r}$$

Questo lavoro è l'energia potenziale del sistema di cariche. Nel caso di sistemi di più cariche, basta sommare le energie potenziali calcolate per tutte le possibili coppie di cariche.

Potenziale elettrico in un punto A

$$V_A = \frac{U_A}{q_P} \quad [V] = [J/C]$$

U_A = energia potenziale della carica di prova q_P nel punto A

Utilissima una conseguenza di questa formula, che permette di calcolare l'energia ΔU guadagnata da una carica q sottoposta ad una differenza di potenziale (tensione) ΔV :

$$\Delta U = q \cdot \Delta V$$

Differenza di potenziale (tensione) tra i punti A e B

$$\Delta V_{AB} = \frac{\Delta U_{AB}}{q_P} = \frac{L_{B \rightarrow A}}{q_P} = -\vec{E} \cdot \vec{s}$$

Potenziale elettrico generato da una carica Q a distanza r

$$V(r) = k_0 \frac{Q}{r}$$

Circuitazione del campo elettrico lungo una linea chiusa \mathcal{L}

$$\Gamma_{\mathcal{L}}(E) = \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{\ell}_i = \sum_i E_i \Delta \ell_i \cos \theta_i = - \sum_i \Delta V_i = 0$$

La circuitazione del campo elettrostatico lungo una *qualsiasi* linea chiusa è uguale a zero.

Quando questo accade diciamo che il campo è *conservativo*, ovvero un campo in cui il valore dell'energia potenziale in un punto non dipende dal percorso scelto per arrivarci, ma solo dalla posizione del punto stesso. Una conseguenza di questo fatto è che nel campo si conserva l'energia meccanica.

Detto altrimenti, in un campo conservativo è possibile definire un potenziale in ogni punto dello spazio, in modo tale che considerando la differenza di potenziale tra due punti si possa vedere quanto lavoro è necessario per spostarsi dall'uno all'altro.

Teorema di Coulomb Permette di calcolare il valore del campo elettrico in prossimità della superficie di un conduttore carico. Il campo elettrico risulta normale alla superficie.

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

σ = densità superficiale di carica [C/m^2]

Capacità di un condensatore

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \quad [F] = [C/V]$$

Q = carica sulle armature ($+Q$ su quella positiva, $-Q$ su quella negativa)

ΔV = differenza di potenziale tra le armature

Capacità di un condensatore piano

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

S = superficie dell'armatura [m^2]

d = distanza tra le armature [m]

Capacità totale per condensatori in parallelo I condensatori sono collegati in modo da essere sottoposti alla stessa tensione. Schema in Figura 17.

$$C_{tot} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

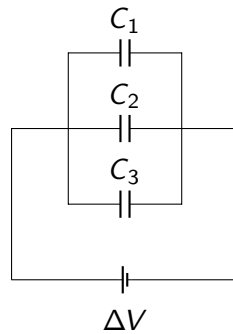


Figura 17: Schema di collegamento per condensatori in parallelo.

Capacità totale per condensatori in serie I condensatori sono collegati in modo che su ogni armatura si trovi la medesima carica: $+Q$ per l'armatura positiva, $-Q$ per quella negativa. Schema in Figura 18.

$$\frac{1}{C_{tot}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

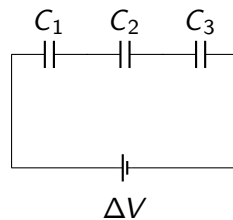


Figura 18: Schema di collegamento per condensatori in serie.

Campo elettrico all'interno di un condensatore

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Energia immagazzinata in un condensatore

$$E = L_{carica} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

6.2 Corrente elettrica

Circuito elettrico È un insieme di conduttori collegati tra loro in modo continuo collegati ad un generatore di tensione. Può essere costituito da diversi elementi, i più importanti dei quali sono riportati in Tabella 12

Elemento	Simbolo
filo	—
interruttore	— / —
generatore	— —
lampadina	— ⊗ —
resistore	— ⚡ —
LED	— ⚡ —
condensatore	— —
induttore	— ⚡ —
alternatore	— ~ —

Tabella 12: Elementi circuitali fondamentali e rispettivo simbolo.

Intensità di corrente elettrica

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad [A] = [C/s]$$

Intensità istantanea di corrente:

$$i_{ist} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} = q'(t)$$

L'intensità di corrente è la derivata della carica rispetto al tempo.

Prima legge di Ohm La corrente che circola nel circuito è direttamente proporzionale alla differenza di potenziale applicata (ΔV) e inversamente proporzionale alla resistenza (R) del circuito.

$$i = \frac{\Delta V}{R}$$

R = resistenza elettrica [Ω] = [V/A]

Resistenza totale per resistori in parallelo I resistori sono collegati in modo da essere sottoposti alla stessa tensione. Schema in Figura 19.

$$\frac{1}{R_{tot}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

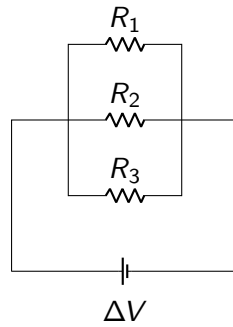


Figura 19: Schema di collegamento per resistori in parallelo.

