

# Misura dell'accelerazione di gravità con un pendolo semplice

Dormicchi E.<sup>1</sup>, Pizzimbone R.<sup>1</sup>, Sotgia M.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Gruppo C03, Esperienza di laboratorio n. 4

Presa dati— 22 dicembre 2020, 15:00– 18:00; Analisi dati— 11 gennaio 2021

**Obiettivo:** Determinare, sfruttando il moto di un pendolo e considerandolo nel regime delle piccole oscillazioni, il valore dell'accelerazione di gravità  $g$ . **Metodi:** Consideriamo un pendolo, nelle sue piccole oscillazioni, di cui possiamo misurare la lunghezza  $L = L_0 + L_{CM}$ . Cronometriamo  $N = 10$  oscillazioni per più ripetizioni, trovando così periodi  $\bar{T}_i = T_{10}/N$ , rispettivi alle Lunghezze  $L_i$ . Facendo variare la lunghezza, misuriamo nuovamente il periodo del pendolo. **Risultati:** Sfruttando gli strumenti di calcolo otteniamo dal fit lineare i valori di  $g \pm \varepsilon_g$ . **Conclusione:** Confrontando statisticamente i dati, otteniamo una compatibilità degli stessi con il valore teorico  $g_t = (9.8056 \pm 0.0001_{\text{stat}}) \text{ m/s}^2$ .

## 1. Obiettivo

Lo scopo dell'esperienza è di ricavare dal moto oscillatorio di un pendolo, considerato nel regime delle piccole oscillazioni<sup>1</sup> e approssimato a pendolo semplice, il valore dell'accelerazione di gravità  $g$ , valutando come trascurabile la massa del filo del pendolo, che in tutti e tre gli apparati considerati ha massa inferiore sensibilità della bilancia.

Da qui in poi ci riferiremo con A a Eugenio Dormicchi, con B a Riccardo Pizzimbone e con C a Mattia Sotgia.

## 2. Strumentazione

Di seguito elenchiamo la strumentazione utilizzata da ogni studente, a cui ci riferiamo secondo la nomenclatura sopra indicata.

### 2.1. Strumentazione A

Cilindro di acciaio inox.: massa  $(8.50 \pm 0.01) \times 10^{-1} \text{ kg}$ , altezza  $(1.430 \pm 0.01) \times 10^{-1} \text{ m}$ , diametro  $(7.630 \pm 0.005) \times 10^{-2} \text{ m}$ ;  
Filo di tessuto inestensibile di massa trascurabile;  
Metro a nastro: portata 3 m, sensibilità  $1 \times 10^{-3} \text{ m}$ ;  
Cronometro: sensibilità 0.1 s;  
Bilancia elettronica da cucina: portata 3 kg; incertezza = sensibilità  $1 \times 10^{-3} \text{ kg}$ ;  
Struttura per sospendere il pendolo ad una altezza  $h$  (barra di trazione e moschettone).

### 2.2. Strumentazione B

Pallina di natale cava con un foro tappato una volta riempita d'acqua: diametro  $(3.4 \pm 0.3) \times 10^{-2} \text{ m}$ , massa  $(1.68 \pm 0.01) \times 10^{-1} \text{ kg}$ ;  
Filo di nylon estensibile<sup>2</sup>;  
Gancio fisso per sospendere il pendolo;  
Metro a nastro: portata 1.5 m, sensibilità  $1 \times 10^{-3} \text{ m}$ ;  
Flessometro: portata 3 m, sensibilità  $1 \times 10^{-3} \text{ m}$ ;  
Bilancia elettronica da cucina: portata 3 kg; incertezza = sensibilità  $1 \times 10^{-3} \text{ kg}$ ;  
Cronometro: sensibilità 0.01 s;  
Struttura per sospendere il pendolo ad una altezza  $h$  (parte

inferiore letto a castello).

### 2.3. Strumentazione C

Pallina di natale sferica piena di sale: diametro  $(39.05 \pm 0.05) \text{ mm}$   
Filo di nylon estensibile<sup>3</sup>;  
Flessometro fissato di fianco al pendolo, tale da misurarne la lunghezza nella condizione di equilibrio stabile: portata 2 m, sensibilità  $1 \times 10^{-3} \text{ m}$ ;  
Cronometro: sensibilità 0.01 s;  
Bilancia elettronica: portata 5 kg, sensibilità  $1 \times 10^{-3} \text{ kg}$ ;  
Struttura per sospendere il pendolo ad una altezza  $h$  (mensola posta ad una altezza di 2.34 m da terra).

## 3. Metodi

Misuriamo con il cronometro la durata di 10 oscillazioni di un pendolo, ottenendo quindi il periodo di una oscillazione completa  $T = T_{10}/10$ . Eseguiamo la stessa misura 10 volte per 5 lunghezze diverse ( $L_i$ ) del pendolo. Possiamo perciò procedere con uno studio statistico dei dati, ricavandoci il periodo medio ( $\bar{T}$ ) e il relativo Errore Standard  $\varepsilon_N T$ .

