TLC - Definizioni

Modulo e argomento di un numero complesso:

	Modulo	Argomento
Forma trigonometrica $z = r(cos(\theta) + isin(\theta))$	r	θ
Forma esponenziale $z = re^{i\theta}$	r	θ

Per la forma algebrica $z = a + ib$, abbiamo che il **modulo** vale:

$$r = |z| := \sqrt{a^2 + b^2}$$

mentre l'argomento:

$$\theta = Arg(z) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ se } a = 0, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \text{ se } a = 0, b < 0 \\ \text{non definito se } a = 0, b = 0 \\ arctan(\frac{b}{a}) \text{ se } a > 0, b \text{ qualsiasi} \\ arctan(\frac{b}{a}) + \pi \text{ se } a < 0, b \geq 0 \\ arctan(\frac{b}{a}) - \pi \text{ se } a < 0, b < 0 \end{cases}$$

Seno e coseno in termini di somma e differenza di esponenziali:

$$cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}, sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{j2}$$

Funzione sinusoidale:

$$x(t) = Acos(\omega t + \theta)$$

esprimibile anche come come somma di due funzioni esponenziali complesse:

$$Acos(\omega t + \theta) = \frac{A}{2} e^{j(\omega t + \theta)} + \frac{A}{2} e^{-j(\omega t + \theta)}$$

Fasore:

$$Ae^{j(\omega t + \theta)}$$

Sviluppo in serie di Fourier (funzioni periodiche tempo continue)

Forma esponenziale (segnali complessi): Data la funzione complessa $x(t) = x(t + T)$ con $x \in C\mathbb{R}$, può essere rappresentata come somma di infiniti fasori, aventi pulsazioni multiple della pulsazione fondamentale $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ (in rad/s) (frequenza fondamentale in Hz = $f_0 = \frac{1}{T}$) secondo la **formula di sintesi** seguente detta **serie di Fourier (in forma esponenziale)**:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

I coefficienti c_n indicano il numero complesso rappresentativo del fasore $c_n = A_n e^{j\theta n}$, e sono dati dalla **formula di analisi**:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

I coefficienti c_n sono in generale complessi anche quando il segnale $x(t)$ è reale. Sono invece *reali* se il segnale è *reale* e *pari*, puramente immaginarei se *reale* e *dispari*.

Rappresentazioni monolatere (segnali reali)

Simmetria hermitiana:

$$c_{-n} = A_{-n}e^{-j\theta_{-n}} = c_n^* = A_n e^{-j\theta_n} \tag{1}$$

Forma in soli coseni dello sviluppo in serie di Fourier:

$$x(t) = c_0 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} Re\{|c_n|e^{jargc_n}e^{jn\omega_0 t}\} = A_0 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} A_n cos[n\omega_0 t + \theta_n] \tag{2}$$

Terza forma in seni e coseni (ma senza fasi): definendo i coefficienti monolateri a_n, b_n, anch'essi reali:

$$a_n = \begin{cases} 2c_0 \text{ se } n = 0 \\ Re\{2c_n\} \text{ se } n > 0 \end{cases}$$

$$b_n = -Im\{2c_n\} \text{ se } n > 0$$

si ha che:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n cos[n\omega_0 t] + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n sin[n\omega_0 t] \tag{3}$$

Per ricavare direttamente i coefficienti direttamente senza passare dalla conoscenza dei c_n:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)cos[n\omega_0 t]dt \text{ se } n \geq 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)sin[n\omega_0 t]dt \text{ se } n > 0 \tag{4}$$

Trasformata ed integrale di Fourier (funzioni aperiodiche tempo continue)

	Trasformata (analisi, tempi $\rightarrow$frequenze)	**Antitrasformata (sintesi, tempi $\leftarrow$frequenze)**
Dominio pulsazioni	$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$	$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$
Dominio frequenze	$X_f(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$	$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_f(f)e^{j2\pi ft}df$

Rappresentazioni monolatere (segnali reali); integrale di Fourier

Integrale di Fourier: definito $V(\omega) = |\frac{X(\omega)}{\pi}|$, l'integrale di Fourier è:

$$x(t) = \int_0^{+\infty} V(\omega)cos[\omega t + \varphi(\omega)]d\omega \tag{5}$$

Proprietà della trasformata di Fourier: Sia $x(t)$ un segnale complesso con trasformata $F[x(t)] = X(\omega)$:

- **Coniugazione**:

$$F[x^*(t)] = X^*(-\omega)$$

- **Traslazione temporale**:

$$F[x(t - t_0)] = X(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

- **Derivata**:

$$F[x'(t)] = j\omega X(\omega)$$

- **Integrale**:

$$F\left[\int_{-\infty}^{t} x(u)du\right] = \frac{X(\omega)}{jw} \text{ se } X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = 0$$

- **Convoluzione**:

$$F[x(t) * y(t)] = X(\omega)Y(\omega) \tag{6}$$

Funzione generalizzata delta di Dirac

Definizione:

$$< x, \delta >= x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt$$

e analogamente:

$$< x, \delta_{t_0} >= x(t_0)$$

La delta di Dirac è nulla per tutti i valori del parametro reale ad eccezione dello zero, ed il suo integrale sul parametro tra $-\infty$ e $+\infty$ è uguale a 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