Resistenza totale per resistori in serie I resistori sono collegati in modo da essere attraversati dalla stessa corrente. Schema in Figura 20.

$$R_{tot} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

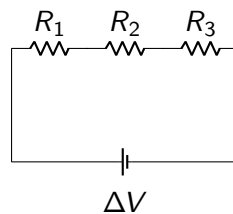


Figura 20: Schema di collegamento per resistori in serie.

Principi di Kirchhoff Due leggi utilizzate nella risoluzione dei circuiti:

- *legge dei nodi*: la somma delle correnti entranti in un nodo è uguale alla somma delle correnti uscenti (conseguenza del principio di conservazione della carica);

$$\sum i_{in} = \sum i_{out}$$

- *legge delle maglie*: la somma algebrica delle differenze di potenziale lungo una maglia è uguale a zero (conseguenza del principio di conservazione dell'energia).

$$\sum \Delta V = 0$$

Potenza dissipata da una resistenza

$$P = \frac{L}{\Delta t} = i\Delta V = i^2 R = \frac{V^2}{R} \quad [W]$$

La differenza di energia prima e dopo il passaggio di corrente è causa dell'effetto Joule.

Effetto Joule È la trasformazione di energia potenziale elettrica in energia termica (calore). Viene dissipata una quantità di energia pari a:

$$L = P\Delta t = i^2 R \Delta t \quad [J]$$

Kilowattora Un kilowattora è l'energia assorbita in un'ora da un dispositivo che dissipa la potenza di 1000 W.

$$1 kWh = 3,6 \times 10^6 J$$

Forza elettromotrice di un generatore di tensione Volendo mantenere una differenza di potenziale tra i due poli di un generatore, è necessario un lavoro per il trasporto delle cariche verso i rispettivi poli.

Definiamo forza elettromotrice la differenza di potenziale ai capi di un generatore ideale (senza cioè resistenza interna) o di un generatore reale non connesso ad un circuito.

$$f_{em} = \frac{L}{q} \quad [V]$$

La f_{em} altro non è se non la circuitazione lungo una linea non chiusa (da un polo all'altro), che pertanto risulta diversa da zero.

Resistenza interna e generatore reale La resistenza interna misura l'impedimento al moto delle cariche che si ha all'interno del generatore, pertanto un generatore reale di tensione è modellizzato come un generatore ideale di tensione collegato in serie ad una opportuna resistenza interna.

La tensione di un generatore reale vale:

$$\Delta V = \frac{R}{R + r} f_{em}$$

e si genera una corrente:

$$i = \frac{f_{em}}{R + r}$$

R = resistenza del circuito $[\Omega]$

r = resistenza interna del generatore $[\Omega]$

Seconda legge di Ohm

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

ρ = resistività, dipende dal materiale $[\Omega \cdot m]$

S = sezione del conduttore $[m^2]$

L = lunghezza del resistore $[m]$

Dipendenza della resistività dalla temperatura

$$\Delta \rho = \alpha \rho_0 \Delta T$$

α = coefficiente di temperatura della resistività $[K^{-1}]$

ρ_0 = resistività a 293 K

Questa relazione vale da 100 K circa fino alla temperatura di fusione del metallo.

Superconduttività A temperature molto basse la resistività di alcuni materiali cala bruscamente fino ad arrivare praticamente a zero. In questo caso il materiale passa allo stato di superconduttività.

La temperatura alla quale ciò avviene è detta temperatura critica (per il mercurio è circa 4 K).

Circuito RC Consiste di un generatore che fornisce una certa f_{em} , una resistore con resistenza R e un condensatore con capacità C .

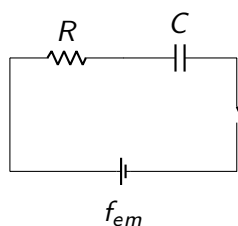


Figura 21: Schema di un circuito RC.

Ricordando che un condensatore viene considerato praticamente carico/scarico dopo un tempo $t = 5RC$, le formule per la carica presente sulle armature e per la corrente nel circuito al tempo t sono riportate in Tabella 13.

Carica	Scarica
$q(t) = C \cdot f_{em} \cdot (1 - e^{-t/RC})$	$q(t) = C \cdot f_{em} \cdot e^{-t/RC}$
$i(t) = \frac{f_{em}}{R} \cdot e^{-t/RC}$	$i(t) = -\frac{f_{em}}{R} \cdot e^{-t/RC}$

Tabella 13: Formule per il circuito RC (carica e scarica di un condensatore).

Elettronvolt Un elettronvolt (eV) è l'energia acquistata da una carica con modulo pari alla carica elementare e quando è accelerata da una differenza di potenziale di un volt.

$$1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$$

6.3 Elettromagnetismo

Legge di Ampère

$$F = k \cdot \frac{i_1 i_2}{d} \cdot L = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{i_1 i_2}{d} \cdot L$$

F = forza subita dai due fili

d = distanza tra i fili

i_1, i_2 = correnti nei due fili

L = lunghezza dei fili

Legge di Biot-Savart Una corrente genera intorno a sé un campo magnetico la cui intensità è data da:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} i \quad [T] = [N/A \cdot m]$$

