

TLC - Definizioni

Modulo e argomento di un numero complesso:

	Modulo	Argomento
Forma trigonometrica $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$	r	θ
Forma esponenziale $z = re^{i\theta}$	r	θ

Per la forma algebrica $z = a + ib$, abbiamo che il **modulo** vale:

$$r = |z| := \sqrt{a^2 + b^2}$$

mentre l'argomento:

$$\theta = \text{Arg}(z) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } a = 0, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } a = 0, b < 0 \\ \text{non definito} & \text{se } a = 0, b = 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{se } a > 0, b \text{ qualsiasi} \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{se } a < 0, b \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & \text{se } a < 0, b < 0 \end{cases}$$

Seno e coseno in termini di somma e differenza di esponenziali:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}, \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{j2}$$

Funzione sinusoidale:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta)$$

esprimibile anche come somma di due funzioni esponenziali complesse:

$$A\cos(\omega t + \theta) = \frac{A}{2}e^{j(\omega t + \theta)} + \frac{A}{2}e^{-j(\omega t + \theta)}$$

Fasore:

$$Ae^{j(\omega t + \theta)}$$

Sviluppo in serie di Fourier (funzioni periodiche tempo continue)

Forma esponenziale (segnali complessi): Data la funzione complessa $x(t) = x(t + T)$ con $x \in C\mathbb{R}$, può essere rappresentata come somma di infiniti fasori, aventi pulsazioni multiple della pulsazione fondamentale $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ (in rad/s) (frequenza fondamentale in Hz = $f_0 = \frac{1}{T}$) secondo la **formula di sintesi** seguente detta **serie di Fourier (in forma esponenziale)**:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

I coefficienti c_n indicano il numero complesso rappresentativo del fasore $c_n = A_n e^{j\theta_n}$, e sono dati dalla **formula di analisi**:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

I coefficienti c_n sono in generale complessi anche quando il segnale $x(t)$ è reale. Sono invece *reali* se il segnale è *reale e pari*, puramente immaginari se *reale e dispari*.

Rappresentazioni monolatere (segnali reali)

Simmetria hermitiana:

$$c_{-n} = A_{-n}e^{-j\theta_{-n}} = c_n^* = A_n e^{-j\theta_n} \quad (1)$$

Forma in soli coseni dello sviluppo in serie di Fourier:

$$x(t) = c_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Re}\{c_n | e^{j \arg c_n} e^{jn\omega_0 t}\} = A_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos[n\omega_0 t + \theta_n] \quad (2)$$

Terza forma in seni e coseni (ma senza fasi): definendo i coefficienti monolateri a_n, b_n , anch'essi reali:

$$a_n = \begin{cases} 2c_0 & \text{se } n = 0 \\ \operatorname{Re}\{2c_n\} & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

$$b_n = -\operatorname{Im}\{2c_n\} \text{ se } n > 0$$

si ha che:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos[n\omega_0 t] + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin[n\omega_0 t] \quad (3)$$

Per ricavare direttamente i coefficienti direttamente senza passare dalla conoscenza dei c_n :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos[n\omega_0 t] dt \text{ se } n \geq 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin[n\omega_0 t] dt \text{ se } n > 0 \quad (4)$$

Trasformata ed integrale di Fourier (funzioni aperiodiche tempo continue)

	Trasformata (analisi, tempi \rightarrow frequenze)	Antitrasformata (sintesi, tempi \leftarrow frequenze)
Dominio pulsazioni	$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$
Dominio frequenze	$X_f(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$	$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_f(f) e^{j2\pi f t} df$

Rappresentazioni monolateri (segnali reali); integrale di Fourier

Integrale di Fourier: definito $V(\omega) = \left| \frac{X(\omega)}{\pi} \right|$, l'integrale di Fourier è:

$$x(t) = \int_0^{+\infty} V(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega \quad (5)$$

Proprietà della trasformata di Fourier: Sia $x(t)$ un segnale complesso con trasformata $F[x(t)] = X(\omega)$:

- **Coniugazione:**

$$F[x^*(t)] = X^*(-\omega)$$

- **Traslazione temporale:**

$$F[x(t - t_0)] = X(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

- **Derivata:**

$$F[x'(t)] = j\omega X(\omega)$$

- **Integrale:**

$$F\left[\int_{-\infty}^t x(u) du\right] = \frac{X(\omega)}{j\omega} \text{ se } X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = 0$$

- **Convoluzione:**

$$F[x(t) * y(t)] = X(\omega)Y(\omega) \quad (6)$$

Funzione generalizzata delta di Dirac

Definizione:

$$\langle x, \delta \rangle = x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt$$

e analogamente:

$$\langle x, \delta_{t_0} \rangle = x(t_0)$$

La delta di Dirac è nulla per tutti i valori del parametro reale ad eccezione dello zero, ed il suo integrale sul parametro tra $-\infty$ e $+\infty$ è uguale a 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

Proprietà della funzione generalizzata delta di Dirac:

