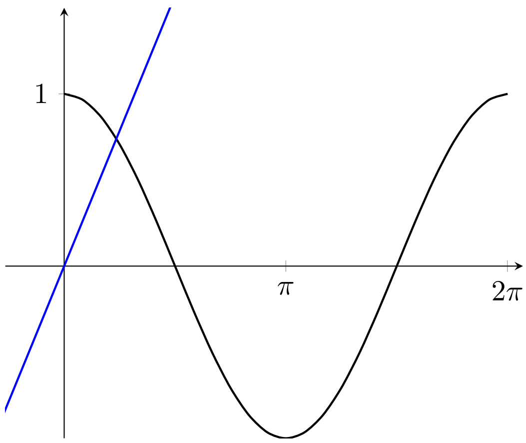
APPUNTI DI MATEMATICA



per le scuole superiori

Mattia Garatti

Indice

Capitolo 1

Insiemi numerici e loro proprietà

1 L'insieme $\mathbb{N}$

Il concetto di numero naturale è **primitivo**, cioè assumibile vero per **intuizione**: non è necessario fornire una definizione. Iniziamo dicendo che è sempre possibile individuare il successivo di un numero naturale, ma non è sempre possibile determinare il precedente.

(1.1) Definizione *Si dicono* ***consecutivi*** *due numeri naturali che sono uno successivo all'altro.*

L'insieme dei numeri naturali si indica con $\mathbb{N}$ ed ha tre proprietà:

- è **infinito**, perché per ogni numero naturale posso determinare il relativo successivo;
- è **ordinato**, perché comunque scelga due numeri naturali posso stabilire quale dei due è maggiore;
- è **discreto**, perchè comunque scelga due numeri naturali consecutivi è sempre possibile individuare tutti i numeri compresi tra essi.

L'insieme $\mathbb{N}$ è rappresentabile tramite una **semiretta orientata** in cui all'origine corrisponde il numero 0. Tramite la rappresentazione mediante semiretta orientata dell'insieme $\mathbb{N}$ è possibile definire i concetti di minore e maggiore di un numero.

(1.2) Definizione *Un numero b si dice* ***maggiore*** *di un numero a se, rappresentando entrambi sulla retta dei numeri, b risulta a destra: $b > a$; si dice* ***minore*** *se, rappresentando* *entrambi sulla retta dei numeri, b risulta a sinistra: $b < a$; si dice* ***uguale*** *se, rappresentando entrambi sulla retta dei numeri, b occupa lo stesso posto di a: $b = a$.*

L'insieme dei numeri naturali possiede un'**elemento minimo**, cioè minore di tutti gli altri: 0. Non possiede invece un **elemento massimo**, cioè maggiore di tutti gli altri.

Le operazioni in $\mathbb{N}$

(1.3) Definizione *Un'operazione è un procedimento che ci permette di associare, a due numeri dati in un certo ordine, un terzo in modo da soddisfare determinate condizioni.*

Le operazioni con i numeri naturali sono anche dette **operazioni elementari**: sono addizione e moltiplicazione. Sulla scorta di queste possiamo anche introdurre altre due operazioni, non interne a $\mathbb{N}$, la differenza e la divisione.

(1.4) Osservazione *Nelle espressioni numeriche, convenzionalmente le operazioni si svolgono nel seguente ordine:*

1. *elevamento a potenza;*
2. *moltiplicazioni e divisioni, nell'ordine in cui compaiono;*
3. *addizioni e sottrazioni, nell'ordine in cui compaiono.*

La priorità di un'operazione può essere cambiata introducendo nell'espressione delle *parentesi*; ordine di priorità delle parentesi:

$$\text{tonde} \rightarrow \text{quadre} \rightarrow \text{graffe.}$$

Addizione

L'addizione è un'operazione **interna** ad $\mathbb{N}$, cioè è sempre possibile eseguirla ottenendo valori appartenenti all'insieme di partenza; vale che

$$\forall\, a, b \in \mathbb{N} : a + b = c \wedge c \in \mathbb{N}$$

Chiamiamo a e b **addendi** e c **somma**. L'addizione gode di tre proprietà:

- **commutativa**

$$\forall\ a, b \in \mathbb{N} : a + b = b + a$$

- **associativa**

$$\forall\ a, b, c \in \mathbb{N} : a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$$

- **distributiva**

$$\forall a \in \mathbb{N}\ ,\ \exists\ b, c \in \mathbb{N} : a = b + c$$

(1.5) Definizione *Si dice* ***elemento neutro*** *rispetto ad un'operazione, il numero che lascia inalterato qualsiasi numero con cui interagisce.*

Lo 0 è l'elemento neutro dell'addizione.

