# INTEGRAZIONE NUMERICA

ALFONSO FASCÌ, DAVIDE FERRARESE, MATTIA PENATI

*Relazione per il corso di Programmazione Avanzata*

Ingegneria Matematica - Laurea Specialistica

## 1. Introduzione

Sia $f$ una funzione a valori reali integrabile sull'intervallo $[a,b]$. Calcolare esplicitamente l'integrale $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ potrebbe essere molto difficile o addirittura impossibile. Una qualsiasi formula esplicita adatta a fornire un'approssimazione di $I(f)$ è detta *formula di quadratura* o formula di integrazione numerica. Un esempio può essere ottenuto sostituendo $f$ con una sua approssimante $f_n$, dipendente dall'intero $n \geq 0$ e calcolando $I(f_n)$ anzichè $I(f)$. Ponendo $I_n(f) = I(f_n)$, si ottiene:

$$I_n(f) = \int_a^b f_n(x)dx \quad , \quad n \geq 0 \tag{1}$$

L'approssimante $f_n$ deve essere facilmente integrabile. Per tale motivo, un naturale approccio consiste nell'utilizzare l'interpolante polinomiale di Lagrange $f_n = \Pi_n f$ su un'insieme di $n+1$ nodi distinti $x_i$, con $i = 0, \ldots, n$. Adottando questa strategia, dalla (1) segue che:

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b l_i(x)dx \tag{2}$$

dove $l_i$ è il polinimio caratteristico di Lagrange, con $n$ gradi di libertà, associato ai nodi $x_i$. Si può notare che la (2) è una particolare istanza della seguente formula di quadratura:

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) \tag{3}$$

dove i coefficienti $\alpha_i$ della combinazione lineare sono dati da $\int_a^b l_i(x)dx$. La formula (3) è una somma pesata dei valori di $f$ nei punti $x_i$, con $i = 0, \ldots, n$. Questi punti sono detti *nodi* della formula di quadratura, mentre i numeri $\alpha_i \in \mathbb{R}$ sono detti *coefficienti* o *pesi*. Poichè $f$ è stata sostituita con la sua interpolante polinomiale, la (3) è chiamata *formula di quadratura interpolatoria*. Il *grado di esattezza* di una formula di quadratura è definito come il massimo intero $r \geq 0$ per il quale:

$$I_n(f) = I(f), \qquad \forall f \in \mathbb{P}_r \tag{4}$$

Una qualsiasi formula di quadratura che utilizza $n+1$ nodi distinti ha grado di esattezza maggiore o uguale a $n$. Infatti, se $f \in \mathbb{P}_n$, allora $\Pi_n f = f$ e dunque $I_n(\Pi_n f) = I(\Pi_n f)$.

## 2. Formule di Newton-Cotes

Tali formule si basano sull'interpolazione di Lagrange con nodi equispaziati nell'intervallo di integrazione $[a, b]$. Fissato $n \geq 0$, denotiamo i nodi di quadratura con $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, \dots, n$. Le formule del punto medio, dei trapezi e di Cavalieri-Simpson sono speciali istanze delle formule di Newton-Cotes, avendo considerato rispettivamente $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$. In generale, definiamo:

- *formule chiuse*, quelle per cui $x_0 = a$, $x_n = b$ e $h = \dfrac{b-a}{n}$ $(n \geq 1)$;
- *formule aperte*, quelle per cui $x_0 = a + h$, $x_n = b - h$ e $h = \dfrac{b-a}{n+2}$ $(n \geq 0)$.

Un'importante proprietà delle formule di Newton-Cotes è il fatto che i pesi di quadratura $\alpha_i$ dipendono in modo esplicito solamente da $n$ e $h$, non dall'intervallo di integrazione $[a, b]$. Per verificare questa proprietà nel caso delle formule chiuse, introduciamo il cambiamento di variabili $x = \Psi(t) = x_0 + th$. Osservando che $\Psi(0) = a$, $\Psi(n) = b$ e $x_k = a + kh$, otteniamo:

$$\frac{x - x_k}{x_i - x_k} = \frac{a + th - (a + kh)}{a + ih - (a + kh)} = \frac{t-k}{i-k}. \tag{5}$$

Dunque, se $n \geq 1$:

$$l_i(x) = \prod_{k=0, k \neq i}^{n} \frac{t-k}{i-k} = \varphi_i(t) \qquad 0 \leq i \leq n. \tag{6}$$

Si ottiene la seguente espressione per i pesi di quadratura:

$$\alpha_i = \int_a^b l_i(x) dx = \int_0^n \varphi_i(t) h dt = h \int_0^n \phi_i(t) dt, \tag{7}$$

dalla quale si ricava:

$$I_n(f) = h \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i), \qquad \omega_i = \int_0^n \varphi_i(t) dt. \tag{8}$$