• **Parità:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t_0-t)dt$$

• **Convoluzione:**

$$\begin{aligned} x(t) * \delta(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(\tau-t)d\tau = x(t) \\ \rightarrow x(t) * \delta(t) &= \langle x, \delta_t \rangle = \langle x(\tau), \delta(\tau-t) \rangle = x(t) \end{aligned}$$

• **Cambio di argomento:**

$$|\alpha|\delta(\alpha t) = \delta(t) \text{ se } \alpha \neq 0 \rightarrow \delta(\alpha t) = \frac{\delta(t)}{|\alpha|} \text{ se } \alpha \neq 0 \rightarrow \delta(-x) = \delta(x)$$

• **Trasformata di Fourier:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt = 1$$

• **Gradino unitario:**

$$U(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau \quad (7)$$

Trasformata di Fourier di funzioni periodiche

• **Trasformata di un segnale sviluppabile in serie di Fourier:**

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n 2\pi \delta(\omega - n\omega_0), \quad X_f(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(f - nf_0)$$

• **Trasformata del coseno:**

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}, \quad X(\omega) = \frac{1}{2}\delta(\omega - \omega_0)2\pi + \frac{1}{2}\delta(\omega + \omega_0)2\pi, \quad X_f(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$$

• **Trasformata del seno:**

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{j2}, \quad X(\omega) = \frac{1}{j2}\delta(\omega - \omega_0)2\pi - \frac{1}{j2}\delta(\omega + \omega_0)2\pi, \quad X_f(f) = \frac{1}{j2}\delta(f - f_0) - \frac{1}{j2}\delta(f + f_0)$$

• **Trasformata di Fourier delle funzioni gradino:** a partire dalla trasformata del gradino $1(t)$: $F[1(t)] = \frac{1}{j\omega}$, dalle definizioni di $U(t)$ e $\text{sgn}(t)$ segue $F[U(t)] = \frac{1}{j\omega} + \frac{2\pi\delta(\omega)}{2}$, e $F[\text{sgn}(t)] = \frac{2}{j\omega}$

- **Trasformata di Fourier di un integrale:**

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) U(t - \tau) d\tau = x(t) * U(t) \quad (8)$$

Serie temporali

Serie temporali: Una serie temporale è una funzione tempo discreta che rappresenta o segnali che in origine hanno già questa forma o segnali ottenuti da una funzione tempo continua mediante lettura dei valori da essa assunti in istanti che si succedono con intervallo T . Quest'operazione è detta campionamento. Consideriamo ora la serie temporale:

$$\{x_n\} = \{\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots\}$$

Trasformata:

$$X_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{-jn\omega T}$$

Antitrasformata:

$$x_n = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X_s(\omega) e^{jn\omega T} d\omega \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, \dots \quad (9)$$

Relazione tra $X_s(\omega)$ della serie e la trasformata $X(\omega)$ della funzione campionata:

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\omega + k\omega_0) \quad (10)$$

Antitrasformata di un impulso nelle frequenze: di ampiezza X_o e periodo ω_m , definito come:

$$X(\omega) = \begin{cases} X_o & \text{se } |\omega| < \omega_m \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad \text{con } X_o > 0 \text{ entrambe}$$

la sua antitrasformata secondo Fourier è espressa da:

$$x(t) = x_o \text{sinc}\left(\frac{\omega_m t}{\pi}\right)$$

Sviluppo in serie di Shannon: Condizione sufficiente del teorema di Shannon, $\omega_o > 2\omega_m$, scelta la frequenza di Nyquist, ovvero $\omega_o/2$, abbiamo:

$$X(\omega) = \begin{cases} TX_s(\omega) & \text{se } |\omega| < \omega_o/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Quindi lo sviluppo in serie di Shannon è:

$$x(t) = \frac{T}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{j\omega t} e^{-jn\omega T} d\omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \text{sinc}\left(\frac{t - nT}{T}\right) \quad (11)$$

Proprietà della trasformata di una serie temporale:

- **Serie ritardata:** se $F[\{x_n\}] = X_s(\omega)$, allora:

$$F[\{x_{n-m}\}] = X_s(\omega) e^{-j\omega m T}$$

- **Convoluzione fra serie temporali:** date due serie temporali $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ la loro convoluzione definisce una nuova serie temporale $\{z_n\}$ espressa da:

$$z_n = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_i y_{n-i}$$

- **Convoluzione fra una serie temporale ed una funzione tempo-continua:** date la serie temporale $\{x_n\}$ e la funzione tempo-continua $g(t)$, la loro convoluzione definisce una funzione tempo continua espressa da:

$$y(t) = \{x_n\} * g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n g(t - nT) \quad (12)$$

