

# Verifica Sperimentale della Legge di Hooke con Metodo Statico e Dinamico

Eugenio Dormicchi<sup>1</sup>, Giovanni Oliveri<sup>1</sup>, Mattia Sotgia<sup>1, 2</sup>

<sup>1</sup>Gruppo C03, Esperienza di laboratorio n. 5

<sup>2</sup>In presenza in laboratorio per la presa dati

Presa dati– 10 Marzo 2021, 15:00– 18:00; Analisi dati– 16 Marzo 2021

*Obiettivo*– Vogliamo verificare la validità della legge di Hooke per cui la forza  $\vec{F}$  applicata su un corpo elastico è direttamente proporzionale all’elongazione causata, secondo la legge  $F = k \cdot \delta l$ .  
*Metodi*– Sfruttiamo due modelli per ricavare in modo differente la costante  $k$  legata alla molla. Considerando la molla in una condizione statica, con un corpo di massa nota  $m_i$ , e misurando l’allungamento  $l_i$  causato dalla massa, possiamo ricavare  $k_{\text{statico}}$ . Se invece mettiamo in oscillazione dalla condizione di equilibrio  $l_0$  possiamo dal periodo  $T_i$  ricavare  $k_{\text{dinamico}}$  (considerando il moto nel regime elastico).

*Risultati*–

*Conclusione*–

## 1. Obiettivo

Obiettivo dell’esperienza è quello di verificare la validità della relazione  $\vec{F} = k\delta\vec{l}$  (che possiamo considerare nel nostro caso  $F = k \cdot \delta l$ , poiché consideriamo solo componenti lungo lo stesso asse) per cui la forza  $\vec{F}$  esercitata su un corpo elastico è direttamente proporzionale all’allungamento causato dalla stessa forza, a meno di una costante  $k$ . Per verificare la legge di Hooke eseguiamo misure su due modelli, uno statico e uno dinamico, e confrontiamo graficamente il risultato ottenuto.

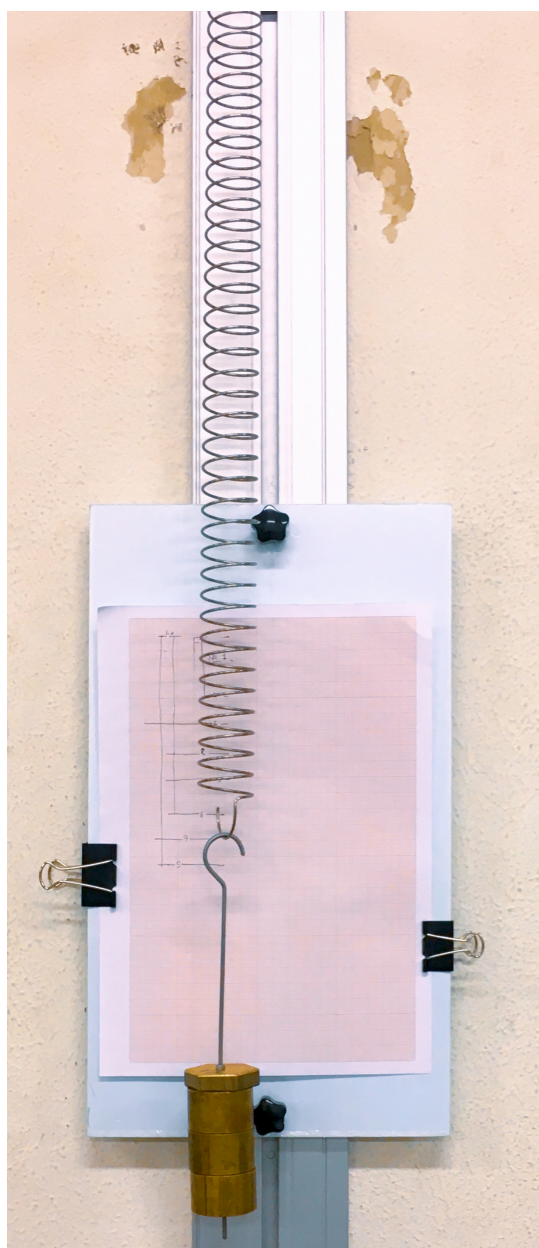
Infine vogliamo ricavare il valore rispettivamente di  $k_{\text{statico}}$  e di  $k_{\text{dinamico}}$ , ed eseguire una verifica della compatibilità dei valori. Se tali valori risultano compatibili infine proviamo a ricavare il valore della miglior stima, ottenuto con una media pesata sugli errori associati.