Proprietà della funzione generalizzata delta di Dirac:

- **Parità**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t_0-t)dt$$

- **Convoluzione**:

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(\tau - t)d\tau = x(t)$$
$$\rightarrow x(t) * \delta(t) =< x, \delta_t >=< x(\tau), \delta(\tau - t)) >= x(t)$$

- **Cambio di argomento**:

$$|\alpha|\delta(\alpha t) = \delta(t) \text{ se } \alpha \neq 0 \rightarrow \delta(\alpha t) = \frac{\delta(t)}{|\alpha|} \text{ se } \alpha \neq 0 \rightarrow \delta(-x) = \delta(x)$$

- **Trasformata di Fourier**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt = 1$$

- **Gradino unitario**:

$$U(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau \tag{7}$$

Trasformata di Fourier di funzioni periodiche

- **Trasformata di un segnale sviluppabile in serie di Fourier**:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \qquad X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n 2\pi\delta(\omega - n\omega_0), \qquad X_f(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\delta(f - nf_0)$$

- **Trasformata del coseno**:

$$cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}, \qquad X(\omega) = \frac{1}{2}\delta(\omega-\omega_0)2\pi + \frac{1}{2}\delta(\omega+\omega_0)2\pi, \qquad X_f(f) = \frac{1}{2}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}(f+f_0)$$

- **Trasformata del seno**:

$$sin(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{j2}, \qquad X(\omega) = \frac{1}{j2}\delta(\omega-\omega_0)2\pi - \frac{1}{j2}\delta(\omega+\omega_0)2\pi, \qquad X_f(f) = \frac{1}{j2}\delta(f-f_0) - \frac{1}{j2}(f+f_0)$$

- **Trasformata di Fourier delle funzioni gradino**: a partire dalla trasformata del gradino $1(t)$: $\quad F[1(t)] = \frac{1}{j\omega}$, dalle definizioni di $U(t)$ e $sgn(t)$ segue $\quad F[U(t)] = \frac{1}{j\omega} + \frac{2\pi\delta(\omega)}{2}, \quad$ e $F[sgn(t)] = \frac{2}{j\omega}$

- **Trasformata di Fourier di un integrale**:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)U(t-\tau)d\tau = x(t) * U(t) \tag{8}$$

Serie temporali

Serie temporali: Una serie temporale è una funzione tempo discreta che rappresenta o segnali che in origine hanno già questa forma o segnali ottenuti da una funzione tempo continua mediante lettura dei valori da essa assunti in istanti che si succedono con intervallo T. Quest'operazione è detta campionamento. Consideriamo ora la serie temporale:

$$\{x_n\} = \{..., x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, ...\}$$

Trasformata:

$$X_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{-jn\omega T}$$

Antitrasformata:

$$x_n = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X_s(\omega) e^{jn\omega T} d\omega \qquad n = ..., -2, -1, 0, 1, ... \tag{9}$$

Relazione tra $X_s(\omega)$ della serie e la trasformata $X(\omega)$ della funzione campionata:

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\omega + k\omega_0) \tag{10}$$

Antitrasformata di un impulso nelle frequenze: di ampiezza X_o e periodo ω_m, definito come:

$$X(\omega) = \begin{cases} X_o & \text{se } |\omega| < \omega_m \qquad \text{con } X_o > 0 \text{ entrambe} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

la sua antitrasformata secondo Fuorier è espressa da:

$$x(t) = x_o sinc(\frac{\omega_m t}{\pi})$$

Sviluppo in serie di Shannon: Condizione sufficiente del teorema di Shannon, $\omega_o > 2\omega_m$, scelta la frequenza di Nyquist, ovvero $\omega_o/2$, abbiamo:

$$X(\omega) = \begin{cases} TX_s(\omega) & \text{se } |\omega| < \omega_o/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Quindi lo sviluppo in serie di Shannon è:

$$x(t) = \frac{T}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{j\omega t} e^{-j\omega n T} d\omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n sinc\left(\frac{t - nT}{T}\right) \tag{11}$$

Proprietà della trasformata di una serie temporale:

- **Serie ritardata**: se $F[\{x_n\}] = X_s(\omega)$, allora:

$$F[\{x_{n-m}\}] = X_s(\omega) e^{-j\omega m T}$$

- **Convoluzione fra serie temporali**: date due serie temporali $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ la loro convoluzione definisce una nuova serie temporale $\{z_n\}$ espressa da:

$$z_n = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_i y_{n-i}$$

- **Convoluzione fra una serie temporale ed una funzione tempo-continua**: date la serie temporale $\{x_n\}$ e la funzione tempo-continua $g(t)$, la loro convoluzione definisce una funzione tempo continua espressa da:

$$y(t) = \{x_n\} * g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n g(t - nT) \tag{12}$$

Trasformate

Trasformata di un impulso rettangolare di ampiezza A e durata τ:

$$X(\omega) = \tau A sinc\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$$

