# METODO DI GALERKIN

ALFONSO FASCÌ, DAVIDE FERRARESE, MATTIA PENATI

*Relazione per il corso di Programmazione Avanzata*

Ingegneria Matematica - Laurea Specialistica

## 1. Metodo di Galerkin Elementi Finiti

Il metodo di Galerkin è basato sulla formulazione debole di un qualsiasi problema differenziale alle derivate parziali:

$$\textit{trovare} \quad u \in V : a(u,v) = (f,v) \quad \forall v \in V. \tag{1}$$

dove $a(u,v)$ è una forma bilineare. Se $V_h$ è un sottospazio vettoriale finito dimensionale di $V$, il metodo di Galerkin consiste nell'approssimare (1) con un problema finito dimensionale:

$$\textit{trovare} \quad u_h \in V_h : a(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \tag{2}$$

Se $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ è una base di $V_h$, possiamo scrivere:

$$u_h = \sum_{j=1}^{N} u_j \varphi_j(x). \tag{3}$$

Il numero intero $N$ denota la dimensione dello spazio vettoriale $V_h$. Sfruttando la linearità della forma $a(\cdot,\cdot)$ e del prodotto scalare $(f,\cdot)$ è sufficiente scegliere $v_h = \varphi_i$. Dunque il problema di Galerkin è equivalente a cercare le $N$ incognite $\{u_1, \dots, u_N\}$ tali che:

$$\sum_{j=1}^{N} u_j\, a(\varphi_j, \varphi_i) = (f, \varphi_i) \qquad \forall i = 1, \dots, N. \tag{4}$$

Se introduciamo la matrice di rigidezza $A_G = (a_{ij})$, $(a_{ij}) = a(\varphi_j, \varphi_i)$, il vettore incognito $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)$ e il vettore termine noto $\mathbf{f}_G = [f_i = (f, \varphi_i)]$, si può notare che (4) è equivalente al seguente sistema lineare:

$$A_G \mathbf{u} = \mathbf{f}_G. \tag{5}$$

La struttura di $A_G$, come il grado di accuratezza della soluzione $u_h$, dipende dalla forma delle funzioni di base $\{\varphi_i\}$, e perciò dalla scelta di $V_h$.
Il metodo degli elementi finiti (FEM) è una tecnica speciale per la costruzione del sottospazio $V_h$, basato sull'interpolazione polinomiale. Sia $\mathcal{T}_h$ una partizione del generico dominio $\Omega \in \mathbb{R}^2$ in $K$ triangoli tale che $\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$. Tale metodo corrisponde a considerare:

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_{h|T} \in \mathbb{P}_k(T)\, \forall T \in \mathcal{T}_h\}, \tag{6}$$

dove $\mathbb{P}_k$ $(k \geq 1)$ è lo spazio dei polinomi di grado $k$.

## 2. Codice a Elementi Finiti

Nell'esecuzione di un codice a elementi finiti possiamo distinguere quattro fasi principali.

(1) **Pre-processing**. Questa fase consiste nell'impostazione del problema e nell'implementazione del dominio di calcolo che richiede la costruzione della reticolazione.

(2) **Assemblaggio**. In questa fase vengono costruite le strutture dati funzionali, a partire da quelle geometriche ricavate dalle mesh e dalle scelte circa il tipo di elementi finiti che si vuole usare. Il termine *assemblaggio* si riferisce alla costruzione della matrice del sistema lineare (matrice di rigidezza), passando dal calcolo locale svolto sull'elemento di riferimento a quello globale che concorre a determinare la matrice associata al problema discretizzato. La Figura 1 riassume le diverse operazioni durante la fase di assemblaggio.

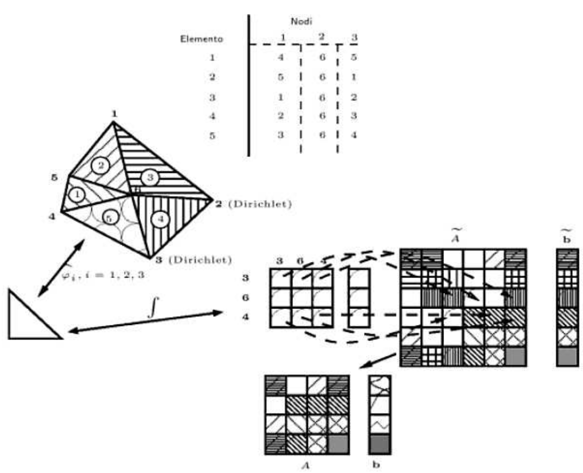


**Figura 1:** Schematizzazione dell'assemblaggio

Le informazioni geometriche e topologiche, opportunamente memorizzate descrivono la griglia. Mediante la mappatura sull'elemento di riferimento, si effettua il calcolo della matrice di discretizzazione $\tilde{A}$ e del termine noto $\tilde{\mathbf{b}}$, procedendo prima elemento per elemento (calcolo locale) e poi, sfruttando l'additività dell'operazione di integrazione, si aggiorna la matrice globale. Alla fine, si opera la prescrizione delle condizioni al bordo, che idealmente elimina i gradi di libertà con condizioni di Dirichlet, giungendo alla matrice finale $A$ e al termine noto $\mathbf{b}$.

(3) **Risoluzione del sistema algebrico**. Il nocciolo risolutivo di base di ogni calcolo ad elementi finiti è rappresentato dalla soluzione di un sitema lineare.

(4) **Post-processing**. In quest'ultima fase vengono elaborati i dati numerici generati dal codice in modo da presentare risultati sintetici ed in una forma utilizzabile per gli scopi di analisi.