## 2. Strumentazione

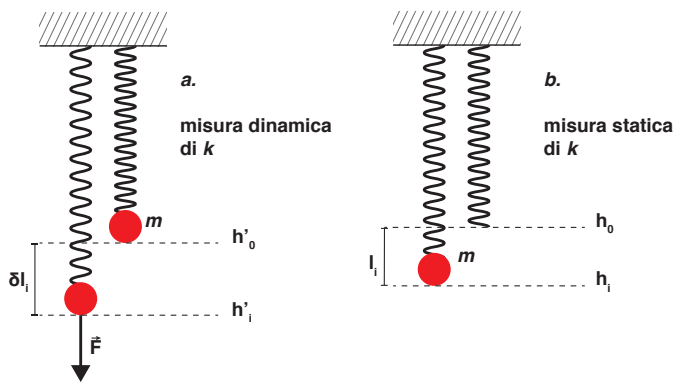
Abbiamo a disposizione come strumentazione:

- un calibro ventesimale di portata 20 cm e sensibilità 0.05 mm;
- un cronometro di portata molto maggiore alle misure effettuate e sensibilità 0.01 s;
- una bilancia elettronica KERN BCP-350/4, di portata 350 g, considerando come sensibilità la linearità dello strumento 0.04 g (non rischiamo così di sottostimare l’errore);
- un foglio di carta millimetrata attaccato con le pinze su un piano verticale posto sulla struttura che sostiene la molla, parallelo a quest’ultima;
- una squadra utilizzata per ridurre l’errore commesso di parallasse;
- una vite infinita con un gancio all’estremità e due bulloni, necessario per fissare le masse alla molla;
- una molla di costante elastica  $k$ ;
- diverse masse cilindriche forate, considerate di densità omogenea;

La struttura utilizzata prevede una guida fissata al muro dove a un estremo è vincolata tramite un braccetto una molla, libera per l’altro estremo. Sulla guida è collocato un piano mobile con sopra applicato il foglio di carta millimetrata con due pinze. Tale piano viene fermato con due viti sulla guida all’altezza tale da posizionare l’estremo libero della molla in cima al foglio millimetrato. In questo modo ci assicuriamo che l’aggiunta del peso all’estremo della molla e la relativa elongazione rimangano nei limiti del foglio.



**Figura 1.** Apparato sperimentale utilizzato nell’esperienza. Sulla guida di alluminio si vede fissato il piano di misura con il foglio di carta millimetrata, dove sono riportate le elongazioni dovute alle diverse masse.



**Figura 2.** *a.* Descrizione del metodo di misura dinamico. Al sistema molla + massa  $m_i$  è applicata una forza  $\vec{F}$ , che sposta il sistema dalla sua condizione di equilibrio. Quando viene lasciato andare il sistema si mette in oscillazione attorno alla sua posizione di equilibrio. *b.* Descrizione del metodo di misura statico. Alla molla è appesa una massa  $m_i$  che ne causa l'elongazione di una lunghezza  $l_i = h_0 - h_i$ .

### 3. Metodi

Tutte le misure sono riportate nelle unità del Sistema Internazionale (SI). Si assume come nota e costante l'accelerazione di gravità  $g_t = (9.8056 \pm 0.0001 \text{ stat}) \text{ m/s}^2$ .

Si fa spesso riferimento anche alla regola del  $3\sigma$ , con la quale si vuole intendere la volontà di trasformare un errore di tipo massimo in errore statistico, e quindi considerando il valore vero con una probabilità statistica del  $3\sigma \approx 99.73\%$  di probabilità del dato vero.

I valori riportati sono stati approssimati tenendo conto di alcune convenzioni prese. Si approssima l'errore a una cifra significativa se tale cifra è  $\geq 3$ , altrimenti se tale cifra è 1 o 2 allora si considerano due cifre significative. Considerando quindi le posizioni decimali significative dell'errore si approssima per eccesso il valore numerico della grandezza.

In entrambi i modelli la molla è sempre utilizzata in un regime elastico, tale per cui la molla è capace di ritornare alla condizione iniziale, e quindi in una condizione in cui l'energia totale del sistema si conserva.

