I numeri: naturali, interi, decimali

Mattia Cozzi

a.f. 2024/2025

Contenuti

Numeri naturali

I numeri naturali sono i numeri più semplici e i primi che si imparano.

I numeri naturali vengono utilizzati per contare in generale, ad esempio per indicare quante foglie ha una pianta o quante caramelle ci sono in un vaso.

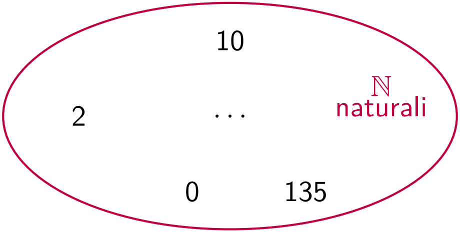
5 foglie

42 caramelle

L'insieme $\mathbb{N}$

I numeri naturali corrispondono quindi all'insieme:

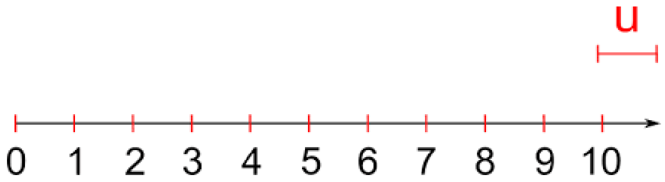
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$



Attenzione: lo zero è un numero naturale!

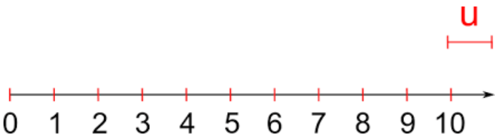
Visualizzazione dei naturali

I numeri naturali possono essere visualizzati/immaginati come punti su una semiretta.



Immaginare i numeri (non solo i naturali) come punti sulla retta è fondamentale per capirli per davvero!

Precedente e successivo



Tutti i naturali, tranne lo zero, hanno un:

- precedente, cioè il numero immediatamente a sinistra sulla linea dei naturali;
- successivo/conseguente, cioè il numero immediatamente a destra sulla linea dei naturali;

Lo zero ha solo il successivo, non ha il precedente.

Confronto tra naturali

L'insieme dei naturali è ordinato, cioè alcuni numeri vengono prima (sono più piccoli) e altri vengono dopo (sono più grandi).

Confrontare due naturali significa stabilire se sono uguali e, se non lo sono, quale dei due è il più grande.

I simboli utilizzati sono:

- $=$ (uguale a);
- $<$ (minore di);
- $>$ (maggiore di).

Esempi

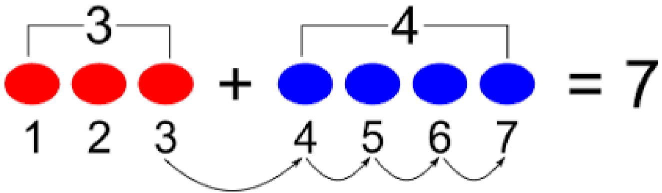
$$5 = 5$$

$$5 < 7$$

$$5 > 4$$

Somma o addizione

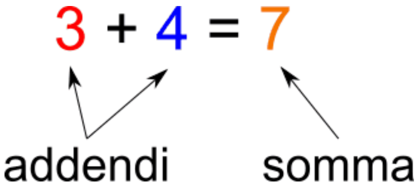
La somma (simbolo $+$) si esegue tra due numeri, partendo dal primo e contando verso destra tante unità quante sono nel secondo numero.



Per svolgere facilmente le somme, è sempre comodo visualizzarle.

Terminologia

È utile imparare anche i termini corretti per indicare ciò di cui stiamo parlando:



Addendo significa “cosa da sommare”.

