LICEO SCIENTIFICO "CAMILLO GOLGI"

FISICA

Mattia Garatti

Anno Scolastico 2022/2023

Indice

Capitolo 1

La cinematica del piano

1 Richiami di cinematica generale

(1.1) Definizione *Chiamiamo **punto materiale** un corpo dotato di massa ma privo di dimensioni*[1].

(1.2) Definizione *Diciamo che un corpo si muove di **moto traslatorio** se gli assi di un sistema di riferimento ad esso connesso si mantengono sempre paralleli agli assi del sistema di riferimento scelto per descrivere il moto*[2].

In generale, per descrivere la posizione di un punto materiale nel piano abbiamo bisogno di un **sistema di riferimento** composto da due assi cartesiani in cui collocare il **vettore posizione**.

Un punto materiale si dirà in moto se il suo vettore posizione cambia al variare del tempo.

(1.3) Proposizione *In generale un punto materiale soggetto ad un moto piano ha due gradi di libertà, cioè sono necessari due numeri per descrivere univocamente il suo vettore posizione.*

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(1.4) Definizione *Dato un punto materiale in moto, chiamiamo **legge oraria** la funzione analitica che lega tra loro le coordinate del punto e il tempo.*

In altre parole è la funzione che descrive il vettore posizione al variare del tempo.

(1.5) Definizione *Chiamiamo **traiettoria** l'insieme dei punti dello spazio che vengono occupati dal punto materiale.*

Osserviamo subito che c'è una profonda differenza tra legge oraria e traiettoria: la prima descrive il moto istante per istante mentre la seconda è un'astrazione matematica in cui non compare il tempo.

---

[1] O comunque che presenta dimensioni trascurabili rispetto allo spazio in cui si muove o alle dimensioni dei corpi con cui interagisce.

[2] Che è un modo complicato per dire che il corpo non ruota.

Richiamiamo infine le nozioni di **velocità media** e di **accelerazione media**, che estese al piano diventano

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad , \quad \vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

dove $\vec{r}$ è il vettore posizione.

2 Moto parabolico

Consideriamo un piano verticale in assenza di attrito. Prendiamo un punto materiale e lanciamolo, al tempo t_0, da $P_0 = (x_0, y_0)$, con velocità $\vec{v}_0$ e inclinazione di un angolo θ. Per il **principio di separazione dei moti**[3] possiamo studiare ciò che succede in ciascuna delle due dimensioni separatamente:

- orizzontalmente il punto non è soggetto a forze e perciò, avendo una certa velocità iniziale di componente $v_{0;x}$, compirà moto rettilineo uniforme;
- verticalmente il punto è soggetto alla forza peso che produce un'accelerazione costante e quindi il punto compirà un moto rettilineo uniformemente accelerato.

Esprimiamo in linguaggio matematico le considerazioni fisiche che abbiamo fatto fino ad ora. L'*accelerazione* al variare del tempo può essere così descritta

$$\vec{a}(t) : \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} .$$

La *velocità* invece sarà

$$\vec{v}(t) : \begin{cases} v_x = v_{0;x} = v_0 \cos\theta \\ v_y = v_{0;y} - g(t - t_0) = v_0 \sin\theta - g(t - t_0) \end{cases} .$$

Infine possiamo anche scrivere la **legge oraria**

$$P(t) : \begin{cases} x = v_{0;x}(t - t_0) + x_0 = v_0 \cos\theta(t - t_0) + x_0 \\ y = v_{0;y}(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 + y_0 = v_0 \sin\theta(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 + y_0 \end{cases} .$$

(2.1) Proposizione *La traiettoria del moto parabolico è una parabola.*

Dimostrazione. Consideriamo la leggere oraria del moto parabolico, per semplicità di calcolo poniamoci nel caso $t_0 = 0$ e $P_0 = (0, 0)$,

$$P(t) : \begin{cases} x = v_0 \cos\theta t \\ y = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} .$$

ed esplicitiamo il tempo nella prima equazione

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta};$$

[3] Noto già a Galileo.

a questo punto sostituiamo nella seconda equazione

$$y = v_0 \sin\theta \frac{x}{v_0 \cos\theta} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta} \right)^2$$

e con qualche calcolo otteniamo infine la seguente funzione

$$y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\theta} + \tan\theta x$$

che è l'equazione di una parabola. ■

(2.2) Osservazione *Se dovessimo anche considerare l'attrito dell'aria le nostre considerazioni sarebbero ben diverse: la traiettoria potrebbe essere ben diversa da una parabola.*

Andiamo ora a calcolare alcune grandezze rilevanti nel moto parabolico.