Poiché la portata della bilancia elettronica è di 350 g e le masse da noi utilizzate combinate danno valori superiori, procediamo a pesare le masse in combinazioni tali da non superare tale limite della bilancia, ma con lo scopo di non effettuare troppe misure sommate poiché l'errore totale della misura è la somma degli errori delle singole pesate. Inoltre per il medesimo motivo il gancio viene pesato in una delle pesate e non singolarmente.

Per riportare le misure di lunghezza raggiunte dalla molla sul foglio abbiamo utilizzato una squadra per ridurre l'errore dovuto alla parallasse.

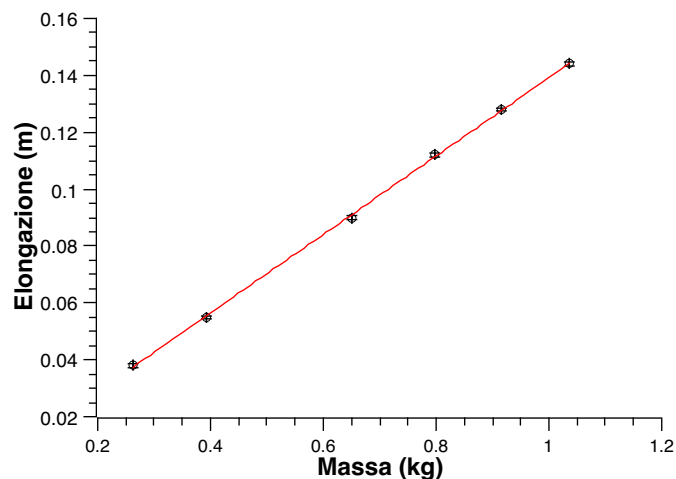
Misuriamo la massa della molla utilizzando la squadra come piano d'appoggio per allargare il piatto della bilancia. Tale massa risulta essere  $83.894 \pm 0.004 \text{ g}$ .

Segniamo sul foglio millimetrato la proiezione della lunghezza  $l_0$  raggiunta dalla molla a riposo quando essa è libera senza masse ulteriori appese.

#### 3.1. Metodo Statico

Vogliamo ricavare tramite misure di statica un valore  $k_{\text{statico}}$  (ovvero una misura di  $k$ ).

Dai pesetti componiamo una massa  $m_i$  tale che la massa rientri nel regime delle elongazioni elastiche per la molla, ovvero



**Figura 3.** Grafico elongazione  $\times$  massa dove è stato effettuato un fit lineare da cui si è ricavato il valore di  $k_{\text{statico}}$ . Si potrebbe verificare che la retta individuata passa per l'origine. Possiamo velocemente saggiare la bontà solamente dal rapporto  $\chi^2/\text{ndf} = 7.328/4 \approx 1.832$  che è poco più di 1.

**Tabella 1.** Valori delle masse e dei relativi allungamenti  $\delta l$ . L'errore sull'allungamento  $\delta l$  è preso considerando la minima variazione misurabile dal foglio di carta millimetrata. Per rendere statistica la misura si è utilizzata la regola del  $3\sigma$  e si è così ottenuto il valore di  $\varepsilon_{\delta l} = \Delta l / \sqrt{3}$ .

	Massa $m_i \pm \varepsilon_m \text{ (kg)}$	Allungamento $\delta l \pm \varepsilon_{\delta l} \text{ (m)}$
1	$0.261499 \pm 0.000002$	$0.0380 \pm 0.0006$
2	$0.650447 \pm 0.000007$	$0.0900 \pm 0.0006$
3	$0.796669 \pm 0.000007$	$0.1120 \pm 0.0006$
4	$1.035634 \pm 0.000009$	$0.1440 \pm 0.0006$
5	$0.393091 \pm 0.000005$	$0.0550 \pm 0.0006$
6	$0.916857 \pm 0.000009$	$0.1280 \pm 0.0006$

che  $0.150 \text{ kg} < m_i < 1.200 \text{ kg}$ . Pesata quindi la massa totale (come somma delle diverse pesate) fissiamo sulla vite senza fine tramite i bulloni i pesetti. Agganciamo dunque il sistema composto da masse + gancio alla molla, attendiamo che questa si stabilizzi su una condizione di equilibrio e segniamo sul foglio la lunghezza raggiunta dall'estremo della molla. Misuriamo dunque la variazione di elongazione  $\delta l_i$ , a cui associamo un errore di  $\Delta l_i = 1 \text{ mm}$ , considerando come incertezza sulla misura il minimo valore misurabile dalla carta millimetrata. Convertiamo poi l'errore assoluto in errore standard  $\varepsilon_{l_i} = \Delta l_i / \sqrt{3}$  secondo la regola del  $3\sigma$ .

