

# Misure precise della densità di liquidi con il metodo idrostatico

Dormicchi E<sup>1</sup>, Pizzimbone R<sup>1</sup>, Sotgia M<sup>1</sup>  
<sup>1</sup>Gruppo C03

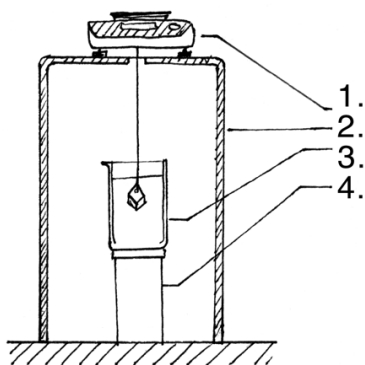
Presenza dati— 2 dicembre 2020, 15:00–18:00

Analisi dati— 4 dicembre 2020

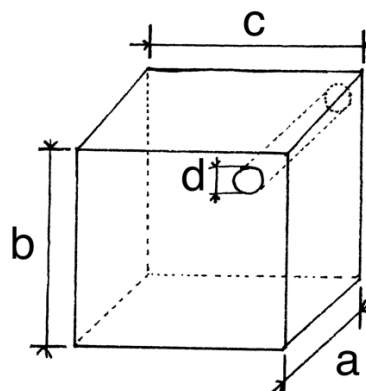
**Obiettivo:** Rilevare la concentrazione in massa del liquido  $L_2$  nella miscela  $L_M$ . **Metodi:** Determiniamo il volume del solido con metodo geometrico e idrostatico. Sfruttando nuovamente il principio della bilancia idrostatica determiniamo la densità  $\rho_2$  del liquido  $L_2$  e  $\rho_M$  della miscela dei due liquidi; si utilizza per tale processo lo stesso solido di cui il volume è noto da prima. Assumendo infine una dipendenza lineare della densità  $\rho_M$  con la massa dei due costituenti, ricaviamo la concentrazione in massa del liquido  $L_2$ . **Risultati:** Osserviamo che le due misure del volume sono discrepanti. Scegliendo la misura effettuata con il metodo idrostatico, ricaviamo misure di densità  $\rho_2$  e  $\rho_M$  rispettivamente di  $L_2$  e  $L_M$ , per trovare la frazione in massa di  $L_2$ . **Conclusione:** Ricaviamo la concentrazione in massa di  $L_2$ , che corrisponde al 34% della soluzione, dove il restante 66% è la concentrazione in massa di  $L_1$ .

## Strumentazione

Solido di forma geometrica regolare di acciaio inox. forato per fare in modo da poter essere legato ad un filo (Figura 2.);  
Nonio ventesimale singolo (Portata: 150 mm; Sensibilità: 1/20 mm);  
Micrometro di Palmer (Portata: 25 mm; Sensibilità: 1  $\mu$ m);  
1 Becher di vetro (da 500 ml);  
2 Becher di vetro (da 250 ml);  
Liquido  $L_1$  di densità nota (acqua distillata);  
Liquido  $L_2$  di densità non nota (acqua con concentrazione salina di 35 g/L);  
Un miscuglio in concentrazioni non note di  $L_1$  e  $L_2$ ;  
Bilancia Kern PCB 350– 4 (Portata: 350 g; si considera come errore la linearità dello strumento: 0.004 g);  
Struttura in plastica per sostenere la bilancia, provvista di foro per permettere al gancio della bilancia di passare per effettuare misure di corpi sospesi in aria (Figura 1.).  
Lenza da pesca, filo in nylon (diametro  $0.260 \pm 0.001$  mm);  
Supporto mobile per poggia il becher sopra.



**Figura 1.** Struttura di supporto della bilancia (2.), schema semplificato. La bilancia (1.) si pospone sopra, e con un gancio permette di pesare oggetti sottostanti. (3.) becher. (4.) supporto del becher.



**Figura 2.** Solido utilizzato per effettuare l'esperienza.

## Obiettivo

Lo scopo dell'esperienza è rilevare la concentrazione in massa di un liquido di densità ignota  $L_2$  in una miscela  $L_M$ . Questo metodo trova ampio utilizzo in ambito industriale per identificare le frodi alimentari, in quanto permette di verificare che dati dei liquidi essi siano soluzioni miste.

## Metodi

Sfruttiamo a più riprese il funzionamento della bilancia idrostatica di Archimede con diversi obiettivi: la prima volta per ricavare il volume in modo preciso di un solido che successivamente assumeremo noto per calcolare la densità di  $L_2$  e  $L_M$ . Inoltre sfrutteremo la regolarità del solido per ricavare anche in modo indiretto il volume dello stesso per confrontare le due misure e considerare quella più precisa.

