

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE
SEDE DI BRESCIA

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica



Tesi di Laurea Triennale

Il Teorema di esistenza di Peano per le equazioni differenziali ordinarie

Relatore:

Ch.mo Prof. Marco Marzocchi

Candidato:

Mattia Garatti

Matricola 5001862

Anno Accademico 2022 – 2023

All the world's a differential equation,
and the men and women are merely variables.
– Ben Orlin

Indice

Introduzione	7
1 Spazi metrici totalmente limitati	11
1 Notazioni e concetti preliminari	11
2 Definizione e prime proprietà	12
3 Esempi	13
4 Il Teorema di Ascoli – Arzelà	17
2 Equazioni differenziali ordinarie	21
1 Definizione e prime proprietà	21
2 Esistenza locale	22
3 Esistenza globale	27
4 Esempi	34
5 Alcune considerazioni conclusive	41
6 Uno sguardo ad una possibile generalizzazione	42
Bibliografia	46
Elenco dei simboli	49
Indice analitico	51

Introduzione

Con la nascita del calcolo infinitesimale di Leibniz e Newton nascono anche i primi studi relativi alle equazioni differenziali: già Newton nella sua opera *Il metodo delle flussioni e delle serie infinite* presenta due tipologie di equazioni differenziali ordinarie e un tipo di equazione differenziale alle derivate parziali.

L'origine delle equazioni differenziali risale a studi di tipo geometrico, in particolare ricordiamo il cosiddetto problema inverso delle tangenti che prevedeva, date alcune proprietà sulla tangente ad una curva, di determinare la curva stessa oppure altre sue proprietà.

Ben presto, per la grande applicabilità ai contesti più disparati, l'utilizzo e la risoluzione di equazioni differenziali entra a far parte di altre discipline della Matematica, come ad esempio la Fisica Matematica, e pure della Fisica.

Va subito precisato che non è sempre possibile esprimere in termini di funzioni elementari la soluzione di un'equazione differenziale: anche le più semplici, in cui ci si riconduce semplicemente ad un problema di integrazione, possono nascondere una difficoltà non banale. L'Analisi Matematica si è quindi concentrata su sviluppare una teoria consistente riguardo l'esistenza, e quando possibile l'unicità, delle soluzioni. In ambito applicativo poi, la risoluzione avviene spesso mediante metodi numerici sviluppati mediante le tecniche costruttive fornite dall'analisi.

Il nostro obiettivo è costruire una teoria sulle equazioni differenziali che garantisca l'esistenza di soluzioni utilizzando il minor numero di ipotesi possibile. Chi ha familiarità con le dispense del professor Marco Degiovanni si ritroverà senza problemi nello stile che abbiamo scelto di seguire.

Il primo capitolo contiene alcuni concetti riguardo gli *spazi metrici totalmente limitati*: nella trattazione non mancheranno esemplificazioni ed approfondimenti. L'intento è arrivare a dimostrare il *Teorema di Ascoli – Arzelà*, che sarà indispensabile per costruire i risultati successivi.

Con il secondo capitolo si entra nel vivo della trattazione andando a dimostrare dapprima il *Teorema di Peano*, che garantisce l'esistenza locale di soluzioni, e poi a

cercare di estendere quanto più possibile l'intervallo di definizione. Non mancheranno richiami ad altri risultati notevoli che sono casi particolari del Teorema di Peano oppure sue generalizzazioni. Analizzeremo infine il problema della rimozione della condizione di continuità.

Giuseppe Peano (1858 – 1932)

Giuseppe Peano nasce in una fattoria nei pressi della città di Cuneo il 27 agosto del 1858.



Il fratello della madre, nel 1870, lo porta con sé a Torino per permettergli di prepararsi agli studi universitari che inizia nel 1876 presso l'università di Torino. Il primo anno è allievo di Enrico D'Ovidio per il corso di Geometria Analitica e Algebra. Al secondo anno segue il corso di Calcolo di Angelo Genocchi ed il corso di Geometria Descrittiva di Giuseppe Bruno. Giunto il momento di scegliere il percorso caratterizzante, Peano opta per la matematica pura ed il 29 settembre 1880 si laurea dottore in matematica.

Entra subito a far parte dello staff dell'università come assistente di D'Ovidio e pubblica i suoi primi articoli già in quell'anno. Negli anni 1881-1882 è poi assistente di Genocchi: durante questo periodo, causa problemi di salute del professore, Peano tiene anche alcune sue lezioni. Proprio grazie a ciò, inizia a scoprire sempre più errori nelle dimostrazioni e nelle definizioni che venivano usate nel corso e nel testo di riferimento. La sua abilità di scovare errori sarà tipica per molti anni.

Nel 1884 Peano riceve la qualifica di professore universitario e continua a tenere numerosi corsi, alcuni dei quali originariamente affidati a Genocchi che sostituirà definitivamente dopo la sua morte.

La grande scoperta di Peano nell'ambito dell'Analisi Matematica, sui cui si basa la teoria che presentiamo, è del 1886: provò infatti che, nella sola ipotesi di continuità di una funzione $f(t, u)$, esistono soluzioni dell'equazione differenziale

$$u' = f(t, u).$$

L'esistenza, con ipotesi però più forti, era già stata dimostrata prima da Cauchy e poi da Lipschitz. Quattro anni più tardi Peano dimostra inoltre che la soluzione, nelle sue ipotesi, non è unica. A sostegno di ciò presenta il celebre problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 3\sqrt[3]{u^2}, \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

il cui integrale generale è divenuto poi noto come *Pennello di Peano*.

Nel 1887 scopre e pubblica un metodo per risolvere sistemi di equazioni differenziali usando approssimazioni successive. L'anno dopo pubblica il libro *Calcolo Geometrico*: questo testo contiene la prima definizione di spazio vettoriale in stile e notazione moderni e perciò si tratta di un traguardo non indifferente per il matematico.

Grazie alla sua abilità di scovare errori e controesempi, Peano è sempre stato molto attivo anche nel campo dei Fondamenti della Matematica: ricordiamo infatti i famosi *Assiomi di Peano*, pubblicati nel 1889, in cui definisce i numeri naturali in termini di insiemi. Inoltre, nel 1891, fonda la *Rivista di matematica*: giornale legato principalmente alla logica ed ai fondamenti della matematica. Anche se il padre della Logica Matematica è Gottlob Frege, il vero fondatore può essere considerato proprio Giuseppe Peano.

La carriera di Peano può essere divisa in due momenti: prima del 1900 c'è stato un periodo di grande originalità e di importanti sviluppi della matematica; gli anni seguenti, dopo aver iniziato e concluso il suo progetto del *Formulario Mathematico* ed aver costruito il linguaggio artificiale *Latino sine flexione*, anche i suoi stessi studenti e colleghi avvertono un cambiamento profondo in negativo.

Muore il 20 aprile 1932 a Torino.

Capitolo 1

Spazi metrici totalmente limitati

1 Notazioni e concetti preliminari

(1.1) Notazione Denotiamo con \mathbb{K} il campo \mathbb{R} dei numeri reali oppure il campo \mathbb{C} dei numeri complessi.

(1.2) Notazione Siano X un insieme non vuoto e (Y, d) uno spazio metrico. Denotiamo con $\mathcal{B}(X; Y)$ l'insieme delle applicazioni limitate da X a valori in Y .

(1.3) Notazione Siano X, Y due spazi metrici, con $X \neq \emptyset$. Denotiamo con $C(X; Y)$ l'insieme delle applicazioni continue da X a valori in Y .

(1.4) Notazione Siano X, Y due spazi metrici, con $X \neq \emptyset$. Denotiamo con $C_b(X; Y)$ l'insieme delle applicazioni continue e limitate da X a valori in Y .

(1.5) Definizione Sia X uno spazio vettoriale su \mathbb{K} . Diciamo che un'applicazione

$$\mathcal{P} : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$$

è un prodotto scalare su X , se per ogni x, y, z in X e per ogni λ in \mathbb{K} si ha

(a) $\mathcal{P}(\lambda x + y, z) = \lambda \mathcal{P}(x, z) + \mathcal{P}(y, z);$

(b) $\mathcal{P}(y, x) = \overline{\mathcal{P}(x, y)}$ (in particolare $\mathcal{P}(x, x) \in \mathbb{R}$);

(c) $\mathcal{P}(x, x) \geq 0;$

(d) $\mathcal{P}(x, x) = 0 \iff x = 0.$

2 Definizione e prime proprietà

Introduciamo ora alcune nozioni sugli spazi metrici totalmente limitati tratte da [AAM]. Il nostro obiettivo è fissare alcuni concetti fondamentali che sono necessari per dimostrare il Teorema di Ascoli – Arzelà.

(2.1) Definizione *Uno spazio metrico X si dice totalmente limitato, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento finito di X costituito da sottoinsiemi di diametro minore o uguale ad ε .*

(2.2) Proposizione *Siano X_1 e X_2 due spazi metrici isometrici. Allora X_1 è totalmente limitato se e solo se X_2 è totalmente limitato.*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$. Sia $f : X_1 \rightarrow X_2$ un'isometria. Se X_1 esiste

$$\{E_1, \dots, E_k\}$$

un ricoprimento di X_1 tale che $\text{diam}(E_h) \leq \varepsilon$ per ogni $h = 1, \dots, k$. Essendo f un'isometria,

$$\text{diam}(E_h) = \text{diam}(f(E_h)),$$

allora

$$\{f(E_1), \dots, f(E_k)\}$$

è un ricoprimento di X_2 tale che $\text{diam}(f(E_h)) \leq \varepsilon$ per ogni $h = 1, \dots, k$. Possiamo quindi affermare che X_2 è totalmente limitato.

