Corso di Eccellenza 2025

Mattia Garatti

13 giugno 2025 – Pomeriggio

1 Funzioni e concetti correlati

Iniziamo con un esempio a prima vista senza senso.

(1.1) Esempio $\emptyset$ *è una funzione.*

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare innanzitutto che $\emptyset$ è una relazione, ossia che la frase aperta

$$z \in \emptyset \implies \exists\, x, \exists\, y : z = (x, y)$$

è vera: si tratta di una frase aperta del tipo $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ con $\mathcal{P}$ falsa, allora dalla tavola di verità dell'implicazione ne segue la veridicità.

Mostriamo quindi che è una funzione, ossia che la frase aperta

$$(x, y_1), (x, y_2) \in \emptyset \implies y_1 = y_2$$

è vera: anche qui si tratta di una frase aperta del tipo $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ con $\mathcal{P}$ falsa, allora dalla tavola di verità dell'implicazione ne segue la veridicità. ∎

Un trucco utile, a volte, per dimostrare che una funzione è iniettiva è dato dalla seguente Proposizione.

(1.2) Proposizione *Siano f, g due funzioni. Se $g \circ f$ è iniettiva, allora f è iniettiva.*

Dimostrazione. Siano x_1, x_2 tali che $f(x_1) = f(x_2)$. In particolare, applicando g ad entrambi i membri, otteniamo $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ e per l'iniettività di $g \circ f$ segue la tesi. ∎

In altre parole, se componendo a sinistra riusciamo ad ottenere una funzione che sappiamo già essere iniettiva, allora anche la funzione di partenza è iniettiva.

(1.3) Esempio *La funzione* $f(x) = \sqrt{x}$ *è iniettiva.*

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $g(x) = x^2$. Siccome $g \circ f$ è iniettiva (in quanto restrizione della funzione identità), dalla Proposizione (1.2), segue la tesi. ■

2 Intermezzo: unicità della velocità

Vediamo che la velocità istantanea, se esiste, è unica.

(2.1) Proposizione *Data una legge oraria continua* $x(t)$ *e dato un istante* $\bar{t}$*, se esiste la velocità istantanea, allora è unica e si denota con* $v(\bar{t})$*.*

Dimostrazione. Supponiamo che v_1, v_2 siano velocità istantanee per $x(t)$ in $\bar{t}$. Allora, per definizione, per ogni successione (t_n) tale che $t_n \to \bar{t}$ esistono due successioni infinitesime $(\tau_n'), (\tau_n'')$ tali che

$$\begin{aligned} x(t_n) - x(\bar{t}) - v_1(t_n - \bar{t}) &= \tau_n'(t_n - \bar{t}), \\ x(t_n) - x(\bar{t}) - v_2(t_n - \bar{t}) &= \tau_n''(t_n - \bar{t}). \end{aligned}$$

Sottraiamo alla seconda equazione la prima, ottenendo

$$(v_1 - v_2)(t_n - \bar{t}) = (\tau_n'' - \tau_n')(t_n - \bar{t}).$$

Ora, potendo scegliere (t_n) tale che $t_n \neq \bar{t}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ottiene $v_1 - v_2 = \tau_n'' - \tau_n'$, ossia che $(v_1 - v_2)$ è infinitesima. Siccome $(v_1 - v_2)$ è una successione costante, segue che $v_1 = v_2$, da cui la tesi. ■

3 Trasformazioni lineari del piano

(3.1) Definizione *Dati* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$*, chiamiamo* trasformazione lineare del piano *ogni funzione* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tale che*

$$T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$$

o, in forma matriciale, detto $(X, Y) = T(x, y)$,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

In particolare, utilizziamo la notazione

$$A_T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

(3.2) Osservazione *Ad ogni trasformazione lineare nel piano corrisponde una matrice quadrata di ordine* 2*, e viceversa. In altre parole, le matrici quadrate di ordine* 2 *possono essere interpretate a livello geometrico come trasformazioni del piano, ossia funzioni che mandano punti del piano in punti del piano.*

(3.3) Teorema *Data una figura piana di area* S*, l'area della figura piana ottenuta dopo una trasformazione lineare* T *di matrice* A_T *è data da* $|\det A_T|S$.

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ∎

Un particolare tipo di trasformazione lineare è la *rotazione*.

(3.4) Definizione *Consideriamo* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Chiamiamo* rotazione piana di angolo α *la trasformazione lineare* $R_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tale che*

$$R_\alpha(x, y) = (x \cos\alpha - y \sin\alpha, x \sin\alpha + y \cos\alpha)$$

o, in forma matriciale, detto $(X, Y) = R_\alpha(x, y)$,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(3.5) Esempio *Consideriamo la curva piana* $\mathcal{C} : x^2 + 2y^2 = 1$*. Determiniamo la curva* $\mathcal{C}'$ *ottenuta ruotando in senso orario* $\mathcal{C}$ *di* $\frac{\pi}{4}$.