I coefficienti $\omega_i$ non dipendono da $a, b, h$ e $f$, ma solamente da $n$, dunque possono essere tabulati *a priori*. Nel caso particolare delle formule chiuse, i polinomi $\varphi_i$ e $\varphi_{n-i}$, con $i = 0, \dots, n$, per la proprietà di simmetria hanno il medesimo integrale e dunque anche i corrispondenti pesi $\omega_i$ e $\omega_{n-i}$ si equivalgono. Per tale motivo, mostriamo in Tabella 1 solo la prima metà dei pesi. Per aumentare l'accuratezza di una formula di quadratura interpolatoria, potrebbe non essere conveniente incrementare il valore di $n$. In tal modo, si possono presentare gli stessi inconvenienti dell'interpolazione di Lagrange su nodi equidistanti. Per esempio, si osserva che i pesi delle formule di Newton-Cotes chiuse con $n = 8$ hanno segno opposto, comportando instabilità numeriche dovute a errori di arrotondamento e rendendo così tale formula poco utile nella pratica. Ciò accade per tutte le formule di Newton-Cotes con un numero di nodi maggiore di 8.

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\omega_0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{14}{45}$ | $\frac{95}{288}$ | $\frac{41}{140}$ |
| $\omega_1$ | 0 | $\frac{4}{3}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{64}{45}$ | $\frac{375}{288}$ | $\frac{216}{140}$ |
| $\omega_2$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{24}{45}$ | $\frac{250}{288}$ | $\frac{27}{140}$ |
| $\omega_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{272}{140}$ |

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\omega_0$ | 2 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{8}{3}$ | $\frac{55}{24}$ | $\frac{66}{20}$ | $\frac{4277}{1440}$ |
| $\omega_1$ | 0 | 0 | $-\frac{4}{3}$ | $\frac{5}{24}$ | $-\frac{84}{20}$ | $-\frac{3171}{1440}$ |
| $\omega_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{156}{20}$ | $\frac{3934}{1440}$ |

**Tabella 1:** Pesi delle formule chiuse (sinistra) e aperte (destra) di Newton-Cotes

## 3. Integrazione Numerica Bidimensionale

Sia $\Omega$ un dominio limitato in $\mathbb{R}^2$ con bordo sufficientemente regolare. Consideriamo il problema di approssimare l'integrale $I(f) = \int_\Omega f(x,y)dxdy$, dove $f$ é una funzione continua su $\bar{\Omega}$. In particolare, sia $\Omega$ un poligono convesso sul quale si assegna una triangolazione $\mathcal{T}_h$, tale che $\bar{\Omega} = \bigcup_{T\in\mathcal{T}_h} T$, dove il parametro $h > 0$ è il massimo tra le lunghezze dei lati in $\mathcal{T}_h$. Esattamente come nel caso monodimensionale, le regole di quadratura interpolatoria sono del tipo:

$$\int_\Omega f(\mathbf{z}_j) = \sum_{j=1}^{N} \omega_j f(\mathbf{z}_j), \tag{9}$$

dove $\mathbf{z}_j = (x_j, y_j)$ e $\omega_j$ sono rispettivamente i punti e i pesi della formula di integrazione numerica. Sia ora $\mathbb{P}_d$ lo spazio vettoriale finito dimensionale di grado massimo $d$, cioè $\mathbb{P}_d = \mathrm{span}\{x^n y^m, m+n \le d\}$, e sia $N = \dim \mathbb{P}_\mathrm{d} = \frac{1}{2}(\mathrm{d}+1)(\mathrm{d}+2)$ la dimensione di tale spazio. Consideriamo inoltre il triangolo per cui $x \ge -1$, $y \ge -1$ e $x + y \le 0$. I polinomi $x^n y^m$ sono notoriamente mal coondizionati, perciò sarà necessario descrivere $\mathbb{P}_d$ con una base più ragionevole. Per tale motivo utilizzeremo i polinomi ortogonali di Kornwinder-Dubiner $g_{m,n}$ ([]):

$$g_{m,n}(\mathbf{z}) = P_m^{0,0}\left(\frac{x}{1-y}\right)(1-y)^m\, P_n^(2m+1,0)(y), \tag{10}$$

dove $P_n^{\alpha,\beta}$ sono i polinomi di Jacobi con pesi $(\alpha,\beta)$ e grado $n$. Si può notare che dato un insieme $N$ di punti $\mathbf{z}_j$ nel triangolo, si ottengono i pesi di Newton-Cotes risolvendo il sistema $N \times N$:

$$\sum_{j=1}^{N} \omega_j g_{m,n}(\mathbf{z}_j) = \int g_{m,n}(\mathbf{z})d\mathbf{z}, \qquad \forall g_{m,n} \in \mathbb{P}_d. \tag{11}$$

Per costruzione, i pesi di Newton-Cotes e i punti $\mathbf{z}_j$ forniscono una formula di quadratura che integra le $N$ funzioni di base, e perciò:

$$\sum_{j=1}^{N} \omega_j g(\mathbf{z}_j) = \int g(\mathbf{z})d\mathbf{z}, \qquad \forall g \in \mathbb{P}_d. \tag{12}$$

Poichè qualsiasi insieme di $N$ punti di quadratura deve soddisfare l'equazione (11), i pesi per qualsiasi formula di quadratura di questo tipo devono essere pesi di Newton-Cotes.