



# Misure di luminosità e sezioni d'urto di riferimento nell'esperimento ALICE tramite van der Meer scan

---

Mattia Ivaldi

22/04/2016

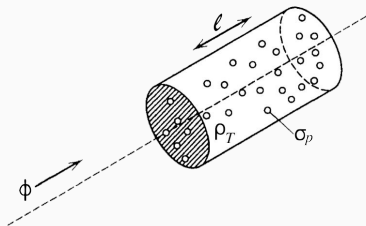
Conferenza Italiana Studenti di Fisica

1. Luminosità:
  - a bersaglio fisso
  - ai collider
  - effettiva
2. Misure di luminosità
3. van der Meer scan
4. Processo di riferimento
5. A Large Ion Collider Experiment
6. vdM@ALICE:
  - setup, trigger, raw rate, rate vs displacement (p-Pb 2013)
  - reference cross section
7. Confronto tra luminosità V0 e T0-based
8. Conclusioni

# Luminosità: bersaglio fisso

Si consideri la collisione di un proiettile su un bersaglio fisso di lunghezza  $\ell$  e densità costante  $\rho_T$ . Sia  $\Phi = \frac{dN}{dt}$  il numero di proiettili al secondo.

[W. Herr, B. Muratori, <https://cdsweb.cern.ch/record/941318/files/p361.pdf>, 2010]



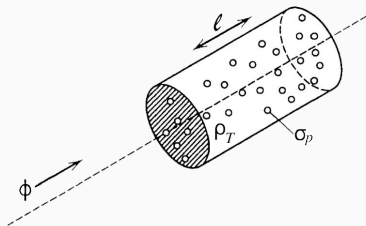
**Figura 1:** *Luminosità a bersaglio fisso.*

# Luminosità: bersaglio fisso

Si consideri la collisione di un proiettile su un bersaglio fisso di lunghezza  $\ell$  e densità costante  $\rho_T$ . Sia  $\Phi = \frac{dN}{dt}$  il numero di proiettili al secondo. Il tasso di interazioni è descritto dalla formula:

$$R = \Phi \rho_T \ell \sigma_p = L \sigma_p \quad (1)$$

[W. Herr, B. Muratori, <https://cdsweb.cern.ch/record/941318/files/p361.pdf>, 2010]



**Figura 1:** *Luminosità a bersaglio fisso.*

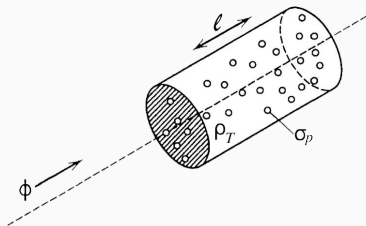
# Luminosità: bersaglio fisso

Si consideri la collisione di un proiettile su un bersaglio fisso di lunghezza  $\ell$  e densità costante  $\rho_T$ . Sia  $\Phi = \frac{dN}{dt}$  il numero di proiettili al secondo. Il tasso di interazioni è descritto dalla formula:

$$R = \Phi \rho_T \ell \sigma_p = L \sigma_p \quad (1)$$

La quantità  $L$  prende il nome di **luminosità** e rappresenta il tasso di conteggio per sezione d'urto unitaria ( $\text{b}^{-1} \text{s}^{-1}$ ).

[W. Herr, B. Muratori, <https://cdsweb.cern.ch/record/941318/files/p361.pdf>, 2010]



**Figura 1:** *Luminosità a bersaglio fisso.*

In un collider entrambi i fasci agiscono sia come proiettile sia come bersaglio. Si consideri, pertanto, il fascio 1 come bersaglio e il fascio 2 come proiettile in moto con velocità  $v_{12}$  nel sistema di riferimento del fascio 1 e si consideri il volume  $dV_2$  di lunghezza  $d\ell_2 = v_{12} dt$  contenente  $dN_2 = \rho_2 dV_2$  particelle.