Segnale PAM, definizione: Considerata una successione di impulsi rettangolari ottenuta campionando una funzione tempo continua $x(t)$ con intervallo T e mantentendo i valori campionati per un intervallo $\tau < T$. La successione in esame, aventi intervallo di ripetizione e durata costanti, ma ampiezze variabili, costituisce un segnale PAM (*Pulse Amplitude Modulation*). Può essere visto come convoluzione fra la serie temporale $\{x_n\}$ e l'impulso rettangolare $g(t)$, di ampiezza unitaria e durata τ. Si ha:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n g(t - nT) = \{x_n\} * g(t)$$

Trasformata di un segnale PAM ottenuto da una serie di campioni:

$$Y(\omega) = X_s(\omega)G(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\omega + k\omega_o)G(\omega)$$

dove la trasformata $G(\omega)$ è definita come:

$$G(\omega) = \tau sinc\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} \tag{13}$$

Trasformata di Fourier Discreta (DFT)

La trasformata discreta di Fourier non si applica più a una serie infinita di termini, ma ad una n-pla cioè ad un vettore. L'elemento q-esimo dell'n-pla di arrivo è definito come:

$$X_q = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{N}nq} \qquad q = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{14}$$

Antitrasformata IDFT: La formula che ci restituisce un termine dell'n-pla di partenza a partire da quella di arrivo è la seguente:

$$x_n = \frac{1}{N}\sum_{q=0}^{N-1} X_q e^{j\frac{2\pi}{N}nq} \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{15}$$

TODO: Legame fra trasformata di Fourier discret e continua

Sistemi lineari

Un sistema ingresso-uscita in cui $x(t)$ indica un segnale d'ingresso tempo-continuo e $y(t) = Q\big[x(t)\big]$ la corrispondente risposta, essa pure tempo-continua. Il sistema si dice lineare se:

$$Q\big[c_1x_1(t) + c_2x_2(t)\big] = c_1Q\big[x_1(t)\big] + c_2Q\big[x_2(t)\big]$$

Sistemi tempo-inviarianti: se la risposta al segnale ritardato è la risposta ritardata, qualunque sia il ritardo t_o:

$$y(t - t_o) = Q\big[x(t - t_o)\big]$$

Risposta impulsiva di un sistema lineare: La risposta impulsiva $h(t)$ è definita come la risposta della rete all'impulso di Dirac $\delta(t)$ (ci limitiamo al caso reale). Si consideri in ingresso la funzione ausiliaria $D(t, \Delta)$. La risposta $y_\Delta(t)$ alla funzione ausiliaria è la risposta impulsiva:

$$h(t) = \lim_{\Delta\to 0} y_\Delta(t)$$

Con $x(t)$ segnale generico in ingresso nel dominio dei tempi, la relazione con l'uscita è:

$$y(t) = x(t) * h(t) \tag{16}$$

Funzione di trasferimento di una rete lineare (FDT)

Definizione: Nel dominio delle frequenze, è la trasformata di Fourier della risposta impulsiva:

$$H(\omega)F\left[h(t)\right]$$

E di conseguenza:

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

Ampiezza e Fase:

$$\begin{cases} T(\omega) = |H(\omega)| & \text{Ampiezza} \\ \beta(\omega) = arg\{H(\omega) & \text{Fase} \end{cases}$$

Proprietà della FDT (rete lineare tempo-invariante):

- **Risposta ad un fasore**: Fasore in ingresso $\rightarrow$ fasore in uscita, medesima frequenza angolare e diverso numero complesso rappresentativo. Se il segnale in ingresso è $x(t) = e^{j\omega_1 t}$, la rete risponde con:

$$y(t) = c_y e^{j\omega_1 t}, \qquad c_y = c_x H(\omega_1) \tag{17}$$

- **Risposta ad una sinusoide**: Sinusoide in ingresso, $h(t) \in \mathbb{R} \rightarrow$ sinusoide in uscita, medesima frequenza angolare e diversa ampiezza e fase, cioè diverso numero complesso rappresentativo. Se $x(t) = A_x cos(\omega_1 t - \varphi_x)$, la rete risponde con (dove $A_y = A_x T(\omega_1)$, e $\varphi_y = \varphi_x + \beta(\omega_1)$):

$$y(t) = A_x T(\omega_1) cos\left[\omega_1 t - \varphi_x - \beta(\omega_1)\right] = A_y cos(\omega_1 t - \varphi_y) \tag{18}$$

FDT sistemi in cascata: è uguale al prodotto delle funzioni di trasferimento dei vari blocchi:

$$H(\omega) = H(\omega_1)H(\omega_2)...H(\omega_n) \tag{19}$$

Teoria della modulazione

Modulazione: Modulazione di una oscillazione sinusoidale, a frequenza sufficientemente elevata, detta *portante*. Il segnale $x(t)$ si dice segnale *modulante* in quanto modula le caratteristiche della portante (ampiezza e/o argomento). Il segnale ottenuto $s(t)$ è detto oscillazione *modulata*.

