# Corso di Eccellenza 2025

Mattia Garatti

10 giugno 2025 – Pomeriggio

## 1 Matematica e Dimostrazioni

Uno dei bias in cui ci si può incorrere durante il percorso scolastico è il seguente:

$$\text{Matematica} \ = \ \text{Conti.}$$

Tuttavia, un approccio maturo alla disciplina permette di apprezzare di più un aspetto più profondo: la Logica. Più corretto è infatti dire che *La matematica è la disciplina dei ragionamenti*. Ma cosa sono questi "ragionamenti"? Altro non sono che l'insieme dei processi logici che permettono, partendo da una o più *Proposizioni*, di dedurne delle altre: stiamo parlando delle *Dimostrazioni*.

**(1.1) Esempio** *Dimostrare che*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : (4n+1)^2 \text{ è dispari.}$$

*Dimostrazione.* Sviluppando il quadrato di binomio, otteniamo

$$(4n+1)^2 = 16n^2 + 8n + 1 = 2(8n^2 + 4n) + 1,$$

da cui la tesi. ■

Non tutte le dimostrazioni sono uguali, anzi, ciò che rende un matematico capace è proprio la sua creatività nell'inventare eleganti strategie dimostrative sempre nuove. Durante il corso di Teoria degli insiemi avete iniziato a lavorare con la *Logica del Primo ordine* grazie alla quale è possibile costruire le principali tecniche dimostrative utilizzate dai matematici di tutto il mondo e di tutti i tempi.

## Dimostrazioni per assurdo

**(1.2) Definizione** *Consideriamo due frasi aperte* $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ *e la frase aperta* $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$*. Chiamiamo* contronominale *di* $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$*, la frase aperta*

$$\text{non}\mathcal{Q} \implies \text{non}\mathcal{P}.$$

**(1.3) Proposizione** *Consideriamo due frasi aperte* $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$*. Sono fatti equivalenti:*

$(a)$ $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$*,*

$(b)$ $\text{non}\mathcal{Q} \implies \text{non}\mathcal{P}$*.*

*Dimostrazione.* È sufficiente verificare che abbiano le stesse tavole di verità. Avete visto a lezione che la tavola di verità dell'implicazione è la seguente.

| $\mathcal{P}$ | $\mathcal{Q}$ | $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

Se calcoliamo la tavola di verità della contronominale di $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ otteniamo invece

| $\mathcal{P}$ | $\mathcal{Q}$ | non$\mathcal{Q}$ | non$\mathcal{P}$ | non$\mathcal{P} \implies$ non$\mathcal{Q}$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | V |
| V | F | V | F | F |
| F | V | F | V | V |
| F | F | V | V | V |

da cui la tesi. ∎

La precedente Proposizione è alla base di una tecnica dimostrativa detta *dimostrazione per assurdo* che già avete utilizzato ieri per dimostrare che $\sqrt{3}$ è irrazionale. Dimostrare "per assurdo" significa supporre che la tesi sia falsa e cercare, mediante la logica e deduzioni successive, di arrivare ad un'affermazione incoerente, una contraddizione. Vediamo altri semplici esempi di dimostrazioni per assurdo.

**(1.4) Esempio** *Dimostrare che non esiste alcun* $\overline{q} \in \mathbb{Q}$ *tale che*

$$(\overline{q} > 0) \text{ e } (\forall\, q \in \mathbb{Q} : q > 0 \implies \overline{q} \leq q).$$

*Dimostrazione.* Supponiamo, per assurdo, che un tale $\overline{q}$ esista. L'assurdo segue se consideriamo $q = \frac{\overline{q}}{2}$. ■

**(1.5) Definizione** *Un numero* $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *si dice* primo *se* $p \neq \pm 1$ *e* $p$ *non ha divisori propri, ossia divisori diversi da* $\pm 1, \pm p$.

**(1.6) Teorema (di Euclide)** *I numeri primi sono infiniti.*

*Dimostrazione.* Supponiamo, per assurdo, che i numeri primi siano un numero finito $n \in \mathbb{N}$. In altre parole, tutti e soli i numeri primi sono $p_1, \dots, p_n$. Consideriamo $N = p_1 \dots p_n + 1$. Poiché $p_1, \dots, p_n$ non dividono $N$ (in quanto, se così fosse, dovrebbero dividere 1), allora $N$ deve essere un numero primo, assurdo. ■

## Dimostrazioni per induzione

Una tecnica dimostrativa che è molto spendibile quando si vogliono dimostrare delle proprietà dei numeri naturali è l'*induzione*. Nel corso di Teoria degli insiemi approfondirete la tecnica dal punto di vista teorico. Noi ci limitiamo a richiamarne i punti salienti e ad utilizzarla per qualche interessante applicazione.