Proprietà della somma

L'addizione è:

- commutativa, invertendo l'ordine degli addendi la somma non cambia:

$$3 + 7 = 7 + 3$$

- associativa, la somma di tre o più addendi non cambia se al posto di alcuni di essi si sostituisce la loro somma:

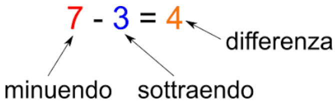
$$(4 + 7) + 3 = 4 + (7 + 3)$$

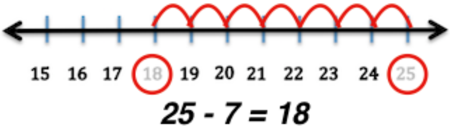
- dissociativa, la somma non cambia se un addendo viene sostituito con due addendi la cui somma è uguale a quello sostituito:

$$7 + 13 = 7 + (3 + 10)$$

Differenza o sottrazione

La differenza (simbolo −) si esegue tra due numeri, partendo dal primo e contando verso sinistra tante unità quante sono nel secondo numero.





Un problema

Se il minuendo è più piccolo del sottraendo, come in:

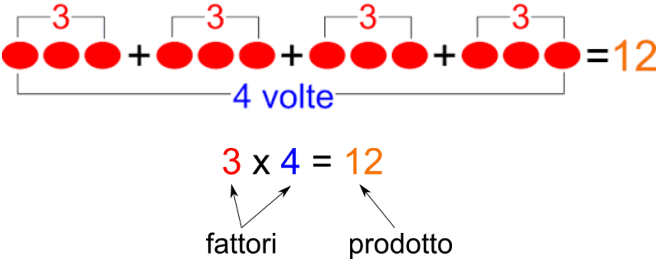
$$7 - 12$$

la differenza non può essere calcolata restando nell'insieme dei numeri naturali.

Vedremo che, per svolgere operazioni di questo tipo, è necessario un insieme di numeri diverso, l'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$.

Prodotto o moltiplicazione

Il prodotto (simbolo $\times$ oppure $\cdot$) si esegue tra due numeri, sommando il primo a sé stesso tante volte quante sono le unità del secondo numero.



Attenzione: il prodotto è commutativo, associativo e dissociativo!

Proprietà distributiva

Il prodotto ha un'altra utile proprietà, è distributivo rispetto alla somma e alla differenza.

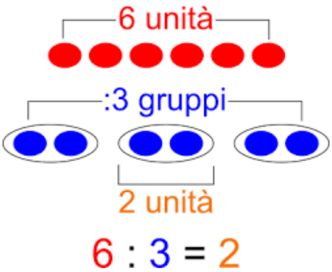
Ad esempio:

$$5 \cdot (3+6) = (5 \cdot 3)+(5 \cdot 6)$$

$$5 \cdot (7-4) = (5 \cdot 7)-(5 \cdot 4)$$

Quoziente o divisione

Il quoziente (simbolo :) si esegue tra due numeri. Si raggruppano le unità del primo in tanti gruppi uguali quante sono le unità del secondo e si contano le unità di un singolo gruppo.



Perché non è possibile dividere per zero?

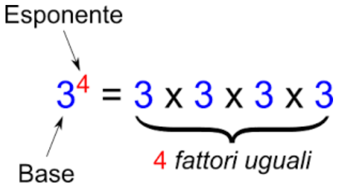
Divisione con e senza resto

Se la divisione può essere eseguita perfettamente (come $7 : 2$), allora ci sono due possibilità:

- si utilizza la divisione con il resto;
- si utilizzano i numeri con la virgola (numeri decimali).

Elevamento a potenza

L'elevamento a potenza utilizza due numeri, una base e un esponente. Si calcola moltiplicando la base per sé stessa tante volte quante indicate dall'esponente.



Attenzione a non confondere l'elevamento a potenza con la moltiplicazione!

Elevamenti particolari

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1$$

Potenze di 10

Molto utili e importanti sono le potenze di 10:

$$10^0 = 1$$

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 100$$

$$10^3 = 1.000$$

$$10^6 = 1.000.000$$

$$10^9 = 1.000.000.000$$

Esercizi sulle potenze

1. Calcola il valore delle seguenti potenze:
   - 3^2
   - 12^2
   - 2^5
   - 8^3
   - 3^4
   - 2^{10}
2. Trova il valore dell'esponente k in modo che siano vere le seguenti uguaglianze:
   - $3^k = 81$
   - $2^k = 256$
   - $5^k = 625$
   - $1765^k = 1765$
3. Disponi i seguenti numeri in ordine crescente:

$$3^2 \qquad 5^1 \qquad 18 \qquad 124 \qquad 200^0 \qquad 6^2 \qquad 5^3$$

Proprietà delle potenze

Le proprietà delle potenze ci aiutano moltissimo a semplificare i calcoli che coinvolgono le potenze.