B = intensità del campo magnetico

r = distanza dal filo

i = corrente nel filo

Permeabilità magnetica del vuoto

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{N}{A^2}$$

Forza subita da un filo in un campo magnetico Se il campo B e la corrente i che scorre in un filo lungo ℓ sono perpendicolari, vale:

$$F = Bi\ell$$

Isolando B in questa relazione otteniamo la definizione dell'intensità del campo magnetico:

$$B = \frac{F}{i\ell}$$

Se la corrente e il campo non sono perpendicolari, dobbiamo calcolare la componente di \vec{B} perpendicolare al filo ($\vec{\ell}$):

$$F = B_{\perp} i\ell = Bi\ell \sin \theta$$

θ = angolo tra \vec{B} e $\vec{\ell}$

Possiamo facilmente esprimere questa formula con il prodotto vettoriale:

$$F = i\vec{\ell} \times \vec{B}$$

Campo al centro di una spira

$$B = \mu_0 \frac{i}{2r}$$

r = raggio della spira

Campo al centro di un solenoide lungo ℓ con N spire

$$B = \mu_0 \frac{Ni}{\ell}$$

Forza di Lorentz È la forza subita da una carica in moto in un campo magnetico.

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Indicando con θ l'angolo tra \vec{v} e \vec{B} , il modulo della forza vale:

$$F = qvB \sin \theta$$

Se la carica è positiva si usa la regola della mano destra, da invertire nel caso di una carica negativa.

Raggio della traiettoria della carica La forza di Lorentz, essendo perpendicolare alla velocità della carica, agisce da forza centripeta, determinando una traiettoria circolare di raggio:

$$r = \frac{mv}{qB}$$

m = massa della particella

Flusso del campo magnetico Analogamente al flusso del campo elettrico.

$$\Phi_S(B) = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos \theta \quad [Wb] = [T \cdot m^2]$$

Teorema di Gauss per il campo magnetico Il flusso del campo magnetico attraverso la superficie chiusa/gaussiana S è sempre nullo, poiché non esistono monopoli magnetici.

$$\Phi_S(B) = 0$$

Circuitazione del campo magnetico lungo la linea chiusa \mathcal{L}

$$\Gamma_{\mathcal{L}}(B) = \sum_i \vec{B}_i \cdot \Delta \vec{\ell}_i = \sum_i B_i \Delta \ell_i \cos \theta_i$$

Teorema di Ampère Afferma che il campo magnetico non è conservativo, poiché la sua circuitazione può essere diversa da zero.

$$\Gamma_{\mathcal{L}}(B) = \mu_0 \sum_k i_k$$

i_k = correnti concatenate a \mathcal{L}

6.4 Induzione elettromagnetica

Legge di Faraday-Neumann Permette di calcolare la forza elettromotrice (f_{em}) indotta da una variazione del flusso del campo magnetico.

$$f_{em\ ind} = - \frac{\Delta \Phi(B)}{\Delta t}$$

Forza elettromotrice indotta istantanea

$$f_{em\ ind\ ist} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} - \frac{\Delta \Phi(B)}{\Delta t} = - \frac{d\Phi(B)}{dt} = -\Phi'(t)$$

Legge di Lenz Il verso della corrente indotta è tale da opporsi alla variazione di flusso che la genera. Tale legge è indicata dal segno meno delle formule precedenti.

Induttanza È la costante di proporzionalità tra il flusso del campo magnetico e la corrente che fluisce nel circuito. Il valore di L dipende da come è fatto un circuito e dal materiale di cui è composto.

$$L = \frac{\Phi(B)}{i} \quad [H] = [Wb/A]$$

Autoinduzione Se in un circuito si verifica induttanza L avremo una forza elettromotrice autoindotta:

$$f_{em\ auto} = -\frac{\Delta\Phi(B)}{\Delta t} = -L \frac{\Delta i}{\Delta t}$$

La frazione indica la velocità con cui varia la corrente nel circuito.

Circuito RL Indicando con $i_0 = f_{em}/R$ la corrente che si avrebbe senza induttanza, valgono:

alla chiusura del circuito:

$$i(t) = i_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

all'apertura del circuito:

$$i(t) = i_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

In entrambi i casi si ha un asintoto orizzontale se il tempo tende a infinito.

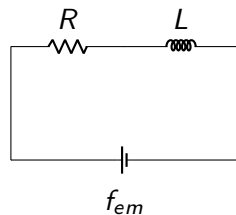


Figura 22: Schema di un circuito RL.

Forza elettromotrice in corrente alternata

$$f_{em}(t) = f_{em0} \cdot \sin(\omega t)$$

f_{em0} = valore massimo della forza elettromotrice (ampiezza dell'oscillazione)

ω = velocità angolare della spira

Corrente in regime alternato

$$i(t) = i_0 \cdot \sin(\omega t)$$

i_0 = valore massimo della forza elettromotrice

Valori efficaci in corrente alternata Per confrontare il regime alternato con quello continuo, introduciamo:

- corrente efficace, cioè la corrente continua che erogherebbe la stessa potenza della corrente alternata:

$$i_{efficace} = \frac{i_0}{\sqrt{2}}$$

- tensione efficace, cioè la tensione in regime di corrente continua con cui si erogherebbe la stessa potenza erogata in regime di corrente alternata:

$$f_{em\text{ efficace}} = \frac{f_{em0}}{\sqrt{2}}$$

Circuito ohmico (resistivo) Nel circuito resistivo la f_{em} e la corrente sono in fase. Le due funzioni sono legate dalla prima legge di Ohm:

$$i(t) = \frac{f_{em}(t)}{R}$$

Tra le ampiezze delle funzioni vale:

$$i_0 = \frac{f_{em0}}{R}$$

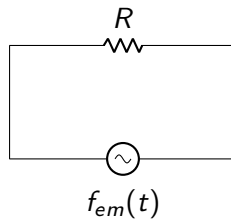


Figura 23: Schema di un circuito resistivo.

