Formulario

di Mattia Garatti

Il presente documento è una ricapitolazione di relazioni notevoli utili per affrontare lo scritto di Analisi Matematica I.

Indice

1 Formule goniometriche

1.1 Formule di addizione e sottrazione

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}{}^{1} \qquad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}{}^{2}$$

1.2 Formule di duplicazione

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}{}^{3}$$

1.3 Formule di bisezione

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} \qquad \tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}{}^{4}$$

1.4 Formule parametriche

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad , \quad t = \tan\frac{\alpha}{2} \wedge \alpha \neq \pi + 2k\pi$$

1.5 Formule di prostaferesi

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad \sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

1.6 Formule di Werner

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$$

[1] $\alpha+\beta, \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.
[2] $\alpha-\beta, \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.
[3] $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.
[4] $\alpha \neq \pi + 2k\pi$.

2 Numeri complessi

Detto $z = a + ib$ un numero complesso,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = z \cdot \bar{z}$$

$$Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Forma algebrica

$$\forall z = (x, y) \in \mathbb{C} : z = x + iy$$

Forma trigonometrica

$$\forall z \in \mathbb{C} : z = \rho \left(\cos\theta + i \sin\theta\right), \rho = |z|$$

Forma algebrica $\rightarrow$ Forma trigonometrica

$$\rho = |z|$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{\rho} \\ \sin\theta = \frac{y}{\rho} \end{cases}$$

3 I limiti

3.1 Algebra dei limiti

Nell'algebra dei limiti valgono le seguenti regole, con $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Relazioni tra numeri ed infiniti

$$\frac{a}{0} = \pm\infty \ , \ a \neq 0 \qquad \frac{a}{\pm\infty} = 0 \qquad \frac{\pm\infty}{0} = \pm\infty \qquad \frac{0}{\pm\infty} = 0$$

$$+\infty \pm a = +\infty \qquad -\infty \pm a = -\infty \qquad \pm\infty \cdot a = \pm\infty \qquad \frac{\pm\infty}{a} = \pm\infty$$

Relazioni tra infiniti

$$+\infty + \infty = +\infty \qquad -\infty - \infty = -\infty \qquad (\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$$

$$(+\infty)^a = +\infty \ , \ a > 0 \qquad (\pm\infty)^a = 0 \ , \ a < 0 \qquad (-\infty)^{2n} = +\infty$$

$$(-\infty)^{2n+1} = -\infty \qquad (+\infty)^{+\infty} = +\infty \qquad (+\infty)^{-\infty} = 0$$

$$0^{+\infty} = 0 \qquad 0^{-\infty} = +\infty$$

3.2 Forme indeterminate

Tutto ciò che non è contenuto nelle relazioni dell'algebra dei limiti è una forma indeterminata, in particolare lo sono le seguenti

$$\left[\frac{0}{0}\right] \qquad \left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right] \qquad \left[0 \cdot (\pm\infty)\right] \qquad \left[+\infty - \infty\right]$$

$$\left[0^0\right] \qquad \left[1^{\pm\infty}\right] \qquad \left[(+\infty)^0\right]$$

3.3 Limiti notevoli

I limiti qui riportati sono suddivisi per semplicità in categorie per facilitare la consultazione.

Funzioni goniometriche

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \frac{m}{n} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\arccos^2 x}{1-x} = 2$$

Funzioni esponenziali e logaritmiche

$$\lim_{x\to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x\to 0} \left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = e \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a \qquad \lim_{t\to 1} \frac{\ln t}{t-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

Successioni

$$\lim_{n} \sqrt[n]{p} = 1 \ , \ p > 0 \qquad \lim_{n} \sqrt[n]{n} = 1$$

3.4 Ordini di infinito

Siccome spesso all'interno del calcolo dei limiti compaiono ragionamenti riguardanti infiniti di diverso ordine, per completezza questa sezione riporta le più comuni situazioni che si possono incontrare.

Funzioni

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^a} = 0 \ , \ p \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \in \,]0\ ,+\infty[\qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0 \ , \ p \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \in \,]1\ ,+\infty[$$

$$\lim_{x\to 0} x^a \cdot |\ln x|^p = 0 \ , \ p \in \mathbb{R} \wedge a \in \,]0\ ,+\infty[$$

Successioni

$$\lim_{n} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0 \ , \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \in \,]1\ ,+\infty[\qquad \lim_{n} \frac{a^n}{n!} = 0 \ , \ \forall a \in \mathbb{R} \qquad \lim_{n} \frac{n!}{n^n} = 0$$

4 Serie notevoli

Vengono inserite, per completezza, le principali serie numeriche ed il loro carattere, in modo da semplificarne il riconoscimento quando si utilizza il criterio del confronto asintotico.

Serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

- se $-1 < x < 1$, convergente: $S = \dfrac{1}{1-x}$;
- se $x \geq 1$, positivamente divergente;
- se $x \leq -1$, indeterminata.

Serie telescopica

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = b_{n_0} - \lim_n b_n$$

Serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

- se $\alpha \leq 1$, divergente;
- se $\alpha > 1$, convergente.