Espressione della portante non modulata (stato iniziale):

$$s_o(t) = V_o cos\left[\omega_o t - \varphi_o\right]$$

Espressione generale di un'oscillazione sinusoidale modulata:

$$s(t) = V(t)cos[\varphi(t)] \qquad V(t) \geq 0$$

In relazione all'oscillazione modulata si hanno le seguenti definizioni:

- $V(t) \rightarrow$ ampiezza istantanea;
- $\varphi(t) \rightarrow$ fase istantanea;
- $\omega(t) = \varphi(t) \rightarrow$ pulsazione istantanea;

In relazione all'oscillazione portante si hanno le seguenti definizioni:

- $V(t) = V_o \qquad \rightarrow$ ampiezza (costante);
- $\varphi(t) = \omega_o t - \varphi_o \qquad \rightarrow$ argomento del coseno (lineare in t) ;
- $\omega(t) = \omega_o \qquad \rightarrow$ pulsazione (costante);

Definizione deviazioni: in quanto definite come differenze introdotte dalla modulazione. Si chiamano istantanee, perchè dipendono da t.

- $V(t) - V_o$ $\rightarrow$ deviazione istantanea di ampiezza;
- $m(t) = \frac{V(t)-V_o}{V_o} \rightarrow V(t) = V_o\big[1 + m(t)\big]$ $\rightarrow$ deviazione (istantanea) relativa di ampiezza poichè $V(t) \geq 0$, segue $m(t) \geq -1$;
- $\alpha(t) = \varphi(t) - (\omega_o t - \varphi_o) = \int_{-\infty}^{t} \Delta\omega(\tau)d\tau$ $\rightarrow$ deviazione istantanea di fase;
- $\Delta\omega(t) = \omega(t) - \omega_o = \alpha(t)$ $\rightarrow$ deviazione istantanea di pulsazione;

Espressione generale di un'oscillazione sinusoidale modulata: ottenuta introducendo nell'espressione di un'oscillazione modulata la deviazione relativa di ampiezza e la deviazione istantanea di fase:

$$s(t) = V_o\big[1 + m(t)\big]cos\big[\omega_o t + \alpha(t) - \varphi_o\big]$$

Principali modulazioni analogiche

- **Modulazione di ampiezza (AM)**: la deviazione relativa di ampiezza è proporzionale al segnale modulante; la deviazione di fase è nulla. Viene modificata solo l'ampiezza dell'oscillazione portante. Inoltre in AM $kx(t) \geq -1$ a causa dell'analogo vincolo su $m(t)$, da cui deriva la condizione a destra nella seconda formula:

$$AM = \begin{cases} m(t) = kx(t) \\ \alpha(t) = 0 \end{cases}$$
$$s(t) = V_o\big[1 + kx(t)\big]cos\big[\omega_o t - \varphi_o\big] \qquad \text{con } V_o\big[1 + kx(t)\big] \geq 0$$

- **Modulazione di fase (PM)**: la deviazione di fase è proporzionale al segnale modulante; la deviazione relativa di ampiezza è nulla. Dato il legame fra deviazione di fase e deviazione di frequenza in PM si ha $\Delta\omega(t) = \alpha(t) = kx(t)$:

$$PM = \begin{cases} m(t) = 0 \\ \alpha(t) = kx(t) \end{cases}$$
$$s(t) = V_o cos\big[\omega_o t + kx(t) - \varphi_o\big]$$

- **Modulazione di frequenza (FM)**: la deviazione di pulsazione è proporzionale al segnale modulante; la deviazione relativa di ampiezza è nulla. Dato il legame fra deviazione e deviazione di frequenza in FM si ha $\alpha(t) = \int_{-\infty}^{t} kx(\tau)d\tau$:

$$FM = \begin{cases} m(t) = 0 \\ \Delta\omega(t) = kx(t) \end{cases}$$
$$s(t) = V_o\left[\omega_o t + k\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau - \varphi_o\right]$$

Indice di modulazione AM:

$$m_a = max(|m(t)|) \qquad m_a \in [0, 1]$$

L'indice vale 0 per assenza totale di modulazione, ed 1 se si ha il massimo della modulazione. V_{max} e V_{min} sono la massima e minima ampiezza che l'oscillazione portante modulata raggiunge:

$$\begin{cases} V_{max} = 2V_o \qquad \text{se } m_a = 1 \\ V_{min} = V_o \qquad \text{se } m_a = 0 \end{cases}$$

Sovramodulazione (modulazione ibrida): Se si porta il modulatore AM in sovramodulazione, ovvero ad avere $k * max(|x(t)|) > 1$, il segnale va in sovramodulazione e la modulazione diventa ibrida (la sovramodulazione di un segnale AM, cambiando la variazione di fase, non è piu un segnale AM). In questo caso si ha:

$$\text{sovramodulazione AM} = \begin{cases} V(t) = V_o(|1 + kx(t)|) \qquad \text{poichè } V_o\big[1 + kx(t)\big] \geq 0 \\ \alpha(t) = \begin{cases} 0 \qquad \text{se} \quad 1 + kx(t) > 0 \\ \pi \qquad \text{se} \quad 1 + kx(t) < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Teorema fondamentale della modulazione, trasformata del prodotto del segnale con una sinusoide: Dato un segnale $x(t)$ dotato di trasformata $X(\omega)$, calcolare la trasformata $S(\omega)$ della funzione: $s(t) = x(t)cos(\omega_o t)$:

$$S(\omega) = \frac{1}{2}X(\omega - \omega_o) + \frac{1}{2}X(\omega + \omega_o) \tag{20}$$