Moltiplicazione

La moltiplicazione è un'operazione interna ad $\mathbb{N}$ ed è pensabile come un'addizione di addendi uguali detti **fattori**, il risultato è detto **prodotto**:

$$a * b = \sum_{i=1}^{b} a_i$$

La moltiplicazione gode di cinque proprietà:

- **commutativa**

$$\forall a, b \in \mathbb{N} : a * b = b * a$$

- **associativa**

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} : a * b * c = (a * b) * c = a * (b * c)$$

- **distributiva**

$$\forall a \in \mathbb{N}\, \exists\, b, c \in \mathbb{N} \mid a = b * c$$

- **distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma**

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} : (a + b) * c = a * c + b * c$$

Definiremo la quinta proprietà dopo aver definito la sottrazione.

(1.6) Definizione *Si dice **elemento assorbente** di un'operazione, il numero che relazionato ad un qualsiasi altro restituisce se stesso.*

(1.7) Proposizione *(***(di annullamento del prodotto)***) Ogni numero moltiplicato per* 0 *da come risultato* 0*.*

Lo 0 risulta quindi essere l'elemento assorbente della moltiplicazione. L'1 è l'elemento neutro della moltiplicazione.

Sottrazione

La sottrazione non è un'operazione interna ad $\mathbb{N}$; dati a, detto **minuendo**, e b, detto **sottraendo**, $\in \mathbb{N}$ sottrarre b da a significa trovare, se esiste, quel numero naturale c, detto **differenza,** che sommato a b da come risultato a. La sottrazione non è quindi sempre possibile in $\mathbb{N}$; essa gode di una proprietà:

- **invariantiva**

$$a - b = (a \pm c) - (b \pm c) \ \forall c \in \mathbb{N}$$

Possiamo ora enunciare anche la quinta proprietà della moltiplicazione:

- **distributiva della moltiplicazione rispetto alla sottrazione**

$$\forall c \in \mathbb{N} - \{0\} : (a - b) * c = a * c - b * c$$

L'elemento neutro della sottrazione è 0.

Divisione

La divisione non è un'operazione interna ad $\mathbb{N}$; dati a, detto **dividendo**, e b, detto **divisore**, $\in \mathbb{N}$ dividere b per a significa trovare, se esiste, quel numero naturale c, detto **quoziente**, che moltiplicato per b da come risultato a. La divisione non è quindi sempre possibile in $\mathbb{N}$; essa gode di due proprietà:

- **invariantiva**

$$a : b = (a : c) : (b : c) = (a * d) : (b * d) \wedge c, d \neq 0$$

- **distributiva della divisione rispetto ad addizione/sottrazione**

$$(a \pm b \pm c) : d = a : d \pm b : d \pm c : d \wedge d \neq 0$$

L'elemento neutro della divisione è 1.

Lo 0 nella divisione ha un comportamento particolare: se è il dividendo si comporta da elemento assorbente; se è il divisore rende **impossibile** la divisione; se sia dividendo che divisore sono uguali a 0 il risultato dell'operazione è **indeterminato**.

Elevamento a potenza

L'elevamento a potenza è una moltiplicazione tra fattori uguali che si può così rappresentare:

$$a^n = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

Chiamiamo a **base** e n **esponente**.

Poniamo per definizione: $a^0 = 1$. Resta non definito, e quindi indeterminato, 0^0.

L'elevamento a potenza gode di tre proprietà:

- **prodotto e quoziente di potenze con stessa base**

$$a^n * b^m = a^{n+m} \qquad a^n : b^m = a^{n-m}$$

- **potenza di potenza**

$$(a^n)^m = a^{n*m}$$

- **potenza di un prodotto e di un quoziente**

$$(a * b)^n = a^n * b^n \qquad (a : b)^n = a^n : b^n$$

Divisibilità in $\mathbb{N}$

Dati due numeri naturali a e b può capitare che esista in $\mathbb{N}$ un altro numero n tale che $a = n * b$, allora si dice che a è **multiplo** di b secondo n oppure che b è **divisore** di a. In generale non si può dire se un numero è divisibile per un altro ma esistono alcune regole veloci dette **criteri di divisibilità**, ad esempio i seguenti:

- Divisibilità per 2, il numero è pari;
- Divisibilità per 3, la somma delle cifre è un multiplo di 3;
- Divisibilità per 5, il numero termina per 0 o per 5;
- ecc... (sui libri di testo ed in rete se ne possono trovare molti altri)

In tutti i casi per cui non si conosce un criterio di divisibilità si procede per tentativi.

(1.8) Definizione *Un numero si dice **primo** se è divisibile solo per 1 e per se stesso. Un numero si dice **composto** se non è primo.*

Massimo Comune Divisore e minimo comune multiplo

Il **Massimo Comune Divisore** è il più grande divisore comune ai numeri naturali dati; si calcola scomponendoli in fattori primi e prendendo i divisori comuni con il minor esponente. Il **minimo comune multiplo** è il più piccolo multiplo comune ai numeri dati; si calcola scomponendoli in fattori primi e prendendo i divisori comuni, e non comuni, con l'esponente maggiore.