- Prodotto di potenze con la stessa base:

$$a^{m} \cdot a^{n} = a^{m+n}$$

Esempio:

$$2^3 \cdot 2^7 = 2^{3+7} = 2^{10}$$

Proprietà delle potenze

- Quoziente di potenze con la stessa base:

$$a^{m} : a^{n} = a^{m-n}$$

Esempio:

$$2^7 : 2^5 = 2^{7-5} = 2^2$$

- Potenza di potenza:

$$(a^{m})^{n} = a^{m \cdot n}$$

Esempio:

$$(9^7)^2 = 9^{7 \cdot 2} = 9^{14}$$

Proprietà delle potenze

- Prodotto di potenze con lo stesso esponente:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Esempio:

$$2^7 \cdot 5^7 = (2 \cdot 5)^7 = 10^7$$

- Quoziente di potenze con lo stesso esponente:

$$a^n : b^n = (a : b)^n$$

Esempio:

$$14^8 : 7^8 = (14 : 7)^8 = 2^8$$

Esercizi sulle proprietà delle potenze

1. Calcola applicando le proprietà delle potenze:

- $2^4 \cdot 2^6 : 2^{10}$
- $3^4 \cdot 3^5 : 3^6$
- $\left[(7^2)^3\right]^4 : \left[(7^3)^2\right]^0$
- $\left[(2^3 \cdot 3^3)^4 : 6^{10}\right]^2 : (2^2 \cdot 3^2)^2$
- $a^3 : a^2$
- $(a^7)^3$

2. Trova il valore di x in modo che siano vere le seguenti uguaglianze:

- $3^{x+2} = 27$
- $2^{4-x} = 2$

Espressioni

Una espressione matematica è una sequenza di calcoli, come ad esempio:

$$8 + 45 : 3^2 + 4 \cdot 2 - 14$$

Come si esegue? In quale ordine si eseguono le operazioni?

Espressioni senza parentesi

Quando l'espressione è senza parentesi, le operazioni vanno eseguite in questo ordine (rimangono vere le proprietà che abbiamo visto):

1. elevamento a potenza;
2. moltiplicazioni e divisioni;
3. somme e sottrazioni.

Esempio

$$8 + 45 : 3^2 + 4 \cdot 2 - 14 =$$

$$= 8 + 45 : 9 + 4 \cdot 2 - 14 =$$

$$= 8 + 5 + 8 - 14 = 7$$

Espressioni con le parentesi

In questo caso si ragiona a blocchi, svolgendo prima di tutto le operazioni nelle parentesi più interne.

Prova a calcolare:

$$42 : \{105 : [(5 \cdot 2^2 + 7) : 3^2 + (7^2 : 7 + 3) : 5]\}$$

Esercizi sulle espressioni (1)

1. Traduci in espressioni aritmetiche le seguenti frasi e calcola poi il loro valore.
    - Aggiungi a 72 il prodotto tra 7 e 8.
    - Moltiplica la differenza di 17 e 8 per la somma di 2 e 3.
    - Sottrai al prodotto di 7 e 4 il quoziente di 36 e 12.
    - Moltiplica la somma di 5 e 8 per 2 e sottrai al risultato 10.
2. Calcola il valore delle seguenti espressioni:
    - $1 + [(15 : 3) \cdot 7 + (10 \cdot 2) : 4] : (2 \cdot 4) - [(2 \cdot 5) : 2 - 2]$
    - $\{[(6 \cdot 4 - 18) + 5 \cdot (12 - 9)] : (7 \cdot 2 - 11) - 3 + 10\} : 7$
    - $[5 \cdot (3 \cdot 8 - 5 \cdot 4) - 7]\{4 \cdot (28 : 7 + 4) : [(6 \cdot 5) : 15] - 2 \cdot 8\}$

Esercizi sulle espressioni (2)