Inviluppo complesso rappresentativo di oscillazioni modulate

Definizione: (estensione del metodo simbolico di Steinmetz). Nell'estensione un'oscillazione sinusoidale, anche se modulata, è ancora vista come parte reale di un fasore, però al posto del numero complesso rappresentativo si ha una funzione complessa del tempo, detta **inviluppo complesso rappresentativo**. Dati:

$$s(t) = V(t) cos\big[\varphi(t)\big] \xrightarrow{conoscendo} \quad \alpha(t) = \varphi(t) - (\omega_o t - \varphi_o) \rightarrow \quad s(t) = V(t) cos\big[\omega_o t + \alpha(t) - \varphi_o\big]$$

Si può scrivere l'inviluppo complesso $i(t)$ come:

$$s(t) = Re\Big\{i(t) e^{j\omega_o t}\Big\} \qquad \text{con} \quad i(t) = V(t) e^{j\left[\alpha(t) - \varphi_o\right]}$$

Proprietà: Consideriamo ora due oscillazioni modulate diverse, ma aventi la stessa pulsazione della portante:

$$s_1(t) = Re\Big\{i_1(t) e^{j\omega_o t}\Big\} \qquad \text{con} \quad i_1(t) = V_1(t) e^{j\left[\alpha_1(t) - \varphi_{o1}\right]}$$
$$s_2(t) = Re\Big\{i_2(t) e^{j\omega_o t}\Big\} \qquad \text{con} \quad i_2(t) = V_2(t) e^{j\left[\alpha_2(t) - \varphi_{o2}\right]}$$

Per la somma risulta:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = Re\Big\{i_1(t) e^{j\omega_o t}\Big\} + Re\Big\{i_2(t) e^{j\omega_o t}\Big\} = Re\Big\{\big[i_1(t) + i_2(t)\big] e^{j\omega_o t}\Big\} = Re\Big\{i(t) e^{j\omega_o t}\Big\}$$

dove l'inviluppo complesso della somma è dato dalla somma dei due inviluppi:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) \tag{21}$$

Si ha:

$$\begin{cases} V(t) = \big|i(t)\big| \\ \alpha(t) = arg\big\{i(t)\big\} \end{cases}$$

Caratterstiche spettrali di una oscillazione AM

L'inviluppo complesso di una modulazione AM è dato da:

$$i(t) = V_o\big[1 + kx(t)\big] \qquad \text{con} \quad V_o\big[1 + kx(t)\big] \geq 0$$

Oscillazioni DSB (Double-Side Band): La trasformata di $s(t)$ può essere calcolata direttamente tramite la somma di tre termini: portante, banda laterale superiore, banda laterale inferiore:

$$s(t) = V_o cos(\omega_o t) + \frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) cos\big[(\omega_o + \omega)t - \varphi(\omega)\big] d\omega + \frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) cos\big[(\omega_o - \omega)t + \varphi(\omega)\big] d\omega$$

Oscillazioni SSB (Single-Side Band): Poichè ciascuno dei due segnali corrispondenti alla banda laterale superiore od inferiore contiente la stessa informazione, è possibile eliminare una delle due bande laterali. Viene generato a partire da una oscillazione AM, che viene filtrata con un filtro passa-banda che provveda ad eliminare la banda indesiderata. Le espressioni della SSB sono:

$$s(t) = V_o cos(\omega_o t) + \frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) cos\big[(\omega_o + \omega)t - \varphi(\omega)\big] d\omega$$
$$s(t) = Re\big\{i(t) e^{j\omega_o t}\big\} \qquad \text{con} \quad i(t) = V_o + \frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) e^{j\left[\omega t - \varphi(\omega)\right]} d\omega$$

Oscillazioni DSB-SC (DSB Suppressed Carrier): In essa vengono mantenute entrambe le bande laterali, ma viene eliminata la portante, per risparmiare potenza, senza perdere il contenuto informativo relativo al segnale modulante. DI fatto si ottiene una modulazione a prodotto:

$$s(t) = \frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) cos\big[(\omega_o + \omega)t - \varphi(\omega)\big] d\omega + \frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) cos\big[(\omega_o - \omega)t + \varphi(\omega)\big] d\omega$$
$$s(t) = Re\big\{i(t) e^{j\omega_o t}\big\} \qquad \text{con} \quad i(t) = \frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) e^{j\left[\omega t - \varphi(\omega)\right]} d\omega + \frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) e^{-j\left[\omega t - \varphi(\omega)\right]} d\omega$$

Oscillazioni SSB-SC (SSB Supressed Carrier): A partire da una DSB-SC si elimina anche una delle due bande laterali mediante un filtro. Solitamente la portante non è soppressa del tutto ma solo attenuata, si parla di SSB a portante parzialmente soppressa. Le espressioni sono:

$$s(t) = \frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) cos\big[(\omega_o + \omega)t - \varphi(\omega)\big] d\omega$$
$$s(t) = Re\big\{i(t)e^{j\omega_o t}\big\} \qquad \text{con} \quad i(t) = \frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) e^{j\left[\omega t - \varphi(\omega)\right]} d\omega$$