Svolgimento. In forma parametrica, la curva $\mathcal{C}$ appare come

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t. \end{cases}$$

Dobbiamo trovare $\mathcal{C}' = R_{\frac{\pi}{4}}\mathcal{C}$, ossia, in forma matriciale,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t \end{pmatrix},$$

da cui

$$\mathcal{C}' : \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t. \end{cases}$$

Per ottenerne una rappresentazione cartesiana ci basta ora osservare che

$$x + y = \sqrt{2}\cos t, \qquad\qquad y - x = \sin t,$$

da cui

$$\frac{(x+y)^2}{2} + (y-x)^2 = 1$$

che diventa $\mathcal{C}' : 3x^2 + 3y^2 - 2xy = 2$. ■

(3.6) Proposizione *Consideriamo* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Allora* $\det(A_{R_\alpha}) = 1$.

Dimostrazione. Ricordando la relazione fondamentale della goniometria,

$$\det \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1. \blacksquare$$

(3.7) Osservazione *Combinando la Proposizione precedente con il Teorema* (3.3), *possiamo dedurre che le rotazioni non modificano l'area delle figure.*

4 Esercizi

(4.1) Esercizio *Sia* R *una relazione. Dimostrare che*

$$(R^{-1})^{-1} = R.$$

Soluzione. Basta osservare la veridicità della seguente catena di doppie implicazioni

$$(x, y) \in (R^{-1})^{-1} \iff (y, x) \in R^{-1} \iff (x, y) \in R. \blacksquare$$

(4.2) Esercizio *Dimostrare che $\emptyset$ è una funzione iniettiva.*

Soluzione. Abbiamo già visto nell'Esempio (1.1) che $\emptyset$ è una funzione, quindi dobbiamo solo mostrare che è iniettiva, ossia che la frase aperta

$$(x_1, y), (x_2, y) \in \emptyset \implies x_1 = x_2$$

è vera: si tratta di una frase aperta del tipo $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ con $\mathcal{P}$ falsa, allora dalla tavola di verità dell'implicazione ne segue la veridicità. ■

(4.3) Esercizio *Determinare dominio e immagine di $\emptyset$.*

Soluzione. Analizziamo la frase aperta

$$x \in \emptyset \Longleftrightarrow (\exists\, y : (x, y) \in \emptyset).$$

La frase aperta $x \in \emptyset$ è falsa, quindi

$$x \in \emptyset \implies (\exists\, y : (x, y) \in \emptyset)$$

è vera. Analogamente, $(\exists\, y : (x, y) \in \emptyset)$ è falsa, quindi

$$(\exists\, y : (x, y) \in \emptyset) \implies x \in \emptyset$$

è vera. Siccome il dominio di una relazione è univocamente determinato, segue che $\mathrm{dom}(\emptyset) = \emptyset$.

Analizziamo ora la frase aperta

$$y \in \emptyset \Longleftrightarrow (\exists\, x : (x, y) \in \emptyset).$$

La frase aperta $y \in \emptyset$ è falsa, quindi

$$xy \in \emptyset \implies (\exists\, x : (x, y) \in \emptyset)$$

è vera. Analogamente, $(\exists\, x : (x, y) \in \emptyset)$ è falsa, quindi

$$(\exists\, x : (x, y) \in \emptyset) \implies y \in \emptyset$$

è vera. Siccome l'immagine di una relazione è univocamente determinata, segue che $\mathrm{Im}(\emptyset) = \emptyset$. ■

(4.4) Esercizio *Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ due applicazioni. Dimostrare che se $g \circ f$ è suriettiva, allora g è suriettiva.*

Soluzione. Dato $z \in Z$, per suriettività di $g \circ f$, esiste $x \in X$ tale che $g(f(x)) = z$. Allora, in particolare, $y = f(x) \in Y$ e $g(y) = z$, da cui la tesi. ■

(4.5) Esercizio *Dimostrare che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che*

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

è biettiva.