Serie armonica generalizzata con logaritmo

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$$

- se $\alpha > 1$, convergente;
- se $\alpha = 1 \wedge \beta > 1$, convergente;
- se $\alpha < 1$, divergente;
- se $\alpha = 1 \wedge \beta \leq 1$, divergente.

5 Sviluppi di Taylor

In questa sezione sono presenti alcuni degli sviluppi in serie di Mc-Laurin (sviluppo di Taylor centrato in $x = 0$) più comuni. Sono stati aggiunti anche alcuni sviluppi meno comuni ma molto utili.

Funzioni esponenziali e logaritmi

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + x^n \cdot \omega_n(x)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n+1}\,\frac{x^n}{n} + x^n \cdot \omega_n(x)$$

Funzioni goniometriche

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \cdot \omega_n(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n\,\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \cdot \omega_n(x)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + x^3 \cdot \omega(x)$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + x^4 \cdot \omega(x)$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} + x^4 \cdot \omega(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2} \cdot \omega_n(x)$$

Funzioni iperboliche

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \cdot \omega_n(x)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \cdot \omega_n(x)$$

Altre funzioni

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + x^n \cdot \omega_n(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + x^2 \cdot \omega(x)\ ,\ \ \alpha \in \mathbb{R}$$

6 Calcolo differenziale

Regole di derivazione

$$D\left(f+g\right)\left(x\right)=Df\left(x\right)+Dg\left(x\right)$$

$$D\left(cf\right)\left(x\right)=cDf\left(x\right)\quad,\quad c\in\mathbb{R}$$

$$D\left(fg\right)\left(x\right)=Df\left(x\right)g\left(x\right)+f\left(x\right)Dg\left(x\right)$$

$$D\left(\frac{f}{g}\right)\left(x\right)=\frac{Df\left(x\right)g\left(x\right)-f\left(x\right)Dg\left(x\right)}{\left(g\left(x\right)\right)^{2}}$$

$$D\left(g\circ f\right)\left(x\right)=Dg\left(f\left(x\right)\right)Df\left(x\right)$$

Derivate delle funzioni elementari

$$D1=0\qquad\qquad Dx=1$$

$$Dx^{\alpha}=\alpha x^{a-1}\quad,\quad\alpha\in\mathbb{R}$$

$$D\sin x=\cos x\qquad\qquad D\cos x=-\sin x$$

$$Da^{x}=a^{x}\log a\qquad\qquad De^{x}=e^{x}$$

$$D\log_{a}x=\frac{1}{x\ln a}\qquad\qquad D\ln x=\frac{1}{x}$$

Derivate notevoli

$$D\tan x=\frac{1}{\cos^{2}x}=1+\tan^{2}x$$

$$D\sinh x=\cosh x\qquad\qquad D\cosh x=\sinh x\qquad\qquad D\tanh x=\frac{1}{\cosh^{2}x}=1-\tanh^{2}x$$

$$D|x|=\frac{x}{|x|}$$

$$D\arcsin x=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\qquad\qquad D\arccos x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\quad,\quad x\in\,]-1\,,1[$$

$$D\arctan x=\frac{1}{1+x^{2}}$$

7 Studio di funzione

Per svolgere uno studio di funzione completo è sufficiente tenere a mente uno schema fisso che si può poi adattare alle diverse situazioni che incontreremo. Può essere utile tracciare il grafico qualitativo man mano scopriamo informazioni sulla funzione.

Dominio Per determinare il dominio della funzione in esame basta risolvere il sistema che comprende tutte le condizioni di esistenza.

Periodicità e Simmetrie La periodicità si controlla solamente se compaiono funzioni periodiche nella legge che descrive la funzione. Invece affinché una funzione sia simmetrica, innanzitutto il suo dominio deve essere simmetrico, in simboli:

$$\forall x \; : \; x \in dom\,(f) \Longrightarrow -x \in dom\,(f)$$

poi abbiamo

1. **Funzione pari** se $f\,(-x) = f\,(x)$;
2. **Funzione dispari** se $f\,(-x) = -f\,(x)$.

In presenza di simmetria possiamo, se la cosa semplifica i calcoli, studiare la funzione in $dom\,(f) \cap \; [0, +\infty[$.

Intersezioni con gli assi Si devono risolvere due equazioni:

- intersezioni con **asse x**: $f\,(x) = 0$;
- intersezioni con **asse y**: $f\,(0) = y$.

Studio del segno Si deve risolvere la disequazione $f\,(x) > 0$.

Limiti e Asintoti In base alla funzione che abbiamo davanti potrebbero esserci i seguenti asintoti:

- **Asintoto orizzontale**: $y = l$

$$\lim_{x\to+\infty} f\,(x) = l \qquad \textit{oppure} \qquad \lim_{x\to-\infty} f\,(x) = l$$

- **Asintoto verticale**: $x = x_0$

$$\lim_{x\to x_0^{\pm}} f\,(x) = +\infty \qquad \textit{oppure} \qquad \lim_{x\to x_0^{\pm}} f\,(x) = -\infty$$

- **Asintoto obliquo**: $y = mx + q$

$$\lim_{x\to+\infty} [f\,(x) - mx - q] = 0 \qquad \textit{oppure} \qquad \lim_{x\to-\infty} [f\,(x) - mx - q] = 0$$

  m e q dell'asintoto obliquo si possono determinare così

$$m = \lim_{x\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad , \quad q = \lim_{x\pm\infty} (f(x) - mx).$$

Ricordiamo che per l'unicità del limite una funzione non può avere, dalla stessa parte, sia asintoto orizzontale che asintoto obliquo.