Due o più numeri si dicono **coprimi**, o primi tra loro, se il loro MCD è 1.

Tra mcm ed MCD esiste un legame:

$$\forall a, b \in N : a * b = MCD(a, b) * mcm(a, b)$$

2 L'insieme $\mathbb{Z}$

L'insieme $\mathbb{Z}$ contiene i **numeri interi relativi**, cioè i numeri caratterizzati da un *segno*, $+/-$, e da una parte numerica detta *modulo* o *valore assoluto* che solitamente si indica con $|n|$. Il segno indica la posizione del numero sulla **retta ordinata** rispetto a 0. Come l'insieme dei numeri naturali anche $\mathbb{Z}$ è **infinito**, **ordinato** e **discreto**.

(2.1) Definizione *Due numeri relativi si dicono **concordi** se hanno stesso segno. Due numeri relativi si dicono **discordi** se hanno diverso segno. Due numeri relativi si dicono **uguali** se hanno stesso segno e stesso modulo. Due numeri relativi si dicono **opposti** se hanno stesso modulo e diverso segno.*

Osserviamo che dati due numeri concordi positivi è maggiore quello di modulo maggiore; dati due numeri concordi negativi è maggiore quello di modulo minore; ogni numero relativo positivo è sempre maggiore di qualsiasi numero relativo negativo; lo 0 è maggiore di tutti i numeri negativi e minore di tutti i positivi.

Le operazioni in $\mathbb{Z}$

Somma algebrica

Se due numeri sono **concordi** la loro somma algebrica avrà come segno lo stesso segno dei due numeri e come modulo la somma dei moduli. Se due numeri sono **discordi** la loro somma algebrica avrà come segno il segno del numero con modulo maggiore e come modulo la differenza dei moduli.

Rimangono invariate le proprietà osservate per l'addizione in $\mathbb{N}$; in particolare l'elemento neutro è ancora lo **0**.

Moltiplicazione

Dati due numeri relativi, il loro prodotto è quel numero relativo che per modulo il prodotto dei moduli e come segno il prodotto tra i segni secondo la seguente regola:

F1	**F2**	**Prodotto**
$+$	$+$	$+$
$-$	$-$	$+$
$+$	$-$	$-$
$-$	$+$	$-$

Per la **divisione** si procede in modo analogo ricordando che non è un'operazione interna a $\mathbb{Z}$.

Elevamento a potenza con esponente naturale

La procedura è analoga al caso naturale, occorre solo prestare attenzione al segno:

- se la base è **positiva**, il risultato sarà sempre positivo;
- se la base è **negativa**, il risultato è negativo se l'esponente è dispari, altrimenti è positivo.

3 L'insieme $\mathbb{Q}$

Dati due numeri interi abbiamo visto che non è sempre possibile effettuare la divisione tra i due numeri. Andiamo allora ad introdurre il concetto di frazione, in modo tale da poter esprimere, dati due numeri interi **a** e **b**, **a** : **b** come $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$. Una frazione $\frac{a}{b}$ può essere di tre tipi:

- **propria**, se $a < b$;
- **impropria**, se $a > b$;
- **apparente**, se a è *multiplo* di b.

(3.1) Osservazione (Proprietà invariantiva) *Data una frazione, moltiplicando o dividendo numeratore e denominatore per uno stesso numero non nullo, si ottiene ancora una frazione che è* ***equivalente****, cioè con lo stesso valore, a quella data.*

Proprio grazie a questa proprietà possiamo introdurre tutto il calcolo con le frazioni.

Le operazioni in $\mathbb{Q}$

Semplificazione

Semplificare una frazione vuol dire ridurla ai minimi termini, cioè dividere numeratore e denominatore per il loro MCD.

Riduzione di più frazioni allo stesso denominatore

1. Semplificare le frazioni date;

2. Calcolare il mcm dei denominatori e trasformare ogni frazione in una frazione equivalente con quel particolare denominatore.

Grazie a questa operazione possiamo confrontare tra loro diverse frazioni per stabilire quale è l'ordine tra loro; è inoltre possibile effettuare la loro **somma algebrica**.

Moltiplicazione tra frazioni

1. Semplificare le frazioni date;

2. Moltiplicare rispettivamente tra loro numeratori e denominatori avendo cura di semplificare se possibile.

Per la **divisione** si procede in modo analogo: si moltiplica il dividendo per il *reciproco del divisore*, che si ottiene scambiando numeratore e denominatore.

Potenza

Per effettuare l'elevamento a potenza di una frazione si elevano a potenza singolarmente numeratore e denominatore e si scrive la frazione così ottenuta. Nel caso di esponente con segno negativo prima di elevare a potenza occorre scambiare numeratore e denominatore: in poche parole elevare ad un numero negativo significa elevare il reciproco di quel numero al corrispettivo numero positivo.