Essendo le ipotesi simmetriche rispetto a X_1 e X_2 , concludiamo che la totale limitatezza di X_2 implica quella di X_1 , da cui la tesi. ■

Il seguente teorema mostra che la totale limitatezza è condizione sufficiente alla limitatezza. In generale quindi uno spazio metrico limitato è uno spazio più generale di uno totalmente limitato.

(2.3) Teorema *Sia X uno spazio metrico totalmente limitato. Allora X è limitato.*

Dimostrazione. Si veda [AAM, Capitolo 3, Teorema (5.3)]. ■

Presentiamo i principali risultati di stabilità della classe di spazi totalmente limitati.

(2.4) Teorema *Siano X_1, \dots, X_n spazi metrici totalmente limitati. Allora il prodotto cartesiano*

$$X = \prod_{j=1}^n X_j$$

è totalmente limitato.

Dimostrazione. Si veda [AAM, Capitolo 3, Teorema (5.4)]. ■

(2.5) Teorema *Sia X uno spazio metrico totalmente limitato e sia Y un sottoinsieme di X . Allora Y (munito della metrica subordinata) è totalmente limitato.*

Dimostrazione. Si veda [AAM, Capitolo 3, Teorema (5.5)]. ■

(2.6) Teorema *Sia X uno spazio metrico e sia $Y \subseteq X$. Allora Y è totalmente limitato se e solo se \overline{Y} è totalmente limitato.*

Dimostrazione. Si veda [AAM, Capitolo 3, Teorema (5.6)]. ■

Il seguente risultato è di importanza cruciale per il seguito.

(2.7) Teorema *Sia X uno spazio metrico. Allora X è compatto se e solo se X è completo e totalmente limitato.*

Dimostrazione. Si veda [AAM, Capitolo 3, Teorema (5.7)]. ■

3 Esempi

Interessante è notare, innanzitutto, che la totale limitatezza non è una proprietà topologica: per capire ciò esaminiamo un controesempio tratto da [Sernes].

(3.1) Esempio *Si consideri l'insieme \mathbb{R} , munito della metrica euclidea, e l'intervallo $]0, 1[\subseteq \mathbb{R}$. Essi sono omeomorfi tramite l'omeomorfismo $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ tale che*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - \frac{1}{2}}{x} & \text{se } 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{x - \frac{1}{2}}{1 - x} & \text{se } \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$$

Sia ora $\varepsilon > 0$. Esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$ sia una suddivisione di $[0, 1]$ tale che

$$\forall j = 1, \dots, n : t_j - t_{j-1} = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Risulta che

$$]0, 1[\subseteq]t_0, t_1] \cup \left(\bigcup_{j=2}^{n-1} [t_{j-1}, t_j] \right) \cup [t_{n-1}, t_n[$$

ed è chiaro che $\text{diam}([t_{j-1}, t_j]) \leq \varepsilon$, quindi $]0, 1[$ è totalmente limitato. Al contrario \mathbb{R} è non totalmente limitato, in quanto non è limitato. Perciò la totale limitatezza non è una proprietà topologica.

In questo senso, assume una rilevanza speciale il Teorema (2.7) in quanto permette di caratterizzare una proprietà topologica, la compattezza, con due proprietà non topologiche.

Possiamo facilmente costruire esempi di spazi metrici totalmente limitati se ci mettiamo in uno spazio normato di dimensione finita, come mostra il seguente risultato.

(3.2) Teorema *Sia X uno spazio normato su \mathbb{K} di dimensione finita e sia Y un sottoinsieme di X . Allora Y è totalmente limitato se e solo se Y è limitato.*

Dimostrazione. Si veda [AAM, Capitolo 3, Teorema (5.9)]. ■

Quindi, nell'ambito degli spazi normati di dimensione finita, la nozione di totale limitatezza è equivalente a quella di limitatezza. Più in generale questa relazione si perde, tipicamente in spazi funzionali non vale.

(3.3) Osservazione *A ben vedere, il Teorema (3.2) semplifica l'Esempio (3.1). Essendo in dimensione finita dal fatto che $]0, 1[$ è limitato segue che è totalmente limitato.*

Forniamo un esempio di uno spazio metrico limitato ma non totalmente limitato. Per quanto detto, l'ambiente sarà uno spazio funzionale dotato di metrica. In questo contesto sarà quindi fondamentale la Disuguaglianza di Young, di cui riportiamo una dimostrazione adattata da [Fusco].

(3.4) Proposizione (Disuguaglianza di Young) *Siano $x, y \in [0, +\infty[$. Dati $p, q \in]1, +\infty[$ tali che*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Allora

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

In particolare, l'uguaglianza sussiste se e solo se $x^p = y^q$.

Dimostrazione. Se $x = 0$ oppure $y = 0$, la disuguaglianza è vera. Supponiamo allora $x, y \neq 0$ e consideriamo, per ogni $y \in]0, +\infty[$, l'applicazione $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy.$$

Risulta che $f(x)$ è derivabile per composizione e

$$f'(x) = x^{p-1} - y,$$

perciò $x = y^{\frac{1}{p-1}}$ è l'unico punto di minimo per f . Possiamo affermare quindi che

$$\begin{aligned} \forall x, y \in]0, +\infty[: f(x) &\geq f\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right) = \\ &= \frac{\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right)^p}{p} + \frac{y^q}{q} - y^{\frac{1}{p-1}}y = \\ &= \frac{1}{p}y^{\frac{p}{p-1}} + \left(1 - \frac{1}{p}\right)y^{\frac{p}{p-1}} - y^{\frac{1}{p-1}+1} = \\ &= y^{\frac{p}{p-1}} - y^{\frac{p-1+1}{p-1}} = 0 \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy \geq 0$$

ovvero

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

In particolare l'uguaglianza si realizza in corrispondenza del punto di minimo

$$x = y^{\frac{1}{p-1}} = y^{\frac{q}{p}}$$

ovvero se e solo se $x^p = y^q$. ■

Il seguente esempio è tratto da [Sernesi, Capitolo 3, Sezione 10, Esercizio 6].

(3.5) Esempio Consideriamo l'insieme delle successioni reali quadrato sommabili

$$l_2 = \left\{ (x_h) : x_h \in \mathbb{R} \text{ e } \sum_{h=0}^{\infty} |x_h|^2 < \infty \right\}.$$

Definiamo $\mathcal{P} : l_2 \times l_2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\mathcal{P}((x_h), (y_h)) = \sum_{h=0}^{\infty} x_h y_h.$$

Siano $(x_h), (y_h) \in l_2$. Innanzitutto, per la Disuguaglianza di Young,

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^{\infty} |x_h y_h| &= \sum_{h=0}^{\infty} |x_h| |y_h| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\sum_{h=0}^{\infty} x_h^2 + \sum_{h=0}^{\infty} y_h^2 \right) < +\infty \end{aligned}$$

per cui la serie

$$\sum_{h=0}^{\infty} x_h y_h$$

è assolutamente convergente, quindi convergente e l'applicazione \mathcal{P} risulta ben definita.

Gli assiomi (b), (c), (d) di prodotto scalare sono verificati per costruzione. Siano ora $(x_h), (y_h), (z_h) \in l_2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Risulta, per linearità,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\lambda(x_h) + (y_h), (z_h)) &= \sum_{h=0}^{\infty} (\lambda x_h + y_h) z_h = \\ &= \lambda \sum_{h=0}^{\infty} x_h z_h + \sum_{h=0}^{\infty} y_h z_h = \\ &= \lambda \mathcal{P}((x_h), (z_h)) + \mathcal{P}((y_h), (z_h)) \end{aligned}$$

per cui \mathcal{P} è un prodotto scalare su l_2 .

In particolare, \mathcal{P} induce su l_2 la metrica $d : l_2 \times l_2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$d((x_h), (y_h)) = \sqrt{\sum_{h=0}^{\infty} (x_h - y_h)^2}.$$

Pertanto (l_2, d) risulta essere uno spazio metrico.

Consideriamo ora il sottoinsieme di l_2

$$\partial B(0, 1) = \{(x_h) \in l_2 : d((x_h), 0) = 1\}.$$

Per ogni $(x_h), (y_h) \in \partial B(0, 1)$ risulta

$$d((x_h), (y_h)) \leq d((x_h), 0) + d((y_h), 0) = 2 < +\infty$$

allora $\text{diam}(\partial B(0, 1)) < +\infty$, da cui $\partial B(0, 1)$ è limitato. Ora, $\partial B(0, 1)$, munito della metrica indotta, è uno spazio metrico.

Consideriamo le successioni $(x_h)_i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definite da

$$x_h = \begin{cases} 1 & \text{se } h = i, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

al variare di $i \in \mathbb{N}$. Per ogni $i \in \mathbb{N}$, $(x_h)_i \in \partial B(0, 1)$. Tuttavia, per ogni $i, j \in \mathbb{N}$ tali che $i \neq j$, risulta

$$d((x_h)_i, (x_h)_j) = \sqrt{2}.$$

Per $\varepsilon = 1$, non è quindi possibile costruire un ricoprimento finito di $\partial B(0, 1)$ costituito da sottoinsiemi di diametro al più ε . Pertanto $\partial B(0, 1)$ risulta essere un esempio di spazio metrico limitato ma non totalmente limitato.