	$s(t)$	$s(t) = Re\big\{i(t)e^{j\omega_o t}\big\} \qquad \text{con} \quad i(t)$
DSB	$V_o cos(\omega_o t) + \frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) cos\big[(\omega_o + \omega)t - \varphi(\omega)\big] d\omega +$ $\frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) cos\big[(\omega_o - \omega)t + \varphi(\omega)\big] d\omega$	-
SSB	$V_o cos(\omega_o t) + \frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) cos\big[(\omega_o + \omega)t - \varphi(\omega)\big] d\omega$	$V_o + \frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) e^{j\left[\omega t - \varphi(\omega)\right]} d\omega$
DSB-SC	$\frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) cos\big[(\omega_o + \omega)t - \varphi(\omega)\big] d\omega +$ $\frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) cos\big[(\omega_o - \omega)t + \varphi(\omega)\big] d\omega$	$\frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) e^{j\left[\omega t - \varphi(\omega)\right]} d\omega +$ $\frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) e^{-j\left[\omega t - \varphi(\omega)\right]} d\omega$
SSB-SC	$\frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) cos\big[(\omega_o + \omega)t - \varphi(\omega)\big] d\omega$	$\frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) e^{j\left[\omega t - \varphi(\omega)\right]} d\omega$

Modulazioni a prodotto

Modulatore: La modulazione a prodotto può essere ottenuta direttamente, senza passare dall'AM, facendo il prodotto del segnle modulante $x(t)$ per una sinusoide tramite un circuito detto modulatore a prodotto o "mixer", ottenendo:

$$s(t) = x(t) cos(\omega_o t)$$

L'inviluppo complesso coincide con il segnale modulante:

$$i(t) = x(t)$$

$$\text{modulazione a prodotto} \quad = \begin{cases} V(t) = |x(t)| & \text{poichè} \quad V(t) \geq 0 \\ \alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x(t) > 0 \\ \pi & \text{se} \quad x(t) < 0 \end{cases} \end{cases} \tag{22}$$

Efficienza:

$$n_f = \frac{\omega_m}{2\omega_m} = \frac{1}{2}$$

Trasformata:

$$S(\omega) = \frac{1}{2} X(\omega - \omega_o) + \frac{1}{2} X(\omega + \omega_o)$$

Demodulatore: La demodulazione si ottiene rimoltiplicando l'oscillazione modulata per la portante:

$$u(t) = 2s(t) cos(\omega_o t) = 2x(t) cos^2(\omega_o t)$$

Modulazioni QAM (Quadrature Amplitude Modulation)

La modulazione QAM consiste di due modulazioni a prodotto con la seconda portante sfasata in anticipo di $\pi/2$.

Modulatore: Vi sono due segnali modulanti $x_1(t)$ e $x_2(t)$ aventi le stesse caratteristiche spettrali, e devono essere indipendenti. Si ha:

$$s(t) = x_1(t) cos(\omega_o t) - x_2(t) sin(\omega_o t) \tag{23}$$

L'inviluppo complesso è dato da:

$$i(t) = x_1(t) + jx_2(t)$$

Efficienza:

$$n_f = \frac{\omega_m}{2\omega_m} = \frac{1}{2}$$

Demodulatore: E' la somma di due demodulatori a prodotto. Il componente in fase (prima uscita u_1), e via in quadratura (seconda uscita u_2):

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 2s(t)cos(\omega_o t) = 2x_1(t)cos^2(\omega_o t) - 2x_2(t)sin(\omega_o t)cos(\omega_o t) \\ &= x_1(t) + x_1(t)cos(2\omega_o t) + x_2(t)sin(2\omega_o t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2(t) &= -2s(t)sin(\omega_o t) = 2x_2(t)sin^2(\omega_o t) - 2x_1(t)sin(\omega_o t)cos(\omega_o t) \\ &= x_2(t) - x_2(t)cos(\omega_o t) - 2x_1(t)sin(2\omega_o t) \end{aligned}$$

Segnali ad energia ed a potenza finita

Potenza istantanea di un segnale: Dato un segnale $x(t)$ in generale complesso, si definisce:

$$p(t) = x^*(t)x(t) = \left|x(t)\right|^2$$

Potenza media di un segnale: Dato un segnale $x(t)$, in generale complesso e definito il prodotto scalare tra funzione continue nel medesimo intervallo come $< f, g >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx$, si definiscono potenza e potenza media:

$$P =< \left|x(t)\right|^2 >= \int_{-\infty}^{+\infty} \left|x(t)\right|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} \left|x(t)\right|^2 dt, \qquad P_m = \frac{1}{T} \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} \left|x(t)\right|^2 dt$$

Energia di un segnale: dato un segnale $x(t)$ in generale complesso:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|x(t)\right|^2 dt$$

Segnale ad energia finita: Se l'integrale che ne rappresenta l'energia converge. La potenza tende a zero, quindi non può essere anche a potenza finita.

Segnale a potenza finita: nel caso in cui l'integrale che ne rappresenta la potenza converga ad un valore diverso da zero.

Valore efficace: di una funzione periodica (per un segnale a potenza finita) il valore:

$$x_{eff} = \lim_{T\to\infty} \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left|x(t)\right|^2 dt} = \sqrt{P}$$

Nota: il valore efficace di una sinusoide $x(t) = Acos(\omega t - \varphi)$ è dato da $A/\sqrt{2}$.