Continuità e Studio della Derivata Prima Nella maggior parte dei casi una funzione è continua dove è definita. Esempi di casi particolari sono funzioni con la parte intera $[\,\cdot\,]$ e funzioni definite a tratti.
Per studiare la derivata prima bisogna prima calcolarla, studiarne il dominio e identificare i punti di non derivabilità. A questo punto possiamo risolvere la disequazione seguente per determinare **massimi** e **minimi**:

$$f'(x) \geq 0$$

Studio della Derivata Seconda Per studiare la derivata seconda è necessario calcolarla, determinarne il dominio e poi risolvere la disequazione seguente in modo da determinare i **punti di flesso**:

$$f''(x) \geq 0$$

8 Calcolo integrale

8.1 Calcolo delle primitive

Regole di integrazione

$$\int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int (cf)(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

Primitive delle funzioni elementari

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{a+1} + C \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C\text{[5]} \qquad \int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$$

Integrazione per parti

$$\int F(x)\,g(x)\,dx = F(x)\,G(x) - \int f(x)\,G(x)\,dx$$

[5] $a > 0, a \neq 1$.

Primitiva di funzioni razionali Per calcolare la primitiva di una funzione razionale è comodo aver presente il metodo per la **decomposizione dei fratti semplici**:

1. Se il grado del numeratore è maggiore o uguale al grado del denominatore effettuare una divisione di polinomi;
2. Decomporre il denominatore nel prodotto di potenze di binomi di primo grado e trinomi di secondo grado irriducibili e distinti tra loro e trasformare la frazione in una somma di frazioni secondo i seguenti criteri:
   - per ogni fattore $(ax + b)$ considerare un addendo della forma $\dfrac{A}{ax+b}$;
   - per ogni fattore $(ax + b)^m$, con $m > 1$, considerare m addendi della forma $\dfrac{A_1}{ax+b}$, $\dfrac{A_2}{(ax+b)^2}$, ... $\dfrac{A_m}{(ax+b)^m}$;
   - per ogni fattore $(ax^2 + bx + c)$, con $b^2 - 4ac < 0$, considerare un addendo della forma $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$;
   - per ogni fattore $(ax^2 + bx + c)^m$, con $b^2 - 4ac < 0$ e $m > 1$, considerare m addendi della forma $\dfrac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}$, $\dfrac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}$, ... $\dfrac{A_mx+B_m}{(ax^2+bx+c)^m}$;
3. Determinare i coefficienti incogniti tramite il principio di identità dei polinomi.

8.2 Primitive particolari

Tipo 1

$$\int F\left(\sin x, \cos x\right) dx$$

Si opera una sostituzione mediante formule goniometriche parametriche.

Tipo 2

$$\int F\left(x^{\frac{a}{b}}, x^{\frac{c}{d}}, x^{\frac{e}{f}}, ...\right) dx$$

Si opera una sostituzione del tipo $x = t^s$ dove $s = m.c.m \{d, b, f, ...\}$.

8.3 Primitive notevoli

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\frac{\tan x}{2}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left|\frac{\tan x}{2} + \frac{\pi}{4}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2}(a^2 \arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2}) + C$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C$$

8.4 Integrali impropri notevoli

Elenchiamo ora alcuni dei principali integrali impropri notevoli, per agevolare lo studio della convergenza.

Integrali di potenze

$$\int_0^{\alpha} \frac{1}{x^p} dx \quad , \quad \alpha > 0$$

- se $p < 1$, convergente;
- se $p \geq 1$, divergente.

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx$$

- se $p < 1$, convergente;
- se $p \geq 1$, divergente.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

- se $p \leq 1$, divergente;
- se $p > 1$, convergente.

Integrali impropri con potenze e logaritmi

$$\int_0^{\alpha} \frac{1}{x^p |\ln x|^q} dx \quad , \quad 0 < \alpha < 1$$

- se $p < 1$, convergente;
- se $p = 1 \wedge q > 1$, convergente;
- se $p > 1$, divergente;
- se $p = 1 \wedge q \leq 1$, divergente.

$$\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{x^p \ln^q x} dx \quad , \quad \alpha > 1$$

- se $p > 1$, convergente;
- se $p = 1 \wedge q > 1$, convergente;
- se $p < 1$, divergente;
- se $p = 1 \wedge q \leq 1$, divergente.

Integrale improprio con logaritmo

$$\int_1^{\alpha} \frac{1}{\ln^p x} dx \quad , \quad \alpha > 1$$

- se $p < 1$, convergente;
- se $p \geq 1$, divergente;