

I numeri razionali

Mattia Cozzi

a.f. 2024/2025

Contenuti

Divisibilità

Criteri

Primi

Frazioni

Operazioni

Divisibilità

Dati due numeri interi, è possibile che:

- la divisione tra loro sia esatta, senza resto, come in:

$$12 : 3 = 4, \text{ resto } 0$$

Diciamo allora che il primo numero **è divisibile** per il secondo.

- la divisione tra loro abbia resto, come in:

$$13 : 3 = 4, \text{ resto } 1$$

Diciamo allora che il primo numero **non è divisibile** per il secondo.

Multipli e sottomultipli/divisori

Se il numero a è divisibile per il numero b , allora:

- a è **multiplo** di b ;

21 è multiplo di 7

- b è **sottomultiplo o divisore** di a .
 - 7 è sottomultiplo di 21

Una conseguenza

Se il prodotto di due numeri dà come risultato un terzo numero, allora quest'ultimo è multiplo degli altri due.

$$5 \cdot 9 = 45$$

Quindi 45 è multiplo sia di 5, sia di 9.

E i numeri negativi?

Lo stesso discorso, senza variazioni, vale coi numeri negativi:

$$-63 : 7 = -9$$

e quindi:

- -63 è multiplo di 7 e di -9 ;
- 7 e -9 sono divisori di -63 .

Ti ricordi la **regola dei segni**?

Domande interessanti

- Qual è il numero che è multiplo di tutti i numeri interi?
- Qual è il numero che è sottomultiplo di tutti i numeri interi?

Pari e dispari in \mathbb{N}

I **numeri pari** sono i multipli di 2, e quindi terminano con:

0, 2, 4, 6, 8

Sono indicati con:

$$\mathbb{P} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$$

I **numeri dispari** sono i numeri che non sono pari, e quindi terminano con:

1, 3, 5, 7, 9

$$\mathbb{D} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$$

Pari e dispari in \mathbb{Z}

Il concetto di pari e dispari si estende anche ai numeri interi (positivi e negativi:)

$$\mathbb{P} = \{\dots, -6, -4, -2, 0, +2, +4, +6, \dots\}$$

$$\mathbb{D} = \{\dots, -5, -3, -1, 0, +1, +3, +5, \dots\}$$

Criteri di divisibilità

I criteri di divisibilità sono dei **criteri** per capire se un numero intero è divisibile per un altro, senza calcolare per davvero la divisione.

Potremo ad esempio rispondere, senza far calcoli, alle seguenti domande:

- 1404 è divisibile per 9?
- 153 è divisibile per 11?

Divisibilità per 2

Critero di divisibilità per 2

Un numero è divisibile per 2 se è pari, cioè se finisce per:

0, 2, 4, 6, 8

- 487238 è divisibile per 2;
- 400 è divisibile per 2.

Divisibilità per 3

Criterio di divisibilità per 3

Un numero è divisibile per 3 se la somma delle sue cifre è un multiplo di 3.

- 171 è divisibile per 3, perché $1 + 7 + 1 = 9$;
- 3477 è divisibile per 3, perché $3 + 4 + 7 + 7 = 21$.

Divisibilità per 6

Criterio di divisibilità per 6

Un numero è divisibile per 6 se è divisibile sia, per 2 sia per 3.

- 492 è divisibile per 6, perché è pari e $4 + 9 + 2 = 15$.

Divisibilità per 5

Critero di divisibilità per 5

Un numero è divisibile per 5 se finisce con 0 oppure 5.

- 4565 è divisibile per 5;
- 150 è divisibile per 5.

Divisibilità per 9

Critero di divisibilità per 9

Un numero è divisibile per 9 se la somma delle sue cifre è un multiplo di 9.

Prova a considerare la tabellina del 9!

- 171 è divisibile per 9, perché $1 + 7 + 1 = 9$;
- 48672 è divisibile per 9, perché $4 + 8 + 6 + 7 + 2 = 27$.

Divisibilità per 10

Critero di divisibilità per 10

Un numero è divisibile per 10 se finisce per 0.

- 1360 è divisibile per 10.