Trasformate

Trasformata di un impulso rettangolare di ampiezza A e durata τ :

$$X(\omega) = \tau A \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$$

Segnale PAM, definizione: Considerata una successione di impulsi rettangolari ottenuta campionando una funzione tempo continua $x(t)$ con intervallo T e mantenendo i valori campionati per un intervallo $\tau < T$. La successione in esame, aventi intervallo di ripetizione e durata costanti, ma ampiezze variabili, costituisce un segnale PAM (*Pulse Amplitude Modulation*). Può essere visto come convoluzione fra la serie temporale $\{x_n\}$ e l'impulso rettangolare $g(t)$, di ampiezza unitaria e durata τ . Si ha:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n g(t - nT) = \{x_n\} * g(t)$$

Trasformata di un segnale PAM ottenuto da una serie di campioni:

$$Y(\omega) = X_s(\omega)G(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\omega + k\omega_o)G(\omega)$$

dove la trasformata $G(\omega)$ è definita come:

$$G(\omega) = \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right) e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} \quad (13)$$

Trasformata di Fourier Discreta (DFT)

La trasformata discreta di Fourier non si applica più a una serie infinita di termini, ma ad una n-pla cioè ad un vettore. L'elemento q -esimo dell'n-pla di arrivo è definito come:

$$X_q = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{N}nq} \quad q = 0, 1, \dots, N-1 \quad (14)$$

Antitrasformata IDFT: La formula che ci restituisce un termine dell'n-pla di partenza a partire da quella di arrivo è la seguente:

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} X_q e^{j\frac{2\pi}{N}nq} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (15)$$

TODO: Legame fra trasformata di Fourier discret e continua

Sistemi lineari

Un sistema ingresso-uscita in cui $x(t)$ indica un segnale d'ingresso tempo-continuo e $y(t) = Q[x(t)]$ la corrispondente risposta, essa pure tempo-continua. Il sistema si dice lineare se:

$$Q[c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)] = c_1 Q[x_1(t)] + c_2 Q[x_2(t)]$$

Sistemi tempo-invarianti: se la risposta al segnale ritardato è la risposta ritardata, qualunque sia il ritardo t_o :

$$y(t - t_o) = Q[x(t - t_o)]$$

Risposta impulsiva di un sistema lineare: La risposta impulsiva $h(t)$ è definita come la risposta della rete all'impulso di Dirac $\delta(t)$ (ci limitiamo al caso reale). Si consideri in ingresso la funzione ausiliaria $D(t, \Delta)$. La risposta $y_\Delta(t)$ alla funzione ausiliaria è la risposta impulsiva:

$$h(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} y_\Delta(t)$$

Con $x(t)$ segnale generico in ingresso nel dominio dei tempi, la relazione con l'uscita è:

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (16)$$

Funzione di trasferimento di una rete lineare (FDT)

Definizione: Nel dominio delle frequenze, è la trasformata di Fourier della risposta impulsiva:

$$H(\omega) F[h(t)]$$

E di conseguenza:

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

Ampiezza e Fase:

$$\begin{cases} T(\omega) = |H(\omega)| & \text{Ampiezza} \\ \beta(\omega) = \arg\{H(\omega)\} & \text{Fase} \end{cases}$$

Proprietà della FDT (rete lineare tempo-invariante):

- **Risposta ad un fasore:** Fasore in ingresso \rightarrow fasore in uscita, medesima frequenza angolare e diverso numero complesso rappresentativo. Se il segnale in ingresso è $x(t) = e^{j\omega_1 t}$, la rete risponde con:

$$y(t) = c_y e^{j\omega_1 t}, \quad c_y = c_x H(\omega_1) \quad (17)$$

- **Risposta ad una sinusoidale:** Sinusoidale in ingresso, $h(t) \in \mathbb{R} \rightarrow$ sinusoidale in uscita, medesima frequenza angolare e diversa ampiezza e fase, cioè diverso numero complesso rappresentativo. Se $x(t) = A_x \cos(\omega_1 t - \varphi_x)$, la rete risponde con (dove $A_y = A_x T(\omega_1)$, e $\varphi_y = \varphi_x + \beta(\omega_1)$):

$$y(t) = A_x T(\omega_1) \cos[\omega_1 t - \varphi_x - \beta(\omega_1)] = A_y \cos(\omega_1 t - \varphi_y) \quad (18)$$

FDT sistemi in cascata: è uguale al prodotto delle funzioni di trasferimento dei vari blocchi:

$$H(\omega) = H(\omega_1)H(\omega_2)\dots H(\omega_n) \quad (19)$$

Teoria della modulazione

Modulazione: Modulazione di una oscillazione sinusoidale, a frequenza sufficientemente elevata, detta *portante*. Il segnale $x(t)$ si dice segnale *modulante* in quanto modula le caratteristiche della portante (ampiezza e/o argomento). Il segnale ottenuto $s(t)$ è detto oscillazione *modulata*.

