I numeri razionali

Mattia Cozzi

a.f. 2024/2025

Contenuti

Divisibilità

Dati due numeri interi, è possibile che:

- la divisione tra loro sia esatta, senza resto, come in:

  $$12 : 3 = 4, \text{ resto } 0$$

  Diciamo allora che il primo numero è divisibile per il secondo.

- la divisione tra loro abbia resto, come in:

  $$13 : 3 = 4, \text{ resto } 1$$

  Diciamo allora che il primo numero non è divisibile per il secondo.

Multipli e sottomultipli/divisori

Se il numero a è divisibile per il numero b, allora:

- a è multiplo di b;

  21 è multiplo di 7

- b è sottomultiplo o divisore di a.
  - 7 è sottomultiplo di 21

Una conseguenza

Se il prodotto di due numeri dà come risultato un terzo numero, allora quest'ultimo è multiplo degli altri due.

$$5 \cdot 9 = 45$$

Quindi 45 è multiplo sia di 5, sia di 9.

E i numeri negativi?

Lo stesso discorso, senza variazioni, vale coi numeri negativi:

$$-63 : 7 = -9$$

e quindi:

- -63 è multiplo di 7 e di -9;
- 7 e -9 sono divisori di -63.

Ti ricordi la regola dei segni?

Domande interessanti

- Qual è il numero che è multiplo di tutti i numeri interi?
- Qual è il numero che è sottomultiplo di tutti i numeri interi?

Pari e dispari in $\mathbb{N}$

I numeri pari sono i multipli di 2, e quindi terminano con:

0, 2, 4, 6, 8

Sono indicati con:

$$\mathbb{P} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$$

I numeri dispari sono i numeri che non sono pari, e quindi terminano con:

1, 3, 5, 7, 9

$$\mathbb{D} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$$

Pari e dispari in $\mathbb{Z}$

Il concetto di pari e dispari si estende anche ai numeri interi (positivi e negativi:)

$$\mathbb{P} = \{\dots, -6, -4, -2, 0, +2, +4, +6, \dots\}$$

$$\mathbb{D} = \{\dots, -5, -3, -1, 0, +1, +3, +5, \dots\}$$

Criteri di divisibilità

I criteri di divisibilità sono dei criteri per capire se un numero intero è divisibile per un altro, senza calcolare per davvero la divisione.

Potremo ad esempio rispondere, senza far calcoli, alle seguenti domande:

- 1404 è divisibile per 9?
- 153 è divisibile per 11?

Divisibilità per 2

Criterio di divisibilità per 2

Un numero è divisibile per 2 se è pari, cioè se finisce per:

$$0, 2, 4, 6, 8$$

- 487238 è divisibile per 2;
- 400 è divisibile per 2.

Divisibilità per 3

Critero di divisibilità per 3

Un numero è divisibile per 3 se la somma delle sue cifre è un multiplo di 3.

- 171 è divisibile per 3, perché $1 + 7 + 1 = 9$;
- 3477 è divisibile per 3, perché $3 + 4 + 7 + 7 = 21$.

Divisibilità per 6

Criterio di divisibilità per 6

Un numero è divisibile per 6 se è divisibile sia, per 2 sia per 3.

- 492 è divisibile per 6, perché è pari e $4 + 9 + 2 = 15$.

Divisibilità per 5

Criterio di divisibilità per 5

Un numero è divisibile per 5 se finisce con 0 oppure 5.

- 4565 è divisibile per 5;
- 150 è divisibile per 5.

Divisibilità per 9

Criterio di divisibilità per 9

Un numero è divisibile per 9 se la somma delle sue cifre è un multiplo di 9.

Prova a considerare la tabellina del 9!

- 171 è divisibile per 9, perché $1 + 7 + 1 = 9$;
- 48672 è divisibile per 9, perché $4 + 8 + 6 + 7 + 2 = 27$.

Divisibilità per 10

Criterio di divisibilità per 10

Un numero è divisibile per 10 se finisce per 0.

- 1360 è divisibile per 10.

Divisibilità per 7

Critero di divisibilità per 7

Un numero è divisibile per 7 se la differenza tra le decine e il doppio delle unità è un multiplo di 7.

- 91 è divisibile per 7, perché $9 - 1 \cdot 2 = 7$;
- 231 è divisibile per 7, perché $23 - 1 \cdot 2 = 21$.

