LICEO SCIENTIFICO "CAMILLO GOLGI"

MATEMATICA

Mattia Garatti

Anno Scolastico 2022/2023

Indice

Capitolo 1

Equazioni e disequazioni algebriche: complementi

1 Il valore assoluto

(1.1) Definizione *Per ogni $x \in \mathbb{R}$, poniamo*

$$|x| := \begin{cases} x \ , \ \text{se } x \geq 0 \\ -x \ \ \text{se } x \leq 0 \end{cases} .$$

Il numero reale positivo $|x|$ si chiama valore assoluto o modulo di x.

Richiamiamo ora alcune proprietà del valore assoluto

(1.2) Proposizione *Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti proprietà*

$$|x| \geq 0, \tag{1.3}$$

$$|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0, \tag{1.4}$$

$$|-x| = |x|, \tag{1.5}$$

$$|x| = |y| \Longleftrightarrow x = \pm y, \tag{1.6}$$

$$|xy| = |x||y|, \tag{1.7}$$

$$x \neq 0 \Longrightarrow |x^{-1}| = |x|^{-1}, \tag{1.8}$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \tag{1.9}$$

$$|x - y| \geq ||x| - |y||. \tag{1.10}$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

2 Richiami sulle equazioni con i valori assoluti

(2.1) Definizione *Un'equazione si dice **con i valori assoluti** se l'incognita compare almeno una volta come argomento di un valore assoluto.*

Analizziamo l'andamento dell'insieme delle soluzioni di alcuni tipi di equazioni con i valori assoluti cercando di ricondurci a modalità note per la risoluzione.

Equazioni del tipo $|f(x)| = a$ Possono capitare, in base al valore di a tre situazioni diverse:

- se $a > 0$ allora $f(x) = \pm a$;
- se $a = 0$ allora $f(x) = 0$;
- se $a < 0$ allora $\nexists\, x \in \mathbb{R}$.

Equazioni del tipo $|f(x)| = |g(x)|$ Per le proprietà del valore assoluto basta considerare separatamente il caso

$$f(x) = g(x)$$

ed il caso

$$f(x) = -g(x)$$

ricordando infine di scrivere la soluzione in modo unito.

Equazioni del tipo $|f(x)| = g(x)$ Equazioni di questo tipo sono equivalenti all'unione di due sistemi

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases} \quad .$$

Può capitare infine che in un'equazione compaia più di un valore assoluto: in questo caso ci basta studiare il segno di ciascuno e suddividere la retta reale di conseguenza.

3 Disequazioni con i valori assoluti

(3.1) Definizione *Una disequazione si dice* ***con i valori assoluti*** *se l'incognita compare almeno una volta come argomento di un valore assoluto.*

Analizziamo l'andamento dell'insieme delle soluzioni in alcuni tipi di disequazioni con i valori assoluti cercando di ricondurci a modalità note per la risoluzione.

Disequazioni del tipo $|f(x)| < a$ Possiamo essere davanti a due scenari, dipende dal valore di a:

- se $a > 0$ allora $-a < f(x) < a$[1];
- se $a \leq 0$ allora $\nexists\, x \in \mathbb{R}$.

[1] Risolvere una disequazione del tipo

$$-a < f(x) < a$$

equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} f(x) > -a \\ f(x) < a \end{cases} \quad .$$

Disequazioni del tipo $|f(x)| \leq a$ Possiamo essere davanti a tre scenari, dipende dal valore di a:

- se $a > 0$ allora $-a \leq f(x) \leq a$;
- se $a = 0$ allora $f(x) = 0$;
- se $a < 0$ allora $\nexists\, x \in \mathbb{R}$.

Disequazioni del tipo $|f(x)| > a$ Possiamo essere davanti a due scenari, dipende dal valore di a:

- se $a > 0$ allora $f(x) < -a \vee f(x) > a$;
- se $a \leq 0$ allora l'equazione è sempre verificata per tutti i valori per i quali $f(x)$ è definita e che non la annullano.

Disequazioni del tipo $|f(x)| \geq a$ Possiamo essere davanti a due scenari, dipende dal valore di a:

- se $a > 0$ allora $f(x) \leq -a \vee f(x) \geq a$;
- se $a \leq 0$ allora l'equazione è sempre verificata per tutti i valori per i quali $f(x)$ è definita.

Disequazioni del tipo $|f(x)| \gtrless g(x)$ Disequazioni di questo tipo sono equivalenti all'unione di due sistemi

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) \gtrless g(x) \end{cases} \cup \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) \gtrless g(x) \end{cases}.$$

Il discorso è analogo se sostituiamo *maggiore di*(risp. *minore di*) con *maggiore o uguale di*(risp. *minore o uguale di*).

Può capitare infine che in una disequazione compaia più di un valore assoluto. In questo caso ci basta studiare il segno di ciascuno e suddividere la retta reale di conseguenza.

4 Richiami sulle equazioni irrazionali

(4.1) Definizione *Un'equazione si dice **irrazionale** se l'incognita compare almeno una volta nell'argomento di una radice.*

Analizziamo l'andamento dell'insieme delle soluzioni di alcuni tipi di equazioni irrazionali cercando di ricondurci a modalità note per la risoluzione.

Equazioni del tipo $\sqrt[n]{f(x)} = k$

se n pari abbiamo due situazioni che possono presentarsi, dipende da k:

- se $k \geq 0$ allora $f(x) = k^n$;
- se $k < 0$ allora $\nexists\, x \in \mathbb{R}$.

se n dispari allora $f(x) = k^n$.

Equazioni del tipo $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$

se n **pari** l'equazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = (g(x))^n \end{cases} \quad ;$$

se n **dispari** allora $f(x) = (g(x))^n$.

5 Disequazioni irrazionali

(5.1) Definizione *Una disequazione si dice* ***irrazionale*** *se l'incognita compare almeno una volta come argomento di una radice.*

Analizziamo l'andamento dell'insieme delle soluzioni di alcuni tipi di disequazioni irrazionali cercando di ricondurci a modalità note per la risoluzione.

Disequazioni del tipo $\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$

se n **pari** la disequazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < (g(x))^n \end{cases} \quad ;$$

se n **dispari** allora $f(x) < (g(x))^n$.

Disequazioni del tipo $\sqrt[n]{f(x)} \leq g(x)$

se n **pari** la disequazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq (g(x))^n \end{cases} \quad ;$$

se n **dispari** allora $f(x) \leq (g(x))^n$.

Disequazioni del tipo $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$

se n **pari** la disequazione è equivalente all'unione di due sistemi

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > (g(x))^n \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

se n **dispari** allora $f(x) > (g(x))^n$.

Disequazioni del tipo $\sqrt[n]{f(x)} \geq g(x)$

se n **pari** la disequazione è equivalente all'unione di due sistemi

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq (g(x))^n \end{cases} \cup \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

se n **dispari** allora $f(x) \geq (g(x))^n$.

(5.2) Osservazione *Può capitare infine che in una disequazione compaia più di una radice. In questo caso possiamo procedere così:*

1. *Facciamo il sistema delle condizioni di esistenza;*
2. *Controlliamo la concordanza tra primo e secondo membro;*
3. *Eleviamo ambo i membri fino a non avere più radici.*