4 Il Teorema di Ascoli – Arzelà

Esistono diversi modi per dimostrare il Teorema di Ascoli – Arzelà. Abbiamo scelto di presentare una versione che sfrutta la totale limitatezza perché in questo modo si può arrivare ad un risultato addirittura più generale, come si può vedere dal Teorema (4.3).

(4.1) Teorema Sia X uno spazio metrico completo e sia (x_h) una successione in X . Supponiamo che l'immagine di (x_h) , ovvero

$$\{x_h : h \in \mathbb{N}\},$$

sia totalmente limitata.

Allora (x_h) ammette una sottosuccessione convergente in X .

Dimostrazione. Si veda [AAM, Capitolo 3, Teorema (5.8)]. ■

(4.2) Definizione Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) due spazi metrici. Un insieme di applicazioni $\mathcal{F} \subseteq C(X_1; X_2)$ si dice equi-uniformemente continuo, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall f \in \mathcal{F}, \forall x, y \in X_1 : d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Muniti di questa importante definizione, possiamo ora enunciare il seguente risultato.

(4.3) Teorema *Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) due spazi metrici totalmente limitati e sia \mathcal{F} un sottoinsieme equi-uniformemente continuo di $C_b(X_1; X_2)$.*

Allora (\mathcal{F}, d_∞) è totalmente limitato.

Dimostrazione. Si veda [AAM, Capitolo 3, Teorema (5.13)]. ■

Il Teorema di Ascoli-Arzelà risulta facilmente riconducibile al risultato precedente, come possiamo vedere nella seguente dimostrazione ripresa da [AAM].

(4.4) Corollario (Teorema di Ascoli–Arzelà) *Siano X uno spazio metrico compatto e non vuoto e (f_h) una successione limitata in $(C(X; \mathbb{K}^n), \|\cdot\|_\infty)$ con immagine $\{f_h : h \in \mathbb{N}\}$ equi-uniformemente continua.*

Allora (f_h) ammette una sottosuccessione convergente in $(C(X; \mathbb{K}^n), \|\cdot\|_\infty)$.

Dimostrazione. Essendo X compatto, ogni applicazione $f \in C(X; \mathbb{K}^n)$ è limitata per il Teorema di Weierstrass. Pertanto $C(X; \mathbb{K}^n) = C_b(X; \mathbb{K}^n)$.

Siccome (f_h) è limitata, per definizione, esiste $R > 0$ tale che

$$\|f_h\|_\infty \leq R$$

per ogni $h \in \mathbb{N}$. Possiamo quindi affermare che

$$f_h(x) \in \overline{B(0, R)}$$

per ogni $h \in \mathbb{N}$ e $x \in X$.

Essendo $\overline{B(0, R)} \subseteq \mathbb{K}^n$, segue che possiamo anche vedere (f_h) come una successione in $(C(X; \overline{B(0, R)}), d_\infty)$.

Per il Teorema (2.7), X risulta essere uno spazio metrico totalmente limitato in quanto compatto. Inoltre \mathbb{K}^n è uno spazio normato di dimensione finita, pertanto $\overline{B(0, R)}$, essendo limitato, per il Teorema (3.2) risulta totalmente limitato. L'insieme $\{f_h : h \in \mathbb{N}\}$ risulta quindi equi-uniformemente continuo in $(C(X; \overline{B(0, R)}), d_\infty)$, da cui, per il Teorema (4.3), è totalmente limitato in $(C(X; \overline{B(0, R)}), d_\infty)$.

Siccome $\|\cdot\|_\infty$ induce d_∞ ,

$$\{f_h : h \in \mathbb{N}\}$$

è totalmente limitato in $(C(X; \mathbb{K}^n), \|\cdot\|_\infty)$.

Ora, \mathbb{K}^n è completo, quindi $\mathcal{B}(X; \mathbb{K}^n)$ è completo. Ma $C_b(X; \mathbb{K}^n)$ è chiuso in $\mathcal{B}(X; \mathbb{K}^n)$, allora $(C(X; \mathbb{K}^n), \|\cdot\|_\infty)$ è completo. La tesi discende allora dal Teorema (4.1). ■

Come già accennato, è possibile dimostrare il Teorema di Ascoli–Arzelà anche senza utilizzare il concetto di spazio metrico totalmente limitato. La dimostrazione è meno elegante e non permette la generalizzazione che abbiamo mostrato: se ne può vedere una versione in [Fusco, Capitolo 1, Sezione 10].

Capitolo 2

Equazioni differenziali ordinarie

1 Definizione e prime proprietà

Un'equazione differenziale ordinaria è un particolare tipo di equazione, in cui l'incognita è una funzione e compare nell'espressione analitica insieme alle sue derivate di ordine qualsiasi. In particolare, le equazioni differenziali del tipo

$$u' = f(t, u)$$

si dicono *del primo ordine in forma normale*.

(1.1) Definizione Siano $E \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione, I un intervallo in \mathbb{R} ed $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione.

Diciamo che u è una soluzione dell'equazione differenziale

$$u' = f(t, u),$$

se u è derivabile, $(t, u(t)) \in E$ per ogni $t \in I$ e si ha

$$\forall t \in I : u'(t) = f(t, u(t)).$$

Se poi $(t_0, u_0) \in E$, diciamo che u è una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u), \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

se si ha anche $t_0 \in I$ e $u(t_0) = u_0$.

Il seguente Lemma ci permette di definire la forma integrale di un'equazione differenziale. Passare alla forma integrale è una procedura di estrema importanza nella dimostrazione della maggior parte dei risultati sulle equazioni differenziali ordinarie ed anche noi nella trattazione ne faremo largo uso.

(1.2) Lemma *Siano $E \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione continua, I un intervallo non vuoto in \mathbb{R} ed $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione tale che $(t, u(t)) \in E$ per ogni $t \in I$.*

Allora sono fatti equivalenti:

(a) *u risolve l'equazione differenziale*

$$u' = f(t, u);$$

(b) *u è continua e per ogni $t_0 \in I$ si ha*

$$\forall t \in I : u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau, u(\tau)) d\tau;$$

(c) *u è continua ed esiste $t_0 \in I$ tale che*

$$\forall t \in I : u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau, u(\tau)) d\tau.$$

Dimostrazione. Si veda [AAM, Capitolo 5, Lemma (1.4)]. ■

2 Esistenza locale

Prima di tutto indaghiamo l'esistenza di soluzioni in un intorno della condizione iniziale. I primi risultati sono parziali e si occupano di garantire l'esistenza di soluzioni in un intorno destro ed in un intorno sinistro della componente t_0 del valore iniziale del problema di Cauchy: l'idea è costruire una successione di funzioni da cui, mediante il Teorema di Ascoli – Arzelà, estrarre una sottosuccessione che converge alla soluzione cercata scritta in forma integrale. La dimostrazione del seguente risultato è adattata da [Fusco] in base alle definizioni date nel capitolo precedente ed alla nostra versione del Teorema (4.4).

(2.1) Teorema Siano $(t_0, u_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $b, r > 0$ e

$$f : [t_0, t_0 + b] \times \overline{B(u_0, r)} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

una applicazione continua verificante la seguente condizione

$$\max \left\{ |f(\tau, \xi)| : \tau \in [t_0, t_0 + b], \xi \in \overline{B(u_0, r)} \right\} \leq \frac{r}{b}.$$

Allora esiste

$$u : [t_0, t_0 + b] \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u), \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Dimostrazione. Innanzitutto, sia

$$M = \max \left\{ |f(\tau, \xi)| : \tau \in [t_0, t_0 + b], \xi \in \overline{B(u_0, r)} \right\}.$$

Essendo f continua, definita su un compatto, ed il modulo continuo, per il Teorema di Weierstrass M risulta ben definito. Siano $h \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e

$$t_0 = s_0 < \cdots < s_h = t_0 + b$$

una suddivisione di $[t_0, t_0 + b]$ tale che

$$\forall j = 1, \dots, h : \quad s_j - s_{j-1} = \frac{b}{h}.$$

Essendo $b > 0$, l'intervallo $[t_0, t_0 + b]$ è non vuoto. Inoltre $[t_0, t_0 + b]$ è anche compatto perché chiuso e limitato in \mathbb{R} che ha dimensione finita. Definiamo ricorsivamente una successione di funzioni (u_h) in $C([-\infty, t_0 + b]; \mathbb{R}^n)$ ponendo per ogni $i = 1, \dots, h$

$$(2.2) \quad \forall t < t_0 : \quad u_h(t) = u_0,$$

$$(2.3) \quad \forall t \in \left[t_0 + \frac{(i-1)b}{h}, t_0 + \frac{ib}{h} \right] : \quad u_h(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f \left(\tau, u_h \left(\tau - \frac{b}{h} \right) \right) d\tau$$

Dimostriamo che la successione (u_h) è ben definita, ovvero che l'integrale della (2.3) è ben definito. Per fare ciò dimostriamo per induzione su i che

$$\forall i = 1, \dots, h : \quad t \in \left[t_0 + \frac{(i-2)b}{h}, t_0 + \frac{(i-1)b}{h} \right] \implies u_h(t) \in \overline{B(u_0, r)}.$$

