

I numeri razionali

Mattia Cozzi

a.f. 2024/2025

Contenuti

Divisibilità

Criteri

Primi

Frazioni

Operazioni

Divisibilità

Dati due numeri interi, è possibile che:

- la divisione tra loro sia esatta, senza resto, come in:

$$12 : 3 = 4, \text{ resto } 0$$

Diciamo allora che il primo numero **è divisibile** per il secondo.

- la divisione tra loro abbia resto, come in:

$$13 : 3 = 4, \text{ resto } 1$$

Diciamo allora che il primo numero **non è divisibile** per il secondo.

Multipli e sottomultipli/divisori

Se il numero a è divisibile per il numero b , allora:

- a è **multiplo** di b ;

21 è multiplo di 7

- b è **sottomultiplo o divisore** di a .
 - 7 è sottomultiplo di 21

Una conseguenza

Se il prodotto di due numeri dà come risultato un terzo numero, allora quest'ultimo è multiplo degli altri due.

$$5 \cdot 9 = 45$$

Quindi 45 è multiplo sia di 5, sia di 9.

E i numeri negativi?

Lo stesso discorso, senza variazioni, vale coi numeri negativi:

$$-63 : 7 = -9$$

e quindi:

- -63 è multiplo di 7 e di -9 ;
- 7 e -9 sono divisori di -63 .

Ti ricordi la **regola dei segni**?

Domande interessanti

- Qual è il numero che è multiplo di tutti i numeri interi?
- Qual è il numero che è sottomultiplo di tutti i numeri interi?

Pari e dispari in \mathbb{N}

I **numeri pari** sono i multipli di 2, e quindi terminano con:

0, 2, 4, 6, 8

Sono indicati con:

$$\mathbb{P} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$$

I **numeri dispari** sono i numeri che non sono pari, e quindi terminano con:

1, 3, 5, 7, 9

$$\mathbb{D} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$$

Pari e dispari in \mathbb{Z}

Il concetto di pari e dispari si estende anche ai numeri interi (positivi e negativi:)

$$\mathbb{P} = \{\dots, -6, -4, -2, 0, +2, +4, +6, \dots\}$$

$$\mathbb{D} = \{\dots, -5, -3, -1, 0, +1, +3, +5, \dots\}$$

Criteri di divisibilità

I criteri di divisibilità sono dei **criteri** per capire se un numero intero è divisibile per un altro, senza calcolare per davvero la divisione.

Potremo ad esempio rispondere, senza far calcoli, alle seguenti domande:

- 1404 è divisibile per 9?
- 153 è divisibile per 11?

Divisibilità per 2

Critero di divisibilità per 2

Un numero è divisibile per 2 se è pari, cioè se finisce per:

0, 2, 4, 6, 8

- 487238 è divisibile per 2;
- 400 è divisibile per 2.

Divisibilità per 3

Critero di divisibilità per 3

Un numero è divisibile per 3 se la somma delle sue cifre è un multiplo di 3.

- 171 è divisibile per 3, perché $1 + 7 + 1 = 9$;
- 3477 è divisibile per 3, perché $3 + 4 + 7 + 7 = 21$.

Divisibilità per 6

Critero di divisibilità per 6

Un numero è divisibile per 6 se è divisibile sia, per 2 sia per 3.

- 492 è divisibile per 6, perché è pari e $4 + 9 + 2 = 15$.

Divisibilità per 5

Critero di divisibilità per 5

Un numero è divisibile per 5 se finisce con 0 oppure 5.

- 4565 è divisibile per 5;
- 150 è divisibile per 5.

Divisibilità per 9

Critero di divisibilità per 9

Un numero è divisibile per 9 se la somma delle sue cifre è un multiplo di 9.

Prova a considerare la tabellina del 9!

- 171 è divisibile per 9, perché $1 + 7 + 1 = 9$;
- 48672 è divisibile per 9, perché $4 + 8 + 6 + 7 + 2 = 27$.

Divisibilità per 10

Critero di divisibilità per 10

Un numero è divisibile per 10 se finisce per 0.

- 1360 è divisibile per 10.

Divisibilità per 7

Critero di divisibilità per 7

Un numero è divisibile per 7 se la differenza tra le decine e il doppio delle unità è un multiplo di 7.

- 91 è divisibile per 7, perché $9 - 1 \cdot 2 = 7$;
- 231 è divisibile per 7, perché $23 - 1 \cdot 2 = 21$.

Divisibilità per 11

Critero di divisibilità per 11

Un numero è divisibile per 11 se la differenza tra la somma delle cifre di posto dispari e quella delle cifre di posto pari è un multiplo di 11.

- 121 è divisibile per 11, perché $(1 + 1) - (2) = 0$;
- 9273 è divisibile per 11, perché $(9 + 7) - (2 + 3) = 11$.

Divisibilità per 4

Critero di divisibilità per 4

Un numero è divisibile per 4 se le ultime due cifre sono un multiplo di 4.

- 412 è multiplo di 4;
- 576 è multiplo di 4.