Tutte le misure sono riportate in unità del Sistema internazionale (SI).

Si fa spesso riferimento anche alla regola del  $3\sigma$ , con la quale si vuole intendere la volontà di trasformare un errore di tipo massimo in errore statistico, e quindi considerando il valore vero con una probabilità statistica del  $3\sigma \approx 99.73\%$  di probabilità del dato vero.

I valori riportati sono stati approssimati tenendo conto di alcune convenzioni prese. Si approssima l'errore ad una cifra significativa se tale cifra è  $\geq 3$ , altrimenti se tale cifra è 1 o 2 allora si considerano due cifre significative. Considerando quindi le posizioni decimali significative dell'errore si approssima per eccesso il valore numerico della grandezza.

### 3.1. Caratterizzazione apparato sperimentale

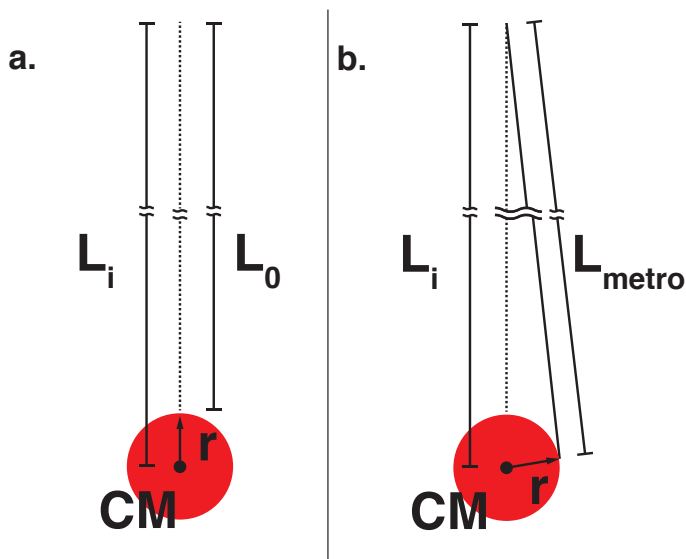
#### 3.1.1. Apparato sperimentale

Precedentemente alla costruzione dell'apparato sperimentale sono state misurate: la massa del cilindro con la bilancia elettronica

<sup>1</sup>Come osserviamo più avanti, gli angoli individuati dalle oscillazioni dei pendoli sono  $< 15^\circ \approx 0.26 \text{ rad}$ .

<sup>2</sup>per minimizzare il fattore di allungamento del filo, quest'ultimo è rimasto una notte in tensione.

<sup>3</sup>La lunghezza del filo viene presa quando questo è già in tensione, quindi il fattore di allungamento viene incluso già nella misurazione.



**Figura 1.** Due diversi modelli di pendolo. **a.** Pendolo che illustra come sono state prese le misure di  $L_i$  da A e B, ovvero considerando la lunghezza  $L_0$  del filo solo e poi considerando la lunghezza  $r$ , ovvero sfruttando la particolare simmetria del corpo (simile per A che ha considerato una simmetria cilindrica), sommando i due valori. **b.** Il metodo di misura di  $L_i$  per i dati C, come descritto nel par. 3.2.1, sfrutta il fatto che la misura è effettuata quando il pendolo è già in tensione massima, ovvero nel punto di equilibrio stabile, e poi sfruttando la costruzione geometrica che si crea tra  $r$ ,  $L_{metro}$  e  $L_i$ .

ca, l'altezza del cilindro con il metro a nastro e il diametro del solido con il calibro.

Una barra di trazione viene fermata ad una altezza di 2.10 m. Ad essa viene fissato il filo inestensibile tramite un moschettone. Al filo è fissato il cilindro tramite un gancio. Al solido è incollata lungo l'asse con il 'blue tack' una punta utile per tracciare il pendolo. Al di sotto del pendolo veniva posto un foglio con una linea centrale che facilitava la presa delle oscillazioni. Il foglio in questione era posto a sua volta sopra un quaderno munito di un elastico da cui si faceva partire il pendolo.

Dopo aver effettuato 10 misure delle oscillazioni il filo veniva ridotto così da far variare la lunghezza del pendolo. Si ripeteva poi il procedimento precedentemente descritto posizionando il foglio e il quaderno sopra delle scatole piane.

La misura della lunghezza dell'apparato oscillante veniva calcolata misurando con il metro dalla parte superiore del moschettone alla base del cilindro ( $L_0$  vedi Fig. 1a.). Successivamente si sottraeva metà dell'altezza del cilindro ottenendo così la lunghezza  $L_i$  del pendolo dal moschettone al centro di massa (CM, da qui in poi).

