

# I numeri: naturali, interi, decimali

Mattia Cozzi

a.f. 2024/2025

Numeri naturali  
○○○○○○

Operazioni  
○○○○○○○○○

Potenze  
○○○○○○○○

Espressioni  
○○○○○○

Numeri interi  
○○○○○○○○○○○○○○

Numeri decimali  
○○○

# Contenuti

Numeri naturali

Operazioni

Potenze

Espressioni

Numeri interi

Numeri decimali

## Numeri naturali

I numeri naturali sono i numeri più semplici e i primi che si imparano.

**I numeri naturali vengono utilizzati per contare** in generale, ad esempio per indicare quante foglie ha una pianta o quante caramelle ci sono in un vaso.



5 foglie

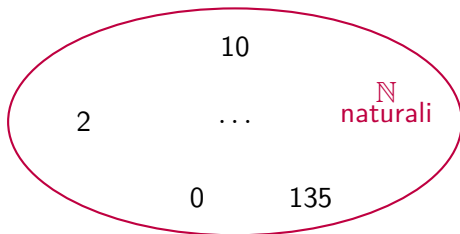


42 caramelle

## L'insieme $\mathbb{N}$

I numeri naturali corrispondono quindi all'insieme:

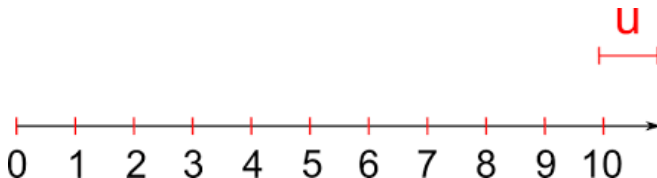
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$



Attenzione: lo zero è un numero naturale!

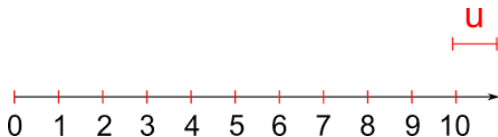
## Visualizzazione dei naturali

I numeri naturali possono essere visualizzati/immaginati come punti su una **semiretta**.



Immaginare i numeri (non solo i naturali) come punti sulla retta è fondamentale per capirli per davvero!

## Precedente e successivo



Tutti i naturali, tranne lo zero, hanno un:

- **precedente**, cioè il numero immediatamente a sinistra sulla linea dei naturali;
- **successivo/consequente**, cioè il numero immediatamente a destra sulla linea dei naturali;

Lo zero ha solo il successivo, non ha il precedente.

## Confronto tra naturali

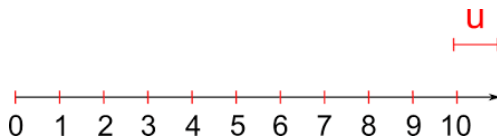
L'insieme dei naturali è **ordinato**, cioè alcuni numeri vengono prima (sono più piccoli) e altri vengono dopo (sono più grandi).

**Confrontare due naturali** significa stabilire se sono uguali e, se non lo sono, quale dei due è il più grande.

I simboli utilizzati sono:

- $=$  (uguale a);
- $<$  (minore di);
- $>$  (maggiore di).

## Esempi



$$5 = 5$$

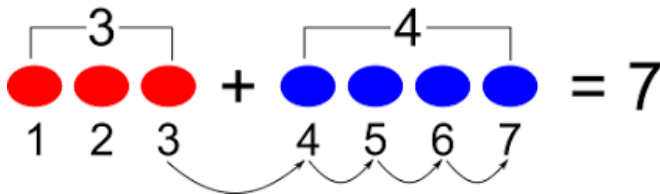
$$5 < 7$$

$$5 > 4$$



## Somma o addizione

La somma (simbolo  $+$ ) si esegue tra due numeri, partendo dal primo e contando verso destra tante unità quante sono nel secondo numero.



Per svolgere facilmente le somme, è sempre comodo **visualizzarle**.

## Terminologia

È utile imparare anche i termini corretti per indicare ciò di cui stiamo parlando:

The diagram shows the equation  $3 + 4 = 7$ . The number 3 is red, 4 is blue, and 7 is orange. Below the equation, the word "addendi" is positioned under the 3 and 4, with two arrows pointing from it to each of them. The word "somma" is positioned under the 7, with an arrow pointing from it to the 7.

$$3 + 4 = 7$$

addendi                      somma

Addendo significa “cosa da sommare”.