In un collider entrambi i fasci agiscono sia come proiettile sia come bersaglio. Si consideri, pertanto, il fascio 1 come bersaglio e il fascio 2 come proiettile in moto con velocità  $v_{12}$  nel sistema di riferimento del fascio 1 e si consideri il volume  $dV_2$  di lunghezza  $d\ell_2 = v_{12} dt$  contenente  $dN_2 = \rho_2 dV_2$  particelle. La formula per il bersaglio fisso si modifica in:

$$dL = \rho_1 \rho_2 v_{12} dV_2 \quad (2)$$

In un collider entrambi i fasci agiscono sia come proiettile sia come bersaglio. Si consideri, pertanto, il fascio 1 come bersaglio e il fascio 2 come proiettile in moto con velocità  $v_{12}$  nel sistema di riferimento del fascio 1 e si consideri il volume  $dV_2$  di lunghezza  $d\ell_2 = v_{12} dt$  contenente  $dN_2 = \rho_2 dV_2$  particelle. La formula per il bersaglio fisso si modifica in:

$$dL = \rho_1 \rho_2 v_{12} dV_2 \quad (2)$$

Questa viene resa Lorentz-invariante introducendo il fattore di Møller:

$$dL = \rho_1 \rho_2 \sqrt{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - \frac{(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2}{c^2}} dV = \rho_1 \rho_2 K dV_2 \quad (3)$$



Integrando rispetto a spazio e tempo la quantità  $dL$  si ottiene la luminosità integrata per bunch crossing, moltiplicando quest'ultima per  $f_{rev}$  si ottiene la luminosità effettiva del collider:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= f_{rev} K \iint \rho_1(x, y, z, t) \rho_2(x, y, z, t) dV dt \\ &= f_{rev} N_1 N_2 K \iint f_1(x, y, z, t) f_2(x, y, z, t) dV dt\end{aligned}\tag{4}$$

dove  $f_{1,2}$  sono distribuzioni di probabilità normalizzate a 1.

Per svolgere l'integrale si assume che:

- la forma dei due bunch sia invariante per traslazioni rigide nella direzione di propagazione ( $z$ );
- i fasci siano collineari;
- le densità di particelle nelle tre direzioni spaziali siano fattorizzabili;
- entrambi i bunch presentino forma gaussiana in  $z$ , ovvero:

$$f_{1,2,z}(z, t) = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp - \frac{(z \pm ct)^2}{2 \sigma_z^2} \quad (5)$$

- $v_1 = v_2 = c$ ,  $K = 2c$ .

Applicando tali assunzioni si ottiene il *beam overlap integral*:

$$\mathcal{L} = f_{rev} N_1 N_2 \iint f_{1x}(x) f_{1y}(y) f_{2x}(x) f_{2y}(y) dx dy \quad (6)$$

Applicando tali assunzioni si ottiene il *beam overlap integral*:

$$\mathcal{L} = f_{rev} N_1 N_2 \iint f_{1x}(x) f_{1y}(y) f_{2x}(x) f_{2y}(y) dx dy \quad (6)$$

Definendo le *effective beam widths*  $h_{x,y}$  come:

$$\frac{1}{h_{x,y}} = \int f_{1x,y}(x, y) f_{2x,y}(x, y) dx, y \quad (7)$$

Applicando tali assunzioni si ottiene il *beam overlap integral*:

$$\mathcal{L} = f_{rev} N_1 N_2 \iint f_{1x}(x) f_{1y}(y) f_{2x}(x) f_{2y}(y) dx dy \quad (6)$$

Definendo le *effective beam widths*  $h_{x,y}$  come:

$$\frac{1}{h_{x,y}} = \int f_{1x,y}(x, y) f_{2x,y}(x, y) dx, y \quad (7)$$

la luminosità effettiva del collider si riscrive come:

$$\mathcal{L} = \frac{f_{rev} N_1 N_2}{h_x h_y} \quad (8)$$

**Misure indirette:** sezioni d'urto teoriche, teorema ottico.

**Misure indirette:** sezioni d'urto teoriche, teorema ottico.

**Misure dirette:** misure indipendenti di  $N_{1,2}$  (current transformer) e  $h_{x,y}$  (wire scans, beam-gas imaging, **van der Meer scan**).

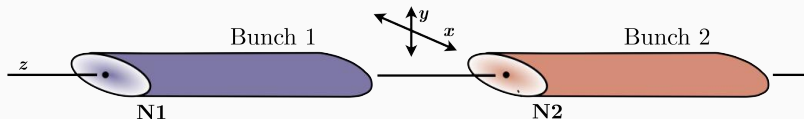


**Figura 2:** Articolo originale di Simon van der Meer del 1968, nel quale viene proposta l'omonima tecnica.

Siano  $\rho_{1,2}(x_i) = N_{1,2} f_{1,2 x_i}(x_i)$  le densità di particelle nella direzione trasversa  $x_i$ , si ha:

$$h_{eff} = \frac{\int \rho_1(x_i) dx_i \int \rho_2(x_i) dx_i}{\int \rho_1(x_i) \rho_2(x_i) dx_i} \quad (9)$$