Divisibilità per 7

Criterio di divisibilità per 7

Un numero è divisibile per 7 se la differenza tra le decine e il doppio delle unità è un multiplo di 7.

- 91 è divisibile per 7, perché $9 - 1 \cdot 2 = 7$;
- 231 è divisibile per 7, perché $23 - 1 \cdot 2 = 21$.

Divisibilità per 11

Critero di divisibilità per 11

Un numero è divisibile per 11 se la differenza tra la somma delle cifre di posto dispari e quella delle cifre di posto pari è un multiplo di 11.

- 121 è divisibile per 11, perché $(1 + 1) - (2) = 0$;
- 9273 è divisibile per 11, perché $(9 + 7) - (2 + 3) = 11$.

Divisibilità per 4

Critero di divisibilità per 4

Un numero è divisibile per 4 se le ultime due cifre sono un multiplo di 4.

- 412 è multiplo di 4;
- 576 è multiplo di 4.

Numeri primi

I numeri primi sono tutti e soli i numeri naturali che sono **divisibili soltanto per 1 e per sé stessi**.

7 è un numero primo, perché può essere diviso solo per 1 e per 7.

I numeri non primi si dicono composti, come 12 (divisibile per un sacco di numeri!).

1 non viene considerato un numero primo.

I numeri primi sono **infiniti**!

Numeri primi da 1 a 50

2	3	5	7	11
13	17	19	23	29
31	37	41	43	47

Scomposizione in fattori primi

È stato dimostrato che:

ogni numero naturale può essere scritto come prodotto di soli numeri primi.

Ad esempio:

$$153 = 3 \cdot 3 \cdot 17$$

$$385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$$

Questo procedimento è detto **scomposizione o fattorizzazione** in numeri primi.

Esempio di scomposizione

Proviamo a scomporre 180 in fattori primi:

180		2
90		2
45		3
15		3
5		5
1		

Possiamo scrivere la fattorizzazione di 180:

$$180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Esercizi sulla scomposizione in fattori primi

1. Scomponi in fattori primi i seguenti numeri:

- 152
- 90
- 156

- 612
- 720
- 1024

Massimo comun divisore (MCD)

Il massimo comun divisore (indicato con MCD) tra due numeri è **il più alto dei divisori comuni tra due numeri.**

Elenchiamo i divisori di 24:

$$\text{div}(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

Elenchiamo i divisori di 36:

$$\text{div}(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

Quindi il massimo comun divisore tra 24 e 36 è 12.

Esiste un modo più veloce per calcolare l'MCD tra due numeri?

Calcolo dell'MCD

Eseguo le seguenti operazioni:

1. scompongo in fattori primi i due numeri;
2. costruisco l'MCD scegliendo, nelle scomposizioni, i fattori in comune, con l'esponente più basso.

Esempio:

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$MCD(24, 36) = 2^2 \cdot 3$$

Esercizi sull'MCD

1. Calcola il Massimo Comun Divisore fra i seguenti gruppi di numeri.

- 18, 96
- 9, 108
- 26, 64

- 3, 7, 9
- 14, 35, 21
- 36, 108, 117

Minimo comune multiplo (mcm)

Il minimo comune multiplo (indicato con mcm) tra due numeri è **il più piccolo tra i multipli comuni tra due numeri** diverso da zero.

Elenchiamo i multipli di 6:

$$\text{mult}(6) = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, \dots\}$$

Elenchiamo i multipli di 15:

$$\text{mult}(15) = \{0, 15, 30, 45, 60, 75, 90, \dots\}$$

Quindi il minimo comun divisore tra 6 e 15 è 30.

Esiste un modo più veloce per calcolare l'mcm tra due numeri?

Calcolo dell'mcm

Eseguo le seguenti operazioni:

1. scompongo in fattori primi i due numeri;
2. costruisco l'mcm scegliendo, nelle scomposizioni, tutti i fattori (comuni e non comuni), con l'esponente più alto.

