LICEO SCIENTIFICO "CAMILLO GOLGI"

Indirizzo Scientifico: opzione SCIENZE APPLICATE

EQUAZIONI DIFFERENZIALI E MODELLIZZAZIONE MATEMATICA

Mattia Garatti

Anno Scolastico 2019/2020

Indice

Capitolo 1

Le equazioni differenziali

1 Introduzione

Le equazioni differenziali sono state introdotte successivamente alla definizione del calcolo infinitesimale ideato da Leibniz e Newton. Quest'ultimo le presenta nel suo testo *Il metodo delle flussioni e le serie infinite* del 1671.
Nel tempo lo studio delle equazioni differenziali si è ampliato e oggi sono tra le equazioni più studiate in matematica perché sono in grado di descrivere una vasta gamma di eventi. Esistono moltissime applicazioni in quasi tutte le scienze: dalla fisica fino alla biologia.

2 Aspetti teorici

Prima di studiare alcuni modelli matematici famosi analizziamo nel dettaglio le equazioni differenziali. Definiamo innanzitutto cosa esse siano.

(2.1) Definizione *Si dice* equazione differenziale *una relazione tra una variabile indipendente x, una funzione $y = f(x)$ e le sue derivate.*

Chiamiamo *ordine* di un'equazione differenziale l'ordine massimo della derivata che compare nell'equazione.

(2.2) Esempio *Consideriamo l'equazione $y'' = -y$.*
Essa è un'equazione differenziale del secondo ordine in quanto l'ordine massimo della derivata della funzione $y = f(x)$ che compare è il secondo.

L'insieme delle soluzioni dell'equazione è detto *integrale generale* mentre la singola funzione che soddisfa l'equazione è detta *integrale particolare*, se deriva dall'integrale generale per assegnazione di valori alle costanti arbitrarie, o *integrale singolare*, se non deriva dall'integrale generale.

Il problema di risolvere un'equazione differenziale in modo che la soluzione soddisfi le condizioni iniziali è noto come *Problema di Cauchy.*[1]

(2.3) Definizione *Dette $a(y)$ e $b(x)$ due funzioni continue, parliamo di equazione differenziale del primo ordine a* variabili separabili *se l'equazione è riconducibile, ponendo $y' = \frac{dy}{dx}$, alla forma:*

$$a(y)dy = b(x)dx$$

Rispettando le ipotesi a e b avranno sicuramente almeno una primitiva, rispettivamente $A(y)$ e $B(x)$ tali che $dA(y) = a(y)d(y)$ e $dB(x) = b(x)d(x)$. Quindi se sostituiamo nella definizione otteniamo la seguente:

$$dA(y) = dB(x)$$

Ci troviamo di fronte ad un'uguaglianza di differenziali, perciò deduciamo che le due funzioni differiscono per una constante:

$$A(y) = B(x) + c$$

Per determinare quindi l'integrale generale di un'equazione differenziale a variabili separabili dobbiamo calcolare le primitive delle funzioni $a(y)$ e $b(x)$.

(2.4) Esempio *Risolviamo $y' + \dfrac{sen2x}{2(1+sen^2x)}y = 0$.*
Spostando a secondo membro uno degli addendi, ponendo $y' = \frac{dy}{dx}$ e applicando il secondo principio di equivalenza delle equazioni otteniamo un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili:

$$\frac{1}{y}dy = -\frac{sen2x}{2(1+sen^2x)}dx$$

Risolviamola.

$$\int \frac{1}{y}dx = \int -\frac{sen2x}{2(1+sen^2x)}dx \quad \longrightarrow \quad \ln|y| = \ln\frac{1}{\sqrt{|1+sen^2x|}} + c$$

Essendo $1 + sen^2x \geq 0\, \forall x \in \mathbb{R}$ possiamo togliere il modulo; riscriviamo inoltre il secondo

[1] *Augustin-Louis Cauchy* (1789-1857) è stato un matematico e ingegnere francese. Oltre ai grandi risultati prodotti nell'ambito dell'analisi matematica, famossissima è la prima definizione rigorosa di limite, e di funzione continua, contenuta nella sua opera *Corso di Analisi* (1821), egli è ricordato per la sua profonda fede cattolica, fedeltà alla monarchia ed amore per la letteratura trasmessigli dal padre durante la permanenza ad Arcueil.