Tutte le misure sono prese più volte, per poter ridurre eventuali errori casuali che non si potrebbero altrimenti individuare con una singola misura. Dati questi valori, nel calcolo consideriamo la media aritmetica dei valori.

### A. Determinazione volume $V_{indiretto}$ (metodo geometrico)

Misuriamo le dimensioni del solido con l'utilizzo del calibro, considerandone i tre spigoli e anche l'incavo cilindrico (Tabella 1.). Il nostro solido è costituito da un parallelepipedo che presenta un incavo cilindrico necessario per legare il solido ad un filo e sospenderlo nel liquido al gancio della bilancia (Figura 2.). Utilizziamo quindi come relazione di definizione la formula che consente di calcolare il volume di un parallelepipedo, a cui sottraiamo il volume del cilindro. Otteniamo quindi:

$$V_{indiretto} = (a \cdot b \cdot c) - \left( a \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4} \right) = 2.608 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

Considerando la formula ricavata per propagare l'errore di misura:

$$\Delta V_{indiretto} = \sum_j \left| \frac{\partial V}{\partial x_j} \right|_{x_j=x_{j0}} = \left| b \cdot c - \pi \cdot \frac{d^2}{4} \right| \Delta a + |a \cdot c| \Delta b + |a \cdot b| \Delta c + \left| \frac{a \cdot 2 \cdot \pi \cdot d}{4} \right| \Delta d = 1.4 \cdot 10^2 \text{ mm}^3$$

otteniamo che l'errore sul volume è  $1.4 \cdot 10^2 \text{ mm}^3$ . Il volume quindi è  $V_{indiretto} = (2.608 \pm 0.014) \cdot 10^4 \text{ mm}^3$ , con errore relativo  $E_r\% = 0.6\%$ .

### B. Determinazione volume $V_{diretto}$ (metodo idrostatico)

Per determinare il volume del solido con il metodo idrostatico sospendiamo il corpo con il filo al gancio ventrale, quindi tarriamo a zero la bilancia con il corpo sospeso in aria. Successivamente posizioniamo il corpo nel becher con il liquido  $L_1$  di densità nota stando attenti ad immergere interamente il solido in modo tale che non tocchi alcuna parete del becher, inoltre controlliamo grazie alla livella a bolla di cui è dotata la bilancia che il piatto sia perfettamente parallelo al terreno. La misura non considera la spinta d'Archimede del filo in quanto il volume del filo calcolato è di  $\sim 3 \text{ mm}^3$  (diametro  $(0.260 \pm 0.001) \text{ mm}$  ottenuto con il micrometro di Palmer, lunghezza stimata del filo immerso  $(28.30 \pm 0.05) \text{ mm}$  ottenuta grazie al nonio ventesimale), quindi non confrontabile con l'errore assoluto ricavato per il volume ( $9 \text{ mm}^3$ ). **non era 14?** La misura ottenuta corrisponde alla variazione di massa  $\Delta m$  (Tabella 2.) =  $m - m'$ , dove  $m$  e  $m'$  sono rispettivamente la massa in aria e la massa in acqua del solido; di conseguenza il volume del solido è ricavato con la formula della spinta idrostatica:

$$V_{diretto} = \frac{\Delta m}{\rho_1} = 2.5700 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$$

           **Ottenuta come?**

Dove si osserva anche che non si rileva una variazione sostanziale della temperatura tra il liquido e l'ambiente di laboratorio, quindi si può trascurare una possibile espansione o contrazione del solido.

$$\Delta V_{diretto} = \left| \frac{1}{\rho_1} \right| \Delta m + \left| -\frac{\Delta m}{\rho_1^2} \right| \Delta \rho_1 = 9.285 \text{ mm}^3$$

Calcoliamo inoltre con la stessa formula di propagazione dell'errore utilizzata in precedenza l'errore  $\Delta V_{diretto}$ , ottenendo quindi una misura  $V_{diretto} = (2.5700 \pm 0.0009) \cdot 10^4 \text{ mm}^3$ , con errore relativo  $E_r\% = 0.04\%$ .

### C. Determinazione densità $\rho_2$ liquido $L_2$ cifre significative "strane"

Dopo aver rimosso il corpo dalla bilancia e averlo asciugato, si è sostituito il becher contenente acqua distillata con il secondo contenitore di liquido di densità ignota. Ripeto le medesime operazioni svolte nel punto precedente riportando la variazione di massa  $\Delta m_{L_2}$  (tabella 3) con l'obiettivo di ricavare la densità del fluido. Quest'ultima si ricava dalla seguente formula:

$$\rho_2 = \frac{Dm_{L2}}{V} = 1.0307 \cdot 10^{-3} \text{ g/mm}^3$$

dove  $V=V_{\text{diretto}}$  è il Volume del solido ricavato precedentemente con metodo idrostatico. Esso è considerato come valore vero poiché abbiamo constatato che, nonostante le misure effettuate con i due metodi del solido siano discrepanti, innanzitutto la misura idrostatica è più precisa, presentando infatti un  $E_r\%$  minore ( $0.04\% < 0.6\%$ , con una differenza di ordine  $10^1$ ); inoltre il volume ricavato geometricamente fa affidamento al fatto che il solido sia perfettamente regolare, mentre la bilancia idrostatica non si basa su una definizione geometrica particolare.