## Proprietà della somma

L'addizione è:

- **commutativa**, invertendo l'ordine degli addendi la somma non cambia:

$$3 + 7 = 7 + 3$$

- **associativa**, la somma di tre o più addendi non cambia se al posto di alcuni di essi si sostituisce la loro somma:

$$(4 + 7) + 3 = 4 + (7 + 3)$$

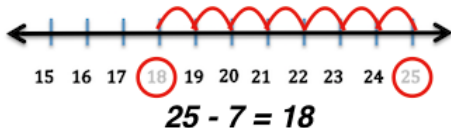
- **dissociativa**, la somma non cambia se un addendo viene sostituito con due addendi la cui somma è uguale a quello sostituito:

$$7 + 13 = 7 + (3 + 10)$$

## Differenza o sottrazione

La differenza (simbolo  $-$ ) si esegue tra due numeri, partendo dal primo e contando verso sinistra tante unità quante sono nel secondo numero.

$$\begin{array}{ccccc} 7 & - & 3 & = & 4 \\ \nearrow & & \nwarrow & & \nwarrow \\ \text{minuendo} & & \text{sottraendo} & & \text{differenza} \end{array}$$



## Un problema

Se il minuendo è più piccolo del sottraendo, come in:

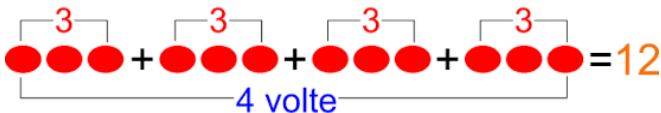
$$7 - 12$$

la differenza non può essere calcolata restando nell'insieme dei numeri naturali.

Vedremo che, per svolgere operazioni di questo tipo, è necessario un insieme di numeri diverso, l'insieme dei numeri interi  $\mathbb{Z}$ .

## Prodotto o moltiplicazione

Il prodotto (simbolo  $\times$  oppure  $\cdot$ ) si esegue tra due numeri, sommando il primo a sé stesso tante volte quante sono le unità del secondo numero.



$$3 \times 4 = 12$$

fattori                      prodotto

Attenzione: il prodotto è commutativo, associativo e dissociativo!

## Proprietà distributiva

Il prodotto ha un'altra utile proprietà, è distributivo rispetto alla somma e alla differenza.

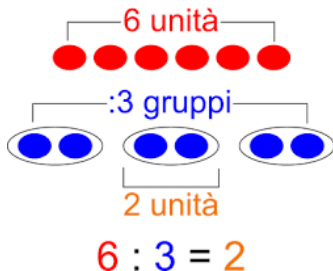
Ad esempio:

$$5 \cdot (3 + 6) = (5 \cdot 3) + (5 \cdot 6)$$

$$5 \cdot (7 - 4) = (5 \cdot 7) - (5 \cdot 4)$$

## Quoziente o divisione

Il quoziente (simbolo  $:$ ) si esegue tra due numeri. Si raggruppano le unità del primo in tanti gruppi uguali quante sono le unità del secondo e si contano le unità di un singolo gruppo.



Perché non è possibile dividere per zero?



## Divisione con e senza resto

Se la divisione può essere eseguita perfettamente (come  $7 : 2$ ), allora ci sono due possibilità:

- si utilizza la divisione con il resto;
- si utilizzano i numeri con la virgola (numeri decimali).

## Elevamento a potenza

L'elevamento a potenza utilizza due numeri, una **base** e un **esponente**. Si calcola moltiplicando la base per sé stessa tante volte quante indicate dall'esponente.

$$\begin{array}{c} \text{Esponente} \\ \swarrow \\ 3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \\ \nearrow \\ \text{Base} \end{array}$$

$\underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{4 \text{ fattori uguali}}$

Attenzione a non confondere l'elevamento a potenza con la moltiplicazione!