Tempo di volo Il tempo di volo il tempo impiegato dal punto materiale a compiere un volo completo, dal punto di inizio del moto fino a che tocca terra. Per calcolarlo consideriamo la legge oraria, sempre con la semplificazione $t_0 = 0$ e $P_0 = (0, 0)$, ovvero

$$P(t) : \begin{cases} x = v_0 \cos\theta t \\ y = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

se noi imponiamo che

$y = 0$ ovvero che il corpo si trovi a terra otteniamo

$$v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2} g t^2 = 0$$

ossia un'equazione di secondo grado nella variabile t(tutti gli altri sono parametri, dei numeri) che possiamo risolvere

$$t(-\frac{1}{2} g t + v_0 \sin\theta) = 0$$

ottenendo $t_1 = 0$ e $t_2 = \frac{2 v_0 \sin\theta}{g}$. Come è chiaro dal grafico il tempo di volo è proprio t_2

$$t_{\text{volo}} = \frac{2 v_0 \sin\theta}{g}.$$

Altezza massima Possiamo calcolare l'altezza massima raggiunta dal punto materiale in due modi:

▲ Il punto di massima altezza è il punto di inversione del moto lungo l'asse y, perciò ci basta considerare la velocità del punto, con le solite semplificazioni,

$$\vec{v}(t) : \begin{cases} v_x = v_0 \cos\theta \\ v_y = v_0 \sin\theta - g t \end{cases}$$

ed imporre che $v_y = 0$ ottenendo

$$v_0 \sin\theta - g t = 0$$

e quindi

$$t = \frac{v_0 \sin \theta}{g}.$$

Presa ora la legge oraria

$$P(t) : \begin{cases} x = v_0 \cos \theta t \\ y = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

sostituendo nella seconda equazione il t trovato al passaggio precedente otteniamo

$$y = v_0 \sin \theta \frac{v_0 \sin \theta}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin \theta}{g} \right)^2$$

e con qualche conto

$$y = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}.$$

▼ Il punto di massima altezza viene raggiunto a metà del volo, perciò, nelle solite semplificazioni, al tempo

$$t = \frac{t_{\text{volo}}}{2}$$

da qui ripetendo i passaggi svolti nel metodo precedente si arriva ancora alla stessa conclusione.

Gittata Chiamiamo gittata la distanza tra il punto di lancio ed il punto in cui il corpo tocca terra. Presa la traiettoria, nelle solite semplificazioni,

$$y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \theta} + \tan \theta x$$

imponiamo che il punto materiale si trovi a terra, ovvero che $y = 0$

$$-\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \theta} + \tan \theta x = 0$$

che è un'equazione di secondo grado nella variabile x che possiamo risolvere

$$x \left(\tan \theta - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \theta} x \right) = 0$$

ottenendo $x_1 = 0$ che non ci interessa perché è il punto di partenza ed

$$x_2 = \frac{2 v_0^2 \cos^2 \theta \tan \theta}{g}$$

che dopo alcuni conti diventa

$$x_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

che è la gittata.

(2.3) Osservazione *La gittata massima, a parità delle altre condizioni iniziali, si ha per $\theta = 45\,°$. Inoltre angoli complementari danno la stessa gittata, cambia solo la massima altezza raggiunta.*

3 Moto circolare uniforme

Consideriamo un punto materiale che ruota attorno ad un punto di un piano mantenendosi sempre alla stessa distanza da esso: diciamo che il punto sta compiendo un **moto circolare**.

Il moto circolare ha la particolare proprietà di essere un moto piano con **un grado di libertà**: basta quindi un solo numero per descrivere la posizione del punto materiale. Possiamo usare la lunghezza dell'arco l oppure l'ampiezza dell'angolo spazzato θ; possiamo anche passare da una all'altra grazie alla relazione

$$l = r \cdot \theta$$

dove r è il raggio della circonferenza percorsa e θ in radianti[4].

Solitamente è preferibile usare l'angolo. Possiamo infatti definire la seguente nuova grandezza

(3.1) Definizione *Chiamiamo* ***velocità angolare media*** ω *il rapporto*

$$\omega := \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

la cui unità di misura è rad/s.

Diremo che un moto circolare è **uniforme** se $\omega =$ costante.