Proprietà di $\mathbb{Q}$

Si chiama numero **razionale** ogni insieme di frazioni equivalenti fra loro. L'insieme dei numeri razionali si indica con $\mathbb{Q}$, come abbiamo fatto nel corso di questo paragrafo, è gode delle seguenti proprietà:

- è **infinito**;

- è **ordinato**;

- è **denso**, cioè dati due numeri razionali è sempre possibile individuarne infiniti compresi tra di loro.

Anche per $\mathbb{Q}$ è possibile utilizzare la rappresentazione mediante retta orientata.

4 L'insieme $\mathbb{R}$

Si osserva che i numeri decimali limitati e i numeri decimali illimitati periodici possono essere scritti sotto forma di frazione e quindi sono numeri razionali.

Chiamiamo invece $\mathbb{I}$ l'insieme dei **numeri irrazionali**. Questi numeri vanno ad occupare sulla retta dei numeri gli spazi lasciati vuoti dai numeri razionali e dunque possiamo definire un nuovo insieme detto insieme dei **numeri reali**, come unione dei due precedenti:

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$$

L'insieme dei numeri reali gode delle seguenti proprietà:

- è **infinito**;
- è **ordinato**;
- è **continuo**, cioè ad ogni numeri reale corrisponde un punto sulla retta dei numeri e ad ogni punto della retta corrisponde un numero reale.

5 Gli insiemi

Fino ad ora abbiamo parlato di insiemi senza darne una definizione. Un insieme è un raggruppamento di oggetti contraddistinti da una data proprietà che lo caratterizza senza alcun equivoco. Ogni insieme si indica con le lettere maiuscole dell'alfabeto mentre i relativi elementi con le lettere minuscole.

Se un elemento a appartiene ad un insieme A scriveremo:

$$a \in A$$

Al contrario se un elemento b non appartiene ad A scriveremo:

$$b \notin A$$

Un insieme può essere finito, se contiene un numero limitato di elementi, oppure infinito (ad esempio $\mathbb{N}$ è infinito come abbiamo già potuto osservare). Due insiemi sono **uguali** se hanno gli stessi elementi, a meno dell'ordine mentre sono diversi, o disuguali, se differiscono per almeno un elemento. L'uguaglianza insiemistica gode di alcune proprietà:

- **riflessiva**, $A = A$;
- **simmetrica**, $A = B \implies B = A$;
- **transitiva**, $A = B \wedge B = C \implies A = C$.

Esistono diversi modi convenzionali per rappresentare un insieme:

- **elencazione**;
- **proprietà caratteristica**;
- **diagrammi di Eulero-Venn**.

Esiste un insieme particolare caratterizzato dal non avere alcun elemento al suo interno: tale insieme si dice **insieme vuoto** e si indica con $\varnothing$. Chiameremo invece **insieme universo** o **ambiente** l'insieme di riferimento dove vado a pescare i miei elementi.

(5.1) Definizione *Dati due insiemi A e B si dice che A è un **sottoinsieme** di B se ogni elemento di A è un elemento di B: scriveremo $A \subset B$ se l'inclusione è propria, cioè A e B non coincidono mentre useremo $A \subseteq B$ altrimenti.*

Dato un insieme possiamo sempre considerare come suoi sottoinsiemi se stesso e l'insieme vuoto.

(5.2) Definizione *Dato un insieme finito A costituito da n elementi, si può dimostrare che è possibile costruire un totale di 2^n sottoinsiemi, compresi A e $\varnothing$. Tutti questi sottoinsiemi* *formano un nuovo insieme detto* ***insieme delle parti*** *che indichiamo così*

$$P(A) = \{X | X \subseteq A\}$$

L'insieme delle parti è un insieme che ha per elementi altri insiemi, quindi per dire che un elemento appartiene a $P(a)$ usiamo il simbolo di appartenenza, $\in$, anche se si tratta di un insieme.

Operazioni tra insiemi

Intersezione

Dati due insiemi A e B si chiama **intersezione** tra i due quel nuovo insieme costituito dagli elementi che stanno in A e anche in B, ovvero gli *elementi comuni* ai due insiemi. In simboli

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

Se $A \cap B = \varnothing$, ovvero gli insiemi non hanno alcun elemento comune diremo che sono **disgiunti**. Se $A \subset B$, ovvero uno è un sottoinsieme dell'altro, avremo che $A \cap B = A$.