[S. van der Meer, *Calibration of the effective beam height in the ISR*, CERN, Geneva, <http://cds.cern.ch/record/296752/files/196800064.pdf>, 1968]



**Figura 3:** Due bunch collidenti in LHC.

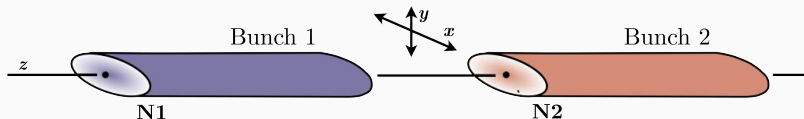


Siano  $\rho_{1,2}(x_i) = N_{1,2} f_{1,2 x_i}(x_i)$  le densità di particelle nella direzione trasversa  $x_i$ , si ha:

$$h_{eff} = \frac{\int \rho_1(x_i) dx_i \int \rho_2(x_i) dx_i}{\int \rho_1(x_i) \rho_2(x_i) dx_i} \quad (9)$$

Ora, si immagini di spostare i fasci dalla condizione di *head-on* introducendo un off-set  $h$  lungo  $x$  o  $y$  e misurare il rate di collisioni al variare di  $h$ :

[S. van der Meer, *Calibration of the effective beam height in the ISR*, CERN, Geneva, <http://cds.cern.ch/record/296752/files/196800064.pdf>, 1968]



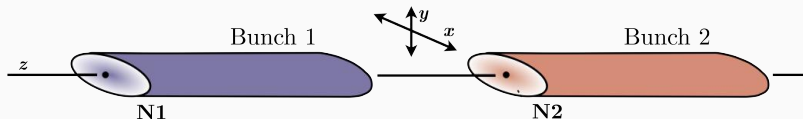
**Figura 3:** Due bunch collidenti in LHC.

È possibile dimostrare che la quantità  $h_{eff}$  è pari al rapporto tra l'integrale della curva  $R(h)$  e il suo valore massimo, ovvero:

$$h_x = \int \frac{R(\Delta x, 0)}{R(0, 0)} dx, \quad h_y = \int \frac{R(0, \Delta y)}{R(0, 0)} dy \quad (10)$$

dove  $R(\Delta x, 0)$  e  $R(0, \Delta y)$  sono le curve  $R(h)$ , quando l'off-set viene introdotto rispettivamente lungo le direzioni  $x$  e  $y$  e  $R(0, 0)$  è il rate di bunch *head-on*.

[S. van der Meer, *Calibration of the effective beam height in the ISR*, CERN, Geneva, <http://cds.cern.ch/record/296752/files/196800064.pdf>, 1968]



**Figura 4:** Due bunch collidenti in LHC.

Un evento anelastico che soddisfa una precisa condizione di trigger è denominato processo di riferimento. Sia allora  $\varepsilon$  la percentuale di processi di riferimento sul totale degli eventi anelastici, la sezione d'urto di riferimento (o visibile) è definita come:

$$\sigma_{ref} = \varepsilon \sigma_{inel} \quad (11)$$

dove  $\sigma_{inel}$  è la sezione d'urto anelastica totale.

Un evento anelastico che soddisfa una precisa condizione di trigger è denominato processo di riferimento. Sia allora  $\varepsilon$  la percentuale di processi di riferimento sul totale degli eventi anelastici, la sezione d'urto di riferimento (o visibile) è definita come:

$$\sigma_{ref} = \varepsilon \sigma_{inel} \quad (11)$$

dove  $\sigma_{inel}$  è la sezione d'urto anelastica totale. Determinata la luminosità di un processo di riferimento tramite van der Meer scan, la sua sezione d'urto è pari a:

$$\sigma_{ref} = \frac{R(0,0)}{\mathcal{L}} \quad (12)$$

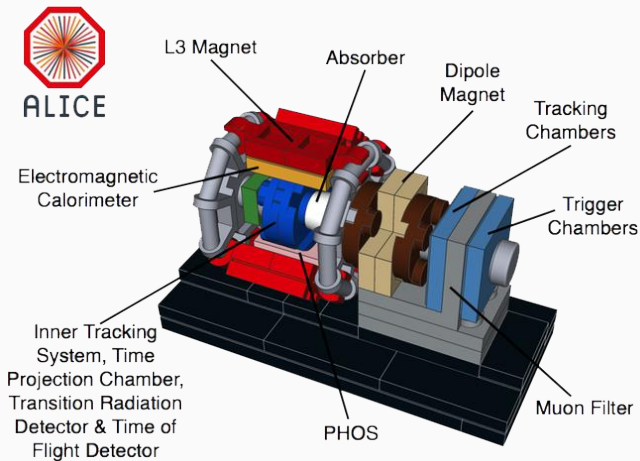
La luminosità **non** dipende dal processo con il quale la si misura!