### 3.1.2. Apparato speriment. B

È fissato un gancio a una struttura stabile alta circa 1.7 m, sul gancio è stata legata l'estremità di un filo e all'altra estremità si trova una pallina di Natale piena d'acqua (fino all'orlo, cosicché il CM non si sposti durante le oscillazioni); quest'ultima è attaccata al filo tramite un nodo su un gancetto in plastica (di massa trascurabile e lunghezza presa in considerazione durante le misurazioni) già presente sulla pallina.

Il gancio è posizionato in modo tale che il pendolo costruito dal filo e dal corpo non urti nulla con nessuna delle sue componenti. Al di sotto del pendolo è stato fissato a terra un foglio, su questo sono stati segnati il punto di equilibrio stabile (da qui in avanti tale punto verrà riferito come punto  $P_e$ ) e il punto da cui far partire le oscillazioni che sarà sempre uguale per ogni

altezza (la distanza tra il punto  $P_e$  e quello d'inizio oscillazione è  $\sim 5.7 \times 10^{-2}$  m). Per mantenere costante il punto d'inizio oscillazione a ogni quota sperimentata sono stati posizionati oggetti stabili e alti sul foglio in corrispondenza del punto in cui è stata fatta la prima oscillazione. Per far cambiare quota al corpo sospeso è stato accorciato il filo arrotolandolo intorno al gancio.

Prima di costruire il pendolo sono stati misurati massa, con una bilancia elettronica da cucina, circonferenza e diametro della pallina, con un metro a nastro; posizionato il pendolo è stata misurata la lunghezza del filo in massima estensione per ogni quota con un flessometro.

### 3.1.3. Apparato speriment. C

Ho misurato con il calibro il diametro della sfera. Ho misurato poi la massa del solido con la bilancia elettronica.

Alla mensola era fissato un supporto di legno dove, tramite una pinza, era fissato il filo di nylon, fatto passare in modo che fosse libero di scorrere nell'anello della pinza. Un capo del filo era poi legato alla sfera, l'altro capo era fissato a un moschettone che permetteva di allungare o accorciare la lunghezza del pendolo. A una distanza di  $\sim 1 \times 10^{-1}$  m dalla posizione  $P_e$  del pendolo era posizionata un'asta verticale parallela al filo del pendolo (nella condizione di equilibrio), che potesse indicare una posizione di partenza fissa (x) per le oscillazioni.

Il supporto del pendolo era tale da permettere di poter fissare nello stesso punto del filo del pendolo anche il flessometro, facendo sì che la misura della lunghezza potessero essere prese già con il filo in tensione, includendo così ogni effetto di possibile elongazione del filo di nylon. Il metro veniva posto a fianco del pendolo in stato di equilibrio, e si prendeva come misura ( $L_{metro}$ ) il punto di tangenza tra la pallina e il metro. In questo modo non è necessario ricavare separatamente il CM della sfera.

Bisogna considerare che però la lunghezza qui misurata non è  $L_i$ , poiché è presente un angolo tra l'asse del pendolo e la direzione lungo cui avviene la misura. Conoscendo però il raggio della pallina (diametro/2 =  $r$ ) sappiamo che la direzione di misura è tangente alla sfera, quindi perpendicolare al raggio, quindi  $L_i = \sqrt{r^2 + (L_{metro})^2}$ .

### 3.2. Presa dati

Portiamo il pendolo ad una certa distanza (x) dalla posizione  $P_e$  e cerchiamo di mantenere fissa tale posizione per tutte le misure, lasciamo il corpo e facciamo simultaneamente partire il cronometro. Contiamo  $N = 10$  oscillazioni, alla fine delle quali fermiamo il cronometro, ottenendo il valore  $T_{1 \times 10}$  (ovvero 10 oscillazioni per la lunghezza  $L_1$ ). Ripetiamo il procedimento, riportando il pendolo alla posizione x per 10 volte, alla lunghezza del pendolo  $L_1$  (dove  $L_1$  è la lunghezza fino al CM).

Otteniamo quindi il valore del singolo periodo  $T_1^{(n)}$ , ovvero la misura  $n$ -esima (sono eseguite per ogni lunghezza 10 misure del periodo) del periodo per la lunghezza  $L_1$ , come  $T_1^{(n)} = T_{1 \times 10} / 10$ . Consideriamo ora il valore medio del periodo per la lunghezza  $L_1$ ,  $\bar{T}_1 = (\sum_{n=1}^{10} T_1^{(n)}) / 10$ . Calcoliamo anche l'Errore Standard  $\varepsilon_{(10)} T_1$  con la formula:

$$\varepsilon_{10} T_1 = \frac{S_{10}}{\sqrt{10}} \text{ dove } (S_{10} \text{ è la Dev. Std. adattata})$$

Ricaviamo inoltre anche l'errore statistico sulla lunghezza  $L_1$ , sfruttando la regola del  $3\sigma$ , ottenendo quindi  $\varepsilon_{L_1} = \Delta L / \sqrt{3}$ , dove  $\Delta L$  è l'errore massimo di  $L_1$  (ovvero l'errore propagato sul calcolo di  $L_1$  dal punto dove è fissato il pendolo al CM).