Espressione della portante non modulata (stato iniziale):

$$s_o(t) = V_o \cos[\omega_o t - \varphi_o]$$

Espressione generale di un'oscillazione sinusoidale modulata:

$$s(t) = V(t) \cos[\varphi(t)] \quad V(t) \geq 0$$

In relazione all'oscillazione modulata si hanno le seguenti definizioni:

- $V(t) \rightarrow$ ampiezza istantanea;
- $\varphi(t) \rightarrow$ fase istantanea;
- $\omega(t) = \dot{\varphi}(t) \rightarrow$ pulsazione istantanea;

In relazione all'oscillazione portante si hanno le seguenti definizioni:

- $V(t) = V_o \rightarrow$ ampiezza (costante);
- $\varphi(t) = \omega_o t - \varphi_o \rightarrow$ argomento del coseno (lineare in t);
- $\omega(t) = \omega_o \rightarrow$ pulsazione (costante);

Definizione deviazioni: in quanto definite come differenze introdotte dalla modulazione. Si chiamano istantanee, perchè dipendono da t .

- $V(t) - V_o \rightarrow$ deviazione istantanea di ampiezza;
- $m(t) = \frac{V(t)-V_o}{V_o} \rightarrow V(t) = V_o [1 + m(t)] \rightarrow$ deviazione (istantanea) relativa di ampiezza poichè $V(t) \geq 0$, segue $m(t) \geq -1$;
- $\alpha(t) = \varphi(t) - (\omega_o t - \varphi_o) = \int_{-\infty}^t \Delta\omega(\tau) d\tau \rightarrow$ deviazione istantanea di fase;
- $\Delta\omega(t) = \omega(t) - \omega_o = \alpha'(t) \rightarrow$ deviazione istantanea di pulsazione;

Espressione generale di un'oscillazione sinusoidale modulata: ottenuta introducendo nell'espressione di un'oscillazione modulata la deviazione relativa di ampiezza e la deviazione istantanea di fase:

$$s(t) = V_o [1 + m(t)] \cos[\omega_o t + \alpha(t) - \varphi_o]$$

Principali modulazioni analogiche

- **Modulazione di ampiezza (AM):** la deviazione relativa di ampiezza è proporzionale al segnale modulante; la deviazione di fase è nulla. Viene modificata solo l'ampiezza dell'oscillazione portante. Inoltre in AM $kx(t) \geq -1$ a causa dell'analogo vincolo su $m(t)$, da cui deriva la condizione a destra nella seconda formula:

$$AM = \begin{cases} m(t) = kx(t) \\ \alpha(t) = 0 \end{cases} \\ s(t) = V_o [1 + kx(t)] \cos[\omega_o t - \varphi_o] \quad \text{con } V_o [1 + kx(t)] \geq 0$$

- **Modulazione di fase (PM):** la deviazione di fase è proporzionale al segnale modulante; la deviazione relativa di ampiezza è nulla. Dato il legame fra deviazione di fase e deviazione di frequenza in PM si ha $\Delta\omega(t) = \alpha'(t) = kx'(t)$:

$$PM = \begin{cases} m(t) = 0 \\ \alpha(t) = kx(t) \end{cases} \\ s(t) = V_o \cos[\omega_o t + kx(t) - \varphi_o]$$

- **Modulazione di frequenza (FM):** la deviazione di pulsazione è proporzionale al segnale modulante; la deviazione relativa di ampiezza è nulla. Dato il legame fra deviazione e deviazione di frequenza in FM si ha $\alpha(t) = \int_{-\infty}^t kx(\tau) d\tau$:

$$FM = \begin{cases} m(t) = 0 \\ \Delta\omega(t) = kx(t) \end{cases} \\ s(t) = V_o \left[\omega_o t + k \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau - \varphi_o \right]$$

Indice di modulazione AM:

$$m_a = \max(|m(t)|) \quad m_a \in [0, 1]$$

L'indice vale 0 per assenza totale di modulazione, ed 1 se si ha il massimo della modulazione. V_{max} e V_{min} sono la massima e minima ampiezza che l'oscillazione portante modulata raggiunge:

$$\begin{cases} V_{max} = 2V_o & \text{se } m_a = 1 \\ V_{min} = V_o & \text{se } m_a = 0 \end{cases}$$

Sovramodulazione (modulazione ibrida): Se si porta il modulatore AM in sovrarmodulazione, ovvero ad avere $k * \max(|x(t)|) > 1$, il segnale va in sovrarmodulazione e la modulazione diventa ibrida (la sovrarmodulazione di un segnale AM, cambiando la variazione di fase, non è più un segnale AM). In questo caso si ha:

$$\text{sovrarmodulazione AM} = \begin{cases} V(t) = V_o (|1 + kx(t)|) & \text{poichè } V_o [1 + kx(t)] \geq 0 \\ \alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 1 + kx(t) > 0 \\ \pi & \text{se } 1 + kx(t) < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Teorema fondamentale della modulazione, trasformata del prodotto del segnale con una sinusoidale: Dato un segnale $x(t)$ dotato di trasformata $X(\omega)$, calcolare la trasformata $S(\omega)$ della funzione: $s(t) = x(t) \cos(\omega_o t)$:

$$S(\omega) = \frac{1}{2} X(\omega - \omega_o) + \frac{1}{2} X(\omega + \omega_o) \quad (20)$$