Il caso $i = 1$ è una diretta conseguenza della (2.2). Supponiamo ora che il fatto sia vero per un generico i , allora

$$\forall t \in \left[t_0 + \frac{(i-2)b}{h}, t_0 + \frac{(i-1)b}{h} \right] : \quad (t, u_h(t)) \in [t_0, t_0 + b] \times \overline{B(u_0, r)}.$$

Siccome M è il massimo dell'insieme

$$\left\{ |f(\tau, \xi)| : \tau \in [t_0, t_0 + b], \xi \in \overline{B(u_0, r)} \right\},$$

risulta

$$\forall t \in \left[t_0 + \frac{(i-2)b}{h}, t_0 + \frac{(i-1)b}{h} \right] : \quad |f(t, u_h(t))| \leq M.$$

Sia $t \in \left[t_0 + \frac{(i-1)b}{h}, t_0 + \frac{ib}{h} \right]$, risulta

$$\begin{aligned} |u_h(t) - u_0| &= \left| \int_{t_0}^t f \left(\tau, u_h \left(\tau - \frac{b}{h} \right) \right) d\tau \right| \leq \\ (2.4) \quad &\leq \left| \int_{t_0}^t \left| f \left(\tau, u_h \left(\tau - \frac{b}{h} \right) \right) \right| d\tau \right| \leq \\ &\leq M|t - t_0| \leq Mb \leq r. \end{aligned}$$

L'integrando della (2.3) risulta pertanto ben definito e quindi è ben definita la successione (u_h) . Per l'additività dell'integrale, possiamo anche pensare ad una definizione globale di u_h in $[t_0, t_0 + b]$

$$(2.5) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + b] : \quad u_h(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f \left(\tau, u_h \left(\tau - \frac{b}{h} \right) \right) d\tau.$$

Siano ora $t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + b]$. Allora, analogamente a quanto fatto in (2.4),

$$|u_h(t_2) - u_h(t_1)| \leq M|t_2 - t_1| \leq Mb \leq r.$$

Presi $h, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, per ogni $t \in [t_0, t_0 + b]$

$$|u_h(t) - u_k(t)| \leq |u_h(t) - u_0| + |u_k(t) - u_0| \leq r + r = 2r$$

perciò

$$\|u_h - u_k\|_\infty \leq 2r$$

quindi l'insieme immagine della successione (u_h) è limitato, ovvero la successione (u_h) è limitata. Sia ora $\varepsilon > 0$. Preso $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, per ogni $h \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, per ogni $t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + b]$ tali che $|t_2 - t_1| < \delta$, risulta

$$|u_h(t_2) - u_h(t_1)| \leq M|t_2 - t_1| < M\delta = \varepsilon,$$

ovvero l'immagine della successione (u_h) è equi-uniformemente continua.

Per il Teorema di Ascoli–Arzelà, esiste (u_{h_k}) sottosuccessione convergente a qualche u in $C([t_0, t_0 + b]; \mathbb{R}^n)$. Passando al limite nella (2.5), otteniamo

$$\forall t \in [t_0, t_0 + b] : \quad u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, u(\tau)) d\tau.$$

La tesi discende dunque dal Lemma (1.2). ■

(2.6) Teorema Siano $(t_0, u_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $a, r > 0$ e

$$f : [t_0 - a, t_0] \times \overline{B(u_0, r)} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

un'applicazione continua verificante la seguente condizione

$$\max \left\{ |f(\tau, \xi)| : \tau \in [t_0 - a, t_0], \xi \in \overline{B(u_0, r)} \right\} \leq \frac{r}{a}.$$

Allora esiste

$$u : [t_0 - a, t_0] \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u), \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Dimostrazione. Si tratta di una semplice variante del teorema precedente. ■

Possiamo combinare, in modo elementare, i due teoremi precedenti per ottenere l'esistenza di soluzioni in tutto l'intervallo $[t_0 - a, t_0 + b]$, ovvero l'esistenza locale in un intorno della condizione iniziale. L'idea è andare a incollare i due pezzi di soluzione forniti dai teoremi precedenti.

(2.7) Teorema (di Peano) *Siano $(t_0, u_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $a, b, r > 0$ e*

$$f : [t_0 - a, t_0 + b] \times \overline{B(u_0, r)} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

una applicazione continua verificante le seguenti condizioni:

(a) *risulta*

$$\max \left\{ |f(\tau, \xi)| : \tau \in [t_0 - a, t_0], \xi \in \overline{B(u_0, r)} \right\} \leq \frac{r}{a},$$

(b) *risulta*

$$\max \left\{ |f(\tau, \xi)| : \tau \in [t_0, t_0 + b], \xi \in \overline{B(u_0, r)} \right\} \leq \frac{r}{b}.$$

Allora esiste

$$u : [t_0 - a, t_0 + b] \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u), \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Dimostrazione. Per il Teorema (2.6), esiste $u_1 : [t_0 - a, t_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u), \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Inoltre, per il Teorema (2.1), esiste $u_2 : [t_0, t_0 + b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u), \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Per il Lemma (1.2), possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\forall t \in [t_0 - a, t_0] : u_1(t) &= u_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, u_1(\tau)) d\tau, \\ \forall t \in [t_0, t_0 + b] : u_2(t) &= u_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, u_2(\tau)) d\tau.\end{aligned}$$

Se definiamo l'applicazione $u : [t_0 - a, t_0 + b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ponendo

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) & \text{se } t \in [t_0 - a, t_0], \\ u_2(t) & \text{se } t \in [t_0, t_0 + b], \end{cases}$$

risulta

$$\forall t \in [t_0 - a, t_0 + b] : u_2(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, u(\tau)) d\tau.$$

La tesi discende dal Lemma (1.2). ■

3 Esistenza globale

La tecnica dimostrativa del teorema di Peano può essere generalizzata per ottenere innanzitutto il seguente risultato.

(3.1) Lemma (di incollamento) *Siano $E \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione continua ed $u_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $u_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ due soluzioni dell'equazione differenziale*

$$u' = f(t, u).$$

Supponiamo che esista $\bar{t} \in I_1 \cap I_2$ tale che $u_1(\bar{t}) = u_2(\bar{t})$, che per ogni $t \in I_2$ si abbia $\inf I_1 \leq t$ e che I_2 non sia contenuto in I_1 .

Allora, posto

$$J = [\inf I_2, \bar{t}] \quad \text{e} \quad K = [\bar{t}, \sup I_1],$$

l'applicazione $u : I_1 \cup I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita da

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) & \text{se } t \in (I_1 \setminus I_2) \cup J, \\ u_2(t) & \text{se } t \in K \cup (I_2 \setminus I_1), \end{cases}$$

è una soluzione della stessa equazione differenziale.

Dimostrazione. Per semplici considerazioni insiemistiche, possiamo dire che

$$I_1 \cup I_2 = \left[(I_1 \setminus I_2) \cup J \right] \cup \left[K \cup (I_2 \setminus I_1) \right].$$

Successivamente, per il Lemma (1.2), risulta

$$\begin{aligned} \forall t \in I_1 : \quad u_1(t) &= u_1(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^t f(\tau, u_1(\tau)) d\tau, \\ \forall t \in I_2 : \quad u_2(t) &= u_2(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^t f(\tau, u_2(\tau)) d\tau, \end{aligned}$$

e quindi, a maggior ragione,

$$\begin{aligned} \forall t \in (I_1 \setminus I_2) \cup J : \quad u_1(t) &= u_1(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^t f(\tau, u_1(\tau)) d\tau, \\ \forall t \in K \cup (I_2 \setminus I_1) : \quad u_2(t) &= u_2(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^t f(\tau, u_2(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

L'applicazione u risulta pertanto continua in $I_1 \cup I_2$. Inoltre, per costruzione, risulta che per ogni $t \in I_1 \cup I_2$

$$u(t) = u(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^t f(\tau, u(\tau)) d\tau.$$

Allora la tesi discende dal Lemma (1.2). ■

Il lemma precedente ci consente quindi, date due soluzioni che hanno un punto in comune, di costruirne una unica ampliata.

(3.2) Osservazione *Le ipotesi del Lemma (3.1) non sono le più generali possibili ma permettono di scrivere in modo immediato la soluzione prolungata: qualsiasi altra possibile situazione, comunque, può essere ricondotta a questa scambiando i due intervalli o sostituendoli con rispettivi sotto-intervalli che rispettino le ipotesi date.*

(3.3) Definizione *Siano $E \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione, I un intervallo in \mathbb{R} ed $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione. Diciamo che u è una soluzione massimale dell'equazione differenziale*

$$(3.4) \quad u' = f(t, u)$$

se u è soluzione di (3.4) e se non esiste nessuna $\tilde{u} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ soluzione di (3.4) con $I \subseteq \tilde{I}$, $I \neq \tilde{I}$ ed $\tilde{u} = u$ su I .

Il nostro obiettivo è ora studiare l'esistenza di soluzioni massimali nella sola ipotesi di continuità di f . Per fare ciò richiamiamo un fondamentale risultato di Teoria degli Insiemi. A livello fondamentale, per il prosieguo, è necessario assumere per vero l'Assioma della Scelta.

(3.5) Lemma (di Zorn) *Sia (X, \leq) un insieme ordinato. Si supponga che ogni catena in X ammetta un maggiorante.*

Allora X ammette un elemento massimale.