Segnali ad energia finita

Funzione di crosscorrelazione: Dati due segnali in generale complessi, $x(t)$ ed $y(t)$ ad energia finita, il coniugato del prodotto interno di uno di essi per la versione anticipata dell'altro:

$$R_{xy}(\tau) =< x, y_\tau >^*= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt$$

Funzione di autocorrelazione: Nel particolare caso in cui $x(t) = y(t)$ prende il nome di autocorrelazione che viene definita:

$$R_x(\tau) =< x, x_\tau >^*= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

Nota: calcolata nell'origine rappresenta l'energia di un segnale.

Proprietà delle funzioni di cross ed autocorrelazione (energia finita):

- **Proprietà 1**: Per la funzione di crosscorrelazione vale la seguente proprietà:

$$R_{xy}(\tau) = R^*_{yx}(-\tau)$$

- **Proprietà 2**: Per la funzione di autocorrelazione si ha (simmetria hermitiana):

$$\left|R_x(\tau)\right| \leq R_x(0) = E_x$$

- **Proprietà 3**: Per la funzione di crosscorrelazione vale la seguente relazione (prodotto di convoluzione):

$$R_{xy}(\tau) = x^*(-\tau) * y(\tau) \tag{24}$$

Densità spettrale di energia (bilatera e riferita alle pulsazioni): Dati due segnali complessi $x(t)$ e $y(t)$, se coincidono si ottiene:

$$E_{bil}(\omega) = \frac{F\left|R_x(\tau)\right|}{2\pi} = \frac{\left|X(\omega)\right|^2}{2\pi}$$

Densità spettrale di energia monolatera se $x(t)$ è reale:

$$E(\omega) = \begin{cases} 2E_{bil}(\omega) & \text{se} \quad \omega > 0 \\ E_{bil}(\omega) & \text{se} \quad \omega = 0 \end{cases}$$

Densità riferite alle frequenze:

$$E_{f,bil}(f) = 2\pi E_{bil}(2\pi f)$$

Trasformazione lineare tempo invariante di spettri di energia: Siano $x(t)$ e $y(t)$ segnali rispettivamente in ingresso ed uscita ad una rete lineare tempo invariante, avente risposta impulsiva $h(t)$ e funzione di trasferimento $H(\omega)$:

$$E_{y,bil}(\omega) = \left|H(\omega)\right|^2 E_{x,bil}(\omega) \tag{28}$$

Segnali a potenza finita

Funzione di crosscorrelazione:

$$R_{xy}(\tau) = < x, y_\tau >^* = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t) y(t+\tau) dt$$

Funzione di autocorrelazione:

$$R_x(\tau) = < x, x_\tau >^* = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t) x(t+\tau) dt$$

Nota: calcolata nell'origine rappresenta la potenza di un segnale.

Proprietà delle funzioni di crosscorrelazione ed autocorrelazione (potenza finita):

- **Proprietà 1**: Per la funzione di crosscorrelazione vale la seguente proprietà:

$$R_{xy}(\tau) = R^*_{yx}(-\tau)$$

- **Proprietà 2**: Per la funzione di autocorrelazione si ha (simmetria hermitiana):

$$\left|R_x(\tau)\right| \le R_x(0) = P_x \tag{26}$$

Densità spettrale di potenza (bilatera, riferita alle pulsazioni):

$$P_{bil} = \frac{F\left[R_x(\tau)\right]}{2\pi}$$

Densità spettrale di potenza monolatera:

$$P(\omega) = \begin{cases} 2P_{bil}(\omega) & \text{se} \quad \omega > 0 \\ P_{bil}(\omega) & \text{se} \quad \omega = 0 \end{cases}$$

Densità riferite alle frequenze:

$$P_{f,bil}(f) = 2\pi P_{bil}(2\pi f)$$

Trasformazione lineare tempo invariante di spettri di potenza:

$$P_{y,bil}(\omega) = \left|H(\omega)\right|^2 P_{x,bil}(\omega) \tag{29}$$

Segnali periodici a potenza finita

Funzione di crosscorrelazione:

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)y(t+\tau)dt$$

Funzione di autocorrelazione:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

Densità spettrale di potenza di segnali periodici:

$$P_{bil}(\omega) = \frac{F\left[R_x(\tau)\right]}{2\pi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2\delta(\omega - n\omega_o)$$

In caso di segnali reali può essere scritta in forma monolatera ($A_0 = c_0, A_n = 2|c_n|$ con $n > 0$):

$$P(\omega) = A_0^2\delta(\omega) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n^2}{2}\delta(\omega - n\omega_o) \tag{27}$$

Tabella riassuntiva:

	Segnali a energia finita	**Segnali a potenza finita**	**Segnali periodici a potenza finita**
Crosscorrelazione $R_{xy}(\tau) =< x, y_\tau >^*$	$\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt$	$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)y(t+\tau)dt$	$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)y(t+\tau)dt$
Autocorrelazione $R_x(\tau) =< x, x_\tau >^*$	$\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt$	$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)x(t+\tau)dt$	$R_x(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)x(t+\tau)dt$
Proprietà 1 (crosscorrelazione)	$R_{xy}(\tau) = R_{yx}^*(-\tau)$	$R_{xy}(\tau) = R_{yx}^*(-\tau)$	-
Proprietà 2 (autocorrelazione - simmetria hermitiana)	$\lVert R_x(\tau)\rVert \leq R_x(0) = E_x$	$\lVert R_x(\tau)\rVert \leq R_x(0) = P_x$	-
Proprietà 3 (crosscorrelazione - prodotto di convoluzione):	$R_{xy}(\tau) = x^*(-\tau) * y(\tau)$	-	-
Densità spettrale bilatera $\frac{F\left[R_x(\tau)\right]}{2\pi}$	$E_{bil}(\omega) = \frac{\left\lVert X(\omega)\right\rVert^2}{2\pi}$	$P_{bil} = \text{uguale}$	$P_{bil}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lVert c_n\rVert^2\delta(\omega - n\omega_o)$
Densità spettrale monolatera ($\omega > 0$)	$E(\omega) = 2E_{bil}(\omega)$	$P(\omega) = 2P_{bil}(\omega)$	$P(\omega) = A_0^2\delta(\omega) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n^2}{2}\delta(\omega - n\omega_o)$
Densità spettrale monolatera ($\omega = 0$)	$E_{bil}(\omega)$	$P_{bil}(\omega)$	$\text{come sopra, non vi sono due casi in base alle } \omega$
Densità riferite alle frequenze	$E_{f,bil}(f) = 2\pi E_{bil}(2\pi f)$	$P_{f,bil}(f) = 2\pi P_{bil}(2\pi f)$	-
Trasformazioni lineari tempo invarianti di spettri	$E_{y,bil}(\omega) = \lVert H(\omega)\rVert^2 E_{x,bil}(\omega)$	$P_{y,bil}(\omega) = \lVert H(\omega)\rVert^2 P_{x,bil}(\omega)$	-

Teorema di Parseval generalizzato e condizioni di ortogonalità:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)y(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega)Y(\omega)d\omega \tag{25}$$

Spettri di segnali PAM deterministici

I segnali PAM esprimibili come convoluzione tra una serie temporale $\{a_n\}$ ed un impulso ad energia finita $g(t)$ (impulso rettangolare, di ampiezza unitaria, con origine a t=0):

$$s(t) = \{a_n\} * g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g(t - nT) \tag{30}$$

- **Serie temporale ad energia finita**, allora anche il segnale PAM è ad energia finita, e la sua trasformata è:

$$S(\omega) = A_s(\omega)G(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A(\omega + k\omega_o)G(\omega)$$

- **Serie temporale a potenza finita**, allora il segnale PAM è anch'esso a potenza finita e non è possibile trasformarlo secondo Fourier. Calcolandone lo spettro di potenza come:

$$P_{s,bil}(\omega) = \frac{|G(\omega)|^2}{2\pi T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-jk\omega T}$$

- **Serie temporale $\{a_n\}$ reale**, la sua autocorrelazione $\{c_n\}$ è reale e pari, per cui la sua trasformata può essere scritta con solo riferimento agli indici positivi ottenendo:

$$P_{s,bil}(\omega) = \frac{|G(\omega)|^2}{2\pi T}\left[c_o + 2\sum_{k=1}^{+\infty} c_k cos(k\omega T)\right]$$

- **Autocorrelazione nulla per k diverso da zero**, si ottiene:

$$P_{s,bil}(\omega) = \frac{c_o|G(\omega)|^2}{2\pi T}$$

Spettri di segnali PAM aleatori

Un segnale PAM è aleatorio (processo stocastico) se lo è la serie temporale $\{a_n\}$. **Autocorrelazione statistica (a priori)** come media statistica del prodotto delle coppie di valori posti a distanza k, ovvero come $E\left[a_n^* a_{n+k}\right]$; se la serie è **stazionaria** la probabilità della coppia (congiunta del secondo ordine) $P(a^i, a^l, k)$ non dipende dalla posizione delle due variabili aleatorie all'interno della sequenza ma solo dalla distanza fra gli elementi, cioè da k:

$$c_{stat,k} = E\left[a_n^* a_{n+k}\right] = \sum_{i=1}^{L}\sum_{l=1}^{L}(a^i)^* a^l P(a^i, a^l, k) \tag{31}$$

Potenza statistica (valore medio del secondo ordine): il valore per k = 0.

Variabili aleatorie incorrelate a distanza k se:

$$c_{stat,k} = E\left[a_n^* a_{n+k}\right] = \begin{cases} E\left[|a_n|^2\right] & \text{se} \quad k = 0 \\ E\left[a_n^*\right]E\left[a_{n+k}\right] = E\left[a_n^*\right]E\left[a_n\right] & \text{se} \quad k \neq 0 \end{cases}$$

Condizione sufficiente per l'incorrelazione è che le variabili aleatorie a_n e a_{n+k} siano indipendenti.

Se la serie è a valor medio nullo e gli elementi della serie aleatoria sono incorrelati si ottiene infine:

$$P_{s,bil})\omega) = \frac{E\left[|a_n|^2\right]\left|G(\omega)\right|^2}{2\pi T}$$