Definita questa nuova grandezza, possiamo iniziare lo studio del moto dal primo parametro fondamentale

Periodo Il periodo è il tempo impiegato dal punto materiale a fare un giro completo: nel moto circolare uniforme è una quantità costante infatti dalla definizione di ω

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Se imponiamo che venga fatto un giro completo, ovvero che $\Delta\theta = 2\pi$ avremo che Δt rappresenta il periodo; indicandolo con T risulta

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

[4] Per passare da gradi a radianti e viceversa basta scrivere la seguente proporzione

$$\alpha : \theta = 360° : 2\pi$$

dove α rappresenta l'ampiezza in gradi dell'angolo in esame e θ l'ampiezza in radianti. Sempre da questa proporzione si può ricavare che

$$1 \text{ rad} \approx 57,30°.$$

ovvero

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Frequenza La frequenza è il numero di giri effettuati nell'unità di tempo, ovvero il reciproco del periodo

$$\nu := \frac{1}{T}.$$

L'unità di misura della frequenza ν è l'Hertz (Hz)

$$1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}.$$

4 Proprietà fondamentali del moto circolare uniforme

Per quanto riguarda il moto circolare uniforme non andremo a determinare la legge oraria in quanto sono necessarie delle conoscenze matematiche che non sono ancora possedute. Studiamo invece due proprietà fondamentali

(4.1) Teorema (Prima proprietà) *Il modulo del vettore velocità $\vec{v}$ è direttamente proporzionale alla velocità angolare media ω e la costante di proporzionalità è il raggio r. In simboli*

$$v = \omega r.$$

La direzione di $\vec{v}$ è perpendicolare al raggio, ovvero tangente alla traiettoria. Il verso è quello del moto.

Dimostrazione. Per definizione, facendo un giro completo, la velocità è

$$v = \frac{\text{spazio}}{\text{tempo}} = \frac{2\pi r}{T}$$

ma

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

allora

$$v = \omega r.$$

Consideriamo ora la definizione di vettore velocità media

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

dove $\Delta \vec{r}$ è la corda. Se l'intervallo di tempo è piccolo, l'angolo compreso tra due raggi sarà circa 0, ma essendo un triangolo isoscele l'angolo alla base dovrà per forza essere 90° e quindi

$$\vec{v} \perp \vec{r}$$

ovvero la direzione del vettore velocità è perpendicolare al raggio. ■

(4.2) Teorema (Seconda proprietà) *Il modulo dell'accelerazione $\vec{a}$ è direttamente proporzionale al quadrato del modulo del vettore velocità $\vec{v}$ e la costante di proporzionalità è il reciproco del raggio r. In simboli*

$$a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r.$$

La direzione del vettore accelerazione è la stessa del raggio, ovvero è perpendicolare alla direzione del vettore velocità. Il verso è entrante, ovvero la punta della freccia è rivolta verso il centro.

Dimostrazione. Consideriamo due vettori velocità $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ presi a due istanti di tempo diversi, t_1 e t_2, e posizioniamoli con le code coincidenti. Essi ed il vettore $\Delta\vec{v}$ formeranno un triangolo. Per intervalli di tempo piccoli, l'angolo tra $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ sarà circa 0 e quindi analogamente a prima risulterà che

$$\Delta\vec{v} \perp \vec{v}.$$

Ora siccome

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

risulta che

$$\vec{a} \perp \vec{v}$$

perché moltiplicare un vettore per uno scalare non cambia la sua direzione.

Per andare a determinare il modulo dell'accelerazione[5] possiamo considerare due vettori posizione $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ presi a due istanti di tempo diversi, t_1 e t_2, e posizionarli con le code coincidenti. Prendiamo anche i corrispondenti vettori velocità $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, prolungando le rette d'azione. Questi quattro vettori formano un quadrilatero con 2 angoli retti. Gli altri due angoli saranno supplementari ed in particolare l'angolo tra $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, che possiamo chiamare θ e l'angolo tra $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, essendo supplementari dello stesso, angolo saranno uguali.

Allora i triangoli descritti dai vettori posizione e dai vettori velocità sono simili e quindi vale la relazione di proporzionalità, a intervalli di tempo piccoli,

$$r : \Delta r = v : \Delta v$$

da cui dividendo i secondi termini per Δt

$$r : \frac{\Delta r}{\Delta t} = v : \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

ovvero

$$r : v = v : a$$

e quindi

$$a = \frac{v^2}{r}$$

[5]Che chiameremo **accelerazione centripeta** per evidenziare le proprietà di direzione e verso.

applicando la prima proprietà si ottiene anche la seconda forma

$$a = \frac{(\omega r)^2}{r} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r. \blacksquare$$

(4.3) Osservazione *Se il moto non fosse uniforme, ovvero* $\omega \neq \text{costante}$, *oltre all'accelerazione centripeta comparirebbe anche l'**accelerazione tangenziale**. In generale infatti l'accelerazione centripeta è quella componente del vettore accelerazione che produce l'effetto di curvare la traiettoria mentre la componente tangenziale produce l'effetto di cambiare la velocità. In un moto più generale di quello preso in esame avremmo quindi*

$$\vec{a} = a_t \hat{t} + a_c \hat{n}.$$

Ovviamente nel nostro caso, ovvero il moto circolare uniforme, il tutto si semplifica diventando

$$\vec{a} = 0\hat{t} + a_c \hat{n} = a_c \hat{n}$$

e quindi l'accelerazione ha solo componente centripeta.