## Elevamenti particolari

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1$$

## Potenze di 10

Molto utili e importanti sono le potenze di 10:

$$10^0 = 1$$

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 100$$

$$10^3 = 1.000$$

$$10^6 = 1.000.000$$

$$10^9 = 1.000.000.000$$

## Esercizi sulle potenze

1. Calcola il valore delle seguenti potenze:

- $3^2$
- $12^2$
- $2^5$
- $8^3$
- $3^4$
- $2^{10}$

2. Trova il valore dell'esponente  $k$  in modo che siano vere le seguenti uguaglianze:

- $3^k = 81$
- $2^k = 256$
- $5^k = 625$
- $1765^k = 1765$

3. Disponi i seguenti numeri in ordine crescente:

$3^2$     $5^1$    18   124    $200^0$     $6^2$     $5^3$

## Proprietà delle potenze

Le proprietà delle potenze ci aiutano moltissimo a semplificare i calcoli che coinvolgono le potenze.

- Prodotto di potenze con la stessa base:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Esempio:

$$2^3 \cdot 2^7 = 2^{3+7} = 2^{10}$$

## Proprietà delle potenze

- Quoziente di potenze con la stessa base:

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

Esempio:

$$2^7 : 2^5 = 2^{7-5} = 2^2$$

- Potenza di potenza:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Esempio:

$$(9^7)^2 = 9^{7 \cdot 2} = 9^{14}$$

## Proprietà delle potenze

- Prodotto di potenze con lo stesso esponente:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Esempio:

$$2^7 \cdot 5^7 = (2 \cdot 5)^7 = 10^7$$

- Quoziente di potenze con lo stesso esponente:

$$a^n : b^n = (a : b)^n$$

Esempio:

$$14^8 : 7^8 = (14 : 7)^8 = 2^8$$



## Esercizi sulle proprietà delle potenze

1. Calcola applicando le proprietà delle potenze:

- $2^4 \cdot 2^6 : 2^{10}$

- $3^4 \cdot 3^5 : 3^6$

- $[(7^2)^3]^4 : [(7^3)^2]^0$

- $[(2^3 \cdot 3^3)^4 : 6^{10}]^2 : (2^2 \cdot 3^2)^2$

- $a^3 : a^2$

- $(a^7)^3$

2. Trova il valore di  $x$  in modo che siano vere le seguenti uguaglianze:

- $3^{x+2} = 27$

- $2^{4-x} = 2$

# Espressioni

Una espressione matematica è una sequenza di calcoli, come ad esempio:

$$8 + 45 : 3^2 + 4 \cdot 2 - 14$$

Come si esegue? In quale ordine si eseguono le operazioni?

## Espressioni senza parentesi

Quando l'espressione è senza parentesi, le operazioni vanno eseguite in questo ordine (rimangono vere le proprietà che abbiamo visto):

1. elevamento a potenza;
2. moltiplicazioni e divisioni;
3. somme e sottrazioni.

## Esempio

$$8 + 45 : 3^2 + 4 \cdot 2 - 14 =$$

$$= 8 + 45 : 9 + 4 \cdot 2 - 14 =$$

$$= 8 + 5 + 8 - 14 = 7$$

## Espressioni con le parentesi

In questo caso si **ragiona a blocchi**, svolgendo prima di tutto le operazioni nelle parentesi più interne.

Prova a calcolare:

$$42 : \{ 105 : [(5 \cdot 2^2 + 7) : 3^2 + (7^2 : 7 + 3) : 5] \}$$

## Esercizi sulle espressioni (1)

1. Traduci in espressioni aritmetiche le seguenti frasi e calcola poi il loro valore.
  - Aggiungi a 72 il prodotto tra 7 e 8.
  - Moltiplica la differenza di 17 e 8 per la somma di 2 e 3.
  - Sottrai al prodotto di 7 e 4 il quoziente di 36 e 12.
  - Moltiplica la somma di 5 e 8 per 2 e sottrai al risultato 10.
2. Calcola il valore delle seguenti espressioni:
  - $1 + [(15 : 3) \cdot 7 + (10 \cdot 2) : 4] : (2 \cdot 4) - [(2 \cdot 5) : 2 - 2]$
  - $\{[(6 \cdot 4 - 18) + 5 \cdot (12 - 9)] : (7 \cdot 2 - 11) - 3 + 10\} : 7$
  - $[5 \cdot (3 \cdot 8 - 5 \cdot 4) - 7]\{4 \cdot (28 : 7 + 4) : [(6 \cdot 5) : 15] - 2 \cdot 8\}$