Circuito induttivo Nel circuito induttivo la corrente è in ritardo di un quarto di periodo rispetto alla f_{em} .

$$i(t) = \frac{f_{em0}}{\omega L} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

La corrente massima è:

$$i_0 = \frac{f_{em0}}{\omega L}$$

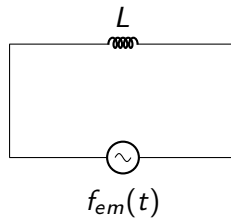


Figura 24: Schema di un circuito induttivo.

Circuito capacitivo Nel circuito capacitivo la corrente è in anticipo di un quarto di periodo rispetto alla f_{em} .

$$i(t) = \omega C f_{em0} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

La corrente massima è:

$$i_0 = \omega C f_{em0}$$

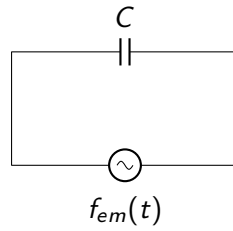


Figura 25: Schema di un circuito capacitivo.

Circuito RLC In un circuito RLC la $f_{em\,eff}$ è direttamente proporzionale alla i_{eff} :

$$f_{em\,eff} = Z \cdot i_{eff}$$

La costante di proporzionalità è l'impedenza del circuito:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad [\Omega]$$

R = resistenza del circuito $[\Omega]$

C = capacità del condensatore $[F]$

ω = pulsazione della f_{em} $[rad/s]$

ωL = reattanza induttiva $[\Omega]$

L = induttanza del circuito $[H]$

$\frac{1}{\omega C}$ = reattanza capacitiva $[\Omega]$

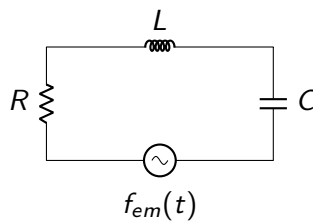


Figura 26: Schema di un circuito RLC.

Risonanza Condizione di risonanza in un circuito RLC:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Circuito LC Carica sulle armature del condensatore:

$$q(t) = Q \cdot \cos(\omega t)$$

Q = carica massima (iniziale)

Corrente nel circuito:

$$i(t) = \omega Q \cdot \sin(\omega t)$$

$\omega Q = i_0$ = ampiezza della corrente

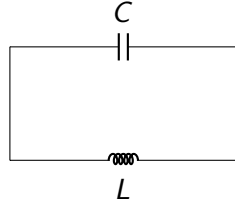


Figura 27: Schema di un circuito LC.

Potenza media prodotta in corrente alternata

$$\overline{P} = f_{em\,eff} \cdot i_{eff}$$

Trasformatori Sono dispositivi capaci di modificare il valore della tensione e della corrente alternata. Se indichiamo con n_1 e n_2 il numero di spire del circuito primario e secondario, vale:

$$\frac{f_{em2\,eff}}{f_{em1\,eff}} = \frac{n_2}{n_1}$$

Inoltre si dimostra che, se il trasformatore è ideale (non avvengono fenomeni dissipativi):

$$\overline{P}_1 = f_{em1\,eff} \cdot i_{1\,eff} = f_{em2\,eff} \cdot i_{2\,eff} = \overline{P}_2$$

6.5 Equazioni di Maxwell e onde elettromagnetiche

Circuitazione del campo elettrico indotto Il campo elettrico indotto non è conservativo in quanto la circuitazione non necessariamente è uguale a zero.

$$\Gamma_{\mathcal{L}}(E) = -\frac{\Delta\Phi_S(B)}{\Delta t}$$

\mathcal{L} = linea chiusa che racchiude la superficie S del circuito

Corrente di spostamento

$$i_s = \epsilon_0 \frac{\Delta\Phi_S(E)}{\Delta t} \quad [A]$$

Equazioni nel caso statico Se non si hanno variazioni di flusso del campo elettrico e magnetico, valgono le seguenti equazioni:

Teorema di Gauss per il campo elettrico:

$$\Phi_S(E) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Legge di FNL (legge delle maglie):

$$\Gamma_{\mathcal{L}}(E) = 0$$

Teorema di Gauss per il campo magnetico:

$$\Phi_S(B) = 0$$

Teorema di Ampère:

$$\Gamma_{\mathcal{L}}(B) = \mu_0 i$$

Equazioni nel caso generale Se si hanno variazioni di flusso del campo elettrico e magnetico nel tempo, valgono le seguenti equazioni:

Teorema di Gauss per il campo elettrico:

$$\Phi_S(E) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Legge di FNL:

$$\Gamma_{\mathcal{L}}(E) = -\frac{\Delta\Phi_S(B)}{\Delta t}$$

Teorema di Gauss per il campo magnetico:

$$\Phi_S(B) = 0$$

Teorema di Ampère-Maxwell:

$$\Gamma_{\mathcal{L}}(B) = \mu_0 (i + i_s) = \mu_0 \left(i + \epsilon_0 \frac{\Delta\Phi_S(E)}{\Delta t} \right)$$

Onde elettromagnetiche Dalle equazioni di Maxwell si deduce l'esistenza di onde elettromagnetiche: variazioni sinusoidali del campo elettrico e del campo magnetico su piani perpendicolari, mostrate in Figura 28.