**(1.7) Proposizione (Principio di induzione)** *Consideriamo una frase aperta* $\mathcal{P}(n)$, *dipendente dalla variabile* $n \in \mathbb{N}$. *Supponiamo di sapere che le affermazioni seguenti sono vere:*

$$\mathcal{P}(0), \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} : \mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1).$$

*Allora*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \mathcal{P}(n).$$

*Dimostrazione.* Omettiamo la dimostrazione. ■

In sostanza, dimostrare per induzione significa utilizzare il principio delle tessere del domino: se sappiamo che la prima tessera cade e che il fatto che una tessera cada provochi la caduta della successiva, allora tutte le tessere cadono.

**(1.8) Osservazione** *Se sostituiamo* $\mathcal{P}(0)$ *con* $\mathcal{P}(k)$ *per qualche* $k \in \mathbb{N}$, *otteniamo*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : n \geq k \implies \mathcal{P}(n).$$

Vediamo alcuni esempi di dimostrazioni per induzione.

**(1.9) Esempio** *Dimostrare che per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *tale che* $n \geq 3$ *si ha* $2n + 1 \leq n^2$.

*Dimostrazione.* Osserviamo innanzitutto che, se $n = 3$, abbiamo $7 \leq 9$, che è vero. Ora, supponiamo che la tesi valga per un qualche $n$, ossia $2n + 1 \leq n^2$. Dobbiamo mostrare che $2(n + 1) + 1 \leq (n + 1)^2$, ossia che $2n + 3 \leq n^2 + 2n + 1$. Siccome $n \geq 3$, allora $2 \leq 2n + 1$ che sommata all'ipotesi induttiva restituisce $2n + 3 \leq n^2 + 2n + 1$, da cui la tesi. ■

**(1.10) Esempio** *Dimostrare che per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *tale che* $n \geq 4$ *si ha* $n^2 \leq 2^n$.

*Dimostrazione.* Osserviamo innanzitutto che, se $n = 4$, abbiamo $4^2 \leq 2^4$, che è vero. Ora, supponiamo che la tesi valga per un qualche $n$, ossia $n^2 \leq 2^n$. Dobbiamo mostrare che $(n + 1)^2 \leq 2^{n+1}$, ossia che $n^2 + 2n + 1 \leq 2 \cdot 2^n$. Dall'Esempio (1.9), sappiamo che $2n + 1 \leq n^2$ quindi, sommando ad entrambi i membri $n^2$ ed usando l'ipotesi induttiva, $n^2 + 2n + 1 \leq 2n^2 \leq 2 \cdot 2^n$, da cui la tesi. ■

# 2 Successioni infinitesime e questioni collegate

Avete visto, durante il corso di Applicazioni della Matematica alla Fisica, il concetto di successione infinitesima. Vediamo ancora qualche esempio e proprietà interessanti.

**(2.1) Esempio** *La successione* $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ *è infinitesima.*

*Dimostrazione.* Fissiamo $\varepsilon > 0$ e consideriamo $N > \frac{1}{\varepsilon^2}$. Se $n \geq N$, allora

$$|x_n| = \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{N}} < \varepsilon,$$

da cui la tesi. ■

Una comoda proprietà è la seguente.

**(2.2) Teorema (dei carabinieri)** *Consideriamo una successione* $(x_n)$ *in* $\mathbb{R}$. *Se esistono* $N_0 \in \mathbb{N}$ *ed* $(y_n)$ *una successione in* $\mathbb{R}$ *infinitesima tale che per ogni* $n \geq \mathbb{N}_0$

$$0 \leq x_n \leq y_n,$$

*allora* $(x_n)$ *è infinitesima.*

*Dimostrazione.* Fissiamo $\varepsilon > 0$. Siccome $(y_n)$ è infinitesima, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $|y_n| < \varepsilon$. In particolare, se $n \geq \max\{N_0, N\}$, allora

$$|x_n| = x_n \leq y_n < \varepsilon,$$

da cui la tesi. ■

In altre parole, il Teorema precedente fornisce un utile modo alternativo per dimostrare velocemente che una successione è infinitesima: basta trovare un'altra successione, che già sappiamo essere infinitesima, che soddisfa la catena di disuguaglianza riportata per un qualche $N_0 \in \mathbb{N}$.

# 3 Algebra lineare

L'Algebra Lineare è quella parte della Matematica che si occupa di studiare i vettori e le loro trasformazioni lineari. Durante la lezione di stamattina del corso di Vettori e Matrici ne avete conosciuto gli strumenti principali: le matrici. Cerchiamo di familiarizzare meglio con questi nuovi oggetti e con le operazioni che su di essi avete definito: faremo un po' di conti, ma saranno molto semplici.