Ripetiamo questo procedimento per sette misure di massa differenti, e trascriviamo i valori in tabella (Tab. A1 e Tab. 1).

Dai valori in Tab. 1 possiamo eseguire un grafico lineare elongazione  $\times$  massa, come in Fig. 3. Dal fit eseguito su una funzione del tipo  $y = a \cdot x + b$ , ricaviamo i valori di  $a$  e  $b$ . Se la relazione che vogliamo dimostrare è della forma  $F = k \cdot \delta l$ , possiamo concludere che  $b \approx 0$ , e  $a = \frac{g}{k_{\text{statico}}}$ , da cui possiamo ricavare il valore di  $k_{\text{statico}} \pm \varepsilon_k$ .

#### 3.2. Metodo dinamico

Per ogni massa utilizzata nel metodo statico effettuiamo anche una considerazione di tipo dinamico del sistema, per ricavare un valore  $k_{\text{dinamico}}$  da confrontare poi con  $k_{\text{statico}}$ , per verificarne il valore. Applichiamo una forza  $\vec{F}$  al sistema molla +  $m_i$ , spostando la molla dalla sua posizione di equilibrio di un  $\delta x$  ab-

**Tabella 2.** Valori delle masse e relativi valori di periodo  $\bar{T}_i$ . Sono riportati anche i valori di  $\bar{T}_i^2$ . Gli errori relativi ai periodi sono ricavati dal calcolo dell'errore standard ( $\varepsilon$ ). L'errore sulla massa preso dalla linearità dello strumento (0.004 g) è ottenuto dalla somma degli errori dovuti alle diverse pesate. Il valore è poi staticizzato per la regola del  $3\sigma$  ( $\varepsilon_m = \Delta m / \sqrt{3}$ )

	Massa $m_i \pm \varepsilon_m$ (kg)	Periodo $\bar{T}_i \pm \varepsilon_T$ (s)	Periodo al quadrato $\bar{T}_i^2 \pm \varepsilon_{T^2}$ (s <sup>2</sup> )
1	0.261499 $\pm$ 0.000002	0.3761 $\pm$ 0.0015	0.1415 $\pm$ 0.0011
2	0.650447 $\pm$ 0.000007	0.5646 $\pm$ 0.0020	0.3188 $\pm$ 0.0022
3	0.796669 $\pm$ 0.000007	0.6217 $\pm$ 0.0018	0.3865 $\pm$ 0.0022
4	1.035634 $\pm$ 0.000009	0.6962 $\pm$ 0.0011	0.4847 $\pm$ 0.0015
5	0.393091 $\pm$ 0.000005	0.439 $\pm$ 0.003	0.1925 $\pm$ 0.0027
6	0.916857 $\pm$ 0.000009	0.6574 $\pm$ 0.0017	0.4322 $\pm$ 0.0021

bastanza piccolo. Il sistema si metterà dunque in oscillazione. La necessità di avere ampiezza piccole può essere spiegata da due fatti: innanzitutto il periodo di oscillazione del sistema non dipende dall'ampiezza dell'oscillazione, e inoltre un'ampiezza maggiore porta ad avere una velocità maggiore e quindi, poiché l'attrito viscoso dell'aria è direttamente proporzionale alla velocità  $v$  ( $\vec{F}_v = -\beta\vec{v}$ ) causando quindi uno smorzamento del moto. Per dimostrare il primo punto, partendo dalle equazioni delle forze in gioco ricaviamo:

$$\vec{f}_{el} + \vec{P} = M_{tot}\vec{a}$$

da cui

$$k \cdot x - M \cdot g = -M \cdot \ddot{x}$$

Dividendo per la massa  $M$

$$\frac{k}{M} \cdot x - g = -\ddot{x}$$

Se riscriviamo il termine  $\frac{k}{M} \cdot (x - g \cdot \frac{M}{k}) = \xi$ , osserviamo che  $\ddot{\xi} = \ddot{x}$ , quindi possiamo riscrivere come

$$-\frac{k}{M} \cdot \xi = \ddot{\xi}$$

Se consideriamo il fattore  $\frac{k}{M}$  questo ha dimensioni  $s^{-1}$ , quindi possiamo riscrivere

$$-\omega_0^2 \cdot \xi = \ddot{\xi}$$

Che è una equazione differenziale al secondo ordine, che se risolta ci dà proprio l'equazione del moto armonico oscillatorio, dove però il termine  $g \cdot \frac{M}{k}$  rappresenta la posizione  $x_{eq}$  di equilibrio. Da  $\omega_0 = \sqrt{k/M}$  possiamo ricavare il periodo di oscillazione del sistema.