Divisibilità per 11

Critero di divisibilità per 11

Un numero è divisibile per 11 se la differenza tra la somma delle cifre di posto dispari e quella delle cifre di posto pari è un multiplo di 11.

- 121 è divisibile per 11, perché $(1 + 1) - (2) = 0$;
- 9273 è divisibile per 11, perché $(9 + 7) - (2 + 3) = 11$.

Divisibilità per 4

Criterio di divisibilità per 4

Un numero è divisibile per 4 se le ultime due cifre sono un multiplo di 4.

- 412 è multiplo di 4;
- 576 è multiplo di 4.

Numeri primi

I numeri primi sono tutti e soli i numeri naturali che sono divisibili soltanto per 1 e per sé stessi.

7 è un numero primo, perché può essere diviso solo per 1 e per 7.

I numeri non primi si dicono composti, come 12 (divisibile per un sacco di numeri!).

1 non viene considerato un numero primo.

I numeri primi sono infiniti!

Numeri primi da 1 a 50

2	3	5	7	11
13	17	19	23	29
31	37	41	43	47

Scomposizione in fattori primi

È stato dimostrato che:

ogni numero naturale può essere scritto come prodotto di soli numeri primi.

Ad esempio:

$$153 = 3 \cdot 3 \cdot 17$$

$$385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$$

Questo procedimento è detto scomposizione o fattorizzazione in numeri primi.

Esempio di scomposizione

Proviamo a scomporre 180 in fattori primi:

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Possiamo scrivere la fattorizzazione di 180:

$$180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Esercizi sulla scomposizione in fattori primi

1. Scomponi in fattori primi i seguenti numeri:

- 152
- 90
- 156
- 612
- 720
- 1024

Massimo comun divisore (MCD)

Il massimo comun divisore (indicato con MCD) tra due numeri è il più alto dei divisori comuni tra due numeri.

Elenchiamo i divisori di 24:

$$div(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

Elenchiamo i divisori di 36:

$$div(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

Quindi il massimo comun divisore tra 24 e 36 è 12.

Esiste un modo più veloce per calcolare l'MCD tra due numeri?

Calcolo dell'MCD

Eseguo le seguenti operazioni:

1. scompongo in fattori primi i due numeri;
2. costruisco l'MCD scegliendo, nelle scomposizioni, i fattori in comune, con l'esponente più basso.

Esempio:

$$24 = 2^3 \cdot 3 \qquad 36 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$MCD(24, 36) = 2^2 \cdot 3$$

Esercizi sull'MCD

1. Calcola il Massimo Comun Divisore fra i seguenti gruppi di numeri.

   - $18, 96$
   - $9, 108$
   - $26, 64$
   - $3, 7, 9$
   - $14, 35, 21$
   - $36, 108, 117$

Minimo comune multiplo (mcm)

Il minimo comune multiplo (indicato con mcm) tra due numeri è il più piccolo tra i multipli comuni tra due numeri diverso da zero.

Elenchiamo i multipli di 6:

$$mult(6) = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, \ldots\}$$

Elenchiamo i multipli di 15:

$$mult(15) = \{0, 15, 30, 45, 60, 75, 90, \ldots\}$$

Quindi il minimo comun divisore tra 6 e 15 è 30.

Esiste un modo più veloce per calcolare l'mcm tra due numeri?

Calcolo dell'mcm

Eseguo le seguenti operazioni:

1. scompongo in fattori primi i due numeri;
2. costruisco l'mcm scegliendo, nelle scomposizioni, tutti i fattori (comuni e non comuni), con l'esponente più alto.

Esempio:

$$24 = 2^3 \cdot 3 \qquad 28 = 2^2 \cdot 7$$

$$mcm(24, 28) = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$$

Esercizi sull'mcm

1. Calcola il minimo comune multiplo fra i seguenti gruppi di numeri.

   - $18, 96$
   - $9, 108$
   - $26, 64$
   - $3, 7, 9$
   - $14, 35, 21$
   - $36, 108, 117$

2. In un campanile ci sono tre campane. Una batte un rintocco ogni 5 secondi, la seconda un rintocco ogni 6 secondi, la terza batte un rintocco ogni 8 secondi. Se battono insieme il primo rintocco, dopo quanti secondi ne batteranno un altro insieme?

Perché le frazioni?

I numeri decimali e i numeri interi, sia positivi sia negativi, possono essere anche espressi sotto forma di frazioni, che vanno a costituire l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali.