Dimostrazione. Si veda [LTI, Capitolo 1, Corollario (4.15)]. ■

Mediante il Lemma di Zorn, riusciamo a garantire l'esistenza di soluzioni massimali nella sola ipotesi di continuità della funzione f . Esiste anche una versione del seguente teorema che non fa uso del Lemma di Zorn. La dimostrazione qui proposta, adattata da [Baiti], è quella che preferiamo.

(3.6) Teorema *Siano J un intervallo in \mathbb{R} , A un aperto in $J \times \mathbb{R}^n$ ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione continua.*

Allora, per ogni $(t_0, u_0) \in A$, esiste una soluzione massimale $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dell'equazione differenziale

$$(3.7) \quad u' = f(t, u)$$

tale che $u(t_0) = u_0$.

Dimostrazione. Per il Teorema di Peano, esiste $\tilde{u} : I_{\tilde{u}} \rightarrow \mathbb{R}^n$, soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u), \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

In particolare, \tilde{u} è soluzione di (3.7). Consideriamo ora l'insieme

$$\mathcal{K} = \{(u, I_u) : u : I_u \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ è soluzione di (3.7), } I_{\tilde{u}} \subseteq I_u \text{ e } u = \tilde{u} \text{ su } I_{\tilde{u}}\},$$

ben definito grazie al Lemma (3.1). Siccome

$$(\tilde{u}, I_{\tilde{u}}) \in \mathcal{K},$$

\mathcal{K} è non vuoto. Poniamo poi, per definizione, $(u, I_u) \leq (v, I_v)$ ogniquale volta

$$\begin{cases} I_u \subseteq I_v, \\ u = v \text{ su } I_u. \end{cases}$$

Siccome \leq è un sottoinsieme di $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$, allora è una relazione. Sia $(u, I_u) \in \mathcal{K}$. Risulta $I_u \subseteq I_u$ ed $u = u$ su I_u , allora la relazione è riflessiva. Siano ora $(u, I_u), (v, I_v) \in \mathcal{K}$ tali che $(u, I_u) \leq (v, I_v)$ e $(v, I_v) \leq (u, I_u)$. Risulta

$$\begin{cases} I_u \subseteq I_v, \\ u = v \text{ su } I_u, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} I_v \subseteq I_u, \\ v = u \text{ su } I_v. \end{cases}$$

In particolare otteniamo

$$\begin{cases} I_u = I_v, \\ u = v \text{ su } I_u = I_v, \end{cases}$$

ovvero $(u, I_u) = (v, I_v)$, da cui deduciamo che la relazione è antisimmetrica. Infine consideriamo $(u, I_u), (v, I_v), (w, I_w) \in \mathcal{K}$ tali che $(u, I_u) \leq (v, I_v)$ e $(v, I_v) \leq (w, I_w)$. Risulta

$$\begin{cases} I_u \subseteq I_v, \\ u = v \text{ su } I_u, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} I_v \subseteq I_w, \\ v = w \text{ su } I_v. \end{cases}$$

In particolare otteniamo $I_u \subseteq I_v \subseteq I_w$, da cui $I_u \subseteq I_w$, per transitività dell'inclusione, e $u = w$ su I_u . La relazione è perciò transitiva e (\mathcal{K}, \leq) è un insieme ordinato.

Sia ora

$$\{(u_j, I_{u_j}) : j \in J\}$$

una catena non vuota in \mathcal{K} . Consideriamo

$$I_z = \bigcup_{j \in J} I_{u_j}$$

e definiamo un'applicazione $z : I_z \rightarrow \mathbb{R}^n$ ponendo

$$z(t) = u_j(t), \quad \text{se } t \in I_{u_j}.$$

Se $t \in I_{u_1} \cap I_{u_2}$, essendo la catena totalmente ordinata, possiamo supporre, senza perdita di generalità,

$$I_{u_1} \subseteq I_{u_2} \text{ e } u_1 = u_2 \text{ su } I_{u_1},$$

allora z è ben definita, è soluzione di (3.7), $I_{\tilde{u}} \subseteq I_z$ e $z = \tilde{u}$ su $I_{\tilde{u}}$. Perciò (z, I_z) è un maggiorante per la catena.

Allora per il Lemma di Zorn, esiste $(u, I) \in \mathcal{K}$, elemento massimale. Supponendo, per assurdo, che esista un'altra soluzione $\bar{u} : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $I \subseteq \bar{I}$, $I \neq \bar{I}$ ed $\bar{u} = u$ su I , verrebbe violata la massimalità di (u, I) in \mathcal{K} , allora $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ è soluzione massimale di (3.7). ■

(3.8) Osservazione *Il teorema precedente non parla di unicità della soluzione massimale. Con le nostre ipotesi, infatti, una stessa soluzione del problema di Cauchy può essere prolungata ad una massimale in più modi diversi ed addirittura soluzioni massimali diverse potrebbero avere intervalli massimali diversi. La motivazione di ciò sta nel fatto che (\mathcal{K}, \leq) non è un insieme totalmente ordinato, quindi può ammettere elementi massimali distinti e non confrontabili tra loro.*

Le principali proprietà delle soluzioni massimali sono racchiuse nel seguente teorema, la cui dimostrazione è adattata da [AAM].

(3.9) Teorema *Siano J un intervallo in \mathbb{R} , A un aperto in $J \times \mathbb{R}^n$ ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione continua. Sia $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una soluzione massimale dell'equazione differenziale*

$$u' = f(t, u).$$

Allora valgono i seguenti fatti:

- (a) *l'intervallo I è aperto in J ;*
- (b) *per ogni compatto K incluso in A esiste $s \in I$ tale che $(t, u(t)) \notin K$ per ogni $t \in I \cap]s, +\infty[$;*
- (c) *per ogni compatto K incluso in A esiste $s \in I$ tale che $(t, u(t)) \notin K$ per ogni $t \in I \cap]-\infty, s[$.*

Dimostrazione.

- (a) Sia $\sigma \in I$ e siano $a, b, r > 0$ relativi a $(\sigma, u(\sigma))$ tali che

$$\begin{aligned} \max \left\{ |f(\tau, \xi)| : \tau \in [\sigma - a, \sigma], \xi \in \overline{B(u(\sigma), r)} \right\} &\leq \frac{r}{a}, \\ \max \left\{ |f(\tau, \xi)| : \tau \in [\sigma, \sigma + b], \xi \in \overline{B(u(\sigma), r)} \right\} &\leq \frac{r}{b}. \end{aligned}$$

Allora, per il Teorema di Peano, esiste una soluzione $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} v' = f(t, v), \\ v(\sigma) = u(\sigma). \end{cases}$$

Supponiamo ora, per assurdo, che $[a, b] \not\subseteq I$. Allora per il Lemma (3.1), posso definire una nuova soluzione $\tilde{u} : I \cup [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita in un intervallo che include I e tale che $\tilde{u} = u$ su I . Ciò è assurdo perché viola la massimalità di u .

(b) Consideriamo un compatto K in A e supponiamo per assurdo che per ogni $s \in I$ esista $t \in I \cap]s, +\infty[$ tale che $(t, u(t)) \in K$. Allora $\sup I \notin I$ ed, essendo $\sup I$ aderente ad I , esiste una successione (s_h) in I tendente a $\sup I$. Sia $t_h \in I$ tale che

$$\forall h \in \mathbb{N} : \quad t_h > s_h.$$

Allora, per il Teorema del confronto, la successione (t_h) tende a $\sup I$ e $(t_h, u(t_h)) \in K$. Essendo K compatto, esiste $(t_{h_k}, u(t_{h_k}))$ sottosuccessione convergente a $(\bar{t}, x) \in K$. Per l'unicità del limite, deve essere $\bar{t} = \sup I$. Siano $a, b, r > 0$ relativi a (\bar{t}, x) tali che

$$\begin{aligned} \max \left\{ |f(\tau, \xi)| : \tau \in [\bar{t} - a, \bar{t}] , \xi \in \overline{B(x, r)} \right\} &\leq \frac{r}{a}, \\ \max \left\{ |f(\tau, \xi)| : \tau \in [\bar{t}, \bar{t} + b] , \xi \in \overline{B(x, r)} \right\} &\leq \frac{r}{b}, \end{aligned}$$

e $k \in \mathbb{N}$ tale che $(t_{h_k}, u(t_{h_k})) \in [a, b] \times \overline{B(x, r)}$. Allora, per il Teorema di Peano, esiste una soluzione $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} v' = f(t, v), \\ v(t_{h_k}) = u(t_{h_k}). \end{cases}$$

Se, per assurdo, $[a, b] \not\subseteq I$, allora, sempre per il Lemma (3.1), possiamo definire una nuova soluzione $\tilde{u} : I \cup [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita in un intervallo che include I e tale che $\tilde{u} = u$ su I . Ciò è assurdo perché viola la massimalità di u . Allora, deve essere $[a, b] \subseteq I$, il che è assurdo, perché $\bar{t} \in [a, b]$, da cui $\bar{t} \in I$.

(c) Si tratta di una semplice variante della (b). ■

Concludiamo la sezione con un criterio di esistenza globale per soluzioni massimali: non abbiamo risultati di unicità nelle nostre ipotesi. La dimostrazione è adattata da [AAM] e sfrutta il Lemma di Gronwall.