Unione

Dati due insiemi A e B si chiama **unione** tra i due quel nuovo insieme costituito dagli elementi che stanno in A oppure in B, ovvero gli *elementi comuni* e *non comuni* ai due insiemi. In simboli

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

Vale che $A \cup B = \varnothing \iff A = \varnothing \wedge B = \varnothing$. Se risulta che $A \subset B$ allora avremo che $A \cup B = B$. Di seguito sono sintetizzate le proprietà di Unione e Intersezione:

- **proprietà di idempotenza**

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

- **proprietà commutativa**

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

- **proprietà associativa**

$$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

- **legge di assorbimento**

$$A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B) = A$$

- **proprietà distributive**

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Analizziamo alcuni casi particolari:

- $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cup \varnothing = A$
- $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing$
- $\varnothing \cup \varnothing = \varnothing$

Differenza

Dati due insiemi A e B si chiama **differenza** tra i due quel nuovo insieme costituito dagli elementi che stanno in A e non stanno in B. In simboli

$$A - B = \{x|x \in A \wedge x \notin B\}$$

Di seguito dei casi particolari:

- se $A \cap B = \varnothing \implies A - B = A$
- se $A \subset B \implies A - B = \varnothing$

La differenza insiemistica non gode della proprietà commutativa.

Chiamiamo **complementare** di un insieme A rispetto all'insieme universo U, e lo indichiamo con $\overline{A}$, la differenza tra U e A:

$$\overline{A} = U - A$$

Di seguito sono sintetizzate le proprietà di Differenza e Complementare:

- **proprietà distributive della differenza**

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

- **prima legge di De Morgan**, il complementare dell'intersezione di due insiemi corrisponde all'unione dei complementari degli stessi. In simboli

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

- **seconda legge di De Morgan**, il complementare dell'unione di due insiemi corrisponde all'intersezione dei complementari degli stessi. In simboli

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Di seguito alcuni casi particolari:

- $\overline{\overline{A}} = A$
- $\overline{\varnothing} = U$
- $\overline{U} = \varnothing$
- $A \cup \overline{A} = U$
- $A \cap \overline{A} = \varnothing$

(Le ultime due sono note come **leggi di complementarietà**).

Partizione di un insieme

Dato un insieme qualsiasi A fare una sua **partizione** significa suddividere l'insieme in tanti sottoinsiemi tali che siano fra loro disgiunti e che uniti diano A.

Prodotto cartesiano

Prima di definire tale operazione si deve introdurre il concetto di **coppia ordinata** di due elementi a e b: si tratta di una scrittura del tipo (a, b). Trattandosi di coppia ordinata, deduciamo subito che l'ordine è fondamentale e quindi $(a, b) \neq (b, a)$.

Dati due insiemi A e B, il primo contenente n elementi ed il secondo contenente m elementi, si chiama **prodotto cartesiano** l'insieme costituito da tutte le coppie ordinate tali che il primo elemento della coppia appartenga ad A ed il secondo a B. In simboli

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

L'insieme prodotto cartesiano conterrà nm elementi.

Di seguito sono sintetizzate le proprietà del prodotto cartesiano:

- $A \times B \neq B \times A$
- **proprietà distributive**

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

Di seguito alcuni casi particolari:

- $A \times \varnothing = \varnothing$
- $\varnothing \times A = \varnothing$
- $\varnothing \times \varnothing = \varnothing$
- $A \times A = A^2$

I modi più utilizzati per rappresentare il prodotto cartesiano tra due insiemi sono i seguenti:

1. **rappresentazione per elencazione**;
2. **rappresentazione mediante proprietà caratteristica**;
3. **rappresentazione mediante tabella a doppia entrata**;
4. **rappresentazione cartesiana**, consiste nel rappresentare gli insiemi come due rette orientate perpendicolari (che possiamo chiamare assi), una orizzontale ed una verticale; gli elementi del prodotto cartesiano saranno i punti di intersezione delle rette tracciate da un punto di un asse parallele all'altro asse.

Capitolo 2

Calcolo letterale

Introduciamo ora il calcolo letterale che utilizza al posto di numeri specifici delle lettere che rappresentano di volta in volta un qualsiasi numero di un qualsiasi insieme numerico. Possiamo quindi affermare che il calcolo letterale è una generalizzazione del calcolo numerico.

Esso è quindi uno strumento più potente del calcolo numerico proprio grazie al suo carattere di generalità. Operando con le lettere dobbiamo usare sempre e solo le proprietà delle operazioni con i numeri.

1 I monomi

Si chiama monomio la più semplice espressione letterale nella quale lettere e numeri sono legati tra loro dal segno di moltiplicazione. In particolare si considerano sempre monomi in **forma normale**, cioè in cui è ben definita una parte numerica, detta **coefficiente**, ed una **parte letterale**. Un monomio in forma normale può essere **intero** se non ha lettere a denominatore, **fratto** se ha almeno una lettera a denominatore.

Dato un monomio intero espresso in forma normale si definisce **grado del monomio rispetto ad una lettera** l'esponente con cui compare quella lettera. Chiameremo invece grado complessivo del monomio, o **grado**, la somma degli esponenti della parte letterale.