Involuppo complesso rappresentativo di oscillazioni modulate

Definizione: (estensione del metodo simbolico di Steinmetz). Nell'estensione un'oscillazione sinusoidale, anche se modulata, è ancora vista come parte reale di un fasore, però al posto del numero complesso rappresentativo si ha una funzione complessa del tempo, detta **inviluppo complesso rappresentativo**. Dati:

$$s(t) = V(t)\cos[\varphi(t)] \xrightarrow{\text{conoscendo}} \alpha(t) = \varphi(t) - (\omega_o t - \varphi_o) \rightarrow s(t) = V(t)\cos[\omega_o t + \alpha(t) - \varphi_o]$$

Si può scrivere l'inviluppo complesso $i(t)$ come:

$$s(t) = \text{Re}\{i(t)e^{j\omega_o t}\} \quad \text{con} \quad i(t) = V(t)e^{j[\alpha(t) - \varphi_o]}$$

Proprietà: Consideriamo ora due oscillazioni modulate diverse, ma aventi la stessa pulsazione della portante:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \text{Re}\{i_1(t)e^{j\omega_o t}\} & \text{con} \quad i_1(t) &= V_1(t)e^{j[\alpha_1(t) - \varphi_{o1}]} \\ s_2(t) &= \text{Re}\{i_2(t)e^{j\omega_o t}\} & \text{con} \quad i_2(t) &= V_2(t)e^{j[\alpha_2(t) - \varphi_{o2}]} \end{aligned}$$

Per la somma risulta:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = \text{Re}\{i_1(t)e^{j\omega_o t}\} + \text{Re}\{i_2(t)e^{j\omega_o t}\} = \text{Re}\{[i_1(t) + i_2(t)]e^{j\omega_o t}\} = \text{Re}\{i(t)e^{j\omega_o t}\}$$

dove l'inviluppo complesso della somma è dato dalla somma dei due inviluppi:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) \quad (21)$$

Si ha:

$$\begin{cases} V(t) = |i(t)| \\ \alpha(t) = \arg\{i(t)\} \end{cases}$$

Caratteristiche spettrali di una oscillazione AM

L'inviluppo complesso di una modulazione AM è dato da:

$$i(t) = V_o [1 + kx(t)] \quad \text{con} \quad V_o [1 + kx(t)] \geq 0$$

Oscillazioni DSB (Double-Side Band): La trasformata di $s(t)$ può essere calcolata direttamente tramite la somma di tre termini: portante, banda laterale superiore, banda laterale inferiore:

$$s(t) = V_o \cos(\omega_o t) + \frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[(\omega_o + \omega)t - \varphi(\omega)] d\omega + \frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[(\omega_o - \omega)t + \varphi(\omega)] d\omega$$

Oscillazioni SSB (Single-Side Band): Poichè ciascuno dei due segnali corrispondenti alla banda laterale superiore od inferiore contiene la stessa informazione, è possibile eliminare una delle due bande laterali. Viene generato a partire da una oscillazione AM, che viene filtrata con un filtro passa-banda che provveda ad eliminare la banda indesiderata. Le espressioni della SSB sono:

$$\begin{aligned} s(t) &= V_o \cos(\omega_o t) + \frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[(\omega_o + \omega)t - \varphi(\omega)] d\omega \\ s(t) &= \text{Re}\{i(t)e^{j\omega_o t}\} \quad \text{con} \quad i(t) = V_o + \frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) e^{j[\omega t - \varphi(\omega)]} d\omega \end{aligned}$$

Oscillazioni DSB-SC (DSB Suppressed Carrier): In essa vengono mantenute entrambe le bande laterali, ma viene eliminata la portante, per risparmiare potenza, senza perdere il contenuto informativo relativo al segnale modulante. Di fatto si ottiene una modulazione a prodotto:

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[(\omega_o + \omega)t - \varphi(\omega)] d\omega + \frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[(\omega_o - \omega)t + \varphi(\omega)] d\omega \\ s(t) &= \text{Re}\{i(t)e^{j\omega_o t}\} \quad \text{con} \quad i(t) = \frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) e^{j[\omega t - \varphi(\omega)]} d\omega + \frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) e^{-j[\omega t - \varphi(\omega)]} d\omega \end{aligned}$$

Oscillazioni SSB-SC (SSB Suppressed Carrier): A partire da una DSB-SC si elimina anche una delle due bande laterali mediante un filtro. Solitamente la portante non è soppressa del tutto ma solo attenuata, si parla di SSB a portante parzialmente soppressa. Le espressioni sono:

$$s(t) = \frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[(\omega_o + \omega)t - \varphi(\omega)] d\omega$$

$$s(t) = \text{Re}\{i(t)e^{j\omega_o t}\} \quad \text{con} \quad i(t) = \frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) e^{j[\omega t - \varphi(\omega)]} d\omega$$