Esempio:

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

$$28 = 2^2 \cdot 7$$

$$mcm(24, 28) = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$$

Esercizi sull'mcm

1. Calcola il minimo comune multiplo fra i seguenti gruppi di numeri.

- 18, 96
- 9, 108
- 26, 64

- 3, 7, 9
- 14, 35, 21
- 36, 108, 117

2. In un campanile ci sono tre campane. Una batte un rintocco ogni 5 secondi, la seconda un rintocco ogni 6 secondi, la terza batte un rintocco ogni 8 secondi. Se battono insieme il primo rintocco, dopo quanti secondi ne batteranno un altro insieme?

Perché le frazioni?

I numeri decimali e i numeri interi, sia positivi sia negativi, possono essere anche espressi sotto forma di **frazioni**, che vanno a costituire l'insieme \mathbb{Q} dei **numeri razionali**.

Ad esempio:

$$7,7 = 77 : 10 = \frac{77}{10}$$

$$-2,3 = -23 : 10 = -\frac{23}{10}$$

Le frazioni sono solo un modo più comodo di scrivere delle divisioni!

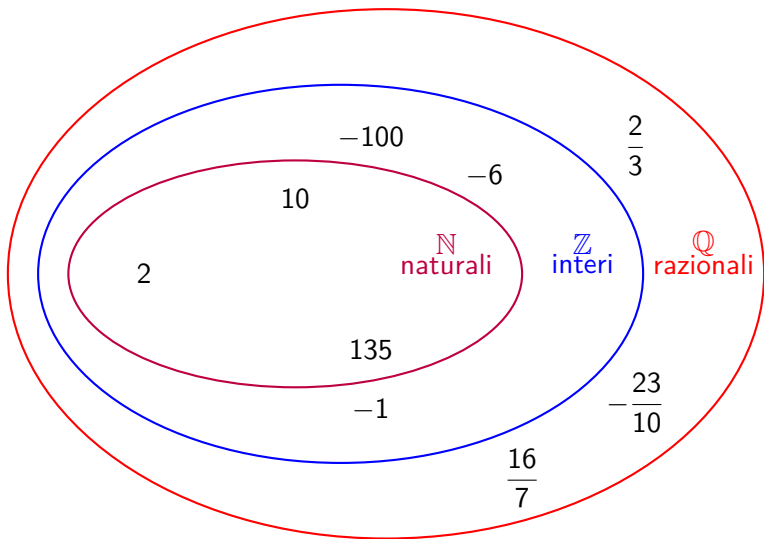
L'insieme \mathbb{Q}

Le frazioni, cioè i numeri decimali (finiti oppure periodici), costituiscono l'insieme \mathbb{Q} , cioè l'insieme dei **numeri razionali** (*ratio* in latino significa “rapporto”, cioè divisione.)



Stiamo riempiendo lo spazio tra un numero e l'altro che c'era in \mathbb{Z} .

Insiemi numerici



Cosa resta fuori

L'insieme \mathbb{Q} non esaurisce l'insieme dei numeri che si usano in matematica.

La sua estensione è l'insieme \mathbb{R} dei **numeri reali**.

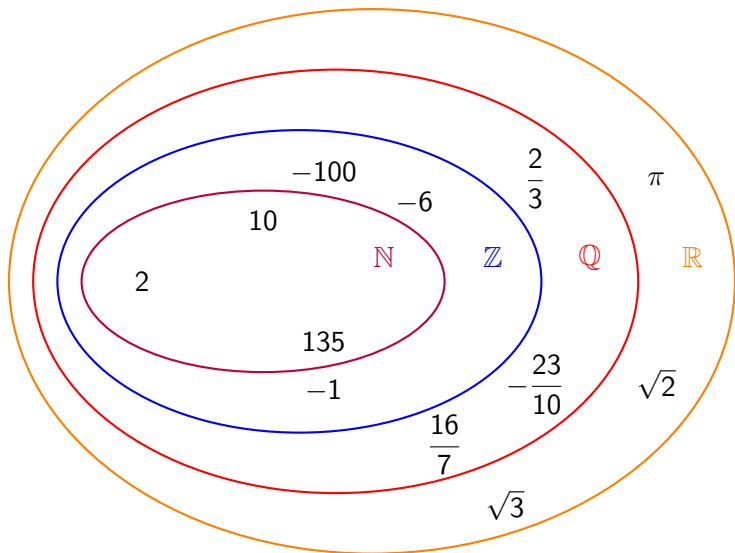
\mathbb{R} contiene numeri decimali non periodici, cioè con un numero infinito di cifre casuali dopo la virgola, che non si ripetono mai.

