Juku maatriksi astak (`astak`)

Mattias Joosep Tammaru

16.12.2025

Juku õpib koolis maatriksite astakute arvutamist. Talle antakse mahukas kodutöö, kus on palju arvutamist. Juku kuulis õpetajalt, et astakute arvutamine võib olla pikk ning arvutusi palju. Kirjuta programm, mis leiab Juku maatriksi astaku väärtuse.

Sisend. Sisend koosneb m reast (maatriksi read) ning igal real on n tühikuga eraldatud täisarvu (iga rea elemendid) ($1 \leq m \leq 16$, $1 \leq n \leq 16$).

Väljund. Väljundisse väljastada üks täisarv K: antud maatriksi astak.

Näide.

Sisend	Väljund

`1 2 3`
`4 5 6`
`0 0 0`
	`2`

Lisainfo. Maatriksite tehteid õpitakse keskkooli matemaatika õppekava tõttu väga vähe. Siin on lühike kokkuvõte kõigest, mida on ülesande jaoks tarvis.

Maatriksiks nimetatakse ümarsulgude vahele paigutatud m reast ja n veerust koosnevat ristkülikukujulist arvude tabelit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kus arve a_{ij} nimetatakse maatriksi **elementideks**, $i = 1, \dots, m$ ja $j = 1, \dots, n$. Sellisel juhul räägitakse $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ **maatriksist**. Kui maatriksi ridade ja veergude arv on võrdne ($m = n$), siis nimetame maatriksit ka n**-järku** ruutmaatriksiks.

Maatriksi **determinant** on teisendus, mis seab igale ruutmaatriksile vastusse ühe kindla arvu. Maatriksi A determinanti tähistatakse $|A|$ või $\det A$.
Kui maatriksis on ainult üks element (esimest järku determinant), on determinandi väärtus võrdne selle elemendiga. Teist järku determinandiks nimetatakse avaldist

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Kolmandat järku maatriksi determinandi arvutamiseks kasutatakse koolimatemaatikas tavaliselt **Sarruse reeglit** (vt ka siit). Selle järgi saame, et

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3$$

Ruutmaatriksi elemendile a_{ij} vastavaks **miinoriks** nimetatakse determinanti M_{ij}, mis saadakse, kui maatriksi A determinandis jätta ära elementi a_{ij} läbiv rida ja veerg.
NB! Kõrgemat järku ruutmaatriksi determinandi arvutamisel ei saa kasutada mingit mõistliku pikkusega abivalemit. Seetõttu vajamegi miinori definitsiooni.
Definitsioon. Kõrgemat järku ruutmaatriksi A **determinandiks** nimetatakse summat

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, \quad i \in \{1, 2, ..., n\}, \quad n \geq 2,$$

kus M_{ij} on elemendile a_{ij} vastav miinor ehk $(n-1)$-järku determinant. Selle valemi kasutamist determinandi arvutamisel nimetatakse ka **determinandi arendamiseks i-nda rea järgi**.
Determinandi väärtus ei muutu, kui maatriksi A determinanti arendada mingi j-nda veeru järgi.

*Nagu näha, on determinandi arvutamine üsna kallis tehe. Näiteks 5. järku maatriksi (kus ükski element ei ole null) determinandi arvutamiseks on **siin antud valemiga** vaja arvutada viis neljandat järku determinanti, iga sellise determinandi leidmiseks jällegi neli kolmandat järku determinanti jne.*

Mõned kasulikud determinandi omadused:

1. Maatriksi transponeerimine (ridade ja veergude ära vahetamine) ei muuda maatriksi determinandi väärtust.
2. Kahe rea või veeru vahetamisel muutub determinandi märk vastupidiseks.
3. Kahe võrdse või võrdelise rea (või veeru) korral on determinandi väärtus null.
4. Kui determinandi mingi rea (või veeru) kõik elemendid on nullid, on determinandi väärtus null.
5. Mingi rea või veeru kõigi elementide korrutamisek arvuga k, korrutub determinandi väärtus k-ga.
6. Kui maatriksi **peadiagonaali** all (või kohal) on ainult nullid, on maatriksi determinant alati võrdne peadiagonaali elementide korrutisega. Näiteks:

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 \cdot 2 \cdot (-8) = 112.$$

Olgu antud suvaline $m \times n$ maatriks

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Valime maatriksis A suvaliselt k rida ja k veergu, kus $k \leq m$ ja $k \leq n$. Moodustame nendes ridades ja veergudes olevatest elementidest maatriksi, säilitades ridade ja veergude järjestuse. Selle maatriksi determinanti nimetatakse **maatriksi A k-järku miinoriks**.

Maatriksi A **astakuks** nimetatakse selle maatriksi nullist erinevate miinorite kõrgeimat järku, kusjuures nullmaatriksi astakuks loetakse arv 0. Tähistatakse tavaliselt rank A.

Näide. Olgu maatriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 0 \\ 4 & 0 & -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Maatriksi A kõik kolmandat järku miinorid võrduvad nulliga, kuna neis on vähemalt üks nullidest koosnev veerg. Leiame teist järku miinorid, kus nullveerge pole:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 0.$$

Seega on ka teist järku miinorid nullid. Et esimest järku miinorid on maatriksi elemendid ning A ei ole nullmaatriks, siis leidub nullist erinev esimest järku miinor ning seega rank$A = 1$.

Nagu näha, on maatriksi astakute leidmine üsna töömahukas protsess.

Huvilised võivad lugeda maatriksarvutuste kohta lisaks siit lehelt (loengukonspekt ja ülesannete kogu).