	$s(t)$	$s(t) = \text{Re}\{i(t)e^{j\omega_o t}\} \quad \text{con} \quad i(t)$
DSB	$V_o \cos(\omega_o t) + \frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[(\omega_o + \omega)t - \varphi(\omega)] d\omega + \frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[(\omega_o - \omega)t + \varphi(\omega)] d\omega$	-
SSB	$V_o \cos(\omega_o t) + \frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[(\omega_o + \omega)t - \varphi(\omega)] d\omega$	$V_o + \frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) e^{j[\omega t - \varphi(\omega)]} d\omega$
DSB-SC	$\frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[(\omega_o + \omega)t - \varphi(\omega)] d\omega + \frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[(\omega_o - \omega)t + \varphi(\omega)] d\omega$	$\frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) e^{j[\omega t - \varphi(\omega)]} d\omega + \frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) e^{-j[\omega t - \varphi(\omega)]} d\omega$
SSB-SC	$\frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) \cos[(\omega_o + \omega)t - \varphi(\omega)] d\omega$	$\frac{V_o k}{2} \int_{\omega_i}^{\omega_m} V(\omega) e^{j[\omega t - \varphi(\omega)]} d\omega$

Modulazioni a prodotto

Modulatore: La modulazione a prodotto può essere ottenuta direttamente, senza passare dall'AM, facendo il prodotto del segnale modulante $x(t)$ per una sinusoide tramite un circuito detto modulatore a prodotto o "mixer", ottenendo:

$$s(t) = x(t) \cos(\omega_o t)$$

L'involuppo complesso coincide con il segnale modulante:

$$i(t) = x(t)$$

$$\text{modulazione a prodotto} = \begin{cases} V(t) = |x(t)| & \text{poichè } V(t) \geq 0 \\ \alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x(t) > 0 \\ \pi & \text{se } x(t) < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (22)$$

Efficienza:

$$n_f = \frac{\omega_m}{2\omega_o} = \frac{1}{2}$$

Trasformata:

$$S(\omega) = \frac{1}{2} X(\omega - \omega_o) + \frac{1}{2} X(\omega + \omega_o)$$

Demodulatore: La demodulazione si ottiene rimoltiplicando l'oscillazione modulata per la portante:

$$u(t) = 2s(t) \cos(\omega_o t) = 2x(t) \cos^2(\omega_o t)$$

Modulazioni QAM (Quadrature Amplitude Modulation)

La modulazione QAM consiste di due modulazioni a prodotto con la seconda portante sfasata in anticipo di $\pi/2$.

Modulatore: Vi sono due segnali modulanti $x_1(t)$ e $x_2(t)$ aventi le stesse caratteristiche spettrali, e devono essere indipendenti. Si ha:

$$s(t) = x_1(t) \cos(\omega_o t) - x_2(t) \sin(\omega_o t) \quad (23)$$

L'involuppo complesso è dato da:

$$i(t) = x_1(t) + jx_2(t)$$

Efficienza:

$$n_f = \frac{\omega_m}{2\omega_o} = \frac{1}{2}$$

Demodulatore: E' la somma di due demodulatori a prodotto. Il componente in fase (prima uscita u_1), e via in quadratura (seconda uscita u_2):

$$\begin{aligned}u_1(t) &= 2s(t)\cos(\omega_o t) = 2x_1(t)\cos^2(\omega_o t) - 2x_2(t)\sin(\omega_o t)\cos(\omega_o t) \\&= x_1(t) + x_1(t)\cos(2\omega_o t) + x_2(t)\sin(2\omega_o t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_2(t) &= -2s(t)\sin(\omega_o t) = 2x_2(t)\sin^2(\omega_o t) - 2x_1(t)\sin(\omega_o t)\cos(\omega_o t) \\&= x_2(t) - x_2(t)\cos(2\omega_o t) - 2x_1(t)\sin(2\omega_o t)\end{aligned}$$

Segnali ad energia ed a potenza finita

Potenza istantanea di un segnale: Dato un segnale $x(t)$ in generale complesso, si definisce:

$$p(t) = x^*(t)x(t) = |x(t)|^2$$

Potenza media di un segnale: Dato un segnale $x(t)$, in generale complesso e definito il prodotto scalare tra funzione continue nel medesimo intervallo come $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx$, si definiscono potenza e potenza media:

$$P = \langle |x(t)|^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt, \quad P_m = \frac{1}{T} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

Energia di un segnale: dato un segnale $x(t)$ in generale complesso:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Segnale ad energia finita: Se l'integrale che ne rappresenta l'energia converge. La potenza tende a zero, quindi non può essere anche a potenza finita.

Segnale a potenza finita: nel caso in cui l'integrale che ne rappresenta la potenza converga ad un valore diverso da zero.

Valore efficace: di una funzione periodica (per un segnale a potenza finita) il valore:

$$x_{eff} = \lim_{T \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt} = \sqrt{P}$$

Nota: il valore efficace di una sinusoide $x(t) = A\cos(\omega t - \varphi)$ è dato da $A/\sqrt{2}$.