membro utilizzando la proprietà della somma di logaritmi:

$$\ln|y| = \ln\frac{e^c}{\sqrt{1+sen^2x}}$$

Due logaritmi con stessa base sono uguali se lo sono i loro argomenti, quindi risulta come segue:

$$|y| = \frac{e^c}{\sqrt{1+sen^2x}} \quad \longrightarrow \quad y = \pm\frac{e^c}{\sqrt{1+sen^2x}}$$

Detto $m = \pm e^c$ *è possibile scrivere l'integrale generale:*

$$y = \frac{m}{\sqrt{1+sen^2x}}$$

Capitolo 2

Modelli matematici

Un modello matematico è una rappresentazione quantitativa di un fenomeno naturale.[1] Analizziamo tre diversi modelli matematici legati al concetto di equazione differenziale:

- *ambito fisico*, *Moto di caduta dei gravi con attrito*;
- *ambito biologico-ecologico*, *Modello di Malthus* e *Modello SIR*.

1 Studio del moto di caduta dei gravi con attrito

L'aria si comporta come un fluido quindi se lasciamo cadere un corpo essa opporrà una resistenza direttamente proporzionale alla velocità del grave. Il secondo principio della dinamica risulta così rappresentato:

$$mg - \beta v = ma$$

Sapendo che $a = \frac{dv}{dt}$, risolviamo l'equazione risultante:

$$mg - \beta v = m\frac{dv}{dt} \quad \longrightarrow \quad \frac{mg}{\beta} - v = \frac{m}{\beta}\frac{dv}{dt} \quad \longrightarrow \quad \frac{\beta}{m}dt = \frac{dv}{\frac{mg}{\beta} - v}$$

$$\int \frac{dv}{\frac{mg}{\beta} - v} = \int \frac{\beta}{m}dt \quad \longrightarrow \quad -\ln|\frac{mg}{\beta} - v| = \frac{\beta}{m}t + c$$

$$|\frac{mg}{\beta} - v| = e^{c'}e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

Chiamiamo $k = \pm e^c$:

$$v(t) = \frac{mg}{\beta} - ke^{-\frac{\beta}{m}t}$$

[1] *John W. Cain*, *Modelli matematici nelle scienze* (2014), Harvard University.

Se supponiamo che a $t = 0$, $v(0) = 0$:

$$0 = \frac{mg}{\beta} - k \quad \longrightarrow \quad k = \frac{mg}{\beta}$$

La legge risulta quindi la seguente:

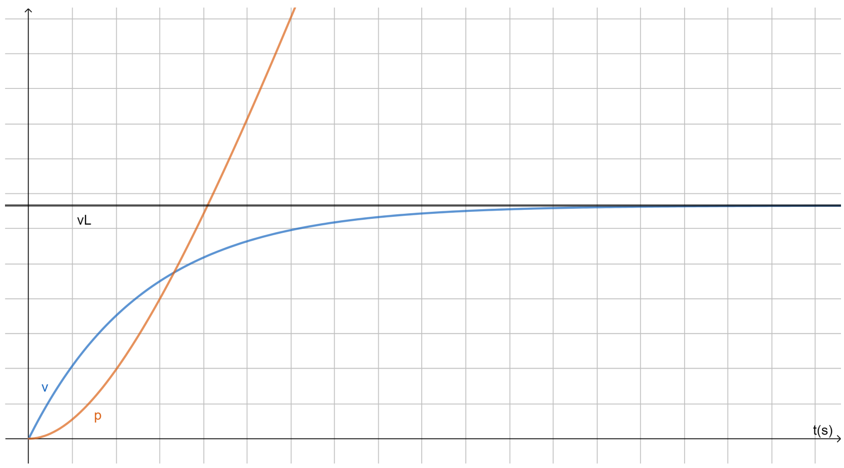
$$v(t) = \frac{mg}{\beta}(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t})$$

Dalla definizione di velocità possiamo ricavare la legge oraria:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{mg}{\beta}(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}) \quad \longrightarrow \quad dx = \frac{mg}{\beta}(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t})dt$$

$$x(t) = \frac{mg}{\beta}(t + \frac{m}{\beta}e^{-\frac{\beta}{m}t}) - \frac{m^2 g}{\beta^2}$$

I grafici delle due leggi, posizione e velocità, risultano essere i seguenti[2]:



Notiamo che la velocità tende ad un valore limite calcolabile: $v_{lim} = \frac{mg}{\beta}$

2 Modello di Malthus

Il modello di Malthus[3] descrive l'evoluzione di una popolazione in funzione del tempo. In una popolazione isolata, senza cioè flussi migratori entranti o uscenti, e con una disponibilità illimitata di risorse, la variazione nel numero di individui dipende dal numero dei nati e dal numero dei deceduti, dipendenti a loro volta dal numero di individui