Numeri primi

I numeri primi sono tutti e soli i numeri naturali che sono **divisibili soltanto per 1 e per sé stessi**.

7 è un numero primo, perché può essere diviso solo per 1 e per 7.

I numeri non primi si dicono composti, come 12 (divisibile per un sacco di numeri!).

1 non viene considerato un numero primo.

I numeri primi sono **infiniti**!

Numeri primi da 1 a 50

2	3	5	7	11
13	17	19	23	29
31	37	41	43	47

Scomposizione in fattori primi

È stato dimostrato che:

ogni numero naturale può essere scritto come prodotto di soli numeri primi.

Ad esempio:

$$153 = 3 \cdot 3 \cdot 17$$

$$385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$$

Questo procedimento è detto **scomposizione o fattorizzazione** in numeri primi.

Esempio di scomposizione

Proviamo a scomporre 180 in fattori primi:

180		2
90		2
45		3
15		3
5		5
1		

Possiamo scrivere la fattorizzazione di 180:

$$180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Esercizi sulla scomposizione in fattori primi

1. Scomponi in fattori primi i seguenti numeri:

- 152
- 90
- 156

- 612
- 720
- 1024

Massimo comun divisore (MCD)

Il massimo comun divisore (indicato con MCD) tra due numeri è **il più alto dei divisori comuni tra due numeri.**

Elenchiamo i divisori di 24:

$$\text{div}(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

Elenchiamo i divisori di 36:

$$\text{div}(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

Quindi il massimo comun divisore tra 24 e 36 è 12.

Esiste un modo più veloce per calcolare l'MCD tra due numeri?

Calcolo dell'MCD

Eseguo le seguenti operazioni:

1. scompongo in fattori primi i due numeri;
2. costruisco l'MCD scegliendo, nelle scomposizioni, i fattori in comune, con l'esponente più basso.

Esempio:

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$MCD(24, 36) = 2^2 \cdot 3$$

Minimo comune multiplo (mcm)

Il minimo comune multiplo (indicato con mcm) tra due numeri è **il più piccolo tra i multipli comuni tra due numeri** diverso da zero.

Elenchiamo i multipli di 6:

$$\text{mult}(6) = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, \dots\}$$

Elenchiamo i multipli di 15:

$$\text{mult}(15) = \{0, 15, 30, 45, 60, 75, 90, \dots\}$$

Quindi il minimo comun divisore tra 6 e 15 è 30.

Esiste un modo più veloce per calcolare l'mcm tra due numeri?

Calcolo dell'mcm

Eseguo le seguenti operazioni:

1. scompongo in fattori primi i due numeri;
2. costruisco l'mcm scegliendo, nelle scomposizioni, tutti i fattori (comuni e non comuni), con l'esponente più alto.

Esempio:

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

$$28 = 2^2 \cdot 7$$

$$\text{mcm}(24, 28) = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$$

Perché le frazioni?

I numeri decimali e i numeri interi, sia positivi sia negativi, possono essere anche espressi sotto forma di **frazioni**, che vanno a costituire l'insieme \mathbb{Q} dei **numeri razionali**.

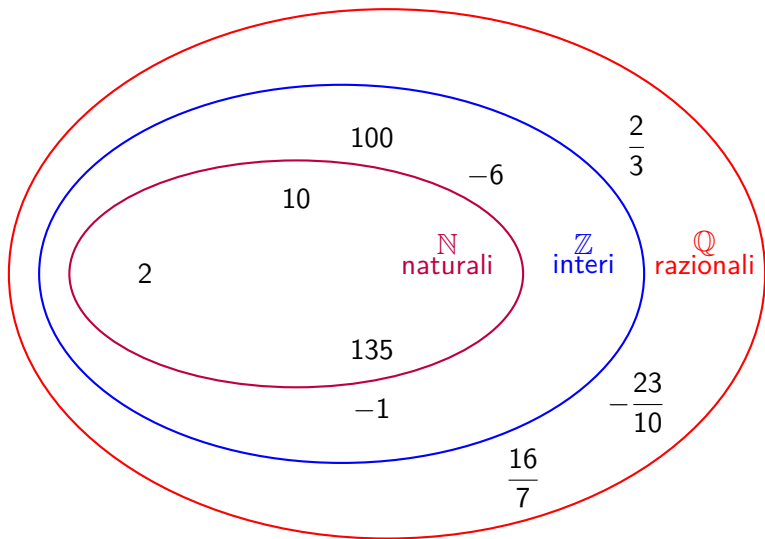
Ad esempio:

$$7,7 = 77 : 10 = \frac{77}{10}$$

$$-2,3 = -23 : 10 = -\frac{23}{10}$$

Le frazioni sono solo un modo più comodo di scrivere delle divisioni!

Insiemi numerici



Numeri naturali

I numeri naturali sono i numeri più semplici e i primi che si imparano.

I numeri naturali vengono utilizzati per contare in generale, ad esempio per indicare quante foglie ha una pianta o quante caramelle ci sono in un vaso.



5 foglie



42 caramelle

Frazioni “compatibili”