Segnali ad energia finita

Funzione di crosscorrelazione: Dati due segnali in generale complessi, $x(t)$ ed $y(t)$ ad energia finita, il coniugato del prodotto interno di uno di essi per la versione anticipata dell'altro:

$$R_{xy}(\tau) = \langle x, y_\tau \rangle^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt$$

Funzione di autocorrelazione: Nel particolare caso in cui $x(t) = y(t)$ prende il nome di autocorrelazione che viene definita:

$$R_x(\tau) = \langle x, x_\tau \rangle^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

Nota: calcolata nell'origine rappresenta l'energia di un segnale.

Proprietà delle funzioni di cross ed autocorrelazione (energia finita):

- **Proprietà 1:** Per la funzione di crosscorrelazione vale la seguente proprietà:

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}^*(-\tau)$$

- **Proprietà 2:** Per la funzione di autocorrelazione si ha (simmetria hermitiana):

$$|R_x(\tau)| \leq R_x(0) = E_x$$

- **Proprietà 3:** Per la funzione di crosscorrelazione vale la seguente relazione (prodotto di convoluzione):

$$R_{xy}(\tau) = x^*(-\tau) * y(\tau) \quad (24)$$

Densità spettrale di energia (bilatera e riferita alle pulsazioni): Dati due segnali complessi $x(t)$ e $y(t)$, se coincidono si ottiene:

$$E_{bil}(\omega) = \frac{F[R_x(\tau)]}{2\pi} = \frac{|X(\omega)|^2}{2\pi}$$

Densità spettrale di energia monolatera se $x(t)$ è reale:

$$E(\omega) = \begin{cases} 2E_{bil}(\omega) & \text{se } \omega > 0 \\ E_{bil}(\omega) & \text{se } \omega = 0 \end{cases}$$

Densità riferite alle frequenze:

$$E_{f,bil}(f) = 2\pi E_{bil}(2\pi f)$$

Trasformazione lineare tempo invariante di spettri di energia: Siano $x(t)$ e $y(t)$ segnali rispettivamente in ingresso ed uscita ad una rete lineare tempo invariante, avente risposta impulsiva $h(t)$ e funzione di trasferimento $H(\omega)$:

$$E_{y,bil}(\omega) = |H(\omega)|^2 E_{x,bil}(\omega) \quad (28)$$

Segnali a potenza finita

Funzione di crosscorrelazione:

$$R_{xy}(\tau) = \langle x, y_\tau \rangle^* = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t) y(t + \tau) dt$$

Funzione di autocorrelazione:

$$R_x(\tau) = \langle x, x_\tau \rangle^* = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t) x(t + \tau) dt$$

Nota: calcolata nell'origine rappresenta la potenza di un segnale.

Proprietà delle funzioni di crosscorrelazione ed autocorrelazione (potenza finita):

- **Proprietà 1:** Per la funzione di crosscorrelazione vale la seguente proprietà:

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}^*(-\tau)$$

- **Proprietà 2:** Per la funzione di autocorrelazione si ha (simmetria hermitiana):

$$|R_x(\tau)| \leq R_x(0) = P_x \quad (26)$$

Densità spettrale di potenza (bilatera, riferita alle pulsazioni):

$$P_{bil} = \frac{F[R_x(\tau)]}{2\pi}$$

Densità spettrale di potenza monolatera:

$$P(\omega) = \begin{cases} 2P_{bil}(\omega) & \text{se } \omega > 0 \\ P_{bil}(\omega) & \text{se } \omega = 0 \end{cases}$$

Densità riferite alle frequenze:

$$P_{f,bil}(f) = 2\pi P_{bil}(2\pi f)$$

Trasformazione lineare tempo invariante di spettri di potenza:

$$P_{y,bil}(\omega) = |H(\omega)|^2 P_{x,bil}(\omega) \quad (29)$$

Segnali periodici a potenza finita

Funzione di crosscorrelazione:

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)y(t+\tau)dt$$

Funzione di autocorrelazione:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

Densità spettrale di potenza di segnali periodici:

$$P_{bil}(\omega) = \frac{F[R_x(\tau)]}{2\pi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \delta(\omega - n\omega_o)$$

In caso di segnali reali può essere scritta in forma monolatera ($A_0 = c_0$, $A_n = 2|c_n|$ con $n > 0$):

$$P(\omega) = A_0^2 \delta(\omega) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n^2}{2} \delta(\omega - n\omega_o) \quad (27)$$

Tabella riassuntiva:

