

Glossario minimo di logica per i corsi di matematica

Assioma: enunciato che, nell'ambito di una data teoria, viene assunto come premessa non dimostrata.

Connettivo logico: un simbolo che si aggiunge a uno o più enunciati per formare un enunciato composto. Sono connettivi logici la negazione \neg , la congiunzione \wedge , la disgiunzione \vee e l'implicazione \Rightarrow . L'enunciato $\neg P$ si legge “non P ” ed è vero se P è falso, falso se P è vero. L'enunciato $P \wedge Q$ si legge “ P e Q ” ed è vero se P e Q sono entrambi veri, falso se almeno uno di essi è falso. L'enunciato $P \vee Q$ si legge “ P o Q ” ed è vero se almeno uno tra P e Q è vero, falso se e solo se sono entrambi falsi. L'enunciato $P \Rightarrow Q$ si legge “ P implica Q ” oppure “se P allora Q ” ed è falso solo nel caso in cui P è vero e Q è falso; in tutti gli altri casi è vero. Questo contrasta con l'uso comune dell'implicazione. Ad esempio l'enunciato “se Parigi è in Inghilterra allora $2 + 2 = 4$ ” è logicamente vero perché la conclusione Q ($2 + 2 = 4$) è vera, anche se la premessa P (se Parigi è in Inghilterra) è falsa.

Definizione: introduzione di un nuovo concetto, descritto in termini di concetti introdotti precedentemente.

Ipotesi e Tesi: in un enunciato della forma “se P_1, \dots, P_n allora Q ” gli enunciati P_1, \dots, P_n sono le ipotesi e Q è la tesi.

Teorema: enunciato dimostrato o dimostrabile. I termini lemma, proposizione, corollario sono sinonimi di teorema. Un lemma è un enunciato preparatorio, spesso di carattere tecnico, utilizzato nella dimostrazione di un teorema successivo. Una proposizione è un teorema che si ritiene di minore importanza. Un corollario è una conseguenza minore di un teorema precedente.

Dimostrazione: una successione non vuota e finita di enunciati di cui l'ultimo è l'enunciato da dimostrare e ciascuno dei precedenti è un'ipotesi o un'assioma o il risultato dell'applicazione di una regola di deduzione a un enunciato precedente.

Dimostrazione per assurdo: un tipo di dimostrazione, in cui per provare l'enunciato “se P allora Q ” si dimostra che “ P e non- Q ” implica una contraddizione, cioè la negazione di un enunciato vero.

Costante: un simbolo usato per denotare un oggetto fissato. Una costante è il nome dell'oggetto che denota.

Variabile: un simbolo usato per denotare un oggetto variabile o sconosciuto. A differenza di una costante che è il nome di un oggetto fissato, una variabile è il nome di una “scatola” o “registro” che può contenere oggetti diversi.

Quantificatore universale: l'espressione “per ogni”. Notazione: \forall . Ad esempio la formula $\forall x P[x]$ si legge “per ogni x , x ha la proprietà P ” ovvero “tutte le cose hanno la proprietà P .” Il “tutte” nel quantificatore universale si riferisce a tutti gli oggetti nel dominio di interpretazione, cioè nel contesto che viene considerato; ad esempio, l'insieme dei numeri reali, l'insieme delle funzioni reali di variabile reale, l'insieme dei gruppi, ...

Quantificatore esistenziale: l'espressione “c'è almeno un”. Notazione: \exists . Ad esempio la formula $\exists x P[x]$ si legge “esiste almeno una cosa che ha la proprietà P ”.

Negazione dei quantificatori: la negazione di un enunciato con un quantificatore universale si scrive in simboli $\neg \forall x P(x)$ e si legge “non è vero che ogni x ha la proprietà P ”. Questo significa “esiste almeno un x che non ha la proprietà P ”. In simboli $\exists x \neg P[x]$. Ad esempio, la negazione di “non è vero che ogni animale ha quattro zampe” è “esiste almeno un animale che non ha quattro zampe”. La legge di negazione di un enunciato con un quantificatore universale si riassume in simboli come segue:

$$\neg \forall x P[x] = \exists x \neg P[x].$$

La negazione di un enunciato con un quantificatore esistenziale si scrive in simboli $\neg \exists x P(x)$ e si legge “non è vero che esiste un x che ha la proprietà P ”. Questo significa “ogni x non ha la proprietà P ”. In simboli $\forall x \neg P[x]$. Ad esempio, la negazione di “non esiste un cavallo con le ali” è “ogni cavallo non ha ali” ovvero “nessun cavallo è alato”. La legge di negazione di un enunciato con un quantificatore universale si riassume in simboli come segue:

$$\neg \exists x P[x] = \forall x \neg P[x].$$

Variabile legata: una variabile in un enunciato che cade sotto il campo di azione di un quantificatore.

Variabile libera: una variabile che non è legata.

Predicato: un enunciato che contiene almeno una variabile libera. Ad esempio nell'enunciato “ $\forall x \forall y x + y = z$ ” le variabili x e y sono legate e z è libera.