Soluzione. Consideriamo la funzione $g(x) = x^3$. Siccome $g \circ f = \mathrm{Id}$ è iniettiva, dalla Proposizione (1.2), segue l'iniettività. Analogamente, siccome $f \circ g = \mathrm{Id}$ è suriettiva, dalla Proposizione (4.4), segue la suriettività. ■

(4.6) Esercizio *Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dimostrare che $R_\alpha \circ R_\beta = R_\beta \circ R_\alpha = R_{\alpha+\beta}$.*

Soluzione. Dobbiamo dimostrare che la composizione di rotazioni è commutativa: in forma matriciale abbiamo, usando le formule di addizione di sin e cos,

$$\begin{aligned} A_{R_\alpha} A_{R_\beta} &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = A_{R_{\alpha+\beta}}, \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

(4.7) Esercizio *Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Dimostrare che la funzione $R_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è biettiva e che la sua inversa è $R_{-\alpha}$. Verificare poi che $A_{R_{-\alpha}} = A^T_{R_\alpha}$.*

Soluzione. L'iniettività segue dalla Proposizione (1.2) osservando che, per l'Esercizio (4.6), $R_{-\alpha} \circ R_\alpha = \mathrm{Id}$. La suriettività segue dall'Esercizio (4.4) osservando che, sempre per l'Esercizio (4.6), $R_\alpha \circ R_{-\alpha} = \mathrm{Id}$. In particolare, l'inversa di R_α è $R_{-\alpha}$.

Infine,

$$A_{R_{-\alpha}} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = A_{R_\alpha}^T,$$

da cui la tesi. ■

(4.8) Esercizio *Determinare un'equazione cartesiana della curva ottenuta ruotando di $\frac{\pi}{2}$ in senso orario la parabola di equazione $p : y = x^2 + 2x + 1$. Riconoscere la curva ottenuta.*

Soluzione. In forma parametrica, la parabola p appare come

$$p : \begin{cases} x = t, \\ y = t^2 + 2t + 1. \end{cases}$$

Dobbiamo trovare $p' = R_{-\frac{\pi}{3}} p$, ossia, in forma matriciale,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & \sin\frac{\pi}{2} \\ -\sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t^2 + 2t + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t^2 + 2t + 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} t^2 + 2t + 1 \\ -t \end{pmatrix},$$

da cui

$$p' : \begin{cases} x = t^2 + 2t + 1, \\ y = -t. \end{cases}$$

Per ottenerne una rappresentazione cartesiana ci basta sostituire la seconda equazione nella prima, da cui $p' : x = y^2 - 2y + 1$, che è ancora una parabola. ■

(4.9) Esercizio *Dimostrare che la successione $x_n = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}+1}$ è infinitesima.*

Soluzione. Abbiamo visto martedì pomeriggio che se $n \geq 4$ allora $n^2 \leq 2^n$. In particolare, $2^{\frac{n}{2}} \geq \sqrt{n}$, quindi $2^{\frac{n}{2}} + 1 \geq \sqrt{n}$, da cui

$$0 \leq \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} + 1} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Avendo già dimostrato che $y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ è infinitesima, la tesi segue dalla variante del Teorema dei carabinieri. ■

(4.10) Esercizio *Determina la cifra delle migliaia della somma dei primi* 2025 *numeri naturali strettamente positivi.*

Soluzione. Usando la formula di Gauss,

$$\sum_{i=1}^{2025} i = \frac{2025 \cdot 2026}{2} = 2025 \cdot 1013 = 2051325,$$

per cui la cifra delle migliaia è 1. ■

(4.11) Esercizio *Si discuta, senza risolverlo esplicitamente, la risolubilità del sistema reale*

$$\begin{cases} x + hy + (h-1)z = 1, \\ 2x + 2(h-1)y - 2z = 2 - h, \\ (h-1)x + y - (h-1)z = 0, \end{cases}$$

al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$. Nei casi in cui il sistema è risolubile, si determini il numero di soluzioni.

Soluzione. Usiamo il Teorema di Rouché–Capelli. Innanzitutto, $\det A = 2(2-h)(h^2 - h + 1)$, quindi se $h \neq 2$, $\mathrm{rg} A = 3 = \mathrm{rg}(A|\mathbf{b})$, da cui deduciamo che il sistema ammette un'unica soluzione. Se $h = 2$, $\mathrm{rg} A = 2 = \mathrm{rg}(A|\mathbf{b})$, quindi il sistema ammette ∞^1 soluzioni. ■

(4.12) Esercizio *Si discuta la posizione reciproca delle rette*

$$r : -2hx + (2-h)y = 0, \qquad s : (2+h)x - 2hy = h + 1$$

al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Si tratta di capire, al variare di $h \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} -\sqrt{3}hx + (1-h)y = 0, \\ (1+h)x - \sqrt{3}hy = h + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Usiamo il Teorema di Rouché–Capelli. Innanzitutto, $\det A = (2h-1)(2h+1)$, quindi se $h \neq \pm\frac{1}{2}$, $\mathrm{rg} A = 2 = \mathrm{rg}(A|\mathbf{b})$, da cui deduciamo che il sistema ammette un'unica soluzione e quindi le rette sono incidenti. Se $h = \frac{1}{2}$, $\mathrm{rg} A = 1 \neq 2 = \mathrm{rg}(A|\mathbf{b})$, quindi il sistema non ammette soluzione e le rette sono parallele e distinte. Infine, se $h = -\frac{1}{2}$,