3. Calcola il valore delle seguenti espressioni:
   - $[(3^6 : 3^4) - 2^3] \cdot [(5^3 \cdot 5^4) : (5^2 \cdot 5^3)] : (2^2 + 1)$

     [5]
   - $\{[(3^{10} : 3^6)^2 \cdot (3^8 : 3^3)] : 3^{12}\} + 1^7 + (2^2 \cdot 3 - 11)$

     [5]
   - $[(6^3 \cdot 2^3 : 4^3) : (10^4 : 5^4 - 7) \cdot 3^4]^2 : (3^3 \cdot 3^2)^2$

     [1]
   - $2^2 + \{[(3 \cdot 2^2 + 2) \cdot 2 - 6 \cdot 2 + (2 \cdot 6 + 1^5 \cdot 7)] : 5 + 7\} : 14 + 4$

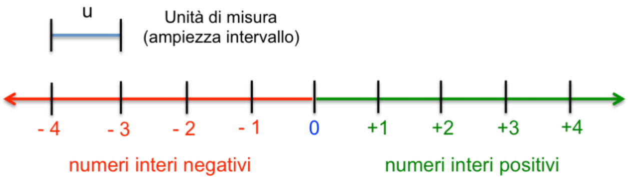
     [9]

Un nuovo insieme di numeri

I numeri interi o relativi, sono tutti numeri interi (senza virgola) e sono caratterizzati da un segno negativo, nullo o positivo:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \ldots\}$$

Il nuovo insieme include il precedente insieme $\mathbb{N}$.



Per comodità, a volte il segno $+$ viene omesso, e quindi scrivere $+6$ oppure semplicemente 6 è la stessa cosa.

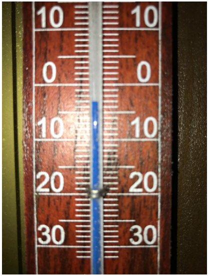
Utilizzi dei negativi

I numeri negativi permettono di svolgere operazioni che erano impossibili nell'insieme $\mathbb{N}$ dei naturali, ad esempio:

$$18 - 20$$

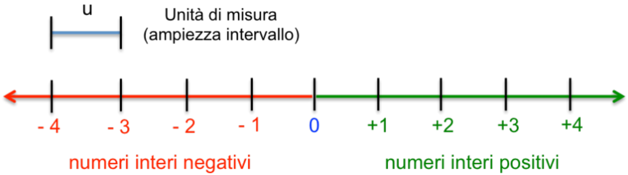
Ora possiamo dire che il risultato di $18 - 20$ è -2.

I numeri negativi vengono utilizzati anche nella vita reale:



Valore assoluto

Per capire il concetto di valore assoluto è importante visualizzare i numeri interi:

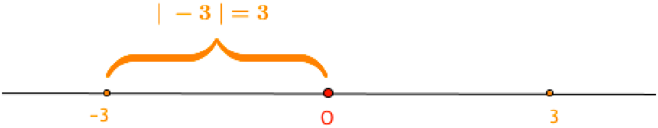


Il valore assoluto di un numero si indica con due sbarrette intorno ad un numero, come:

$$|-7|$$

Valore assoluto come distanza

Il valore assoluto di un numero corrisponde alla distanza del numero dallo 0 sulla retta dei numeri.



Quindi:

$$|-3| = |+3| = 3$$

Quali due numeri interi hanno valore assoluto pari a 14?

Terminologia

Vediamo alcune utili definizioni:

- numeri concordi, se hanno lo stesso segno, come:
$$-7 \text{ e } -100$$
- numeri discordi, se hanno segno diverso, come:
$$-12 \text{ e } +4$$
- numeri opposti, se hanno lo stesso valore assoluto e segno diverso, come:
$$-8 \text{ e } +8$$

Confronto tra numeri interi

Il confronto tra numeri interi, indicato con $=$, $>$ e $<$, avviene come per i numeri naturali.