**Tabella 1.** Set dati A: ricavati come descritto in 3.2 *Presa dati*,  $E_{r\%}$  indica invece l'errore relativo ottenuto da  $\varepsilon x_i / \bar{x}_i$ .

	Lunghezza totale pendolo (m)			Periodo singola osc. <sup>a</sup> (s)			Periodo al quadrato singola osc. <sup>a</sup> (s <sup>2</sup> )		
	$L_i$	$\varepsilon L_i$	$E_{r\%}$	$\bar{T}_i$	$\varepsilon \bar{T}_i$	$E_{r\%}$	$\bar{T}_i^2$	$\varepsilon \bar{T}_i^2$	$E_{r\%}$
1	1.8835	$1.2 \times 10^{-3}$	0.06%	2.752	$6 \times 10^{-3}$	0.22%	7.574	$3 \times 10^{-2}$	0.4%
2	1.6175	$1.2 \times 10^{-3}$	0.07%	2.551	$6 \times 10^{-3}$	0.24%	6.508	$3 \times 10^{-2}$	0.5%
3	1.4585	$1.2 \times 10^{-3}$	0.08%	2.424	$6 \times 10^{-3}$	0.25%	5.876	$2.9 \times 10^{-2}$	0.5%
4	1.1495	$1.2 \times 10^{-3}$	0.10%	2.147	$6 \times 10^{-3}$	0.28%	4.610	$2.6 \times 10^{-2}$	0.6%
5	0.9135	$1.2 \times 10^{-3}$	0.13%	1.922	$6 \times 10^{-3}$	0.3%	3.694	$2.3 \times 10^{-2}$	0.6%

**Note:**

<sup>a</sup> Per l'incertezza sul periodo, poiché la sensibilità del cronometro era di 0.1 s e  $0.1/(10\sqrt{3})$ , ovvero la sensibilità sperimentale 'staticizzata' è maggiore degli Errori Std. ( $\varepsilon \bar{T}_i$ ), si è considerato come valore di  $\varepsilon \bar{T}_i$  il valore  $0.1/(10\sqrt{3}) = 6 \times 10^{-3}$ . Analogamente  $\varepsilon \bar{T}_i^2$  è stato calcolato a partire dal valore di  $0.1/(10\sqrt{3}) = 6 \times 10^{-3}$ .

**Tabella 2.** Set dati B, come sopra.

	Lunghezza totale pendolo (m)			Periodo singola osc. (s)			Periodo al quadrato singola osc. (s <sup>2</sup> )		
	$L_i$	$\varepsilon L_i$	$E_{r\%}$	$\bar{T}_i$	$\varepsilon \bar{T}_i$	$E_{r\%}$	$\bar{T}_i^2$	$\varepsilon \bar{T}_i^2$	$E_{r\%}$
1	1.6260	$6 \times 10^{-4}$	0.06%	2.529	$4 \times 10^{-3}$	0.16%	6.394	$2.0 \times 10^{-2}$	0.3%
2	1.4680	$6 \times 10^{-4}$	0.07%	2.405	$4 \times 10^{-3}$	0.17%	5.785	$1.8 \times 10^{-2}$	0.3%
3	1.2960	$6 \times 10^{-4}$	0.08%	2.271	$3 \times 10^{-3}$	0.13%	5.157	$1.4 \times 10^{-2}$	0.27%
4	1.1450	$6 \times 10^{-4}$	0.09%	2.124	$5 \times 10^{-3}$	0.24%	4.512	$2.2 \times 10^{-2}$	0.5%
5	1.0210	$6 \times 10^{-4}$	0.10%	2.007	$5 \times 10^{-3}$	0.25%	4.028	$2.1 \times 10^{-2}$	0.5%

**Tabella 3.** Set dati C; per questi dati il trattamento è stato lievemente diverso da come sono stati trattati i dati in Tab. 1 e Tab. 2, in quanto, come indicato nella sezione 3.1.3, la  $i$ -esima lunghezza  $L_i$  è presa secondo la formula  $L_i = \sqrt{(d/2)^2 + (L_{\text{metro}})^2}$ , e quindi  $\varepsilon L_i$ , calcolato a partire da  $\varepsilon d = \Delta d / \sqrt{3}$  e  $\varepsilon L_{\text{metro}} = \Delta L_{\text{metro}} / \sqrt{3}$ , trovati secondo la regola del  $3\sigma$ . I calcoli eseguiti sono riportati nel paragrafo 3.2.1 *Trattamento dati C*. Sono inoltre stati presi valori su sette lunghezze del pendolo.