(3.10) Teorema Siano J un intervallo in \mathbb{R} ed $f : J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione continua. Supponiamo che per ogni $[\alpha, \beta] \subseteq J$ esista $P \in [0, +\infty[$ tale che

$$\forall (t, x) \in [\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^n : |f(t, x)| \leq P(1 + |x|).$$

Allora ogni soluzione massimale dell'equazione differenziale

$$u' = f(t, u)$$

è definita su J .

Dimostrazione. Sia $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una soluzione massimale, allora I è aperto in J per il Teorema (3.9). Fissiamo $\alpha \in I$ e consideriamo un qualunque $\beta \in J$. Se $\beta \geq \alpha$, per ogni $t \in I \cap [\alpha, \beta]$ si ha, per il Lemma (1.2),

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq |u(\alpha)| + \int_{\alpha}^t |f(\tau, u(\tau))| d\tau \leq \\ &\leq |u(\alpha)| + \int_{\alpha}^t P(1 + |u(\tau)|) d\tau = \\ &= |u(\alpha)| + P(t - \alpha) + P \int_{\alpha}^t |u(\tau)| d\tau \leq \\ &\leq |u(\alpha)| + P(\beta - \alpha) + P \int_{\alpha}^t |u(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Dal Lemma di Gronwall si deduce che

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq (|u(\alpha)| + P(\beta - \alpha))e^{P(t-\alpha)} \leq \\ &\leq (|u(\alpha)| + P(\beta - \alpha))e^{P(\beta-\alpha)}. \end{aligned}$$

Consideriamo ora

$$K = [\alpha, \beta] \times \overline{B\left(0, (|u(\alpha)| + P(\beta - \alpha))e^{P(\beta-\alpha)}\right)}.$$

Per il Teorema di Tychonoff, K è compatto ed inoltre risulta

$$\forall t \in I \cap [\alpha, \beta] : (t, u(t)) \in K.$$

Per il Teorema (3.9), esiste $s \in I$ tale che $(t, u(t)) \in K$ per ogni $t \in I \cap]s, +\infty[$.

Supponiamo, per assurdo, che $s < \beta$. Innanzitutto $s \geq \alpha$, altrimenti, se così non fosse, per ogni $t \in I \cap [\alpha, \beta]$, $(t, u(t)) \notin K$ ma $\alpha \in [\alpha, \beta]$ e $(\alpha, u(\alpha)) \in K$. Poi, essendo I aperto in J ed $s \in I$, allora I è intorno di s in J . Allora esiste un intorno U di s in

\mathbb{R} tale che $I = J \cap U$. Allora esiste $\delta > 0$ tale che

$$]s - \delta, s + \delta[\subseteq U,$$

da cui

$$]s - \delta, s + \delta[\cap J \subseteq U \cap J = I.$$

A patto di rimpicciolire δ , possiamo supporre $s + \delta < \beta$. Allora

$$]s, s + \delta[\subseteq J$$

e quindi

$$]s, s + \delta[\subseteq I.$$

Ma allora per $t \in]s, s + \delta[$ si ha $t \in I \cap [\alpha, \beta]$, assurdo.

Deve quindi essere $s \geq \beta$ e quindi, essendo I un intervallo, $\beta \in I$. Se $\beta \leq \alpha$, si prova in maniera simile che $\beta \in I$. Ne segue che $I = J$. ■

4 Esempi

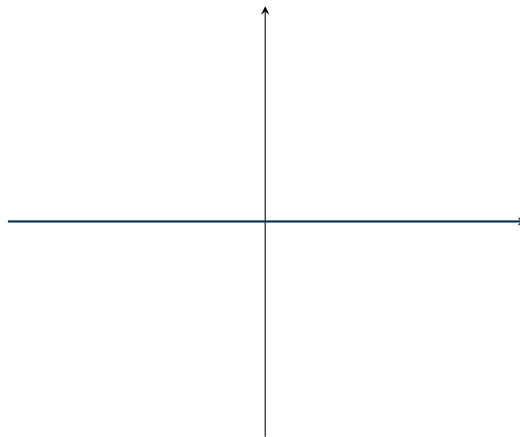
Il Teorema di Peano garantisce l'esistenza di soluzioni locali che, se la crescita è al più lineare in u , possono sicuramente essere sempre prolungate a soluzioni massimali per il Teorema (3.10). Tuttavia non fornisce nessuna informazione riguardo l'unicità: vediamo un esempio classico per cui, fissato un dato iniziale, troviamo diverse soluzioni massimali sia localmente che globalmente. Non è l'esempio originale proposto da Peano, ma rientra nella stessa tipologia.

(4.1) Esempio (Il pennello di Peano) *Si consideri il problema di Cauchy*

$$(4.2) \quad \begin{cases} u' = 2\sqrt{|u|}, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

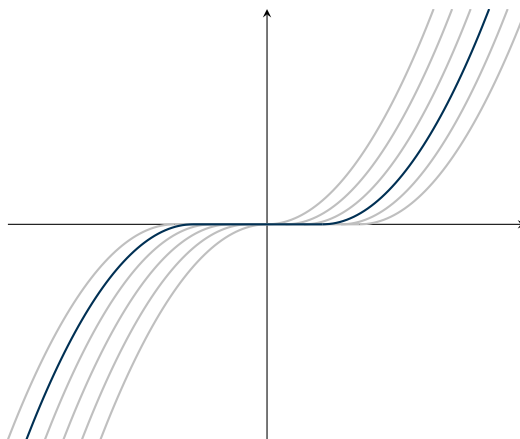
Innanzitutto è soluzione l'applicazione costante $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$u_0(t) = 0.$$



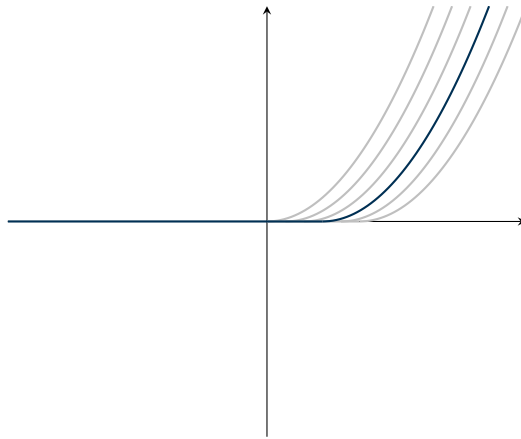
Inoltre, presi $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, con $\lambda \leq 0$ e $\mu \geq 0$, sono soluzioni massimali di (4.2) tutte le applicazioni $u_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$u_1(t) = \begin{cases} -(t - \lambda)^2 & \text{se } t \leq \lambda, \\ 0 & \text{se } \lambda < t < \mu, \\ (t - \mu)^2 & \text{se } t \geq \mu, \end{cases}$$



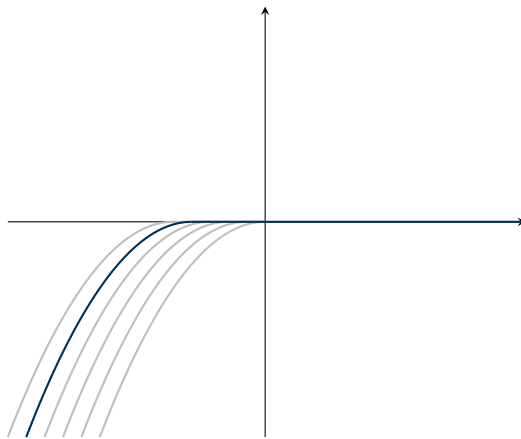
le applicazioni $u_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$u_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < \mu, \\ (t - \mu)^2 & \text{se } t \geq \mu \end{cases}$$



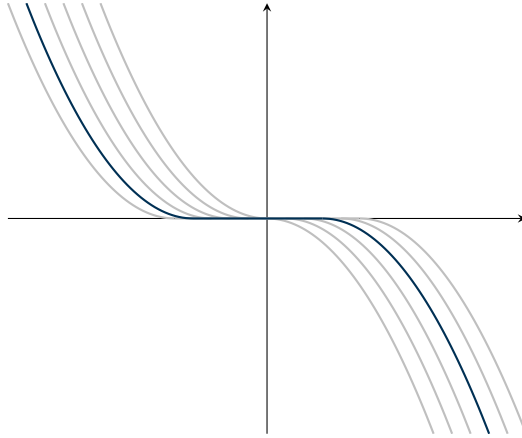
e le applicazioni $u_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$u_3(t) = \begin{cases} -(t - \lambda)^2 & \text{se } t \leq \lambda, \\ 0 & \text{se } t > \lambda. \end{cases}$$



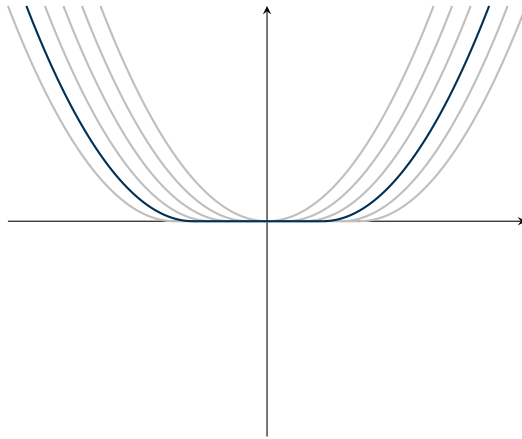
L'equazione differenziale è simmetrica rispetto agli assi cartesiani, pertanto anche le applicazioni $u_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$u_4(t) = \begin{cases} (t - \lambda)^2 & \text{se } t \leq \lambda, \\ 0 & \text{se } \lambda < t < \mu, \\ -(t - \mu)^2 & \text{se } t \geq \mu, \end{cases}$$