Confronto tra monomi

Due monomi ridotti in forma normale possono essere:

- **simili**, se hanno stessa parte letterale;
- **uguali**, se hanno stessa parte letterale e stesso coefficiente;
- **opposti**, se hanno stessa parte letterale ma coefficienti opposti.

Operazioni tra monomi

Somma algebrica

Possiamo eseguire una somma algebrica di monomi solo se i monomi sono simili usando la proprietà distributiva inversa, nota anche come **raccoglimento a fattore comune**. In generale non è detto che tutti i monomi siano simili tra loro, sfruttando anche la proprietà commutativa e la proprietà associativa possiamo arrivare ad avere una somma di monomi non simili, cioè un **polinomio**.

Moltiplicazione

Per eseguire una moltiplicazione tra monomi dobbiamo applicare la proprietà commutativa, la proprietà associativa e se possibile la prima proprietà delle potenze per arrivare ad avere un monomio che abbia come coefficiente il prodotto dei coefficienti dei fattori e come parte letterale il prodotto delle lettere che compaiono in ogni fattore ciascuna avente come esponente la somma degli esponenti con con compare in ogni fattore.

Divisione

Come avviene nel calcolo numerico anche la divisione tra due monomi si trasforma nella moltiplicazione fra il primo monomio ed il reciproco del secondo. Per reciproco di un monomio intendiamo il monomio che ha numeratore e denominatore scambiati di posto.

In generale dalla divisione tra due monomi intero non è detto che origini un monomio intero perché potrebbero rimanere delle lettere a denominatore.

Potenza

Per elevare a potenza un monomio si usano sempre e soltanto la proprietà della potenza di un prodotto e quella di potenza di potenza; il risultato è ancora un monomio.

M.C.D. e m.c.m. tra monomi

Si chiama M.C.D. fra due o più monomi il più grande tra i loro divisori comuni e precisamente quel monomio dato dal prodotto di tutti i fattori, numeri i e letterali, comuni ai monomi, presi una sola volta con l'esponente più piccolo.

Si chiama m.c.m. fra due o più monomi il più piccolo tra i loro multipli comuni e precisamente quel monomio dato dal prodotto di tutti i fattori, numeri i e letterali, comuni e non comuni ai monomi, presi una sola volta con l'esponente più grande.

2 I polinomi

Come abbiamo già detto chiamiamo **polinomio** ogni somma algebrica di monomi non simili.

Chiamiamo **grado del polinomio rispetto ad una lettera** il massimo esponente con cui compare quella lettera. Chiameremo invece grado complessivo del polinomio, o **grado**, il massimo grado dei monomi che lo compongono.

Un polinomio può essere:

- **completo** rispetto ad una lettera, se nel polinomio compaiono tutte le potenze di quella lettera fino alla potenza di grado 0;

- **ordinato** secondo le potenze crescenti o decrescenti di una lettera se le potenze che compaiono nel polinomio sono disposte in ordine crescente o decrescente;

- **omogeneo**, se tutti i monomi che lo formano hanno lo stesso grado.

(2.1) Osservazione *Ogni polinomio, come ogni altra espressione letterale dipende dalle lettere presenti in esso: si dice che il polinomio è funzione delle lettere presenti.*

(2.2) Proposizione (Principio di identità dei polinomi) *Due polinomi, funzione delle stesse lettere, sono uguali se hanno lo stesso grado e se i coefficienti di ogni monomio sono rispettivamente uguali.*

Operazioni tra polinomi

Somma algebrica

Per eseguire la somma algebrica tra polinomi si usa inizialmente la proprietà dissociativa, eliminando le varie parentesi presenti, poi si utilizzano la proprietà commutativa e associativa individuando i monomi simili. In generale il risultato finale è ancora un polinomio.

Moltiplicazione di un monomio per un polinomio

Per eseguire la moltiplicazione tra un monomio ed un polinomio devo moltiplicare ogni monomio del polinomio per il monomio dato. Il risultato in generale è un polinomio.

Moltiplicazione tra polinomi

Per eseguire la moltiplicazione tra due polinomi devo moltiplicare ogni monomio del primo polinomio per ogni monomio del secondo. Il risultato è ancora un polinomio. Questa operazione può spesso risultare molto lunga, perciò è utile memorizzare alcune regole di calcolo, i cosiddetti **prodotti notevoli**.