$$\Delta \rho_2 = \left| \frac{1}{V} \right| \Delta Dm_{L2} + \left| -\frac{Dm_{L2}}{V^2} \right| \Delta V = 5.28 \cdot 10^{-7} \text{ g/mm}^3$$

Applicando di nuovo la formula per la propagazione dell'errore assoluto vista in precedenza, ricaviamo che la densità di  $L_2$  è  $\rho_2 = (1.0307 \pm 0.0005) \cdot 10^{-3} \text{ g/mm}^3$ , con errore relativo  $E_r\% = 0.05\%$ .

#### D. Determinazione densità $\rho_M$ miscela

Ripetendo quanto eseguito per ricavare  $\rho_2$ , possiamo ricavare anche  $\rho_M$ , dalle misure di  $Dm_{LM}$  (tabella 4.):

$$\rho_M = \frac{Dm_{LM}}{V} = 1.0094 \cdot 10^{-3} \text{ g/mm}^3$$

E allo stesso modo si ricava anche l'errore assoluto su  $\rho_M$ . Quindi  $\rho_M = (1.0094 \pm 0.0005) \cdot 10^{-3} \text{ g/mm}^3$ , con errore relativo  $E_r\% = 0.05\%$ .

$$\Delta \rho_M = \left| \frac{1}{V} \right| \Delta Dm_{LM} + \left| -\frac{Dm_{LM}}{V^2} \right| \Delta V = 5.20 \cdot 10^{-7} \text{ g/mm}^3$$

### Conclusione

Assumendo che la densità della miscela  $\rho_M$  vari linearmente come  $\rho_M = \rho_2 \cdot x + (1-x) \cdot \rho_1$ , con la concentrazione in massa dei due componenti. Otteniamo quindi che la concentrazione  $x$  di  $L_2$  nella miscela  $L_M$  è:

$$x = \frac{\rho_M - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{1.0094 - 0.99823}{1.0307 - 0.99823} \approx 0.34 = 34\%$$

#### A. Controlli

Come già osservato (cfr. *Determinazione Densità  $\rho_2$  liquido  $L_2$* ) si nota che le misure dei volumi sono discrepanti, poiché:

$$\left| V_{\text{diretto}} - V_{\text{indiretto}} \right| < \Delta V_{\text{diretto}} + \Delta V_{\text{indiretto}} = 3.8 \cdot 10^2 \text{ mm}^3 \not< 1.5 \cdot 10^2 \text{ mm}^3$$

Si osserva che la differenza tra  $\rho_1$  e  $\rho_2$  è significativa, cioè è maggiore della somma degli errori ( $3.2 \cdot 10^{-5} > 7.3 \cdot 10^{-7}$ )  $\text{mm}^3$ . Analogamente per le densità  $\rho_M$  e  $\rho_2$ : ( $2.1 \cdot 10^{-5} > 1.4 \cdot 10^{-6}$ )  $\text{mm}^3$  e per  $\rho_M$  e  $\rho_1$ : ( $1.1 \cdot 10^{-5} > 7.3 \cdot 10^{-7}$ )  $\text{mm}^3$ . Questi fatti sono giustificati dal fatto che gli strumenti sono sufficientemente precisi da individuare le differenze di densità tra acqua salata, distillata e una miscela delle due.

L'errore relativo sulla frazione di massa che abbiamo rilevato è 5%. Questo corrisponde al limite in percentuale con cui possiamo conoscere la frazione in massa  $x$  di  $L_2$ .

#### B. Possibili errori sistematici

Un possibile errore sistematico può essere causato dalla dilatazione termica che il solido subisce a causa della differenza di temperatura tra l'ambiente di laboratorio e il liquido dove è immerso. Considerando un  $\Delta T = 2^\circ\text{C}$  tra l'ambiente e il

liquido,  $V_{\text{diretto}}$  e un coefficiente di dilatazione volumica dell'acciaio  $\beta = 36 \cdot 10^{-6} \text{ C}^{-1}$  otteniamo  $\Delta V = \beta \cdot V_{\text{diretto}} \cdot \Delta T = 1.8 \text{ mm}^3$  che è minore dell'errore assoluto sul volume ( $9 \text{ mm}^3$ ), quindi una variazione non rilevabile dai nostri strumenti.