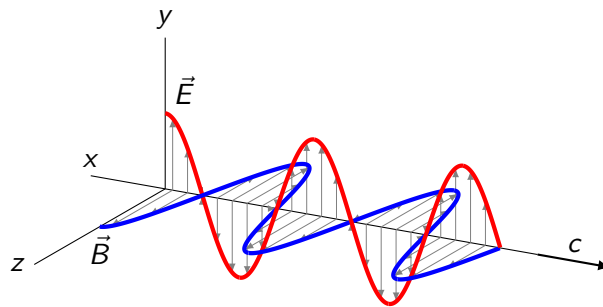


Figura 28: Rappresentazione di un'onda elettromagnetica.

Velocità di un'onda elettromagnetica nel vuoto È la velocità della luce nel vuoto (la luce è infatti un'onda elettromagnetica).

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}} = 299\,792\,458 \text{ m/s} \simeq 3,0 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Spettro elettromagnetico Le onde elettromagnetiche si distinguono per la lunghezza d'onda λ e per la frequenza f , legate dalla relazione:

$$\lambda = cf$$

I diversi tipi di onde con le relative lunghezze d'onda sono mostrati in Figura 29.

Densità media di energia di un'onda Un'onda elettromagnetica trasporta energia con densità media, per unità di volume, pari a:

$$\overline{W} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$$

E_0 = ampiezza di oscillazione del campo elettrico

Irraggiamento di un'onda elettromagnetica

$$E_e = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2$$

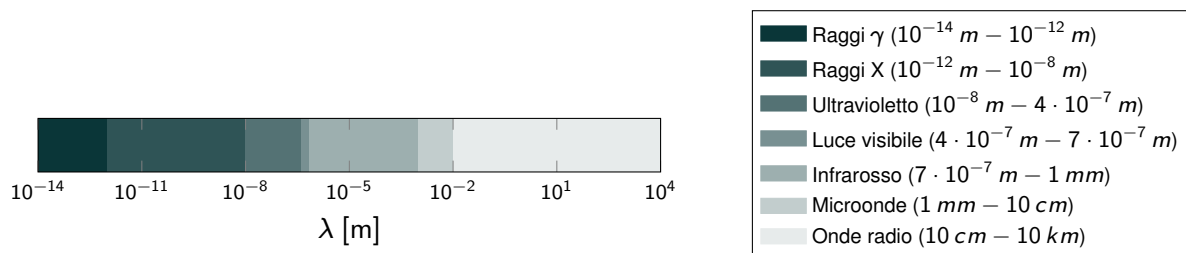


Figura 29: Lo spettro elettromagnetico, rappresentato in scala logaritmica. La porzione del visibile (compresa tra 380 e 750 nm circa) è mostrata a pagina 30 in Figura 16.

7 Fisica moderna

7.1 Relatività di spazio e tempo

Principio di relatività ristretta Le leggi e i principi della Fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento (SDR) inerziali.

Principio di invarianza di c La velocità della luce è la stessa in tutti i SDR inerziali, indipendentemente dal moto del sistema stesso o della sorgente da cui la luce è emessa.

Simultaneità Due fenomeni che avvengono nei punti P_1 e P_2 sono simultanei se la luce che essi emettono giunge nello stesso istante in un punto equidistante dai due fenomeni.

Sincronizzazione degli orologi Due orologi sono sincronizzati se il secondo di essi, nell'istante in cui riceve il lampo di luce emesso dal primo, segna il valore:

$$t = t_0 + \frac{D}{c}$$

t_0 = tempo segnato dal primo orologio

D = distanza tra i due orologi

Coefficiente di dilatazione (fattore di Lorentz)

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{con} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

v = velocità del corpo nel SDR S

Poiché v è sempre minore di c , il coefficiente di dilatazione è sempre maggiore di 1.

Notiamo inoltre che:

$$\lim_{v \rightarrow c^-} \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = +\infty$$

e che se $v \ll c$ (come nei casi del mondo medio) il valore di γ tende a 1.

Dilatazione dei tempi

$$\Delta t' = \gamma \Delta t$$

Δt = durata del fenomeno in S

$\Delta t'$ = durata del fenomeno in S'

Intervallo di tempo proprio Intervallo di tempo misurato in un SDR solidale con il fenomeno.

Contrazione delle lunghezze parallele al moto

$$\Delta x' = v \Delta t' = \frac{\Delta x}{\gamma}$$

Δx = lunghezza del segmento in S

$\Delta x'$ = lunghezza del segmento in S'

Lunghezza propria Lunghezza di un segmento misurata in un SDR solidale con il segmento.

