

Misure di densità

La densità è il rapporto tra la massa e il volume di un corpo. Questo parametro ha grande importanza soprattutto per i corpi di materiale omogeneo (e senza cavità interne).

Si narra che Archimede (Siracusa, 287-212 a.C.) scoprì, mentre faceva il bagno in una vasca, un metodo per determinare la densità di un corpo (in particolare una corona che il tiranno Gerone supponeva non essere d'oro) calcolandone il volume dall'innalzamento dell'acqua quando era immerso: contento per la scoperta, uscì nudo correndo per le vie della città gridando “Èureka !” (“Ho trovato !”).

Per fare una misura di densità, occorre perciò fare una misura della massa e una del volume del corpo: ma mentre la misura della massa in genere non comporta problemi particolari, quella del volume può essere non banale (o meglio affetta da notevole incertezza).

Nel caso di una sostanza solida possiamo misurare il volume con uno dei seguenti metodi:

- misura geometrica del volume, possibile solo nel caso di corpi con geometrie particolarmente semplici, per esempio a forma cilindrica o di parallelepipedo
- misura della variazione del livello del liquido in cui il corpo è stato immerso, valida per corpi di densità maggiore del liquido; questo metodo non è in genere molto accurato
- misura della massa del liquido spostato dal corpo immerso (se di densità superiore di quella del liquido)

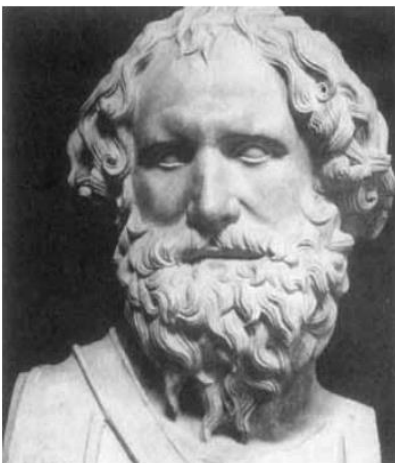
Vogliamo illustrare meglio quest'ultimo metodo, che in genere è il più conveniente.

Ricordiamo il principio di Archimede:

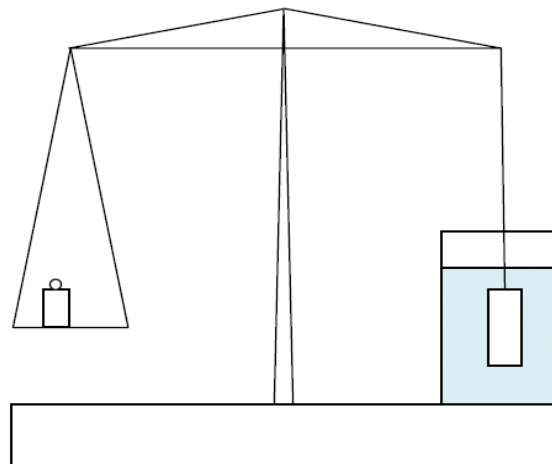
“Un corpo parzialmente o totalmente immerso in un liquido riceve una spinta verso l'alto pari al peso del volume di liquido occupato”.

In formule la forza di Archimede è esprimibile in termini del volume del corpo , della densità del liquido e dell'accelerazione di gravità g come $F_a = \rho_{liq} \cdot V \cdot g$

Quindi, se pesiamo il corpo prima in aria e poi immerso nel liquido di densità nota (vedi figura), dalla differenza possiamo ricavare il volume del corpo quindi la densità. Il procedimento cosiddetto della **bilancia idrostatica**, fu appunto inventato da Archimede.



Archimede



Bilancia Idrostatica

Trascurando la densità dell'aria (il che comporta l'introduzione di un errore sistematico di circa l'0.1-0.5 ‰ che può essere corretto), si ha che la spinta di Archimede riduce la massa apparente $mg - \rho_{liq} \cdot V \cdot g = m'g$ ed il volume ignoto del corpo immerso è dato da

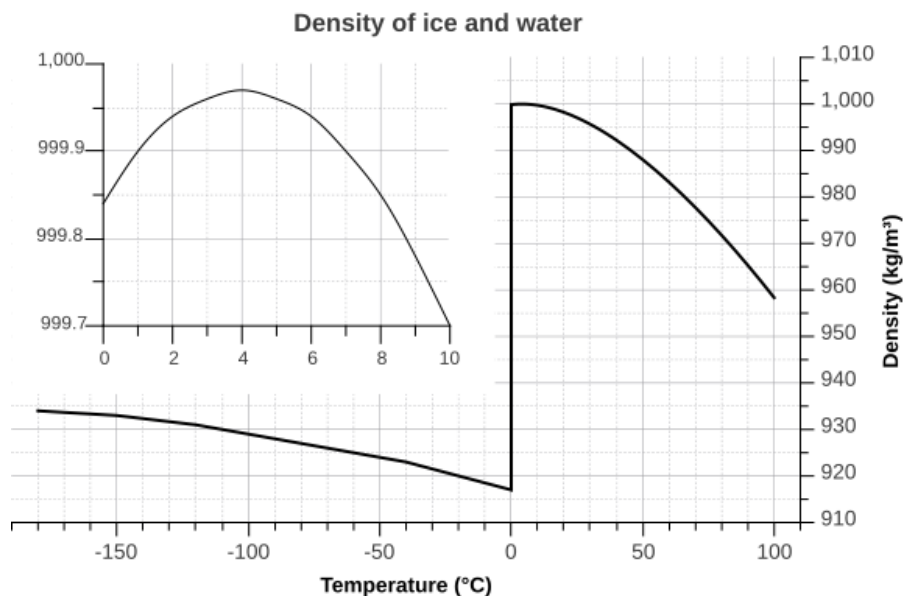
$$V = \frac{m - m'}{\rho_{liq}}$$

dove m è la massa misurata senza immersione, m' la massa “apparente”, misurata in immersione, e ρ_{liq} la densità del liquido usato (si veda la tabella allegata nel caso dell'Acqua).