Ad esempio:

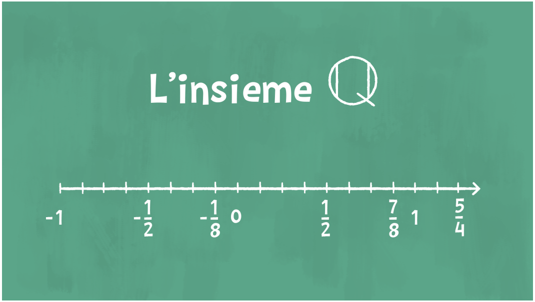
$$7,7 = 77 : 10 = \frac{77}{10}$$

$$-2,3 = -23 : 10 = -\frac{23}{10}$$

Le frazioni sono solo un modo più comodo di scrivere delle divisioni!

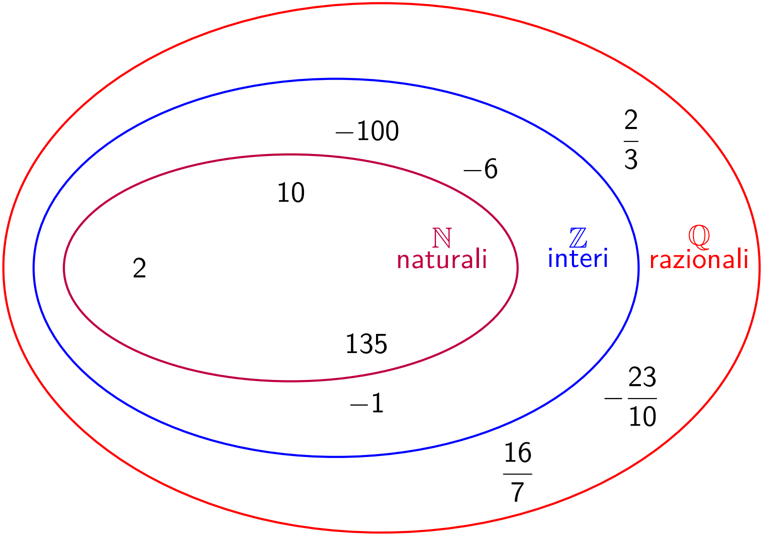
L'insieme $\mathbb{Q}$

Le frazioni, cioè i numeri decimali (finiti oppure periodici), costituiscono l'insieme $\mathbb{Q}$, cioè l'insieme dei numeri razionali (*ratio* in latino significa "rapporto", cioè divisione.)



Stiamo riempiendo lo spazio tra un numero e l'altro che c'era in $\mathbb{Z}$.

Insiemi numerici



Cosa resta fuori

L'insieme $\mathbb{Q}$ non esaurisce l'insieme dei numeri che si usano in matematica.

La sua estensione è l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

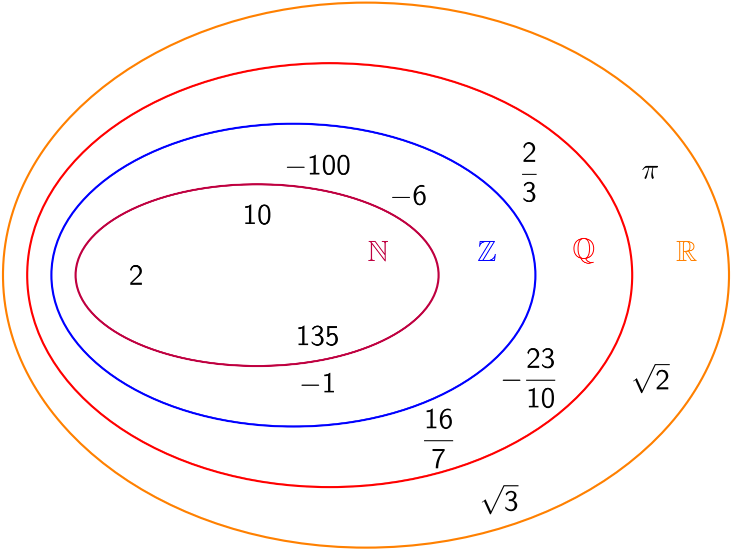
$\mathbb{R}$ contiene numeri decimali non periodici, cioè con un numero infinito di cifre casuali dopo la virgola, che non si ripetono mai.