3 Prodotti notevoli

Somma per differenza Se A e B sono due polinomi, il prodotto della somma dei due per la loro differenza è pari alla differenza dei loro quadrati. In simboli:

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2.$$

Quadrato di un binomio Se A e B sono due polinomi, il quadrato della loro somma è pari alla somma dei loro quadrati aumentata del loro doppio prodotto. In simboli:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

Quadrato di un trinomio Siano A, B, C polinomi. Il quadrato della loro somma è pari alla somma dei loro quadrati aumentata dei rispettivi doppi prodotti. In simboli:

$$(A+B+C)^2 = A^2 + B^2 + 2AB + 2BC + 2AC.$$

Qubo di binomio Siano A e B due polinomi. Il cubo della loro somma è pari alla somma dei loro cubi aumentata del triplo prodotto del quadrato del primo per il secondo e del triplo prodotto del quadrato del secondo per il primo. In simboli:

$$(A+B)^3 = A^3 + B^3 + 3A^2B + 3AB^2.$$

4 Divisibilità tra polinomi

(4.1) Definizione *Un polinomio A si dice**divisibile** per un polinomio B non nullo, se esiste un polinomio Q tale che*

$$A = Q \cdot B.$$

Dati due polinomi A, B, con B non nullo, in generale esistono sempre, e sono unici, due polinomi R, Q tali che

$$A = Q \cdot B + R.$$

Solitamente R e Q si determinano tramite l'**algoritmo della divisione tra polinomi**. Invece nel caso in cui $B = x + b$, con $b \neq 0$, è possibile semplificare la ricerca utilizzando la **regola di Ruffini**.

(4.2) Osservazione *Chiaramente un polinomio è divisibile per un altro se e solo se l'algoritmo della divisione restituisce resto nullo.*

(4.3) Teorema *contenuto...*

Capitolo 3

Goniometria

Obiettivo di questo capitolo è portare il concetto di angolo nel piano cartesiano in modo da poter costruire degli strumenti che permettano di definire in modo analitico i concetti di geometria sintetica legati agli angoli.

1 Il radiante

Le lunghezze degli archi di una circonferenza sono proporzionali ai corrispondenti angoli al centro. Se α, α_2 sono due angoli al centro di una circonferenza e l, l_2 sono le rispettive lunghezze degli archi di circonferenza spazzati, possiamo scrivere

$$\alpha : \alpha_2 = l : l_2$$

Se adesso poniamo $l_2 = 2\pi r$, cioè prendiamo l'arco di lunghezza pari a tutta la circonferenza, avremo che il rispettivo angolo al centro sarà l'angolo giro, ovvero $\alpha_2 = 360\circ$, e quindi la proporzione può essere così riscritta

$$l = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot r}{180}$$

con α in gradi.

(1.1) Osservazione *Il rapporto tra la lunghezza di un arco di circonferenza ed il raggio della circonferenza stessa dipende solo dall'angolo al centro che individua l'arco.*

Da quanto visto nell'osservazione 1.1 risulta chiaro che questo valore, che è adimensionale, può essere utilizzato come misura di un angolo.

(1.2) Definizione *Chiamiamo* ***radiante*** *l'ampiezza di un angolo al centro cui corrisponde un arco di circonferenza uguale al raggio* $\rho = \frac{l}{r}$.

Volendo scrivere due relazioni per il passaggio da un'unità di misura all'altra, si ottengono le seguenti: $\alpha = \frac{180}{\pi}\rho$ e $\rho = \frac{\pi}{180}\alpha$.

2 Angoli orientati

Descriveremo l'angolo come la rotazione di un suo lato attorno al vertice. Se questa rotazione avviene in senso antiorario diremo che l'angolo è positivo, altrimenti negativo.

Un angolo si dice in posizione normale quando è riferito ad un sistema di assi cartesiani, il vertice coincide con l'origine ed il primo lato con il semiasse positivo delle ascisse.

3 Circonferenza goniometrica

(3.1) Definizione *Chiamiamo circonferenza goniometrica il luogo dei punti distanti 1 dall'origine degli assi cartesiani. L'equazione del luogo è la seguente*

$$C : x^2 + y^2 = 1$$

Ovviamente risulta che la misura di un angolo sulla circonferenza goniometrica altro non è che la lunghezza dell'arco individuato.

Capitolo 4

Calcolo integrale

1 Primitive di funzioni reali di variabile reale

(1.1) Definizione *Consideriamo una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, con I un intervallo. Chiamiamo* primitiva di f *una funzione F, derivabile su I, tale che per ogni $x \in I$*

$$F'(x) = f(x).$$

(1.2) Esempio *Consideriamo la funzione*

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x \end{cases} .$$

Una sua primitiva è sicuramente la funzione

$$F : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases} ,$$

infatti F è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e $F'(x) = 2x$.

(1.3) Osservazione *Se f è continua su I allora sicuramente ammette almeno una primitiva.*

(1.4) Teorema *$f : I \to \mathbb{R}$, con I un intervallo, una funzione. Se esiste almeno una primitiva F di f, allora ne esistono infinite, tutte della forma $F+C$, con $C \in \mathbb{R}$ qualunque.*

Dimostrazione. Per ipotesi $F'(x) = f(x)$. Preso poi un qualunque $C \in \mathbb{R}$ consideriamo $F(x) + C$: essa è derivabile e ha per derivata $f(x)$, da cui la tesi. ∎

(1.5) Definizione *Chiamiamo* integrale indefinito *di f, e lo indichiamo con il simbolo*

$$\int f(x)\, dx,$$

l'insieme di tutte le primitive di f.