	Lunghezza totale pendolo (m)			Periodo singola osc. (s)			Periodo al quadrato singola osc. (s <sup>2</sup> )		
	$L_i$	$\varepsilon L_i$	$E_{r\%}$	$\bar{T}_i$	$\varepsilon \bar{T}_i$	$E_{r\%}$	$\bar{T}_i^2$	$\varepsilon \bar{T}_i^2$	$E_{r\%}$
1	1.9401	$6 \times 10^{-4}$	0.03%	2.788	$5 \times 10^{-3}$	0.18%	7.772	$2.8 \times 10^{-2}$	0.4%
2	1.7541	$6 \times 10^{-4}$	0.03%	2.647	$2 \times 10^{-3}$	0.09%	7.006	$1.3 \times 10^{-2}$	0.18%
3	1.5991	$6 \times 10^{-4}$	0.04%	2.523	$4 \times 10^{-3}$	0.14%	6.366	$1.8 \times 10^{-2}$	0.3%
4	1.5081	$6 \times 10^{-4}$	0.04%	2.461	$3 \times 10^{-3}$	0.11%	6.056	$1.4 \times 10^{-2}$	0.26%
5	1.4131	$6 \times 10^{-4}$	0.04%	2.382	$3 \times 10^{-3}$	0.10%	5.673	$1.2 \times 10^{-2}$	0.21%
6	1.3142	$6 \times 10^{-4}$	0.04%	2.299	$4 \times 10^{-3}$	0.16%	5.284	$1.6 \times 10^{-2}$	0.3%
7	1.1652	$6 \times 10^{-4}$	0.05%	2.148	$3 \times 10^{-3}$	0.15%	4.613	$1.3 \times 10^{-2}$	0.3%

Ripetiamo le 10 oscillazioni  $\times 10$  volte per 5 lunghezze  $L_i$  diverse. Per ogni lunghezza eseguiamo i calcoli riportati sopra, ottenendo i valori riportati nelle tabelle Tab. 1 e Tab. 2.

Abbiamo ricavato poi a partire da  $\bar{T}_i$  il valore di  $\bar{T}_i^2 = (\bar{T}_i)^2$  con relativo errore ricavato come  $\varepsilon \bar{T}_i^2 = 2 \cdot \bar{T}_i \cdot \varepsilon \bar{T}_i$ . Questi valori torneranno utili per eseguire il fit lineare dei dati.

### 3.2.1. Trattamento statistico dati C

Come osservato in 3.1.3 Apparato sperim. C, la  $i$ -esima lunghezza  $L_i$  è definita a partire da  $L_{\text{metro}}^{(i)} \pm \varepsilon L_{\text{metro}}$  (indichiamo  $L_{\text{metro}}^{(i)}$  con  $L_m^{(i)}$ ) e  $d \pm \varepsilon d$  secondo la relazione:

$$L_i = \sqrt{(L_m^{(i)})^2 + \frac{d^2}{4}}$$

con errore statistico ricavato come:

$$\varepsilon L_i = \sqrt{\left( \frac{2 \cdot L_m^{(i)}}{2 \sqrt{(L_m^{(i)})^2 + \frac{d^2}{4}}} \right)^2 \cdot \varepsilon L_m^2 + \left( \frac{\frac{1}{2} \cdot d}{2 \sqrt{(L_m^{(i)})^2 + \frac{d^2}{4}}} \right)^2 \cdot \varepsilon d^2}$$

dove gli errori  $\varepsilon L_m^{(i)}$  e  $\varepsilon d$  sono ricavati secondo la regola del  $3\sigma$ , ottenendo quindi  $\varepsilon L_m = \Delta L_m / \sqrt{3}$  e  $\varepsilon d = \Delta d / \sqrt{3}$ . I valori sono poi riportati in Tab. 3.

Questo diverso trattamento è dovuto alla differente presa dati che è stata effettuata sfruttando la particolare geometria dell'apparato sperimentale (cfr: par. 3.1.3).