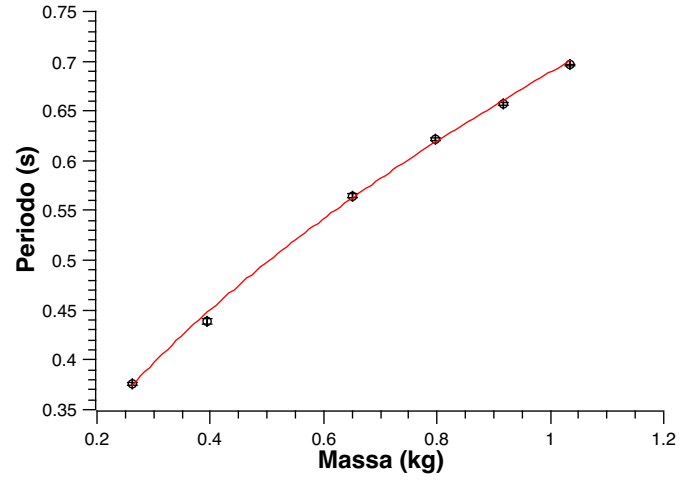
Se infatti il periodo è  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ , allora otteniamo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}}$$

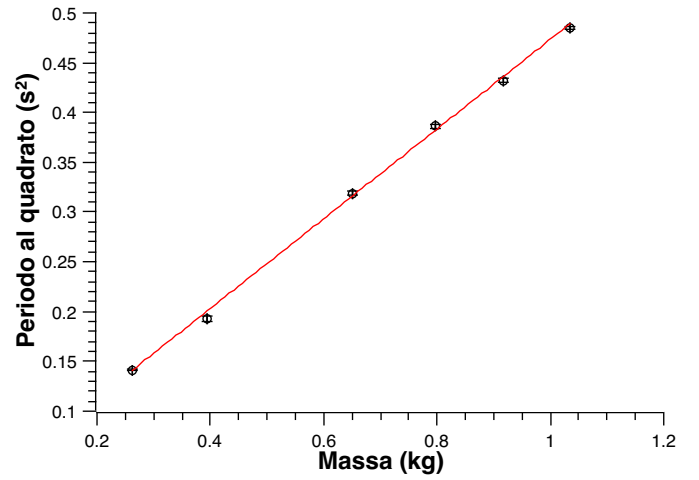
che denota la non dipendenza del periodo dall'ampiezza di oscillazione.

Con il cronometro misuriamo il periodo di 10 oscillazioni ( $T_{10 \times i}$ ). Ripetiamo la misurazione per 10 volte, ottenendo quindi  $T_{10 \times 1 \times i}$ ,  $T_{10 \times 2 \times i}$ , ...,  $T_{10 \times 10 \times i}$ .

Cambiamo la massa e ripetiamo le stesse misure, ottenendo i valori riportati in tabella in fondo al documento (Tab. A1). In Tab. 2 non sono riportati i valori del punto 2, e quindi gli altri valori sono fatti scalare, poiché come si illustra dopo, tale punto è ritenuto essere erroneo e quindi eliminato per considerazioni successive.



**Figura 4.** Grafico periodo×massa. Il fit è stato ottenuto a partire da una funzione uguale a quella del periodo  $T = 2\pi \sqrt{(M + (m_{molla})/(3)) / (k)}$ . Si può osservare un andamento parabolico della curva, in accordo con la teoria.



**Figura 5.** Grafico periodo<sup>2</sup>×massa. Il fit è stato eseguito a partire da una relazione lineare come descritto nel paragrafo dei metodi 3.2.

Cronometriamo 10 oscillazioni per ridurre l'errore di reazione dividendolo su più oscillazioni, dalle quali ricaviamo poi il periodo di una singola oscillazione  $T_{1 \times i} = T_{10 \times 1 \times i} / 10$ , ...,  $T_{10 \times i} = T_{10 \times 10 \times i} / 10$ . Dai valori  $T_{1 \times i}$ , ...,  $T_{10 \times i}$  possiamo inoltre eseguire una analisi statistica e ricavare un valore medio  $\bar{T}_i$  e l'errore standard associato ricavato come  $\varepsilon_T = \frac{s_{10}}{\sqrt{10}}$ .