Qualche esempio di numero reale ma non razionale:

$$\pi = 3,141592653589\dots$$

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730\dots$$

Insiemi numerici



Terminologia

Essendo le frazioni delle divisioni, possiamo introdurre dei nuovi termini:

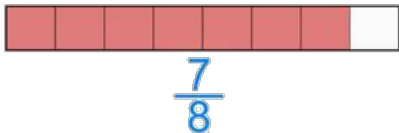
- il **numeratore** è “il numero sopra”, cioè il dividendo;
- il **denominatore** è il “numero sotto”, cioè il divisore.

$$\frac{15}{7}$$

15 è il numeratore, 7 è il denominatore.

Rappresentare una frazione (1)

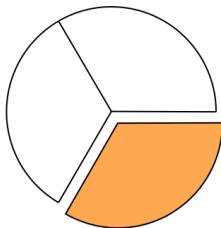
Per eseguire i calcoli con le frazioni, è molto utile **immaginarle**,
cioè vederle con l'immaginazione:



La frazione rappresentata significa “sette parti su otto” (quindi meno di un intero, cioè 1).

Rappresentare una frazione (2)

Un altro modo di rappresentare le frazioni:



$$\frac{2}{3}$$

Esercizi sulla rappresentazione delle frazioni

1. Rappresenta le seguenti frazioni:

● $\frac{4}{5}$

● $\frac{2}{13}$

● $\frac{1}{2}$

● $\frac{5}{10}$

● $\frac{7}{9}$

● $\frac{2}{11}$

Il valore di una frazione

A volte, per capire bene il valore di un numero razionale (una frazione) è utile **eseguire la divisione tra i due numeri**:

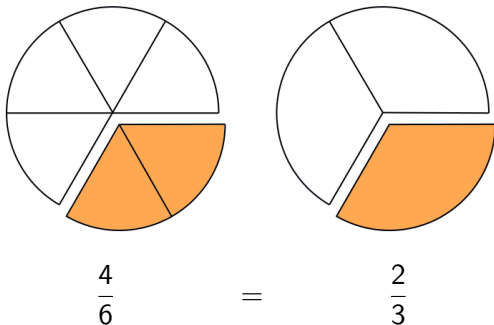
$$\frac{3}{8} = 0,375$$

Alcune frazioni, anche se in apparenza diverse, hanno in realtà **lo stesso valore**:

$$\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$$

Frazioni equivalenti

Quando due frazioni hanno lo stesso valore, si dicono **frazioni equivalenti**.



Minimi termini

Per trovare la frazione **più semplice** equivalente ad una certa frazione, si ricorre alla **semplificazione**.

Quando una frazione è espressa nella sua forma più semplice, si dice che è **ridotta ai minimi termini**.

$\frac{9}{24}$ **non** è ridotta ai minimi termini

$\frac{3}{8}$ è ridotta ai minimi termini

Per eseguire la semplificazione, è importantissimo essere abili nella **scomposizione in fattori primi**.

Semplificazione

Possiamo semplificare una frazione **dividendo numeratore e denominatore** per un fattore comune (il migliore è l'MCD, ma possiamo anche procedere per passi).

Esempi:

$$\frac{16}{10} = \frac{8 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{8 \cdot \cancel{2}}{5 \cdot \cancel{2}} = \frac{8}{5}$$

$$\frac{14}{21} = \frac{7 \cdot 2}{7 \cdot 3} = \frac{\cancel{7} \cdot 2}{\cancel{7} \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

Esercizi sulla semplificazione delle frazioni

1. Riduci ai minimi termini le seguenti frazioni:

● $\frac{4}{8}$

● $\frac{16}{24}$

● $\frac{10}{15}$

● $\frac{2000}{3000}$

● $\frac{100}{200}$

● $\frac{8}{4}$

Frazioni particolari

Prova a rappresentare $\frac{7}{4}$ nel modo che preferisci.