Trasformazioni di Lorentz Sono le trasformazioni sotto le quali le equazioni dell'elettromagnetismo rimangono invarianti nel passare da un sistema ad un altro in moto con velocità \vec{v} rispetto al primo. Sono riportate nel caso in cui \vec{v} sia parallelo all'asse x .

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c}x\right) \end{cases}$$

Intervallo invariante tra due eventi

$$(\Delta\sigma)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

Possiamo distinguere tre tipi di intervallo:

- $(\Delta\sigma)^2 > 0$: intervallo di tipo *tempo*;
- $(\Delta\sigma)^2 < 0$: intervallo di tipo *spazio*;
- $(\Delta\sigma)^2 = 0$: intervallo di tipo *luce*.

Spazio-tempo (spazio di Minkowski) Spazio quadridimensionale in cui l'intervallo invariante è dato dalla formula precedente.

Composizione relativistica delle velocità Possiamo convertire la velocità di un corpo da un SDR S ad un altro SDR S' .

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

u = velocità del corpo in S

v = velocità di S' rispetto a S

u' = velocità del corpo in S'

Effetto Doppler relativistico Variazione di frequenza ricevuta se ricevitore (S') e sorgente (S) sono in moto l'uno rispetto all'altro.

Se S' si allontana da S con velocità v :

$$f' = f \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

Se S' si avvicina a S con velocità v :

$$f' = f \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

Redshift e blueshift

$$z = \frac{f}{f'} - 1$$

Se osservatore e sorgente si allontanano si ha $f' < f$, cioè uno spostamento verso il rosso (*redshift*).

Se osservatore e sorgente si avvicinano si ha $f' > f$, cioè uno spostamento verso il blu (*blueshift*).

Equivalenza massa-energia Se un corpo assorbe energia la sua massa aumenta, se la perde la massa diminuisce.

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$$

Energia di quiete Un corpo fermo non soggetto a forze possiede energia per il solo fatto di avere massa.

$$E = m_0 c^2$$

m_0 = massa a riposo del corpo (cioè misurata in un SDR in cui esso è in quiete)

Massa relativistica

$$m = \gamma m_0$$

Se $v = 0$ (cioè se il corpo è fermo nel SDR), allora $\gamma = 1$ e $m = m_0$.

Energia totale di una particella relativistica (relazione di Einstein)

$$E = \gamma m_0 c^2 = mc^2$$

Quando la velocità di un corpo si avvicina indefinitamente a quella della luce, la sua energia totale tende a diventare infinitamente grande.

Per accelerare un corpo alla velocità della luce bisogna fornire ad esso una quantità di energia infinita: nessun corpo massivo può quindi raggiungere o superare c .

Energia cinetica relativistica

$$K_r = (\gamma - 1)m_0 c^2$$

Quantità di moto relativistica

$$\vec{p}_r = m\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}$$

Quantità di moto della luce È la quantità di moto posseduta da un'onda elettromagnetica che trasporta un'energia E .

$$p = \frac{E}{c}$$

Quadrivettore energia-quantità di moto

$$\left(\frac{E}{c}; p_x; p_y; p_z \right)$$

Nello spazio di Minkowski il suo modulo quadrato è invariante e vale $m_0^2 c^2$.

Principio di equivalenza In una zona limitata dello spazio-tempo è sempre possibile scegliere un SDR in modo da simulare l'esistenza di un dato campo gravitazionale uniforme o, al contrario, in modo da eliminare l'effetto di una forza di gravità costante.

Principio di relatività generale Le leggi della Fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento.

7.2 Fisica quantistica

Corpo nero Corpo capace di assorbire completamente onde elettromagnetiche di qualsiasi lunghezza d'onda.

Curve sperimentali per l'emissione di energia a diverse temperature Nella Figura 30 la zona evidenziata indica lo spettro della luce visibile; alla sua sinistra la radiazione ultravioletta, alla sua destra i raggi infrarossi. La previsione classica è data dalla legge di Rayleigh-Jeans.

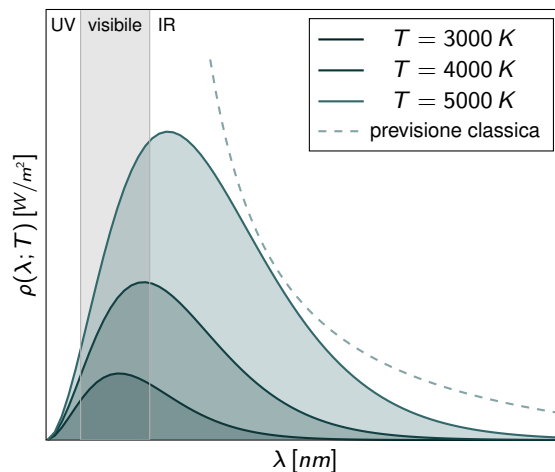


Figura 30: Dati sperimentali per la quantità di energia emessa nelle diverse lunghezze d'onda. L'area sottesa dalla curva fornisce l'energia totale emessa.