Trascriviamo i valori così ricavati in Tab. 2.

La relazione che lega il periodo  $T$  alla massa, come ricavato in precedenza è

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}}$$

la formula presentata è valida però solo per un sistema composto da una molla ideale di massa trascurabile, ma nel nostro caso il valore della massa della molla è di  $0.083894 \pm 0.000004$  kg, quindi non trascurabile rispetto alle masse considerate. Si trova necessario introdurre quindi un termine correttivo che tenga conto dell'influenza della massa della molla:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M + \frac{m_{molla}}{3}}{k}}$$

Se eseguiamo il grafico periodo×massa dovremmo individuare un andamento parabolico con l'asse sull'asse delle masse. Osservando infatti la Fig. 4 si può vedere chiaramente un andamento che rispetta la legge sopra descritta.

Procediamo ora con la linearizzazione della relazione del periodo. Partendo dalla formula

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M + \frac{m_{\text{molla}}}{3}}{k}}$$

otteniamo elevando al quadrato ambo i membri

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k_{\text{dinamico}}} \cdot M + \frac{4\pi^2 \cdot \frac{m_{\text{molla}}}{3}}{k_{\text{dinamico}}}$$

ovvero ponendo  $a' = \frac{4\pi^2}{k_{\text{dinamico}}}$  e  $b' = \frac{4\pi^2 \cdot \frac{m_{\text{molla}}}{3}}{k_{\text{dinamico}}}$  possiamo riscriverla come  $T^2 = a' \cdot M + b'$ , dove  $M = m_i$  è la massa che agganciamo alla molla.

Partendo dai dati presenti in Tab. 2 dei valori di  $m_i \pm \varepsilon_m$  e  $\bar{T}_i^2 \pm \varepsilon_{T^2}$  possiamo rappresentarli nel grafico in Fig. 5. Su questi punti possiamo eseguire un fit lineare con una funzione  $y = a' \cdot x + b'$ , da cui ricaviamo i valori dei parametri  $a'$  e  $b'$ .

#### 4. Risultati

#### 5. Conclusione

##### 5.1. Controlli

##### 5.2. Possibili errori sistematici

#### A. Dati completi

Di seguito riportiamo in forma tabulare i dati raccolti relativi alle masse, ai periodi e alle elongazioni.

**Tabella A1.** Dati grezzi relativi alle misure di massa per ogni  $i$ -esima masse e le misure del periodo di oscillazione e della elongazione associate alla  $i$ -esima massa.

Misure di massa (kg) (errore assoluto $\pm 4 \times 10^{-6}$ kg per ogni pesata)							
$m_i$	0.261499	0.535073	0.650447	0.796669	1.035634	0.393091	0.916857
$\delta m$	0.000004	0.000008	0.000012	0.000012	0.000016	0.000008	0.000016
Periodi di 10 oscillazioni presi 10 volte per ogni massa (metodo dinamico) (s) $T_{10 \times n \times 1}, \dots, T_{10 \times n \times 7}$ (errore assoluto $\pm 0.01$ s)							
$T_{10 \times 1 \times i}$	3.75	5.52	5.58	6.25	7.01	4.50	6.65
$T_{10 \times 2 \times i}$	3.83	5.52	5.70	6.27	6.94	4.25	6.58
$T_{10 \times 3 \times i}$	3.71	5.58	5.59	6.16	6.93	4.34	6.63
$T_{10 \times 4 \times i}$	3.83	5.37	5.77	6.22	6.94	4.51	6.57
$T_{10 \times 5 \times i}$	3.78	5.38	5.62	6.12	6.91	4.26	6.57
$T_{10 \times 6 \times i}$	3.70	5.53	5.66	6.31	7.00	4.33	6.51
$T_{10 \times 7 \times i}$	3.76	5.60	5.70	6.19	7.00	4.37	6.46
$T_{10 \times 8 \times i}$	3.78	5.53	5.63	6.19	6.96	4.44	6.59
$T_{10 \times 9 \times i}$	3.71	5.50	5.58	6.26	6.95	4.37	6.59
$T_{10 \times 10 \times i}$	3.76	5.44	5.63	6.20	6.98	4.50	6.59
Elongazioni (metodo statico) (m) (errore assoluto $\pm 1 \times 10^{-3}$ m)							
$l_i$	0.038	0.074	0.090	0.112	0.144	0.055	0.128