Qualche esempio di numero reale ma non razionale:

$$\pi = 3,141592653589\ldots$$

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730\ldots$$

Insiemi numerici



Terminologia

Essendo le frazioni delle divisioni, possiamo introdurre dei nuovi termini:

- il numeratore è “il numero sopra”, cioè il dividendo;
- il denominatore è il “numero sotto”, cioè il divisore.

$$\frac{15}{7}$$

15 è il numeratore, 7 è il denominatore.

Il valore di una frazione

A volte, per capire bene il valore di un numero razionale (una frazione) è utile eseguire la divisione tra i due numeri:

$$\frac{3}{8} = 0,375$$

Alcune frazioni, anche se in apparenza diverse, hanno in realtà lo stesso valore:

$$\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$$

Quando due frazioni hanno lo stesso valore, si dicono frazioni equivalenti.

Minimi termini

Per trovare la frazione più semplice equivalente ad una certa frazione, si ricorre alla semplificazione.

Quando una frazione è espressa nella sua forma più semplice, si dice che è ridotta ai minimi termini.

$\frac{9}{24}$ non è ridotta ai minimi termini

$\frac{3}{8}$ è ridotta ai minimi termini

Per eseguire la semplificazione, è importantissimo essere abili nella scomposizione in fattori primi.

Semplificazione

Possiamo semplificare una frazione dividendo numeratore e denominatore per un fattore comune (il migliore è l'mcm, ma possiamo anche procedere per passi).

Esempi:

$$\frac{16}{10} = \frac{8 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{8 \cdot \cancel{2}}{5 \cdot \cancel{2}} = \frac{8}{5}$$

$$\frac{14}{21} = \frac{7 \cdot 2}{7 \cdot 3} = \frac{\cancel{7} \cdot 2}{\cancel{7} \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

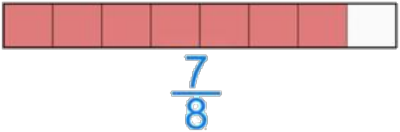
Esercizi sulla semplificazione delle frazioni

1. Riduci ai minimi termini le seguenti frazioni:

- $\frac{4}{8}$
- $\frac{10}{15}$
- $\frac{100}{200}$
- $\frac{16}{24}$
- $\frac{2000}{3000}$
- $\frac{8}{4}$

Rappresentare una frazione

Per eseguire i calcoli con le frazioni, è molto utile immaginarle, cioè vederle con l'immaginazione:



La frazione rappresentata significa "sette parti su otto" (quindi meno di un intero, cioè 1).

Prova a rappresentare $\frac{7}{4}$.

Cosa succede se il numeratore è maggiore del denominatore?

Frazioni proprie, improprie e apparenti

- Frazioni proprie, in cui il numeratore è più piccolo del denominatore (valgono quindi meno di 1);

$$\frac{2}{3} = 0,666\ldots \qquad \frac{99}{100} = 0,99$$

- frazioni apparenti, in cui il numeratore è un multiplo del denominatore (equivalgono quindi a un numero intero);

$$\frac{10}{5} = \frac{2}{1} = 2 \qquad \frac{40}{4} = \frac{10}{1} = 10$$

- frazioni improprie, in cui il numeratore è un più grande del denominatore (valgono quindi più di 1);

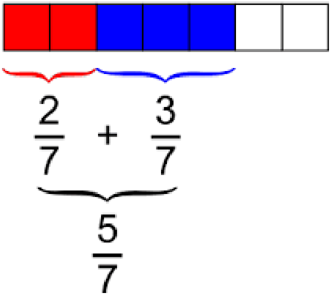
$$\frac{11}{5} = 2,2 \qquad \frac{13}{8} = 1,625$$

Esercizi sulla rappresentazione delle frazioni

1. Rappresenta le seguenti frazioni (se necessario, semplificale prima di disegnarle):
   - $\frac{2}{5}$
   - $\frac{1}{9}$
   - $\frac{6}{12}$
   - $\frac{6}{5}$
   - $\frac{9}{3}$
   - $\frac{38}{19}$
2. Scrivi 6 frazioni (2 proprie, 2 improprie e 2 apparenti) e rappresentale.

Frazioni “compatibili”

È molto facile eseguire la somma/differenza di frazioni quando queste hanno lo stesso denominatore: basta sommare/sottrarre i numeratori:



Esempi

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{3+7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{7}{8} - \frac{5}{8} = \frac{7-5}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Come si esegue invece questo calcolo?

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{4}$$