L'integrale indefinito associa quindi ad una funzione una famiglia di funzioni e pertanto risulta essere un operatore. In particolare è l'operatore inverso alla derivazione.

(1.6) Osservazione *Quando calcoliamo la derivata di una funzione il risultato è uno solo. Al contrario, come si può vedere dal teorema* (1.4)*, non esiste* la *primitiva di f.*

(1.7) Teorema (Proprietà dell'integrale indefinito) *Valgono i seguenti fatti:*

$$\int (f+g)(x)\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

$$\int (kf)(x)\, dx = k \int f(x)\, dx \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

(1.8) Proposizione (Primitive delle funzioni elementari) *Valgono i seguenti fatti:*

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{a+1} + C \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C, \ \ a > 0, \ a \neq 1 \qquad \int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$$

L'obiettivo è ricondurci mediante manipolazioni algebriche o con tecniche di integrazione al calcolo di primitive delle funzioni sopra indicate.

2 Tecnica del cambio di variabile mediante differenziale

Ricordiamo che il differenziale di una funzione reale di variabile reale, derivabile, è definito come segue

$$df = f'(x)dx.$$

(2.1) Esempio *Determinare l'integrale indefinito della funzione*

$$f(x) = \sin^3 x \cos x.$$

Mediante manipolazioni algebriche non riusciamo a ricondurci ad un integrale immediato. Tuttavia

$$d(\sin x) = \cos x dx,$$

quindi ponendo $t = \sin x$, *otteniamo*

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int t^3 dt = \frac{1}{4}t^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4 x + C.$$

3 Tecnica di sostituzione

Possiamo considerare questa tecnica una generalizzazione della precedente.

(3.1) Esempio *Determinare l'integrale indefinito della funzione*

$$f(x) = \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$

Poniamo $t = \sqrt{x}$, *allora*

$$x = t^2$$

da cui $dx = 2tdt$, *per cui*

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{\cos t}{t}2tdt = 2\int \cos t = 2\sin t + C = 2\sin\sqrt{x} + C.$$

L'esercizio precedente si poteva anche calcolare agevolmente con la tecnica del cambio di variabile.

(3.2) Esempio *Calcolare*

$$\int x\sqrt{x+2}dx.$$

Poniamo $t = \sqrt{x+2}$, *allora*

$$x = t^2 - 2$$

da cui $dx = 2tdt$, *per cui*

$$\int x\sqrt{x+2}dx = \int (t^2-2)t \cdot 2tdt = 2\int (t^4 - 2t^2)dt = \frac{2}{5}\left(\sqrt{x+2}\right)^5 - \frac{4}{3}\left(\sqrt{x+2}\right)^3 + C.$$

4 Integrazione per parti

(4.1) Teorema (Formula di integrazione per parti)

$$\int F(x)\,g(x)\,dx = F(x)\,G(x) - \int f(x)\,G(x)\,dx.$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ∎

5 Integrazione delle funzioni razionali

Per calcolare la primitiva di una funzione razionale è comodo aver presente il metodo per la **decomposizione dei fratti semplici**:

1. Se il grado del numeratore è maggiore o uguale al grado del denominatore effettuare una divisione di polinomi;

2. Decomporre il denominatore nel prodotto di potenze di binomi di primo grado e trinomi di secondo grado irriducibili e distinti tra loro e trasformare la frazione in una somma di frazioni secondo i seguenti criteri:

   - per ogni fattore $(ax+b)$ considerare un addendo della forma $\dfrac{A}{ax+b}$;
   - per ogni fattore $(ax+b)^m$, con $m>1$, considerare m addendi della forma $\dfrac{A_1}{ax+b}, \dfrac{A_2}{(ax+b)^2}, \dots \dfrac{A_m}{(ax+b)^m}$;
   - per ogni fattore (ax^2+bx+c), con $b^2-4ac<0$, considerare un addendo della forma $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$;
   - per ogni fattore $(ax^2+bx+c)^m$, con $b^2-4ac<0$ e $m>1$, considerare m addendi della forma $\dfrac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}, \dfrac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}, \dots \dfrac{A_mx+B_m}{(ax^2+bx+c)^m}$;

3. Determinare i coefficienti incogniti tramite il principio di identità dei polinomi.

6 Primitive notevoli

(6.1) Proposizione *Valgono i seguenti fatti:*

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\frac{\tan x}{2}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos x}dx = \ln\left|\frac{\tan x}{2} + \frac{\pi}{4}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}(a^2 \arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2}) + C$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C$$

Dimostrazione. La verifica può essere svolta per esercizio. ■