### 3.3. Linearizzazione dei dati

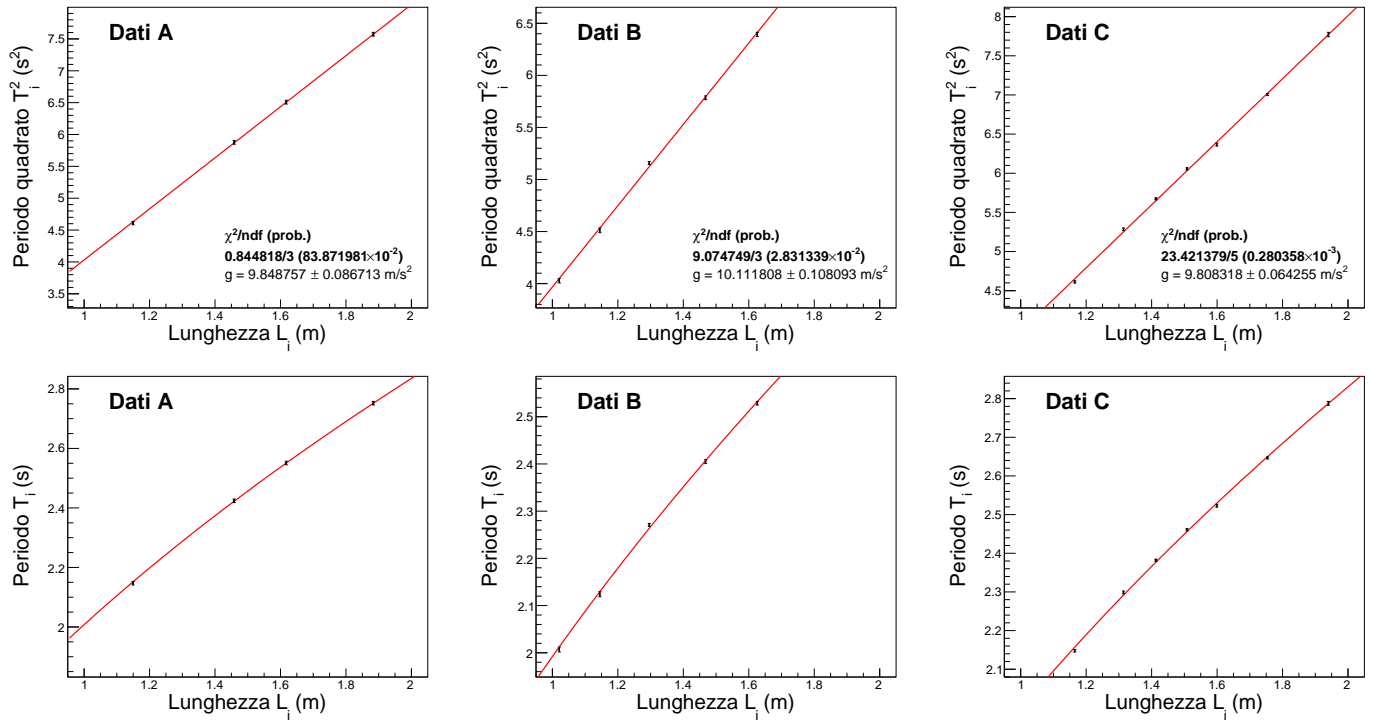
Rappresentati i plot dei dati non linearizzati, ovvero rappresentando i valori ottenuti in un grafico  $\bar{T}_i \times L_i$ , otteniamo i grafici in Fig. 2 (Sotto), passiamo alla linearizzazione dei valori, per poter valutare statisticamente i dati raccolti, e ottenere un fit lineare Fig. 2 (Sopra).

Partendo dall'equazione di un pendolo semplice

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (1)$$

possiamo ottenere una linearizzazione come

$$T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2}{g} \cdot L \quad (2)$$



**Figura 2. Sopra:** Grafici linearizzati ottenuti dal periodo al quadrato del pendolo in funzione della sua lunghezza. Sono presentati i dati di tre set diversi, con i relativi indicatori statistici del  $\chi^2$ , dei gradi di libertà ( $ndf$ ) e della probabilità del  $\chi^2$ . **Sotto:** Si è provato anche ad effettuare il fit di una funzione non lineare considerando il periodo semplice  $T_i$  in funzione di  $L_i$ , osservando un andamento parabolico, che rispecchia la teoria.

**Tabella 4.** Valori dell'accelerazione di gravità  $g$ , espressi in ( $\text{ms}^{-2}$ ), ottenuti dal fit eseguito dai dati A, B, C, considerando il valore ottenuto considerando un offset  $\neq 0$  su  $L_i$ .

	Dati singoli							
	Dati A		Dati B		Dati C		Dati A+B+C <sup>b</sup>	
accelerazione di gravità $g \pm \varepsilon g$ ( $\text{ms}^{-2}$ )	$9.85 \pm 0.09$	err. rel. 0.9%	$10.11 \pm 0.11$	err. rel. 1.1%	$9.81 \pm 0.06$	err. rel. 0.7%	$9.76 \pm 0.09$	err. rel. 0.9%
Offset <sup>a</sup> $\delta \pm \varepsilon \delta$ (m)	$2 \pm 5 \times 10^{-2} \approx 0$		$6 \pm 6 \times 10^{-2} \approx 0$		$-4 \pm 4 \times 10^{-2} \approx 0$		$-1.6 \pm 1.1 \times 10^{-2} \approx 0$	

#### Note:

<sup>a</sup> Consideriamo offset la distanza tra il valore di  $L_0$  del fit per  $T = 0$ , ovvero l'eventuale errore di misurazione della  $i$ -esima lunghezza  $L_i$ , che può aver portato a sovrastimare o sottostimare il valore vero di  $L_i$ .

<sup>b</sup> Dati ottenuti dal fit complessivo di tutti e tre i set di dati A+B+C (Fig. 3).

e considerando il grafico  $\bar{T}_i^2 \times L_i$ , possiamo osservare un rapporto di proporzionalità diretta tra i valori di  $\bar{T}_i^2$  e  $L_i$ , considerando il coefficiente  $4\pi^2/g$  come una costante  $k$ .