La luminosità **non** dipende dal processo con il quale la si misura! Se, ad esempio, voglio conoscere la sezione d'urto di produzione di  $J/\Psi$  è sufficiente conoscere il numero di  $J/\Psi$  prodotte e calcolare:

$$\sigma_{J/\Psi} = \frac{R_{J/\Psi}}{\mathcal{L}} \quad (13)$$

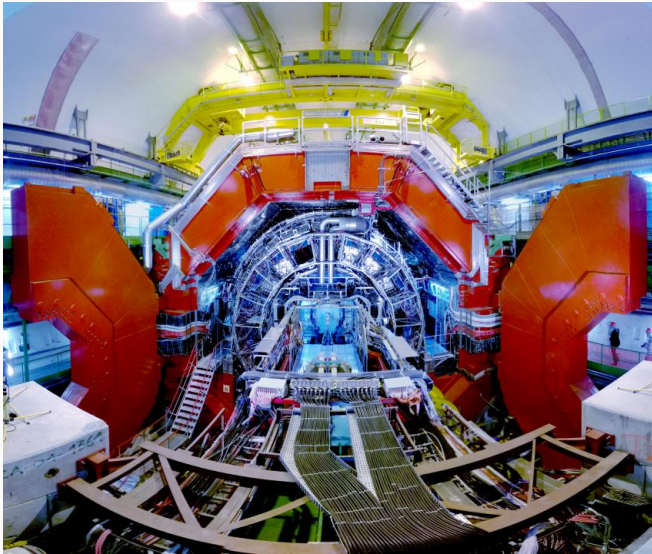
dove  $\mathcal{L}$  viene determinata sfruttando un processo di riferimento.

# A Large Ion Collider Experiment



**Figura 5:** *LEGO-ALICE* setup

# A Large Ion Collider Experiment



**Figura 6:** *ALICE*



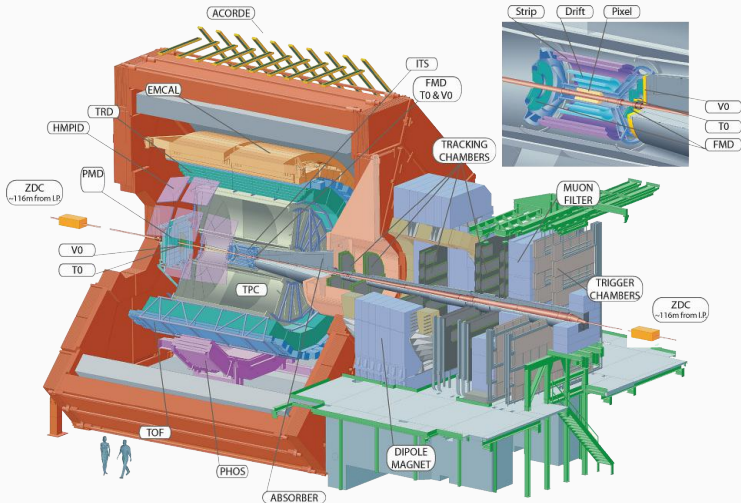


Figure 7: *ALICE setup*

Le intensità dei fasci e dei bunch sono misurate utilizzando:

**DCCT:** magnetometri di tipo fluxgate, 2 per fascio.

**FBCT:** trasformatori Bergoz con larghezza di banda compresa tra 400 Hz e 1.2 GHz, 2 per fascio.

[J.-J. Gras, D. Belohrad, P. Odier, *Optimization of the LHC beam current transformers for accurate luminosity determination*, CERN, Geneva, <https://cds.cern.ch/record/1379466/files/CERN-ATS-2011-063.pdf>, 2011]

Le misure di beam intensity sono corrette considerando le cariche satellite (LDM, radiazione di sincrotrone emessa dal fascio) e fantasma (LHCb, rate delle collisioni beam-gas negli slot nominalmente pieni).