	Segnali a energia finita	Segnali a potenza finita	Segnali periodici a potenza finita
Crosscorrelazione $R_{xy}(\tau) = \langle x, y_\tau \rangle^*$	$\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt$	$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)y(t+\tau)dt$	$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)y(t+\tau)dt$
Autocorrelazione $R_x(\tau) = \langle x, x_\tau \rangle^*$	$\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt$	$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)x(t+\tau)dt$	$R_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)x(t+\tau)dt$
Proprietà 1 (crosscorrelazione)	$R_{xy}(\tau) = R_{yx}^*(-\tau)$	$R_{xy}(\tau) = R_{yx}^*(-\tau)$	-
Proprietà 2 (autocorrelazione - simmetria hermitiana)	$\ R_x(\tau)\ \leq R_x(0) = E_x$	$\ R_x(\tau)\ \leq R_x(0) = P_x$	-
Proprietà 3 (crosscorrelazione - prodotto di convoluzione):	$R_{xy}(\tau) = x^*(-\tau) * y(\tau)$	-	-
Densità spettrale bilatera $\frac{F[R_x(\tau)]}{2\pi}$	$E_{bil}(\omega) = \frac{\ X(\omega)\ ^2}{2\pi}$	$P_{bil} = \text{uguale}$	$P_{bil}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n ^2 \delta(\omega - n\omega_o)$
Densità spettrale monolatera ($\omega > 0$)	$E(\omega) = 2E_{bil}(\omega)$	$P(\omega) = 2P_{bil}(\omega)$	$P(\omega) = A_0^2 \delta(\omega) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n^2}{2} \delta(\omega - n\omega_o)$
Densità spettrale monolatera ($\omega = 0$)	$E_{bil}(\omega)$	$P_{bil}(\omega)$	come sopra, non vi sono due casi in base alle ω
Densità riferite alle frequenze	$E_{f,bil}(f) = 2\pi E_{bil}(2\pi f)$	$P_{f,bil}(f) = 2\pi P_{bil}(2\pi f)$	-
Trasformazioni lineari tempo invarianti di spettri	$E_{y,bil}(\omega) = \ H(\omega)\ ^2 E_{x,bil}(\omega)$	$P_{y,bil}(\omega) = \ H(\omega)\ ^2 P_{x,bil}(\omega)$	-

Teorema di Parseval generalizzato e condizioni di ortogonalità:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)y(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega)Y(\omega)d\omega \quad (25)$$

Spettri di segnali PAM deterministici

I segnali PAM esprimibili come convoluzione tra una serie temporale $\{a_n\}$ ed un impulso ad energia finita $g(t)$ (impulso rettangolare, di ampiezza unitaria, con origine a $t=0$):

$$s(t) = \{a_n\} * g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g(t - nT) \quad (30)$$

- **Serie temporale ad energia finita**, allora anche il segnale PAM è ad energia finita, e la sua trasformata è:

$$S(\omega) = A_s(\omega)G(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A(\omega + k\omega_o)G(\omega)$$

- **Serie temporale a potenza finita**, allora il segnale PAM è anch'esso a potenza finita e non è possibile trasformarlo secondo Fourier. Calcolandone lo spettro di potenza come:

$$P_{s,bil}(\omega) = \frac{|G(\omega)|^2}{2\pi T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-jk\omega T}$$

- **Serie temporale $\{a_n\}$ reale**, la sua autocorrelazione $\{c_n\}$ è reale e pari, per cui la sua trasformata può essere scritta con solo riferimento agli indici positivi ottenendo:

$$P_{s,bil}(\omega) = \frac{|G(\omega)|^2}{2\pi T} \left[c_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \cos(k\omega T) \right]$$

- **Autocorrelazione nulla per k diverso da zero**, si ottiene:

$$P_{s,bil}(\omega) = \frac{c_0 |G(\omega)|^2}{2\pi T}$$

Spettri di segnali PAM aleatori

Un segnale PAM è aleatorio (processo stocastico) se lo è la serie temporale $\{a_n\}$. **Autocorrelazione statistica (a priori)** come media statistica del prodotto delle coppie di valori posti a distanza k , ovvero come $E[a_n^* a_{n+k}]$; se la serie è **stazionaria** la probabilità della coppia (congiunta del secondo ordine) $P(a^i, a^l, k)$ non dipende dalla posizione delle due variabili aleatorie all'interno della sequenza ma solo dalla distanza fra gli elementi, cioè da k :

$$c_{stat,k} = E[a_n^* a_{n+k}] = \sum_{i=1}^L \sum_{l=1}^L (a^i)^* a^l P(a^i, a^l, k) \quad (31)$$

Potenza statistica (valore medio del secondo ordine): il valore per $k=0$.

Variabili aleatorie incorrelate a distanza k se:

$$c_{stat,k} = E[a_n^* a_{n+k}] = \begin{cases} E[|a_n|^2] & \text{se } k=0 \\ E[a_n^*]E[a_{n+k}] = E[a_n^*]E[a_n] & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$$

Condizione sufficiente per l'incorrelazione è che le variabili aleatorie a_n e a_{n+k} siano indipendenti.

Se la serie è a valor medio nullo e gli elementi della serie aleatoria sono incorrelati si ottiene infine:

$$P_{s,bil}(\omega) = \frac{E[|a_n|^2] |G(\omega)|^2}{2\pi T}$$