$\mathrm{rg}A = 1 = \mathrm{rg}(A|\mathbf{b})$, quindi il sistema ammette ∞^1 soluzioni, ossia le rette sono coincidenti. ■

(4.13) Esercizio *Dimostrare che tutte le potenze ad esponente naturale di* 3 *hanno la cifra delle decine pari.*

Soluzione. Dobbiamo studiare la cifra delle decine di 3^n con $n \in \mathbb{N}$.

Mostriamo, innanzitutto, per induzione che la cifra delle unità di 3^n è sempre $1, 3, 7$ oppure 9. Se $n = 0$, $3^0 = 1$ la cui cifra delle unità è 1. Supponiamo ora che la cifra delle unità di 3^n sia $1, 3, 7$ oppure 9. Distinguiamo i quattro casi possibili, tenendo presente che $3^{n+1} = 3^n \cdot 3$: se è 1, la cifra delle unità di 3^{n+1} è 3; se è 3, la cifra delle unità di 3^{n+1} è 9; se è 7, la cifra delle unità di 3^{n+1} è 1; se è 9, la cifra delle unità di 3^{n+1} è 7.

Dimostriamo ora la tesi, sempre per induzione. Se $n = 0$, abbiamo $3^0 = 1$ la cui cifra delle decine è 0, che è pari. Supponiamo ora che la tesi sia vera per n, ossia 3^n ha come cifra delle decine un numero pari, chiamiamolo d_n. Siccome $3^{n+1} = 3^n \cdot 3$, osserviamo che il numero ottenuto dalla giustapposizione della cifra delle centinaia e quella delle decine di 3^{n+1} è $3d_n + r$, dove r è il riporto nella moltiplicazione tra la cifra delle unità di 3^n e 3: siccome, dal passaggio precedente, la cifra delle unità di 3^n può essere solo $1, 3, 7$ oppure 9, deduciamo che gli unici valori che può assumere r sono 0 oppure 2, ossia r è pari. Allora lo è pure $3d_n + r$, in quanto somma di numeri pari. Siccome un numero è pari se e solo se la sua cifra delle unità è pari, segue che d_{n+1} è pari. ■

(4.14) Esercizio *Dimostrare che la somma dei primi* n *interi strettamente positivi pari è* $n(n+1)$.

Soluzione. Si tratta di dimostrare che

$$\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1).$$

Procediamo per induzione. Se $n = 1$, abbiamo $2 = 1 + 1$, che è vero. Supponiamo ora che la tesi sia vera per un certo n, ossia che

$$\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1).$$

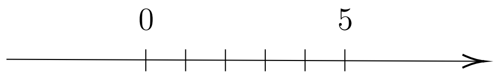
Allora,

$$\sum_{i=1}^{n+1} 2i = \sum_{i=1}^{n} 2i + 2(n+1) = n(n+1) + 2(n+1) = (n+1)(n+2),$$

da cui la tesi. ■

(4.15) Esercizio *Consideriamo la retta dei numeri reali. Un ranocchio si trova in* 0 *e può fare salti di ampiezza* 1*. Sapendo che farà al massimo* 9 *salti, in quanti modi può raggiungere* 5*?*

Soluzione. Innanzitutto, rappresentiamo la situazione.



Essendo 5 il numero minimo di salti per raggiungere 5 partendo da 0 sono necessari, in qualunque caso, un numero dispari di salti. In particolare, se al massimo fa 9 salti, allora i casi possibili sono $5, 7$ oppure 9 salti.

Se fa 5 salti, c'è un solo modo per raggiungere la destinazione.

Se fa 7 salti, deve necessariamente fare 6 salti verso destra ed un salto verso sinistra, indipendentemente dall'ordine dei salti: in altre parole sono ammissibili tutte le permutazioni di

$$+ + + + + + -,$$

ossia ci sono $\frac{7!}{6!} = 7$ modi possibili.

Se fa 9 salti, deve necessariamente fare 7 salti verso destra e 2 salti verso sinistra, indipendentemente dall'ordine dei salti: in altre parole sono ammissibili tutte le permutazioni di

$$+ + + + + + + - -,$$

ossia ci sono $\frac{9!}{7! \cdot 2!} = 9 \cdot 4 = 36$ modi possibili.

In definitiva, i modi possibili sono 44. ■