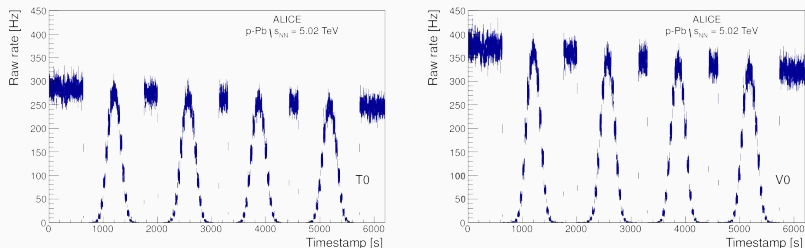
• 2013, p-Pb + Pb-p,  $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$  TeV

**V0-based:** coincidenza tra V0-A e V0-C;

**T0-based:** coincidenza tra T0-A e T0-C, coordinata longitudinale del vertice di interazione appartenente al range  $|z| < 30$  cm ( $z = 0$  nominal IP position).

[ALICE Collaboration, *Measurement of visible cross sections in proton-lead collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$  TeV in van der Meer scans with the ALICE detector*, JINST 9 (2014), 1100]

Poiché tale coordinata longitudinale è valutata come la differenza tra i tempi di arrivo ai due array, il trigger T0-based permette di rigettare il background dovuto alle interazione beam-gas e beam-satellite.

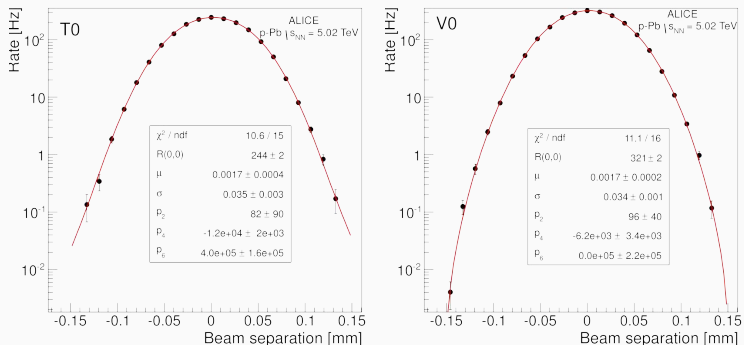


**Figure 8:** Raw rate of the T0 (left) and V0 (right) reference process for a typical colliding bunch pair, as a function of time, during the p-Pb scan.

[ALICE Collaboration, JINST 9 (2014), 1100]

Il rate grezzo viene corretto considerando: interazioni beam-gas e beam-satellite, pileup, beam-intensity decay.

# vdM@ALICE: rate vs displacement



**Figure 9:** Rates of the T0 (left) and V0 (right) reference process as a function of beam separation for one typical pair of colliding bunches in the first vertical p-Pb scan, fitted with a modified Gaussian function.

[ALICE Collaboration, JINST 9 (2014), 1100]

**Tabella 1:** *Cross section for the V0 and T0-based reference process in two p-Pb vdM scans. The quoted uncertainties are statistical.*

[ALICE Collaboration, JINST 9 (2014), 1100]

Method		$\sigma_{V0}$ [b]	
	First scan	Second scan	Average
Num.	$2.087 \pm 0.001$	$2.098 \pm 0.001$	$2.093 \pm 0.001$
Fit	$2.086 \pm 0.001$	$2.099 \pm 0.001$	
		$\sigma_{T0}$ [b]	
	First scan	Second scan	Average
Num.	$1.590 \pm 0.001$	$1.598 \pm 0.001$	$1.594 \pm 0.001$
Fit	$1.595 \pm 0.001$	$1.602 \pm 0.001$	

**Tabella 2:** *Cross section for the V0 and T0-based reference process in two Pb-p vdM scans. The quoted uncertainties are statistical.*

[ALICE Collaboration, JINST 9 (2014), 1100]

Method		$\sigma_{V0}$ [b]	
	First scan	Second scan	Average
Num.	$2.110 \pm 0.002$	$2.141 \pm 0.003$	$2.122 \pm 0.002$
Fit	$2.105 \pm 0.002$	$2.138 \pm 0.002$	
		$\sigma_{T0}$ [b]	
	First scan	Second scan	Average
Num.	$1.586 \pm 0.002$	$1.607 \pm 0.003$	$1.594 \pm 0.002$
Fit	$1.581 \pm 0.002$	$1.605 \pm 0.002$	

Tali valori sono, poi, corretti considerando le possibili fonti di incertezze sistematiche: *transverse correlation*, *bunch-by-bunch consistency*, *scan-to-scan consistency*, *length-scale calibration*, *background subtraction (V0-only)*, *method dependence*, *beam centering*, *bunch size vs trigger*, *bunch size vs trigger*, *bunch intensity*, *orbit drift*, *beam-beam deflection*, *ghost charge*, *satellite charge*, *dynamic  $\beta^*$* . Si ottiene un'incertezza sistematica del 3.5% per lo scan p-Pb e del 3.2% per lo scan Pb-p.