**(3.1) Esempio** *Data*

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

*dimostrare che tutti e soli gli elementi dell'insieme*

$$U = \{A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) : A + HA = \mathbf{0}\}$$

*sono del tipo*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix}$$

*per qualche $a, b \in \mathbb{R}$.*

*Dimostrazione.* Gli elementi di $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ sono tutte e sole le matrici quadrate con 2 righe e 2 colonne a coefficienti reali, quindi del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

per qualche $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Scrivendo esplicitamente la proprietà caratteristica dell'insieme $U$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che può essere riscritto nella forma

$$\begin{cases} a+c=0, \\ b+d=0, \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} c=-a, \\ d=-b. \end{cases}$$

In definitiva,

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}. \blacksquare$$

**(3.2) Esempio** *Consideriamo le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Dimostriamo che l'insieme di tutte e sole le combinazioni lineari di A,B e C è*

$$W = \{M \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) : 2a-b=0\}.$$

*Dimostrazione.* Procediamo al rovescio, scrivendo esplicitamente gli elementi dell'insieme $W$: dalla proprietà caratteristica otteniamo che

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a \\ c & d \end{pmatrix} : a, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

A questo punto,

$$\begin{pmatrix} a & 2a \\ c & d \end{pmatrix} = aA + cB + dC$$

per qualche $a, c, d \in \mathbb{R}$, da cui la tesi. $\blacksquare$

# 4 Esercizi

**(4.1) Esercizio** *Dimostrare che la somma di tre numeri naturali dispari consecutivi è un multiplo di* 3.

*Soluzione.* Basta osservare che

$$(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)=6n+9=3(2n+3).\ \blacksquare$$

**(4.2) Esercizio** *Consideriamo due frasi aperte* $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$. *Dimostrare che sono fatti equivalenti:*

$(a)$ $\mathcal{P}$ e ($\mathcal{P}$ o $\mathcal{Q}$),

$(b)$ $\mathcal{P}$.

*Soluzione.* Si tratta di scrivere le tavole di verità di entrambe. $\blacksquare$

**(4.3) Esercizio** *Consideriamo due frasi aperte* $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$. *Dimostrare che sono fatti equivalenti:*

$(a)$ $\mathcal{P}$ o ($\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$),

$(b)$ $\mathcal{P}$.

*Soluzione.* Si tratta di scrivere le tavole di verità di entrambe. $\blacksquare$

**(4.4) Esercizio (Prima legge di De Morgan)** *Consideriamo due frasi aperte* $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$. *Dimostrare che sono fatti equivalenti:*

$(a)$ non($\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$),

$(b)$ non$\mathcal{P}$ o non$\mathcal{Q}$.

*Soluzione.* Si tratta di scrivere le tavole di verità di entrambe. $\blacksquare$

**(4.5) Esercizio (Seconda legge di De Morgan)** *Consideriamo due frasi aperte* $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$. *Dimostrare che sono fatti equivalenti:*

$(a)$ non($\mathcal{P}$ o $\mathcal{Q}$),

$(b)$ non$\mathcal{P}$ e non$\mathcal{Q}$.

*Soluzione.* Si tratta di scrivere le tavole di verità di entrambe. ■

**(4.6) Esercizio** *Su un'isola ci sono tre naufraghi: Arthur, Martin e Raymond. Una voce fuori campo chiede ad Arthur se è un cavaliere, ossia dice sempre la verità, oppure se è un furfante, ossia mente sempre. A causa del forte rumore delle onde non è possibile sentire la sua risposta. Dopo che i naufraghi si sono spostati, Martin dice: "Arthur ha detto di essere un furfante" e Raymond ribatte: "Non credete a Martin, sta mentendo!".*

*Supponendo valga il principio del terzo escluso, quanti sono i furfanti sull'isola?*

*Soluzione.* Innanzitutto, osserviamo che nessuno sull'isola può dichiarare di essere un furfante: se, per assurdo, un cavaliere dichiarasse di esserlo, starebbe mentendo, da cui l'assurdo; al contrario, se, per assurdo, fosse un furfante a dichiararlo, starebbe dicendo la verità, un'altra contraddizione.