È sempre bene visualizzare i numeri interi per poterli confrontare bene. Numeri che sono più a destra sono più grandi, numeri che sono più a sinistra sono più piccoli.

$$-3 < +9$$

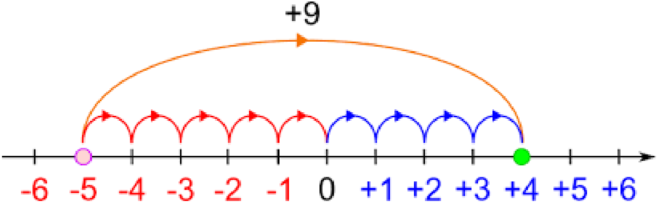
$$-23 < -1$$

$$+13 > +2$$

$$+6 > -300$$

Somme e sottrazioni

La somma e la sottrazione si svolgono come per i numeri naturali, spostandosi a destra o sinistra sulla retta dei numeri:



$$-5 + 9 = +4$$

Non ci sono regole “strane” da applicare!

La regola dei segni

Per svolgere moltiplicazioni e divisioni dobbiamo invece studiare la regola dei segni:

Regola dei segni (1)

Il prodotto/quoziente di numeri con lo stesso segno è un numero positivo.

$$(+5) \cdot (+2) = +10 \qquad (-3) : (-1) = +3$$

Il prodotto/quoziente di numeri con segno diverso è un numero negativo.

$$(+4) \cdot (-3) = -12 \qquad (-9) : (+3) = -3$$

Regola dei segni per le potenze

Regola dei segni (2)

Le potenze pari di qualsiasi numero sono positive.

$$(+2)^4 = +16 \qquad (-2)^4 = +16$$

Le potenze dispari invece mantengono il segno della base.

$$(+4)^3 = +64 \qquad (-4)^3 = -64$$

Riesci a spiegare perché?

Esercizi su somma e differenza di numeri interi

1. Completa la tabella:

a	b	c	$a-b+c$	$b+c-a$	$a-(b+c)$	$c-(a-b)$	$b-(c-a)$
-2	$+3$	0					
$+4$	$+5$	-6					
-2	-7	-3					
$+1$	-1	0					
$+2$	-1	$+4$					
-6	$+5$	$+6$					
$+3$	$+8$	$+7$					

2. Inserisci al posto dei puntini il numero mancante:

- $(+14)+(\dots)=-8$
- $(\dots)-(-4)=-6$
- $(-12)+(\dots)=+5$
- $(+3)-(\dots)=+8$

Esercizi su somma e differenza di numeri interi

1. Completa la tabella:

a	b	c	$a-b+c$	$b+c-a$	$a\cdot(b-c)$	$(a-b)\cdot c$	$(a+b-c)\cdot a$
-2	$+3$	0					
$+4$	$+5$	-6					
-2	-7	-3					
$+1$	-1	0					
$+2$	-1	$+4$					
-6	$+5$	$+6$					
$+3$	$+8$	$+7$					

2. Inserisci al posto dei puntini il numero mancante:

- $(-9)\cdot(\ldots) = +108$
- $(\ldots)\cdot(-8) = -104$
- $(+3)\cdot(\ldots) = -48$
- $(-32):(\ldots) = +4$

Espressioni coi numeri interi

1. Calcola il valore delle seguenti espressioni:
   - $\{-14+3\cdot[9+2\cdot(-2)-3\cdot(17+2-15)]\}\cdot(-1)$

     [+35]
   - $[25-(-13+12)]:13+[3+2(-12-4):(+5+3)-1]$

     [0]
   - $\{[(-8)^2]^5\}^3:\{[(-8)^3]^2\}^5$

     [1]
   - $[(-5)^2\cdot(-5)^3:(-5)^4]^2-(8-2^2-3^2)\cdot(5^6:5^4-30)$

     [0]

Un'espressione speciale

$$\left\{-7+\left[-(-4+13^0)+(-6+2-1)^2\cdot(5-7)^2:(8-2-6)\right]^2\right\}:\left[(-3)^2\right]^2$$

Perché questa espressione è impossibile?

Cosa sono i numeri decimali?

I numeri decimali sono numeri formati da due parti:

- una parte intera, prima della virgola;
- una parte decimale, dopo la virgola.

Sono numeri che utilizziamo tutti i giorni, ad esempio per i prezzi o i pesi dei prodotti.