[2] Realizzato con Geogebra.
[3] *Thomas Robert Malthus* (1766-1834) è stato un economista e demografo inglese.

stesso. Formalizzando:

$$dN(t) = aN(t)dt - bN(t)dt \quad \longrightarrow \quad dN(t) = (a-b)N(t)dt$$

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = (a-b)dt \quad \longrightarrow \quad \int \frac{1}{N(t)}dN(t) = \int (a-b)dt$$

$$\ln|N(t)| = (a-b)t + c \quad \longrightarrow \quad |N(t)| = e^c e^{(a-b)t} \quad \longrightarrow \quad N(t) = \pm e^c e^{(a-b)t}$$

Definiamo $k = a - b$ come *potenziale biologico* e posto $t = 0$ avremo $N(0) = \pm e^c$. Risulta la seguente legge:

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

3 Modello SIR

È un modello per lo studio delle epidemie proposto da Kermack e McKendrick nel 1927.
Suddividiamo la popolazione in 3 gruppi:

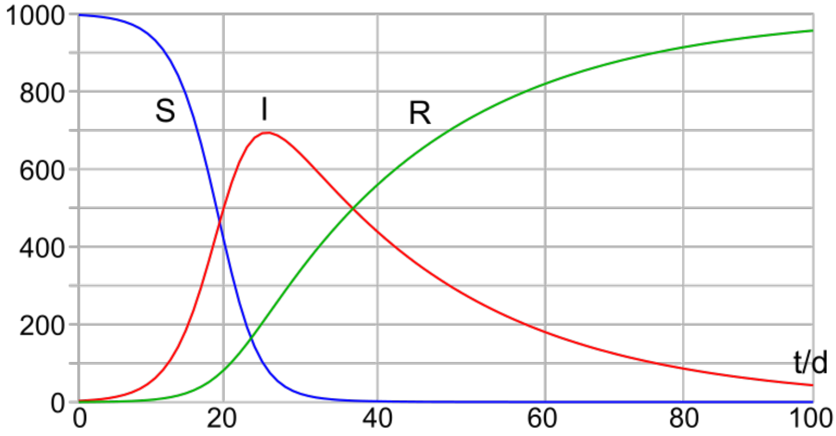
- *suscettibili S*, persone che potrebbero essere infettate;
- *infetti I*, individui che stanno affrontando la malattia;
- *rimossi R*, o in inglese *recovered*, i guariti.

La distinzione è necessaria ipotizzando che i guariti siano immuni.
Le equazioni differenziali che governano questo modello sono le seguenti:

$$\frac{dS}{dt} = -aIS \qquad \frac{dI}{dt} = aIS - bI \qquad \frac{dR}{dt} = bI$$

I coefficenti a e b rappresentano rispettivamente quanto la malattia è infettiva e quanto l'organismo riesce a rispondere in modo efficace per neutralizzarla. Le equazioni differenziali definite descrivono delle leggi che possono essere rappresentate sul piano cartesiano in questo modo[4]:

[4] Klaus-Dieter Keller, Opera propria.



In questo modello un'epidemia inizia solo se la derivata del numero di infetti rispetto al tempo è positiva:

$$aIS - bI > 0$$

Al tempo $t = 0$ il numero dei suscettibili è uguale al totale degli individui (che supponiamo costante):

$$aIN - bI > 0 \quad \longrightarrow \quad aN - b > 0$$

$$\frac{aN}{b} > 1$$

Chiamiamo $R_0 = \frac{aN}{b}$, quindi otteniamo $R_0 > 1$.
Risulta chiaro che se il parametro R_0 è maggiore di 1 gli infetti al tempo t aumentano progressivamente; al contrario se è minore di 1 gli infetti al tempo t diminuiscono.

Bibliografia

[1] Baroncini et al. (2012), *Lineamenti.MATH Blu*, Ghisetti & Corvi, Novara

[2] Degiovanni (2020), *Analisi matematica I parte*, Università Cattolica del Sacro Cuore, Brescia

[3] Bramanti et al. (2008), *Analisi matematica 1*, Zanichelli, Bologna

[4] Bramanti et al. (2009), *Analisi matematica 2*, Zanichelli, Bologna

[5] Bastin (2018), *Lectures on Mathematical Modelling of Biological Systems*, Università Cattolica di Lovanio (Belgio)