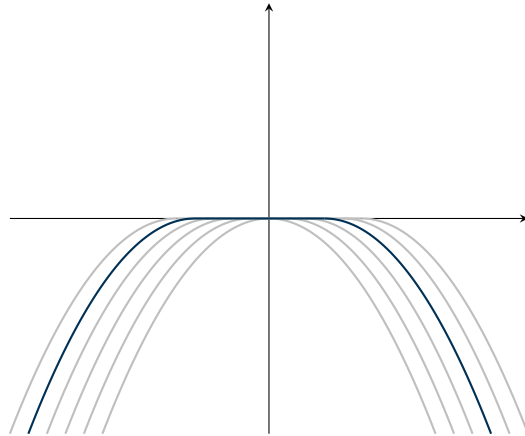
sono soluzioni massimali di (4.2), come lo sono pure le applicazioni $u_5 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$u_5(t) = \begin{cases} (t - \lambda)^2 & \text{se } t \leq \lambda, \\ 0 & \text{se } \lambda < t < \mu, \\ (t - \mu)^2 & \text{se } t \geq \mu, \end{cases}$$



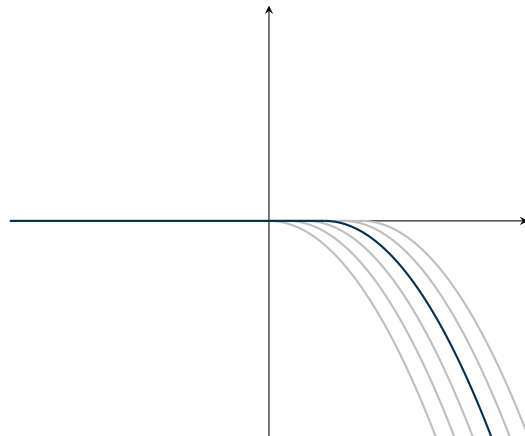
le applicazioni $u_6 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$u_6(t) = \begin{cases} -(t - \lambda)^2 & \text{se } t \leq \lambda, \\ 0 & \text{se } \lambda < t < \mu, \\ -(t - \mu)^2 & \text{se } t \geq \mu, \end{cases}$$



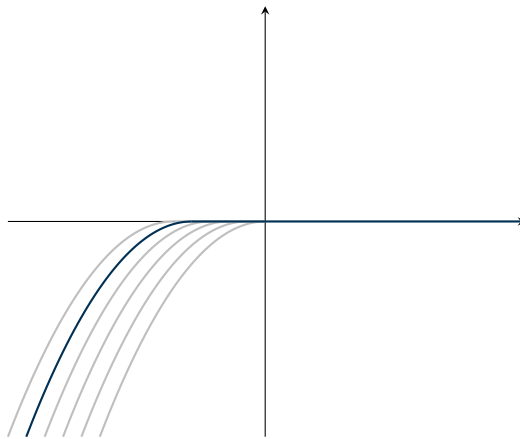
le applicazioni $u_7 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$u_7(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < \mu, \\ -(t - \mu)^2 & \text{se } t \geq \mu \end{cases}$$



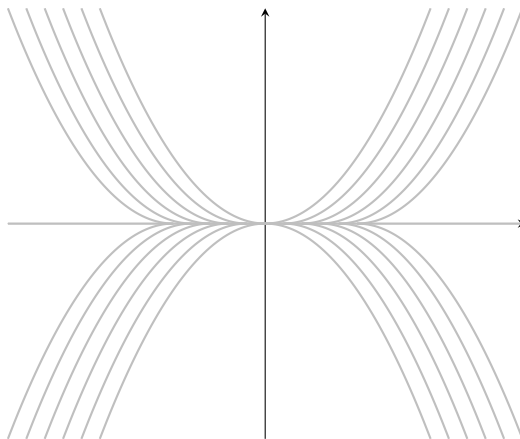
e le applicazioni $u_8 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$u_8(t) = \begin{cases} -(t - \lambda)^2 & \text{se } t \leq \lambda, \\ 0 & \text{se } t > \lambda. \end{cases}$$



Riassumendo abbiamo quindi 9 soluzioni locali distinte ed infinite soluzioni globali distinte.

Le soluzioni massimali formano il classico motivo a pennello che caratterizza le soluzioni di equazioni differenziali in cui si ha solo l'ipotesi di continuità. Una rappresentazione riepilogativa è la seguente.



Abbiamo già chiarito che soluzioni massimali differenti, in generale, potrebbero essere definite su intervalli massimali diversi. L'esempio seguente, ripreso da [Baiti], mostra un caso in cui ciò avviene.

(4.3) Esempio Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \max \{ \sqrt{|u|}, u^2 \}, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

L'applicazione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f(u) = \max \{ \sqrt{|u|}, u^2 \}$$

è continua per composizione e la sua espressione analitica può essere riscritta in questo modo

$$f(u) = \begin{cases} \sqrt{|u|} & \text{se } |u| \leq 1, \\ u^2 & \text{se } |u| > 1. \end{cases}$$

In particolare, possiamo osservare che in un intorno di 0, le soluzioni hanno lo stesso carattere di quelle dell'equazione differenziale

$$u' = \sqrt{|u|}$$

analogamente a quella che abbiamo analizzato nell'esempio (4.1). Allontanandosi da 0, le soluzioni tendono a comportarsi come quelle dell'equazione differenziale

$$u' = u^2$$

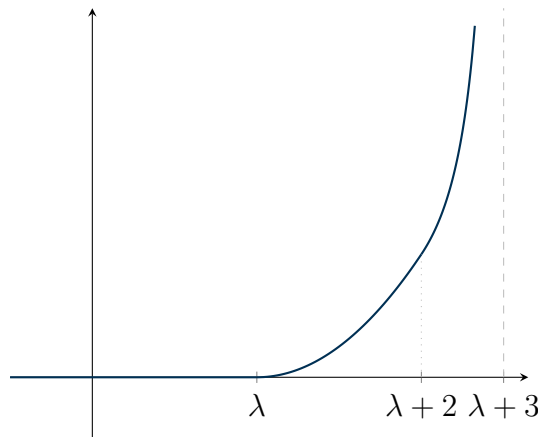
che non sono globalmente definite.

Dati $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leq 0$ e $b \geq 0$, consideriamo la soluzione $u_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$u_0(t) = 0.$$

Essa può essere prolungata ad esempio alla soluzione massimale identicamente nulla, definita su tutto \mathbb{R} . Invece, dato $\lambda \geq b$, può anche essere prolungata alla soluzione $u :]-\infty, \lambda + 3[\rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq \lambda, \\ \frac{(t-\lambda)^2}{4} & \text{se } \lambda < t \leq \lambda + 2, \\ \frac{1}{\lambda+3-t} & \text{se } \lambda + 2 < t < \lambda + 3. \end{cases}$$



Siccome

$$\lim_{t \rightarrow (\lambda+3)^-} u(t) = +\infty,$$

deduciamo che u non può essere ulteriormente prolungata. Pertanto anch'essa è soluzione massimale, definita sull'intervallo $] -\infty, \lambda + 3[$, diverso dal dominio della soluzione massimale nulla che invece è definita globalmente.

5 Alcune considerazioni conclusive

Aggiungendo alle ipotesi del Teorema di Peano la locale lipschitzianità di f in u uniformemente rispetto a t , si riesce a dimostrare che localmente la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u), \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

è unica. Questo risultato è noto come Teorema di Cauchy – Lipschitz o Teorema di Esistenza ed Unicità Locale.

(5.1) Teorema (di Cauchy – Lipschitz) *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ e*

$$f : [a, b] \times \overline{B(x, r)} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

un'applicazione continua verificante le seguenti condizioni:

(a) *esiste $c \in]0, +\infty[$ tale che*

$$\forall \tau \in [a, b], \forall \xi_1, \xi_2 \in \overline{B(x, r)} : |f(\tau, \xi_1) - f(\tau, \xi_2)| \leq c|\xi_1 - \xi_2|;$$

(b) *risulta*

$$2(b - a) \max \left\{ |f(\tau, \xi)| : \tau \in [a, b], \xi \in \overline{B(x, r)} \right\} \leq r.$$

Allora per ogni $(t_0, u_0) \in [a, b] \times \overline{B(x, r/2)}$ esiste una ed una sola soluzione

$$u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u), \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Dimostrazione. Si veda [AAM, Capitolo 5, Teorema (1.5)]. ■

Rinforzando la struttura locale con l'unicità, è possibile dedurre molte altre proprietà: un primo esempio è dato dall'unicità delle soluzioni massimali.

(5.2) Osservazione *Nelle ipotesi del Teorema (5.1) è anche possibile parlare di dipendenza continua dai dati iniziali, ovvero l'applicazione*

$$\begin{aligned} [a, b] \times \overline{B}(x, r/2) &\rightarrow C([a, b]; \mathbb{R}^n) \\ (t_0, u_0) &\mapsto u \end{aligned}$$

risulta lipschitziana, quindi continua.