Tali valori sono, poi, corretti considerando le possibili fonti di incertezze sistematiche: *transverse correlation*, *bunch-by-bunch consistency*, *scan-to-scan consistency*, *length-scale calibration*, *background subtraction (V0-only)*, *method dependence*, *beam centering*, *bunch size vs trigger*, *bunch size vs trigger*, *bunch intensity*, *orbit drift*, *beam-beam deflection*, *ghost charge*, *satellite charge*, *dynamic  $\beta^*$* . Si ottiene un'incertezza sistematica del 3.5% per lo scan p-Pb e del 3.2% per lo scan Pb-p.

## • p-Pb

$$\sigma_{V0} = (2.09 \pm 0.07) \text{ b}, \quad \sigma_{T0} = (1.59 \pm 0.06) \text{ b} \quad (14)$$

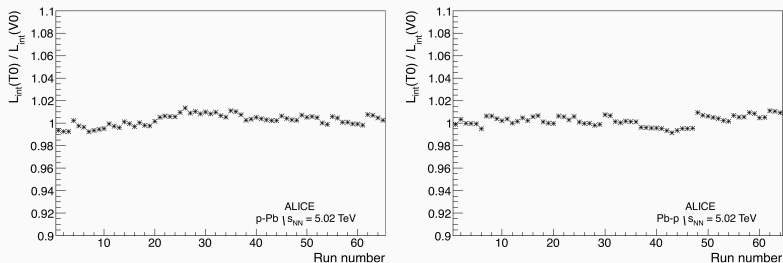
## • Pb-p

$$\sigma_{V0} = (2.12 \pm 0.07) \text{ b}, \quad \sigma_{T0} = (1.59 \pm 0.05) \text{ b} \quad (15)$$

[ALICE Collaboration, JINST 9 (2014), 1100]

# Confronto tra luminosità V0 e T0-based

Le sezioni d'urto (15) e (16) sono state utilizzate per determinare la luminosità integrata durante la presa dati del 2013 relativa al run p-Pb.



**Figura 10:** *Ratio of V0 and T0-based integrated luminosity as a function of run number for the p-Pb and Pb-p data taking.*

[ALICE Collaboration, JINST 9 (2014), 1100]

Il vdM scan è un metodo non invasivo per la misura delle effective beam width, le quali risultano essere pari a:

$$h_{\mu} = \int \frac{R(h)}{R(0,0)} d\mu \quad (16)$$

Il vdM scan è un metodo non invasivo per la misura delle effective beam width, le quali risultano essere pari a:

$$h_{\mu} = \int \frac{R(h)}{R(0,0)} d\mu \quad (16)$$

Nota le intensità dei bunch collidenti (FBCT, DCCT) è possibile determinare la luminosità effettiva del collider:

$$\mathcal{L} = \frac{f_{rev} N_1 N_2}{h_x h_y} \quad (17)$$

Il vdM scan è un metodo non invasivo per la misura delle effective beam width, le quali risultano essere pari a:

$$h_{\mu} = \int \frac{R(h)}{R(0,0)} d\mu \quad (16)$$

Nota le intensità dei bunch collidenti (FBCT, DCCT) è possibile determinare la luminosità effettiva del collider:

$$\mathcal{L} = \frac{f_{rev} N_1 N_2}{h_x h_y} \quad (17)$$

La sezione d'urto di un processo di riferimento, il quale soddisfa precise condizioni di trigger, è:

$$\sigma_{ref} = \frac{R(0,0)}{\mathcal{L}} \quad (18)$$

In ALICE, noti i rate  $R_{V0,T0}$  e le sezioni d'urto di riferimento  $\sigma_{V0,T0}$  è possibile determinare la sezione d'urto del processo  $X$ , misurando il rate  $R_X$ :

$$\sigma_X = \frac{R_X}{\mathcal{L}} = \frac{R_X \sigma_{V0,T0}}{R_{V0,T0}} \quad (19)$$

In ALICE, noti i rate  $R_{V0,T0}$  e le sezioni d'urto di riferimento  $\sigma_{V0,T0}$  è possibile determinare la sezione d'urto del processo  $X$ , misurando il rate  $R_X$ :

$$\sigma_X = \frac{R_X}{\mathcal{L}} = \frac{R_X \sigma_{V0,T0}}{R_{V0,T0}} \quad (19)$$

Si raggiungono incertezze tipiche intorno al 3% in collisioni p-Pb, mentre sono state raggiunte incertezze tipiche del 2% in collisioni pp.