Legge di Wien Fornisce la lunghezza d'onda per cui sia ha il picco di intensità di radiazione in funzione della temperatura.

$$\lambda_{\max} = \frac{0,2898}{T} \text{ cm}$$

Legge di Stefan-Boltzmann La radianza spettrale è la quantità di energia emessa dall'unità di superficie nell'unità di tempo.

$$R_{sp} = \sigma T^4$$

σ = costante di Stefan-Boltzmann = $5,6693 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$

Costante di Planck

$$h = 6,62607 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

Energia di un quanto del campo elettromagnetico

$$E = nhf$$

n = numero intero positivo

Fotoni Ogni fotone ha massa nulla ed energia quantizzata pari a:

$$E = hf$$

Anche la quantità di moto è quantizzata:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c}$$

Effetto Compton Inviando raggi X su un bersaglio di grafite la radiazione diffusa mostra, oltre ai raggi X con la stessa lunghezza d'onda, anche raggi con lunghezza d'onda maggiore.

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \varphi)$$

m_e = massa dell'elettrone = $9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ φ = angolo di diffusione del fotone

Serie di Balmer Permette di calcolare le frequenze delle diverse onde elettromagnetiche emesse dall'atomo di idrogeno.

$$f = cR_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

R_H = costante di Rydberg dell'idrogeno = $1,097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$

m, n = numeri naturali, con $n > m$

Esperimento di Millikan Ha permesso di misurare la carica dell'elettrone, $-e$:

$$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Principio di esclusione di Pauli Su una stessa orbita non possono muoversi più di due elettroni.

Raggi delle orbite di Bohr

$$r_n = n^2 \cdot \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} = (5,29 \times 10^{-11} \text{ m}) \cdot n^2$$

n = numero quantico principale

Relazione di De Broglie Ad una particella con quantità di moto p è associata una lunghezza d'onda:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Tale lunghezza d'onda è detta lunghezza d'onda di De Broglie della particella.

Dualismo onda-particella Sia la radiazione elettromagnetica sia le particelle subatomiche mostrano in alcuni fenomeni natura ondulatoria, in altri natura corpuscolare.

Costante di Planck ridotta

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \simeq 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

Principio di indeterminazione di Heisenberg Può essere formulato in due modi equivalenti:

$$\Delta x \Delta p \simeq \hbar$$

$$\Delta t \Delta E \simeq \hbar$$

Non è possibile conoscere con precisione dove l'elettrone si trova senza impartirgli una quantità di moto non determinabile. Inoltre, più breve è la misura dell'energia effettuata su un sistema, più impreciso è il valore dell'energia misurato.

Funzione d'onda Ψ È la soluzione dell'equazione di Schrödinger del sistema in esame. Esprime un'ampiezza di probabilità e dipende dalle tre componenti spaziali e da quella temporale.

Permette di calcolare la probabilità che la particella alla quale è associata si trovi in un volume di spazio in un certo intervallo di tempo.

La probabilità di osservare la particella è proporzionale al quadrato di Ψ .

8 Derivate e integrali notevoli

Variazioni istantanee e velocità La derivata della funzione f rispetto alla variabile x è definita come:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx}$$

Intuitivamente, la derivata di una funzione in un punto fornisce indicazioni sulla *velocità di variazione* della funzione in quel punto.

Tale informazione viene espressa graficamente dal coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione in quel punto.

Notazioni per la derivata di una funzione Possiamo indicare la derivata (prima e seconda) della funzione f rispetto alla variabile x in diversi modi, in base alla comodità e al contesto, come indicato in Tabella 14.

Lagrange	Leibniz	Eulero
$f'(x), f''(x)$	$\frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}$	$D[f], D^2[f]$

Tabella 14: Tre modi diversi di esprimere la derivata di $f(x)$.

Derivate e cinematica La funzione che esprime la posizione di un corpo nel SDR in funzione del tempo, la sua velocità istantanea e la sua accelerazione istantanea sono l'una la derivata dell'altra.

$$s'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v(t)$$

$$s''(t) = v'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = a(t)$$

Possiamo verificare facilmente quanto detto per tutte le leggi orarie fornite alla Sezione 3.2.

Derivate notevoli In Tabella 15 sono mostrate le quantità (istantanee) che possono essere ottenute derivando.

Spazio percorso Conoscendo la funzione $v(t)$ che esprime la velocità di un corpo in funzione del tempo, possiamo calcolare lo spazio percorso tra un tempo t_0 e un tempo t_1 con:

$$\Delta s = \int_{t_0}^{t_1} v dt$$

Questo integrale definito fornisce l'area sottesa dal grafico di $v(t)$ tra il tempo t_0 e il tempo t_1 .

Lavoro di una forza Conoscendo la funzione $F(s)$ che esprime la forza agente su un corpo in funzione della sua posizione, possiamo calcolare il lavoro di tale forza (e quindi la variazione di energia potenziale

Funzione	Derivata di	Rispetto a	Formula
velocità	posizione	tempo	$v(t) = \frac{ds}{dt}$
accelerazione	velocità	tempo	$a(t) = \frac{dv}{dt}$
forza	quantità di moto	tempo	$F(t) = \frac{dp}{dt}$
forza	energia	posizione	$F(s) = \frac{dU}{ds}$
intensità di corrente	carica	tempo	$i(t) = \frac{dq}{dt}$
potenza	energia	tempo	$P(t) = \frac{dU}{dt}$
f_{em}	flusso di B	tempo	$f_{em}(t) = -\frac{d\Phi(B)}{dt}$