Tutto ciò non è possibile se ammettiamo la sola continuità di f : l'applicazione sopra descritta, infatti, non sarebbe nemmeno ben definita non essendo unica u al variare di $(t_0, u_0) \in [a, b] \times \overline{B}(x, r/2)$.

6 Uno sguardo ad una possibile generalizzazione

Passare dal Teorema (5.1) al Teorema (2.7) comporta la rimozione della proprietà di locale lipschitzianità. Questo processo è stato pressoché indolore: avendo potuto sfruttare il Teorema di Ascoli – Arzelà siamo comunque riusciti a dimostrare l'esistenza di soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u), \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Indebolire ulteriormente le ipotesi significa ora modificare la regolarità di f in maniera più profonda. Dovremmo sostituire la continuità con una condizione più debole, ma questa operazione non è così immediata: basti pensare che senza la continuità di f , non abbiamo nemmeno il Lemma (1.2).

Analizziamo un'altra problematica che è possibile riscontrare tramite il seguente risultato, adattato da [AMI].

(6.1) Teorema (di Darboux) *Siano I un intervallo in \mathbb{R} ed un'applicazione derivabile $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.*

Allora per ogni intervallo $J \subseteq I$, l'insieme $f'(J)$ è un intervallo.

Dimostrazione. Sia un intervallo $J \subseteq I$. Se $J = \emptyset$, allora $f'(J) = \emptyset$ e la tesi è vera. Altrimenti poniamo

$$\alpha = \inf f'(J) \quad , \quad \beta = \sup f'(J)$$

e osserviamo innanzitutto che $f'(J) \subseteq [\alpha, \beta]$. Sia ora $y \in]\alpha, \beta[$. Esistono $a, b \in J$ tali che

$$f'(a) < y < f'(b).$$

Se $a < b$, essendo J un intervallo, $[a, b] \subseteq J$. Consideriamo quindi l'applicazione $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$g(x) = f(x) - yx.$$

Essa è ben definita, continua su $[a, b]$ e derivabile su $[a, b]$, con

$$g'(x) = f'(x) - y.$$

Per il Teorema di Weierstrass, essendo $[a, b]$ compatto, esistono massimo e minimo assoluti per g su $[a, b]$. Sia ξ punto di massimo di g su $[a, b]$, da

$$g'(a) = f'(a) - y < 0$$

e

$$g'(b) = f'(b) - y > 0$$

si deduce che ξ non può essere uguale ad a e nemmeno a b . Tuttavia $\xi \in]a, b[$ perciò, per il Teorema di Fermat,

$$g'(\xi) = 0$$

da cui

$$y = f(\xi).$$

Se ne deduce che $y \in f'(J)$. Se $b < a$, il ragionamento è simile. In ogni caso, $] \alpha, \beta[\subseteq f'(J)$ quindi, in definitiva risulta

$$] \alpha, \beta[\subseteq f'(J) \subseteq [\alpha, \beta]$$

perciò $f'(J)$ è necessariamente uno dei quattro intervalli di estremi α e β . ■

Quella descritta dal Teorema di Darboux è nota anche come *Proprietà dei valori intermedi*.

(6.2) Osservazione Siano I un intervallo in \mathbb{R} , e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ un'applicazione. Consideriamo l'equazione differenziale autonoma

$$u' = f(u).$$

Se $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ è soluzione, sicuramente u è derivabile. Allora, per il Teorema di Darboux, u' verifica la proprietà dei valori intermedi e quindi anche f la deve verificare essendo

$$\forall t \in I : u'(t) = f(u(t)).$$

Se supponiamo f continua, per il Teorema dei valori intermedi, f verifica la Proprietà dei valori intermedi. In generale, tuttavia, ciò non è assicurato.

Una generalizzazione del Teorema di Peano è comunque possibile e sfrutta alcuni risultati di Teoria della Misura. Per fare ciò abbiamo innanzitutto bisogno di definire una particolare classe di applicazioni e successivamente modificare il concetto stesso di soluzione di un'equazione differenziale.

(6.3) Definizione Siano I un intervallo in \mathbb{R} ed $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ un'applicazione. Diciamo che f è assolutamente continua, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\sum_{h=1}^k |f(y_h) - f(x_h)| < \varepsilon$$

ogniquale volta $x_h, y_h \in I$, $x_1 \leq y_1 \leq \dots \leq x_k \leq y_k$ e

$$\sum_{h=1}^k (y_h - x_h) < \delta.$$

(6.4) Definizione Sia $f : \text{dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ un'applicazione. Diciamo che f è derivabile per \mathcal{L}^1 -q.o. $x \in \text{dom}(f)$, se per \mathcal{L}^1 -q.o. $x \in \text{dom}(f)$, x è un punto di accumulazione per $\text{dom}(f)$ ed esiste finito

$$\lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}.$$

(6.5) Proposizione Siano I un intervallo in \mathbb{R} ed $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ un'applicazione assolutamente continua. Allora f è derivabile per \mathcal{L}^1 -q.o. $x \in I$.

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(6.6) Definizione Siano $E \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione, I un intervallo in \mathbb{R} ed $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione.

Diciamo che u è una soluzione per \mathcal{L}^1 -q.o. $x \in I$ dell'equazione differenziale

$$u' = f(t, u),$$

se u è derivabile per \mathcal{L}^1 -q.o. $x \in I$, $(t, u(t)) \in E$ per ogni $t \in I$ e si ha

$$u'(t) = f(t, u(t)) \text{ per } \mathcal{L}^1 - \text{q.o. } t \in I.$$

Se poi $(t_0, u_0) \in E$, diciamo che u è una soluzione per \mathcal{L}^1 -q.o. $x \in I$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u), \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

se si ha anche $t_0 \in I$ e $u(t_0) = u_0$.

Abbiamo ora tutti gli strumenti per enunciare il Teorema di Caratheodory. Questa ulteriore generalizzazione richiede un prezzo molto più alto rispetto al passaggio dal Teorema di Cauchy – Lipschitz al Teorema di Peano, come vedremo direttamente nell'enunciato. L'idea è che non avremo più una soluzione dell'equazione differenziale, ma solamente una soluzione quasi ovunque che sarà quindi solamente derivabile quasi ovunque nel suo dominio.

(6.7) Teorema (di Caratheodory) Siano $(t_0, u_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $a, b, r > 0$ e

$$f : [t_0 - a, t_0 + b] \times \overline{B(u_0, r)} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

un'applicazione verificante le seguenti condizioni:

- (a) per ogni $t \in [t_0 - a, t_0 + b]$, l'applicazione $f(t, \cdot)$ è continua;
- (b) per ogni $u \in \overline{B(u_0, r)}$, l'applicazione $f(\cdot, u)$ è misurabile;
- (c) esiste un'applicazione $m : [t_0 - a, t_0 + b] \rightarrow \mathbb{R}$ sommabile tale che

$$|f(t, u)| \leq m(t)$$

per ogni $(t, u) \in [t_0 - a, t_0 + b] \times \overline{B(u_0, r)}$.

Allora esiste un'applicazione $u : [t_0 - a, t_0 + b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ assolutamente continua soluzione per \mathcal{L}^1 -q.o. $t \in [t_0 - a, t_0 + b]$ di

$$\begin{cases} u' = f(t, u), \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

In conclusione, passando dal Teorema di Peano al Teorema di Caratheodory si stravolge il concetto di equazione differenziale ordinaria e pertanto l'ipotesi di continuità messa da Peano risulta assolutamente necessaria per mantenere l'idea di equazione differenziale a cui siamo abituati.

Bibliografia

- [Baiti] P. Baiti, dispensa del corso di *Equazioni Differenziali Ordinarie*, Università degli Studi di Udine
- [AMI] M. Degiovanni, dispensa del corso di *Analisi Matematica I*, Università Cattolica del Sacro Cuore
- [AAM] M. Degiovanni, dispensa del corso di *Approfondimenti di Analisi Matematica*, Università Cattolica del Sacro Cuore
- [LTI] M. Degiovanni, dispensa del corso di *Logica e Teoria degli Insiemi*, Università Cattolica del Sacro Cuore
- [Fusco] N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, *Lezioni di analisi matematica due*, Zanichelli, Bologna (2020)
- [MacTutor] E. Robertson, J. O'Connor, *MacTutor History of Mathematics Archive*, Giuseppe Peano
- [Sernesi] E. Sernesi, *Geometria II*, Bollati Boringhieri, Torino (2019)

Elenco dei simboli

$C(X; Y)$, 11

$C_b(X; Y)$, 11

\mathbb{K} , 11

$\mathcal{B}(X; Y)$, 11

l_2 , 15

Indice analitico

- applicazione
 - assolutamente continua, 44
 - derivabile quasi ovunque, 44
- disuguaglianza
 - di Young, 14
- equi-uniforme continuità, 17
- lemma
 - di incollamento, 27
 - di Zorn, 29
- problema di Cauchy, 21
- prodotto scalare, 11
- proprietà
 - dei valori intermedi, 43
- soluzione (dell'equazione differenziale),
 - 21
 - massimale, 28
 - quasi ovunque, 45
- spazio metrico
 - totalmente limitato, 12
- teorema
 - di Ascoli–Arzelà, 18
 - di Caratheodory, 45
 - di Cauchy – Lipschitz, 41
 - di Darboux, 42
 - di Peano, 26