In collisioni p-Pb i due fasci possiedono la stessa rigidità magnetica, ma l'energia per nucleone degli ioni piombo differisce da quella dei protoni. Di conseguenza il sistema di riferimento del centro di massa delle collisioni p-Pb e Pb-p è differente e differisce dal sistema di riferimento di ALICE. Per questo motivo e per l'asimmetria dei rivelatori non c'è motivo di attendere identiche sezioni d'urto per le due configurazioni. Per questo motivo  $\sigma_{V0,T0}^{p-Pb}$  e  $\sigma_{V0,T0}^{Pb-p}$  non sono combinate.



Svaka zvijezda sija za tebe.

Backup

Al fine di rendere  $dL$  relativisticamente invariante si introducono  $j_\mu = \rho (c, \vec{v})$  e  $u_\mu = \gamma (c, \vec{v})$  e si sostituiscono i termini  $\rho_1 \rho_2$  e  $v_{12}$  rispettivamente con:

$$\frac{j_{(1)}^\mu j_{(2)\mu}}{c^2} = \rho_1 \rho_2 \left( 1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2} \right) \quad (20)$$

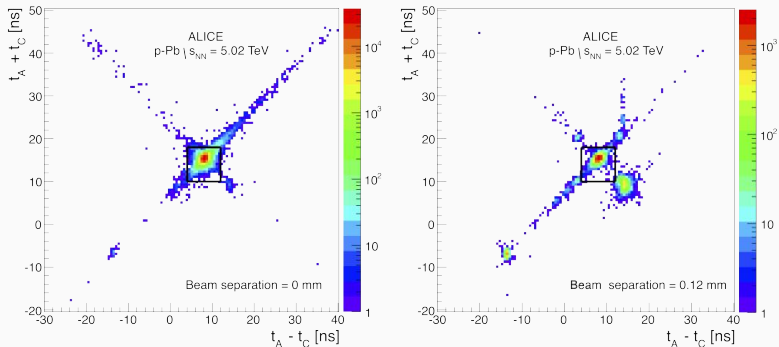
$$\frac{\sqrt{\left( u_{(1)}^\mu u_{(2)\mu} \right)^2 - c^4}}{u_{(1)\mu} u_{(2)}^\mu} = \frac{\sqrt{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2 c^{-2}}}{1 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) c^{-2}} \quad (21)$$

La formula (??) diviene allora:

$$dL = \rho_1 \rho_2 \sqrt{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - \frac{(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2}{c^2}} dV = \rho_1 \rho_2 K dV \quad (22)$$

dove  $K$  prende il nome di *Møller factor*.

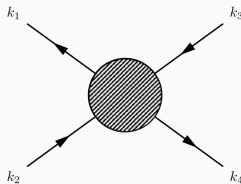
# Beam-beam interactions



**Figure 11:** *Correlation between the sum and the difference of arrival time on the two V0 arrays; events lying inside the area within the continuous lines are flagged as beam-beam interactions. [ALICE Collaboration, 2014]*

## Teorema ottico (*many thanks to the wizard*)

Si consideri il seguente processo elastico:



**Figura 12:**  $k_1 k_2 \rightarrow k_3 k_4$

la cui sezione d'urto è data da:

$$\sigma_{el} = \underbrace{\frac{1}{|v_1 - v_2| 2E_1 2E_2}}_{\text{flux factor}} \underbrace{\int d\Phi_2 |M_{el}|^2}_{\text{scattering amplitude in } T^*Q} \quad (23)$$

## Teorema ottico: integrale in $T^*Q$

L'integrale  $\int d\Phi_2$  è Lorentz-invariante:

$$\int d\Phi_2 = \int \frac{d^3k_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3k_4}{(2\pi)^3 2E_4} (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) \quad (24)$$

Si considerano particelle *on-shell* e *massless* ( $p^2 = E^2 - |\vec{p}|^2 = 0$ ) e ci si pone nel centro di massa:

$$\vec{k}_1 = -\vec{k}_2 = \vec{k}_3 = -\vec{k}_4 = \vec{k}, \quad E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E = \frac{E_{cm}}{2} \quad (25)$$