Nomi delle cifre decimali

Nome della cifra	**Posizione**	**Valore**	**Simbolo**
decimi	1	0,1	d
centesimi	2	0,01	c
millesimi	3	0,001	m

Esempio:

$$4,745$$

4 unità, 7 decimi, 4 centesimi e 5 millesimi

Confronto tra decimali

Quando confrontiamo due decimali, attenzione a fare il confronto cifra per cifra: confrontare le unità con le unità, i decimi con i decimi, ecc.

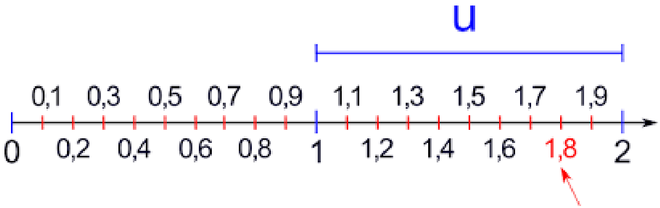
Esempio:

$$7,099 < 7,12$$

La prima cifra per cui differiscono sono i decimi, ed è quella da guardare per ordinare i numeri.

Rapresentazione dei decimali

Come tutti gli altri numeri, anche i decimali si possono visualizzare su una retta orientata:



Esercizi sull'ordinamento dei decimali

1. Disponi in ordine crescente i seguenti numeri decimali:

   $1,8 \quad 0,3 \quad 1,5 \quad 6,9 \quad 5,3 \quad 1,799 \quad 1,485 \quad 0,305$

2. Completa le seguenti frasi:

   - 1000 millesimi formano . . . unità.
   - 2000 centesimi formano . . . unità.
   - 200 decimi formano . . . unità.
   - 4000 decimi formano . . . unità.

Operazioni coi decimali

Le operazioni coi decimali seguono le stesse regole di tutti gli altri numeri.

È molto comodo visualizzare somme e sottrazioni in colonna, per non confondersi con le cifre decimali.

Per eseguire $5{,}15 + 2{,}743$ facciamo:

$$
\begin{array}{cccccc}
5 & , & 1 & 5 & & + \\
2 & , & 7 & 4 & 3 & = \\
\hline
7 & , & 8 & 9 & 3 &
\end{array}
$$

Approssimare

A volte, nei nostri calcoli con la calcolatrice, otteniamo numeri "scomodi", come:

$$5,1814894$$

Spesso non ci interessano più di due o tre cifre decimali, e vogliamo quindi "tagliare" il numero, cioè approssimarlo.

5,18 è una approssimazione accettabile del numero precedente.

Regole per approssimare

Prima di tutto dobbiamo decidere a quale cifra approssimare: ai decimi (una cifra), ai centesimi (due cifre) o ai millesimi (tre cifre).

Dobbiamo poi guardare la cifra successiva all'ultima che vogliamo scrivere:

- se la cifra successiva è 0, 1, 2, 3 o 4, approssimiamo per difetto, eliminando la parte che non vogliamo;
- se la cifra successiva è 5, 6, 7, 8 o 9, approssimiamo per eccesso, aumentando di 1 l'ultima cifra che scriviamo.

Esempi

$$7,2735$$

Approssimazione ai decimi: 7,3.

Approssimazione ai centesimi: 7,27.

Approssimazione ai millesimi: 7,274.

Esercizi sull'ordinamento dei decimali

1. Approssima i seguenti numeri a una cifra decimale:

$$1,83 \qquad 0,35 \qquad 1,485 \qquad 0,3058178$$

2. Approssima i seguenti numeri a due cifre decimali:

$$6,099 \qquad 4,0673 \qquad 9,005 \qquad 3,2324$$

E le frazioni?

I numeri decimali, sia positivi sia negativi, possono essere anche espressi sotto forma di frazioni, che vanno a costituire l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali.

Ad esempio:

$$7,7 = 77 : 10 = \frac{77}{10}$$

$$-2,3 = -23 : 10 = -\frac{23}{10}$$

Le frazioni sono solo un modo più comodo di scrivere delle divisioni!

Insiemi numerici