Cosa succede se il numeratore è maggiore del denominatore?

Frazioni proprie, improprie e apparenti

- **Frazioni proprie**, in cui il numeratore è più piccolo del denominatore (valgono quindi **meno di 1**);

$$\frac{2}{3} = 0,666\dots$$

$$\frac{99}{100} = 0,99$$

- **frazioni apparenti**, in cui il numeratore è un multiplo del denominatore (equivalgono quindi a **un numero intero**);

$$\frac{10}{5} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{40}{4} = \frac{10}{1} = 10$$

- **frazioni improprie**, in cui il numeratore è un più grande del denominatore (valgono quindi **più di 1**);

$$\frac{11}{5} = 2,2$$

$$\frac{13}{8} = 1,625$$

Frazione inversa

La frazione inversa di una certa frazione si ottiene **invertendo numeratore e denominatore**.

La frazione inversa di $\frac{4}{7}$ è $\frac{7}{4}$.

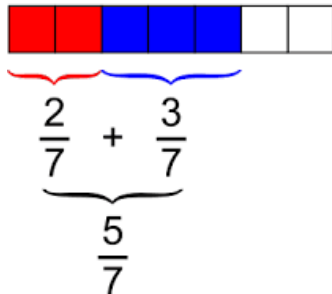
Esercizi sulle frazioni proprie, improprie e apparenti

1. Scrivi 6 frazioni (2 proprie, 2 improprie e 2 apparenti) e rappresentale.
2. Che tipo di frazione è l'inversa di una funzione impropria?

Frazioni “compatibili”

È molto facile eseguire la somma/differenza di frazioni quando queste hanno **lo stesso denominatore**.

Basta sommare/sottrarre i numeratori!



Esempi

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{3+7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{7}{8} - \frac{5}{8} = \frac{7-5}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Come si esegue invece questo calcolo?

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{4}$$

Somma e differenza di frazioni

Per eseguire la somma o la differenza tra due frazioni, dobbiamo **trasformare** le frazioni di partenza in frazioni equivalenti con **lo stesso denominatore**.

Ad esempio:

$$\frac{2}{7} = \frac{8}{28}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{21}{28}$$

E quindi:

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{4} = \frac{8}{28} + \frac{21}{28} = \frac{8+21}{28} = \frac{29}{28}$$

Scelta del denominatore

Come facciamo a scegliere il **denominatore migliore** per le nostre frazioni equivalenti?

Dobbiamo trovare un **multiplo comune**, e il migliore è il:

minimo comune multiplo tra i due denominatori!

In effetti, il mcm tra 7 e 4 è proprio 28. . .

Metodo (1)

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{5}$$

Quando dobbiamo sommare/sottrarre due frazioni con denominatori diversi:

1. troviamo il mcm tra i due denominatori e lo usiamo come denominatore del nostro calcolo:

$$\text{mcm}(3, 5) = 15$$

$$\frac{\dots - \dots}{15}$$

Metodo (2)

2. per completare i numeratori, divido il *nuovo denominatore per il vecchio denominatore*, e moltiplico il vecchio numeratore per il valore trovato.

Per la prima frazione:

$$15 : 3 = 5$$

e moltiplico 2 per 5, ottengo 10:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{10 - \dots}{15}$$

Per la seconda frazione:

$$15 : 5 = 3$$

$$3 \cdot 1 = 3$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{10 - 3}{15} = \frac{7}{15}$$

Esempio

$$\frac{3}{7} + \frac{3}{4} =$$

$$\frac{12 + 21}{28} =$$

$$\frac{33}{28}$$

Esercizi sulla somma/differenza tra frazioni

1. Esegui i seguenti calcoli, semplificando i risultati se necessario.

$$\bullet \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$\bullet \quad -\frac{7}{3} + \frac{7}{2}$$

$$\bullet \quad \frac{8}{3} + \frac{9}{8}$$

$$\bullet \quad \frac{8}{11} + \frac{5}{2}$$

$$\bullet \quad \frac{3}{4} - \frac{13}{2}$$

$$\bullet \quad -\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\bullet \quad \frac{19}{100} - \frac{3}{50}$$

$$\bullet \quad \frac{44}{3} - \frac{3}{44}$$

Differenza tra somma e prodotto

La ricerca del denominatore comune serve solo per somme e sottrazioni.