Eseguiamo quindi un fit lineare con una equazione del tipo  $Y = kX + \delta$  ponendo  $\bar{T}_i^2 = Y$  e  $4\pi^2/g = k$  e considerando il fattore  $\delta$  di offset, ovvero di possibile sovrastima o sottostima della lunghezza  $L_i$ ; otteniamo dal fit il valore di  $k$  con il suo errore statistico  $\varepsilon k$ .

#### 4. Risultati

Per eseguire il fit con root grazie al programma graph\_all.C abbiamo considerato un TF1 dove la funzione è uguale a (2), dove  $g$  è rappresentato come il parametro  $p0$ , il parametro  $p1$ , che indicava  $\pi$ , è impostato con il metodo `TF1::FixParameter()` e l'offset  $\delta$  è il parametro  $p2$ .

Il programma graph\_all.C si basa su i file ed\_dati\_modifica.dat, rp\_dati.dat e ms\_dati.dat, dove sono trascritti i valori non-linearizzati di Tab. 1, Tab. 2 e Tab. 3 in formato

```
L_1 T_1 eL_1 eT_1
```

```
...
L_N T_N eL_N eT_N
```

e sui file ed\_dati\_lin\_modifica.dat, rp\_dati\_lin.dat e ms\_dati\_lin.dat in formato

```
L_1 T2_1 eL_1 eT2_1
...
L_N T2_N eL_N eT2_N
```

Eseguendo il fit root riportava i valori dei parametri  $p0$ ,  $p1$ ,  $p2$  con i rispettivi errori statistici, valori riportati poi in Tab. 4.

Calcoliamo inoltre gli errori relativi ( $E_{r\%}$ ) associati a ciascuna grandezza.

#### 5. Conclusione

Ottenuti i valori di  $g \pm \varepsilon g$  e  $\delta \pm \varepsilon \delta$  il suo offset procediamo con un'analisi critica degli stessi.

### 5.1. Controlli

Osserviamo innanzitutto che per tutti i set di dati raccolti il valore dell'offset è compatibile con zero, che è in accordo con la teoria; questo è anche piuttosto significativo in quanto mostra che le stime delle lunghezze  $L_i$  sono realistiche.

Preso come riferimento il valore dell'accelerazione di gravità a Genova il valore  $g_t = (9.8056 \pm 0.0001_{\text{stat}}) \text{ m/s}^2$ , procediamo a confrontare i valori ottenuti di  $g$ , secondo la relazione

$$|g_t - g| < 3 \sqrt{\varepsilon g_t^2 + \varepsilon g^2}$$

ottenendo quindi per i dati A

$$|9.8056 - 9.85| < 3 \sqrt{0.0001^2 + 0.09^2} \approx 0.04 < 0.27$$

per i dati B<sup>4</sup>

$$|9.8056 - 10.11| < 3 \sqrt{0.0001^2 + 0.11^2} \approx 0.30 < 0.33$$

e per i dati C

$$|9.8056 - 9.81| < 3 \sqrt{0.0001^2 + 0.06^2} \approx 0.004 < 0.18$$

Osserviamo quindi che i valori dei dati A, B e C sono compatibili con il valore  $g_t$  fornito.

Applicando la medesima formula osserviamo che i valori di A e B sono compatibili tra loro ( $0.26 < 0.43$ ), così anche i valori di A e C ( $0.04 < 0.32$ ) e anche i valori di B e C ( $0.30 < 0.37$ )<sup>4</sup>. Calcoliamo quindi la miglior stima del valore dell'accelerazione di gravità  $g_*$

$$g_* = \frac{\frac{g_A}{\varepsilon g_A^2} + \frac{g_B}{\varepsilon g_B^2} + \frac{g_C}{\varepsilon g_C^2}}{\frac{1}{\varepsilon g_A^2} + \frac{1}{\varepsilon g_B^2} + \frac{1}{\varepsilon g_C^2}} = 9.87 \text{ m/s}^2$$

con relativo errore

$$\varepsilon g_* = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon g_A^2} + \frac{1}{\varepsilon g_B^2} + \frac{1}{\varepsilon g_C^2}}} = 0.05 \text{ m/s}^2$$

### 5.2. Possibili errori sistematici

Come già osservato i valori dell'intercetta (offset  $\delta$ ) sono tutti compatibili con zero. Questo oltre ad essere in perfetto accordo con la teoria implica che i valori di  $L_0$  misurati tenevano conto della posizione del CM e lo individuavano correttamente.