Durante le diverse misurazioni alcune difficoltà pratiche possono aver portato a degli errori sistematici. Ad esempio, con gli strumenti forniti, la misurazione delle dimensioni del filo per ottenere il suo volume risulta difficoltosa (causa la flessibilità del filo ed inadeguati strumenti per tenerlo teso in posizione) e, quindi, con un conseguente errore sulla misura presa; è comunque doveroso dire che, come abbiamo constatato, il volume del filo è trascurabile, perciò l'errore sulla misura lo è altrettanto.

Un altro errore, più considerevole del precedente, è quello dovuto alla perdita di liquido durante le ripetizioni delle misurazioni delle variazioni di massa sulla bilancia idrostatica. Questo errore però non è quantificabile in modo preciso perciò non è considerato se non in maniera empirica.

Presa dati: buona, ma il risultato finale dovrebbe essere un po' diverso

Analisi: non si capisce la densità a  $20^\circ\text{C}$  come sia stata ottenuta, c'è qualche incongruenza

Relazione: piuttosto confusa, le tabelle in fondo non aiutano per niente la lettura

Giudizio: discreto (bonus)

# Appendice A— Tabelle dati raccolti

Dimensioni principali solido geometrico (mm)										
<i>a</i>	$\Delta a$	$E_{r\%}$	<i>b</i>	$\Delta b$	$E_{r\%}$	<i>c</i>	$\Delta c$	$E_{r\%}$	<i>d</i>	$\Delta d$ $E_{r\%}$
30.00	0.05	0.17%	29.90	0.05	0.17%	30.00	0.05	0.17%	5.50	0.05 0.9%
29.70	0.05	0.17%	29.90	0.05	0.17%	30.00	0.05	0.17%	5.50	0.05 0.9%
29.90	0.05	0.17%	29.90	0.05	0.17%	30.00	0.05	0.17%	5.50	0.05 0.9%
<b>29.97</b>	<b>0.05</b>	<b>0.17%</b>	<b>29.90</b>	<b>0.05</b>	<b>0.17%</b>	<b>30.00</b>	<b>0.05</b>	<b>0.17%</b>	<b>5.50</b>	<b>0.05 0.9%</b>
										<b>Val. medi</b>

**Tabella 1.** Misure geometriche relative al solido utilizzato, sono indicate anche i valori medi ricavati dalle stesse misure che sono stati utilizzati nell’analisi dati ( $E_{r\%}$  indica l’errore relativo espresso in percentuale).

Spinta idrostatica $L_1$ (acqua)			Densità $L_1$ (acqua) (g/mm <sup>3</sup> ) (con errore calcolato dal differenziale)	
$Dm$ (g)	$\Delta m$ (g)	$E_{r\%}$		
25.657	0.004	0.015%	$\rho_1(T_0=20^\circ C)$	$9.9823 \cdot 10^{-4}$
25.655	0.004	0.015%	$\rho_1(T=18^\circ C)$	$9.9862 \cdot 10^{-4}$
25.650	0.004	0.015%	$\rho_1(T=22^\circ C)$	$9.9780 \cdot 10^{-4}$
<b>25.654</b>	<b>0.004</b>	<b>0.015%</b>	$\Delta \rho_1(T_0=20^\circ C)$	$0.0021 \cdot 10^{-4}$
		<b>Valori medi</b>		

**Tabella 2.** Misure di massa della spinta idrostatica di  $L_1$ . La massa ricavata è la massa misurata dalla bilancia dovuta alla spinta di Archimede del solido immerso nel liquido, che viene usata per ricavare in modo diretto la misura di volume del solido in questione. Sulla sinistra troviamo la misura della densità ricavata dalla tabella che indica il valore della densità dell’acqua distillata in funzione della temperatura, e il relativo errore, calcolato considerando il differenziale tra le densità  $\rho_1(T=18^\circ C)$  e  $\rho_1(T=22^\circ C)$  trovando  $\Delta \rho_1(T_0)$ . Quando sono stati presi i dati la temperatura della stanza era di  $T_0=(20 \pm 1)^\circ C$ .

Spinta idrostatica $L_2$			Spinta idrostatica $L_M$		
$Dm_{L2}$ (g)	$\Delta m$ (g)	$E_{r\%}$	$Dm_{LM}$ (g)	$\Delta m$ (g)	$E_{r\%}$
26.498	0.004	0.015%	25.943	0.004	0.015%
26.480	0.004	0.015%	25.937	0.004	0.015%
<b>26.489</b>	<b>0.004</b>	<b>0.015%</b>	<b>25.940</b>	<b>0.004</b>	<b>0.015%</b>
		<b>Valori medi</b>			<b>Valori medi</b>

**Tabella 3.** Misure di massa percepita del corpo immerso nel liquido  $L_1$  e media dei valori.

**Tabella 4.** Misure di massa percepita del corpo immerso nella miscela  $L_M$  e media dei valori.