In coordinate polari sferiche l'integrale si riduce a:

$$\int d\Phi_2 = \frac{1}{32\pi^2} \int d\Omega \quad (26)$$

Nel centro di massa si ha:

$$|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = \left| \frac{\vec{p}_1}{E_1} - \frac{\vec{p}_2}{E_2} \right| = \frac{1}{E_1 E_2} |E_2 \vec{p}_1 - E_1 \vec{p}_2| \quad (27)$$

Pertanto il fattore di flusso si riduce a:

$$2E_1 2E_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = 4E^2 \frac{1}{E^2} |E\vec{k}_1 - E\vec{k}_2| = 4E |2\vec{k}| \quad (28)$$

Poiché le particelle sono supposte essere *massless* si ottiene:

$$2E_1 2E_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = 8E^2 = 2E_{cm}^2 \quad (29)$$

## Teorema ottico: *putting everything together*

La sezione d'urto elastica diviene:

$$\sigma_{el} = \frac{1}{64\pi^2 E_{cm}^2} \int d\Omega |M_{el}|^2 \quad (30)$$

Di conseguenza, la sezione d'urto elastica differenziale vale:

$$\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 E_{cm}^2} |M_{el}|^2 \quad (31)$$

Questa può essere integrata rispetto a  $\varphi$  grazie alla simmetria cilindrica del problema, ottenendo:

$$\frac{d\sigma_{el}}{d\cos\theta} = \int d\varphi \frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} = \frac{1}{32\pi E_{cm}^2} |M_{el}|^2 \quad (32)$$



Nel centro di massa si possono scegliere  $k_1 = E(1, 0, 0, 1)$  e  $k_3 = E(1, \sin \theta, 0, \cos \theta)$  e la variabile di Mandelstam  $t$  vale:

$$t = (k_1 - k_3)^2 = -\frac{E_{cm}^2}{2}(1 - \cos \theta) \quad (33)$$

Pertanto:

$$\frac{d\sigma_{el}}{d\cos\theta} = \frac{d\sigma_{el}}{dt} \frac{dt}{d\cos\theta} = \frac{E_{cm}^2}{2} \frac{d\sigma_{el}}{dt} \quad (34)$$

Dunque:

$$\frac{d\sigma_{el}}{dt} = \frac{1}{16\pi E_{cm}^4} |M_{el}|^2 \quad (35)$$

## Teorema ottico: $t \rightarrow 0$

Si consideri ora il limite per  $t \rightarrow 0$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0} |M_{el}| = \lim_{t \rightarrow 0} |M(k_1 k_2 \rightarrow k_3 k_4)| = |M(k_1 k_2 \rightarrow k_1 k_2)| \quad (36)$$

Di conseguenza:

$$\lim_{t \rightarrow 0} |M_{el}|^2 = |M(k_1 k_2 \rightarrow k_1 k_2)|^2 = 16\pi E_{cm}^4 \frac{d\sigma_{el}}{dt} \quad (37)$$

Ora, il teorema ottico stabilisce che:

$$2\Im\{M(k_1 k_2 \rightarrow k_1 k_2)\} = 2E_1 2E_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \sigma_{tot} \quad (38)$$

Ovvero:

$$\Im^2\{M(k_1 k_2 \rightarrow k_1 k_2)\} = E_{cm}^4 \sigma_{tot}^2 \quad (39)$$

## Teorema ottico: parametro di interferenza

Posto per brevità  $M_{1,2} = M(k_1 k_2 \rightarrow k_1 k_2)$  si introduce il parametro di interferenza:

$$\rho = \frac{\Re\{M_{1,2}\}}{\Im\{M_{1,2}\}} \quad (40)$$

Si ha:

$$\Im^2\{M_{1,2}\} = \frac{1}{1 + \rho^2} |M_{1,2}|^2 \quad (41)$$

Pertanto, ricordando le Eq. (??) e (??) si ottiene:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\sigma_{el}}{dt} = (1 + \rho^2) \frac{\sigma_{tot}^2}{16\pi} \quad (42)$$

Come visto in precedenza vale la relazione:

$$\sigma_{tot} \mathcal{L} = R_{tot} = R_{el} + R_{inel} \quad (43)$$

Pertanto si ha:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\sigma_{el}}{dt} = \frac{1}{\mathcal{L}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{dR_{el}}{dt} = (1 + \rho^2) \frac{\sigma_{tot}^2}{16\pi} \quad (44)$$

Di conseguenza:

$$\mathcal{L} = \frac{(1 + \rho^2) (R_{el} + R_{inel})^2}{16\pi (dR_{el}/dt)_{t=0}} \quad (45)$$