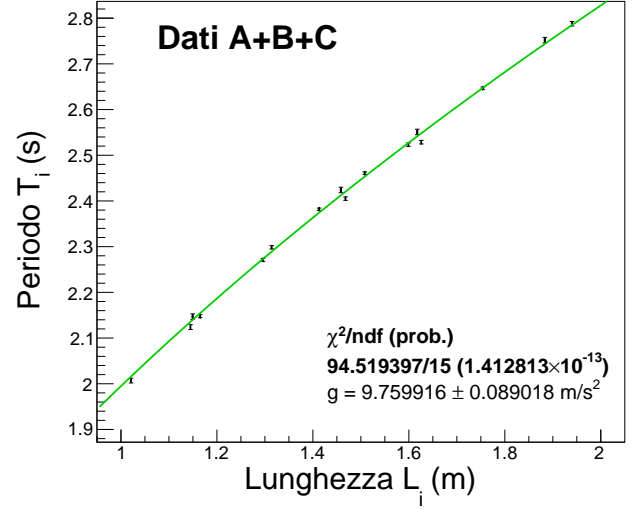
Conoscendo lo spostamento dalla posizione  $P_e$  al punto da cui sono fatte partire le oscillazioni (chiamiamo questa distanza  $x$ , che come detto in par. 3.1), e conoscendo  $L_i$ , possiamo ricavare l'angolo  $\vartheta_{\text{MAX}}$  di massima oscillazione

$$\vartheta_{\text{max}} = \arctan\left(\frac{x}{L_{\text{min}}}\right) \times \frac{180}{\pi}$$

Otteniamo che  $\vartheta_{\text{max, A}} \approx 4^\circ$ ,  $\vartheta_{\text{max, B}} \approx 3^\circ$  e  $\vartheta_{\text{max, C}} \approx 5^\circ$ , quindi trascurabile rispetto all'approssimazione di piccole oscillazioni in cui consideriamo il pendolo semplice con le formule (1).

I dati raccolti provengono da tre set diversi e tre apparati diversi che utilizzano pendoli con masse e geometrie differenti. Nonostante questo i valori ottenuti dalla precedente analisi dati sono compatibili tra di loro e con il valore  $g_t$  teorico previsto. Possiamo perciò concludere che la differenza di massa non influisce sul valore di  $g$ , e quindi come previsto dalla teoria la

<sup>4</sup>Nonostante abbiamo detto sopra come trattiamo l'approssimazione dei dati, ci permettiamo in questa situazione di ovviare tale regola per sottolineare che i due valori sono tra loro compatibili.



**Figura 3.** Plot dati A, B e C, con relativo fit non-lineare ottenuto considerando la relazione (1) non linearizzata, e ottenendo quindi il valore di  $g$  dal fit.

massa non influenza l'oscillazione del pendolo, purché esso sia considerato in un regime di piccole oscillazioni.

Si osserva che l'accorciamento della lunghezza del pendolo porta ad alzare rispetto alla quota iniziale il corpo. Si potrebbe quindi riflettere che tale variazione di quota potrebbe causare una leggera variazione sul valore di  $g$ . Tuttavia, considerando la massima escursione di  $L_i$  che possiamo avere, quelle di A ( $\sim 1$  m) possiamo provare a quantificare la variazione di  $g$ . Consideriamo  $h_{\text{min}} = 0$  quando il pendolo presenta la massima  $L_i$  e  $h_{\text{max}} = L_{\text{max}} - L_{\text{min}}$ .

Consideriamo la relazione

$$g = g_t \cdot \left(1 - \frac{2h}{R_{\text{terra}}}\right)$$

ricavata sviluppando con Taylor la formula

$$|g| = G \cdot \frac{M_{\text{terra}}}{(R_{\text{terra}} + h)^2}$$

Possiamo perciò trovare la variazione  $\delta g$  dell'accelerazione di gravità

$$\begin{aligned} \delta g &= \left| g_t \cdot \left(1 - \frac{2h_{\text{max}}}{R_{\text{terra}}}\right) - g_t \cdot \left(1 - \frac{2h_{\text{min}}}{R_{\text{terra}}}\right) \right| \\ &= \left| 2g_t \cdot \left(\frac{h_{\text{min}} - h_{\text{max}}}{R_{\text{terra}}}\right) \right| \\ &\approx 3 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Osserviamo quindi che la variazione di  $g$  "staticizzata" ( $\delta g / \sqrt{3}$ ) è  $\ll$  dell'errore che ricaviamo dal fit dei dati.

Proviamo infine a raggruppare i dati raccolti da A+B+C ed eseguiamo un plot di questo set esteso di dati (Fig. 3). Eseguiamo un fit non-lineare dei dati sfruttando root e il programma multigraph.C, e una funzione simile al paragrafo 4. Otteniamo dai fit i parametri  $p0$ ,  $p1$ ,  $p2$ , con i relativi errori, che vengono trascritti in Tab. 4. Osserviamo che il valore di offset ( $\delta$ ) è  $\neq 0$ , ovvero che l'insieme dei dati riporta un leggero scostamento dall'origine. Il valore di  $g \pm \varepsilon g$  viene invece compatibile secondo la relazione

$$|9.8056 - 9.76| < 3 \sqrt{0.0001^2 + 0.09^2} \approx 0.05 < 0.27$$

che quindi conferma ancora la bontà dei dati raccolti.