Tabella 15: Alcune derivate notevoli.

del corpo tra la posizione s_0 e la posizione s_1 con:

$$L = \Delta U = \int_{s_0}^{s_1} F(s) ds$$

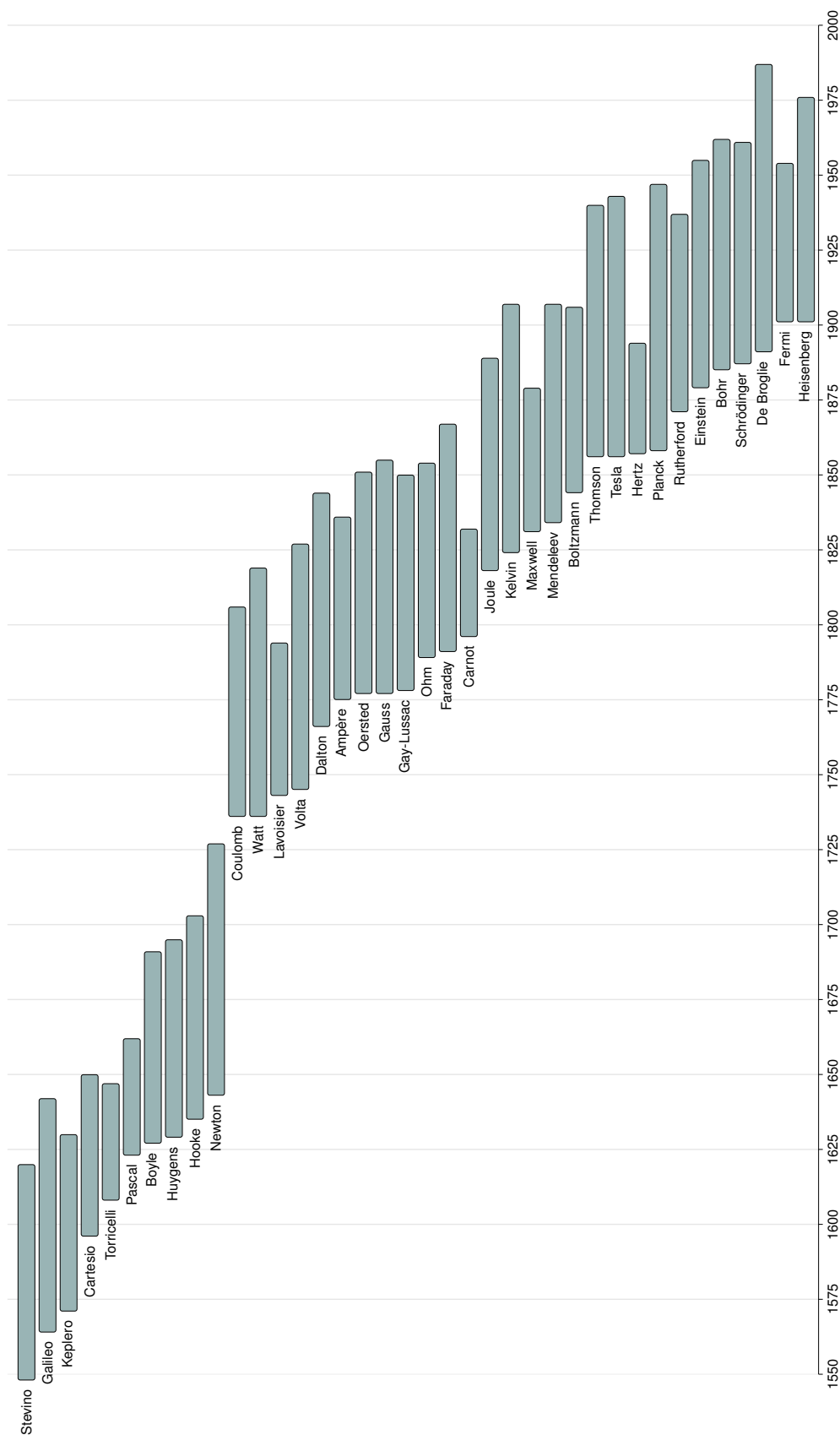
Circuitazione Alle pagine 34 e 41 abbiamo definito la circuitazione lungo la linea chiusa \mathcal{L} come una sommatoria di prodotti scalari tra un vettore campo e un vettore spostamento (cioè tutti gli spostamenti necessari per percorrere \mathcal{L}).

Possiamo pertanto esprimere la circuitazione (del campo elettrico o magnetico) con:

$$\Gamma_{\mathcal{L}}(E) = \oint_{\mathcal{L}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \qquad \Gamma_{\mathcal{L}}(B) = \oint_{\mathcal{L}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

Il simbolo $\oint_{\mathcal{L}}$ indica l'integrale chiuso sulla linea \mathcal{L} .

9 Timeline



10 Tavola periodica degli elementi

1	2																	3	4																	5	6	7	8	9	10																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
H	He																																			B	C	N	O	F	Ne																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
Idrogeno	Elio																																			Boro	Carbonio	Azoto	Ossigeno	Fluoro	Neon																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								
1.00784	4.002602																																			10.806	12.0096	14.00643	15.99903	18.998403163	20.1797																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																								