## Esercizi sulle espressioni (2)

3. Calcola il valore delle seguenti espressioni:

$$\bullet [(3^6 : 3^4) - 2^3] \cdot [(5^3 \cdot 5^4) : (5^2 \cdot 5^3)] : (2^2 + 1) \quad [5]$$

$$\bullet \{[(3^{10} : 3^6)^2 \cdot (3^8 : 3^3)] : 3^{12}\} + 1^7 + (2^2 \cdot 3 - 11) \quad [5]$$

$$\bullet [(6^3 \cdot 2^3 : 4^3) : (10^4 : 5^4 - 7) \cdot 3^4]^2 : (3^3 \cdot 3^2)^2 \quad [1]$$

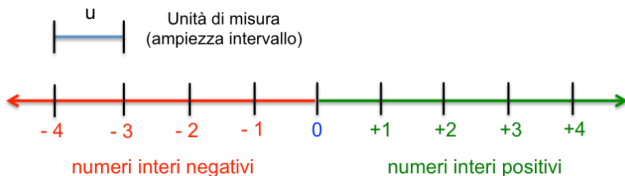
$$\bullet 2^2 + \{[(3 \cdot 2^2 + 2) \cdot 2 - 6 \cdot 2 + (2 \cdot 6 + 1^5 \cdot 7)] : 5 + 7\} : 14 + 4 \quad [9]$$

## Un nuovo insieme di numeri

I numeri interi o relativi, sono tutti numeri interi (senza virgola) e sono caratterizzati da un segno negativo, nullo o positivo:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \dots\}$$

Il nuovo insieme **include** il precedente insieme  $\mathbb{N}$ .



Per comodità, a volte il segno + viene omissso, e quindi scrivere +6 oppure semplicemente 6 è la stessa cosa.



## Utilizzi dei negativi

I numeri negativi permettono di svolgere operazioni che erano impossibili nell'insieme  $\mathbb{N}$  dei naturali, ad esempio:

$$18 - 20$$

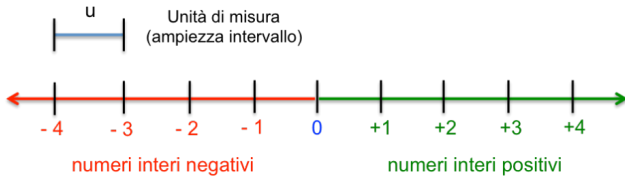
Ora possiamo dire che il risultato di  $18 - 20$  è  $-2$ .

I numeri negativi vengono utilizzati anche nella vita reale:



## Valore assoluto

Per capire il concetto di valore assoluto è importante **visualizzare** i numeri interi:

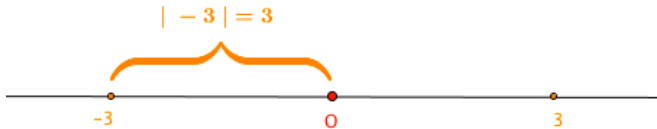


Il valore assoluto di un numero si indica con **due sbarrette intorno ad un numero**, come:

$$|-7|$$

## Valore assoluto come distanza

Il valore assoluto di un numero corrisponde alla **distanza del numero dallo 0** sulla retta dei numeri.



Quindi:

$$|-3| = |+3| = 3$$

Quali due numeri interi hanno valore assoluto pari a 14?

# Terminologia

Vediamo alcune utili definizioni:

- **numeri concordi**, se hanno lo stesso segno, come:

$-7$  e  $-100$

- **numeri discordi**, se hanno segno diverso, come:

$-12$  e  $+4$

- **numeri opposti**, se hanno lo stesso valore assoluto e segno diverso, come:

$-8$  e  $+8$

## Confronto tra numeri interi

Il confronto tra numeri interi, indicato con  $=$ ,  $>$  e  $<$ , avviene come per i numeri naturali.

È sempre bene **visualizzare i numeri interi** per poterli confrontare bene. Numeri che sono più a destra sono più grandi, numeri che sono più a sinistra sono più piccoli.

$$-3 < +9$$

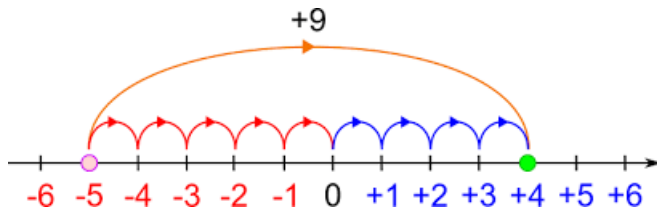
$$-23 < -1$$

$$+13 > +2$$

$$+6 > -300$$

## Somme e sottrazioni

La somma e la sottrazione si svolgono come per i numeri naturali, spostandosi a destra o sinistra sulla retta dei numeri:



$$-5 + 9 = +4$$

Non ci sono regole “strane” da applicare!