Schematizziamo gli unici casi rimasti nel seguente modo.

| M | R | A | Conclusione |
|---|---|---|---|
| V | V | Furfante onesto | Assurdo |
| F | V | Cavaliere o Furfante | Coerente |

Concludiamo quindi che i furfanti sono 1 oppure 2. ■

**(4.7) Esercizio (Teorema di Russell)** *Dimostrare che per ogni $X$ esiste $x$ tale che $x \notin X$.*

*Soluzione.* Dato un qualunque insieme $X$, sia

$$x = \{y \in X : y \notin y\}.$$

Supponiamo, per assurdo, che $x \in X$. Se $x \notin x$, allora $x \in x$, che è assurdo; altrimenti $x \in x$, da cui $x \notin x$, ancora assurdo. ■

**(4.8) Esercizio** *Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq 4$ si ha $2n+1 \leq 2^n$.*

*Soluzione.* Si tratta di combinare gli Esempi (1.9) e (1.10). ■

**(4.9) Esercizio** *Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $n \leq 2^n$.*

*Soluzione.* Suddividiamo la dimostrazione in due casi: se $n = 0$, abbiamo $0 \leq 2^0 = 1$, che è vero. Se invece $n \geq 1$, procediamo per induzione. Se $n = 1$, abbiamo $1 \leq 2$, che è vero. Ora, supponiamo che la tesi valga per un qualche $n \geq 1$, ossia $n \leq 2^n$. Dobbiamo mostrare che $n + 1 \leq 2^{n+1}$. Combinando l'ipotesi induttiva con il fatto che, per $n \geq 1$, $2n \geq n + 1$, otteniamo

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n \geq n + 1,$$

da cui la tesi. ■

**(4.10) Esercizio (Formula di Gauss)** *Dimostrare che per ogni* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *si ha*

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

*Soluzione.* Osserviamo, innanzitutto, che se $n = 1$, abbiamo $1 = \frac{2}{2}$, vero. Ora, supponiamo che la tesi valga per un certo $n$, ossia

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dobbiamo mostrare che

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Dall'ipotesi induttiva abbiamo che

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

da cui la tesi. ■

**(4.11) Esercizio** *Dimostrare che per ogni* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *si ha*

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

*Soluzione.* Osserviamo, innanzitutto, che se $n = 1$, abbiamo $1 = \frac{6}{6}$, vero. Ora, supponiamo che la tesi valga per un certo $n$, ossia

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Dobbiamo mostrare che

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Dall'ipotesi induttiva abbiamo che

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$
$$= \frac{(n+1)[2n^2+7n+6]}{6} = \frac{(n+1)[2n^2+4n+3n+6]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

da cui la tesi. ■

**(4.12) Esercizio** *Date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

*stabilire se la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 43 & 23 \\ 51 & 25 \end{pmatrix}$$

*può essere scritta come combinazione lineare di $A$, $B$ e $C$. In caso affermativo stabilire quale combinazione lineare produce $M$.*

*Soluzione.* La richiesta conduce al sistema

$$\begin{cases} 2a + 5b = 43, \\ 4a + b = 23, \\ 6b + c = 51, \\ a + 3b = 25, \end{cases}$$

che ha come sola soluzione $(a, b, c) = (4, 7, 9)$. ■

**(4.13) Esercizio** *Consideriamo i vettori*

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*Dimostrare che l'insieme di tutte e sole le combinazioni lineari di* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *è*

$$U = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^4 : u_1 = u_4, u_2 = u_1 + u_3 \right\}.$$

*Soluzione.* Procediamo al rovescio, scrivendo esplicitamente gli elementi dell'insieme $U$: dalla proprietà caratteristica otteniamo che

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ b \\ a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

A questo punto,

$$\begin{pmatrix} a \\ a+b \\ b \\ a \end{pmatrix} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$$

per qualche $a, b \in \mathbb{R}$, da cui la tesi. ∎

**(4.14) Esercizio** *Dimostrare che per ogni* $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, *tale che*

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*per qualche* $a \in \mathbb{R}$, *e per ogni* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *si ha*

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & \sum_{j=0}^{n-1} a^j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Soluzione.* Fissiamo $A$. Osserviamo, innanzitutto, che se $n = 1$ la tesi è vera. Ora, supponiamo che la tesi valga per un certo $n$, ossia

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & \sum_{j=0}^{n-1} a^j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora,

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} a^n & \sum_{j=0}^{n-1} a^j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & \sum_{j=0}^{n} a^j \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

da cui la tesi. ■

**(4.15) Esercizio** *Dimostrare che la successione* $x_n = \frac{1}{n+n^2}$ *è infinitesima.*

*Soluzione.* Basta osservare che

$$0 \leq \frac{1}{n+n^2} \leq \frac{1}{n}$$

ed applicare il Teorema dei carabinieri: avete infatti dimostrato ieri che $y_n = \frac{1}{n}$ è infinitesima. ■