La moltiplicazione tra frazioni è molto più semplice!

Proviamo a eseguire:

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{5}$$

Prodotto tra frazioni

Per eseguire la moltiplicazione, basta **moltiplicare tra loro i numeratori** e **moltiplicare tra loro i denominatori**.

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 4}{7 \cdot 5} = \frac{12}{35}$$

Semplificazione nel prodotto (1)

Se una coppia di numeri (uno sopra e uno sotto) **si possono dividere per uno stesso numero**, allora prima di fare il calcolo li **semplifichiamo**.

$$\frac{3}{\cancel{8}_4} \times \frac{\cancel{10}^5}{7} = \frac{3 \times 5}{4 \times 7} = \frac{15}{28}$$

Questo ci permette di ottenere un risultato **già semplificato**!

Semplificazione nel prodotto (2)

Un altro esempio, un po' più complicato:

$$\begin{array}{c} 4 \\ \frac{16}{3} \end{array} \times \begin{array}{c} 2 \\ \frac{10}{4} \end{array} = \frac{4 \times 2}{3 \times 1} = \frac{8}{3}$$

Esercizi sul prodotto tra frazioni

1. Esegui i seguenti calcoli, semplificando se necessario.

$$\bullet \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\bullet \quad \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5}$$

$$\bullet \quad \frac{8}{3} \cdot \frac{9}{8}$$

$$\bullet \quad \left(-\frac{1}{11}\right) \cdot \frac{99}{5}$$

$$\bullet \quad \frac{3}{4} \cdot \frac{13}{6}$$

$$\bullet \quad \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{12}{7}\right)$$

$$\bullet \quad \frac{19}{100} \cdot \frac{50}{3}$$

$$\bullet \quad \left(-\frac{24}{21}\right) \cdot \left(-\frac{35}{16}\right)$$

Quoziente tra frazioni

Per eseguire la divisione tra due frazioni, **si trasforma la divisione in una moltiplicazione.**

Trasformando in una moltiplicazione, **la seconda frazione va invertita!**

$$\frac{7}{5} : \frac{4}{9} = \frac{7}{5} \cdot \frac{9}{4} = \frac{63}{20}$$

Dopo aver trasformato in moltiplicazione, possiamo ovviamente semplificare come al solito.

Frazioni di frazioni

Può capitare di incontrare frazioni “doppie”, come:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}}$$

Niente paura: le frazioni sono solo divisioni, e quindi:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{2}{3} : \frac{5}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$$

Esercizi sul quoziente tra frazioni

1. Esegui i seguenti calcoli, semplificando se necessario.

• $\frac{1}{3} : \frac{1}{4}$

• $\frac{10}{9} : \frac{2}{3}$

• $\frac{8}{3} : \frac{8}{9}$

• $\frac{2}{3} : \left(-\frac{12}{7}\right)$

• $\frac{7}{4} : \frac{7}{4}$

• $\left(-\frac{24}{21}\right) : \left(-\frac{12}{7}\right)$

Espressioni con le frazioni

1. Calcola il valore delle seguenti espressioni:

$$\bullet \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{4} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{6} \quad \left[\frac{7}{4} \right]$$

$$\bullet \left(\frac{2}{3} + 3 \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \cdot \frac{4}{3} - \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{6} \right) \cdot 2 \quad [3]$$

$$\bullet \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{4} \right) + \left(6 - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{2}{11} - \left(\frac{10}{9} + \frac{1}{4} \right) \quad [0]$$

$$\bullet \frac{\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{12}{7} + \frac{1}{7} \right) : \left(1 + \frac{1}{6} \right)}{\left[\left(\frac{7}{4} - \frac{3}{2} \right) : \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right] \cdot \frac{12}{49}} \quad \left[\frac{8}{5} \right]$$