## La regola dei segni

Per svolgere moltiplicazioni e divisioni dobbiamo invece studiare la regola dei segni:

### Regola dei segni (1)

Il prodotto/quoziente di numeri con lo **stesso segno** è un numero **positivo**.

$$(+5) \cdot (+2) = +10$$

$$(-3) : (-1) = +3$$

Il prodotto/quoziente di numeri con **segno diverso** è un numero **negativo**.

$$(+4) \cdot (-3) = -12$$

$$(-9) : (+3) = -3$$

## Regola dei segni per le potenze

### Regola dei segni (2)

Le **potenze pari** di qualsiasi numero **sono positive**.

$$(+2)^4 = +16$$

$$(-2)^4 = +16$$

Le **potenze dispari** invece **mantengono il segno della base**.

$$(+4)^3 = +64$$

$$(-4)^3 = -64$$

Riesci a spiegare perché?



## Esercizi su somma e differenza di numeri interi

### 1. Completa la tabella:

$a$	$b$	$c$	$a - b + c$	$b + c - a$	$a - (b + c)$	$c - (a - b)$	$b - (c - a)$
-2	+3	0					
+4	+5	-6					
-2	-7	-3					
+1	-1	0					
+2	-1	+4					
-6	+5	+6					
+3	+8	+7					

### 2. Inserisci al posto dei puntini il numero mancante:

- $(+14) + (\dots) = -8$
- $(\dots) - (-4) = -6$
- $(-12) + (\dots) = +5$
- $(+3) - (\dots) = +8$

## Esercizi su somma e differenza di numeri interi

1. Completa la tabella:

$a$	$b$	$c$	$a - b + c$	$b + c - a$	$a \cdot (b - c)$	$(a - b) \cdot c$	$(a + b - c) \cdot a$
-2	+3	0					
+4	+5	-6					
-2	-7	-3					
+1	-1	0					
+2	-1	+4					
-6	+5	+6					
+3	+8	+7					

2. Inserisci al posto dei puntini il numero mancante:

- $(-9)(\dots) = +108$

- $(\dots) \cdot (-8) = -104$

- $(+3) \cdot (\dots) = -48$

- $(-32) : (\dots) = +4$

## Espressioni coi numeri interi

1. Calcola il valore delle seguenti espressioni:

- $\{-14 + 3 \cdot [9 + 2 \cdot (-2) - 3 \cdot (17 + 2 - 15)]\} \cdot (-1)$   
[+35]
- $[25 - (-13 + 12)] : 13 + [3 + 2(-12 - 4) : (+5 + 3) - 1]$   
[0]
- $\{[(-8)^2]^5\}^3 : \{[(-8)^3]^2\}^5$   
[1]
- $[(-5)^2 \cdot (-5)^3 : (-5)^4]^2 - (8 - 2^2 - 3^2) \cdot (5^6 : 5^4 - 30)$   
[0]

## Un'espressione speciale

$$\left\{ -7 + \left[ -(-4 + 13^0) + (-6 + 2 - 1)^2 \cdot (5 - 7)^2 : (8 - 2 - 6) \right]^2 \right\} : [(-3)^2]^2$$

Perché questa espressione è **impossibile**?

Numeri naturali  
○○○○○○

Operazioni  
○○○○○○○○○

Potenze  
○○○○○○○○

Espressioni  
○○○○○

Numeri interi  
○○○○○○○○○○○○○

Numeri decimali  
●○○

# Approssimare

## E le frazioni?

I numeri decimali, sia positivi sia negativi, possono essere anche espressi sotto forma di **frazioni**, che vanno a costituire l'insieme  $\mathbb{Q}$  dei **numeri razionali**.

Ad esempio:

$$7,7 = 77 : 10 = \frac{77}{10}$$

$$-2,3 = -23 : 10 = -\frac{23}{10}$$

Le frazioni sono solo un modo più comodo di scrivere delle divisioni!

# Insiemi numerici

