Juku maatriksi astak - lahendusideid (`astak`)

Mattias Joosep Tammaru

18.12.2025

Antud ruutmaatriks. Leida maatriksi astak ehk suurima nullist erinev miinori järk.

Lahendusideid.

Väiksemate maatriksite korral saab kasutada naiivset meetodit. Maatriksi astak on suurim k, mille korral leidub nullist erinev $k \times k$ alamdeterminant. Seega kontrollime kõik $n \times n$ alamdeterminandid, alustades suurimast $n = k$. Kui determinant on null, vähendame k-d ja kontrollime uuesti. Determinante arvutame rekursiivselt - valime rea või veeru, kus on kõige rohkem nulle ja arvutame selle järgi.

Nagu ülesandes vihjatud, on maatriksite astakute leidmine naiivse meetodiga üsna aeglane. Täpsemalt, et moodustada $k \times k$ alamdeterminant, peame valima k rida n-st. Valikute arv on $\binom{n}{k}$. Sama loogika kehtib veergude kohta. Seega on üks alamdeterminant konkreetne ridade ja veergude valik. Lisaks, et iga determinant võtab aega umbes $O(k!)$, on kogu programmi keerukus päris suur ning $n > 5$ korral juba kohutavalt aeglane.

Suuremate järkude korral oleks kasulik kasutada **Gaussi elimineerimismeetodit**. Põhimõte on, et teisendame maatriksi elementaarteisendustega (ridade vahetamine, rea korrutamine mingi arvuga või mingi arvuga korrutatud teise reaga) kujule, kus maatriksi astakut saaks vaadata selle järgi, kui palju on ridu, mis ei koosne ainult nullidest. Sõnadega on meetodit veidi raske kirjeldada, seega toome näite: olgu maatriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Naiivse meetodi kasutaja ilmselt kontrolliks ja saaks teada, et kaks rida (1. ja 2.) on omavahel võrdelised ja seega kolmandat järku miinor on null. Samas näiteks $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, seega rank $A = 2$.

Gaussi elimineerimismeetodi kasutajad mõtleksid järgnevalt:

1. Esimese rea esimene element on mitte-null, seega olgu see juhtliige. Nullime allpool (samas veerus) olevad elemendid (selleks peame teisest reast lahutama kahekordse esimese rea ja kolmandast reast lahutama esimese rea) ning saame maatriksi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Vahetame read, et nullrida oleks all (vahetame teise ja kolmanda rea) ning saame maatriksi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

See maatriks on **astmelisel kujul**, sest nullrida on all, teise rea juhtliige (-1) on paremal võrreldes esimese rea juhtliikmega (1) ning juhtliikmete all on nullid.

Et maatriksi astak on mitte-nullridade arv astmelisel kujul olevas maatriksis (vaata ka lisalugemist siit), siis tõepoolest rank $A = 2$.

Üldiselt on maatriks (rea-)astmelisel kujul, kui kõik nullread asuvad mitte-nullridade all, iga järgmise mitte-nullrea juhtliige asub rangelt paremal võrreldes eelmise rea juhtliikmega ning iga juhtliikme all olevad elemendid on nullid.

Targa lähenemise keerukus on olenevalt maatriksi elementidest umbes $O(n^3)$, mis on märksa kiirem kui naiivne lähenemine.