Si può quindi ricavare la densità $\rho = \frac{m}{V}$ del corpo ignoto

$$\rho = \rho_{liq} \cdot \frac{m}{m - m'}$$

Variazione densità acqua con la temperatura



Densità Acqua $\rho(\text{kg/m}^3)$, nella fase liquida a $p = 101\,325\text{ Pa}$ al variare di $T\ (^{\circ}\text{C})$

Il valore della densità indicato si riferisce alla temperatura in $^{\circ}\text{C}$ risultante dalla somma dei valori indicati all'inizio della riga (unità) e in testa alla colonna(decimali).

t	0	2	4	6	8
0	999,87	999,97	1000,00	999,97	999,88
10	999,73	999,52	999,27	998,97	998,62
20	998,23	997,80	997,32	996,81	996,26
30	995,67	995,05	994,40	993,71	992,99
40	992,2	991,5	990,7	989,8	989,0
50	988,1	987,2	986,2	985,3	984,3
60	983,2	982,2	981,1	980,1	978,9
70	977,8	976,7	975,5	974,3	973,1
80	971,8	970,6	969,3	968,0	966,7
90	965,3	964,0	962,6	961,2	959,8
100	958,4				

Traccia per l'Esperienza di Laboratorio 1

Misura del volume e della densità di un solido

Obiettivi formativi:

- Misure di lunghezze con lo strumento migliore disponibile a casa (Metro, Calibro, Palmer...) .
Utilizzo e lettura strumento (stimare caratteristiche metrologiche Sensibilità/accuratezza, Portata)
- Misure di massa con la migliore bilancia disponibile a casa (elettronica e bilancia a 2 bracci.
Utilizzo e lettura strumento (stimare caratteristiche metrologiche Sensibilità/accuratezza, Portata)
- Definizione di Errori massimi – Errori Relativi. Verifica condizione ripetibilità della misura.
- Grandezze Derivate: propagazione errori massimi
- Discrepanza dati: criterio di compatibilità per errori massimi

Materiale occorrente

Procuratevi il seguente materiale (disponibile a casa o prestato)

- a) Un solido regolare per cui sia facile ricavare il volume dalla relazione di definizione geometrica (es. cilindro, parallelepipedo,...)

NB 1 la scelta di un solido sufficientemente grande consente di aumentare la precisione sulle misura delle dimensioni e della massa

NB 2 il solido deve avere massa inferiore alla portata della bilancia disponibile

- b) Un contenitore leggero (plastica) ma sufficientemente grande da contenere il solido completamente immerso nel liquido
- c) Un filo sottile e robusto per sospendere il solido (ideare un sistema che vi consenta di sospendere il solido in modo stabile sopra alla bilancia con il contenitore pieno di liquido
- d) Una bilancia elettronica da cucina con numero elevato di “divisioni” (rapporto tra portata e sensibilità) e portata sufficiente a pesare il contenitore pieno di liquido ed il corpo.
- e) Uno strumento per misure precise di lunghezza (metro, righello, calibro..) con portata sufficiente a misurare le dimensioni del corpo e con la sensibilità migliore possibile.

Traccia Relazione

1) Componenti gruppo presenti, Data, Ora

2) Breve descrizione degli obiettivi e del metodo dell'esperienza:

-Effettuare una misura della massa m di un corpo con la bilancia.

-Effettuare una misura *indiretta* del volume V di un solido regolare a partire da misure di precisione delle sue dimensioni e utilizzando la relazione di definizione geometrica. Determinare gli *errori assoluti e relativi* nelle misure dirette e propagare gli degli errori massimi nelle misure indirette.

-Determinare la *densità* del corpo (con la sua incertezza) sfruttando la relazione di definizione

$$\rho_s = m/V$$

-Alternativamente determinare volume e densità del corpo con il metodo della bilancia idrostatica e verificare se sono compatibili con i valori trovati prima.

3) Descrivere strumentazione a disposizione (sensibilità/risoluzione, accuratezza, portata, etc..).

Eventualmente allegare una foto o disegno per descrivere l'apparato. Se non disponete di un data sheet dello strumento approssimate le accuratezze del vostro strumento.

-Ogni componente del gruppo descriva la strumentazione e l'apparato da lui utilizzato

4) Scelta del solido da immergere nell'acqua.

Esempio: Solido regolare (es. cilindro o parallelepipedo) di volume il maggiore possibile rispetto alla portata utile della bilancia (tenete conto che ogni cm^3 di volume immerso contribuisce con una spinta di Archimede pari approssimativamente ad 1 g)

-Definire, aiutandovi con uno schizzo, le dimensioni principali (ad es. per cilindro altezza, diametro).

-Ogni componente del gruppo descriva il solido da lui utilizzato

5) Effettuare la misura diretta della massa del solido m con lo strumento che consente di ottenere la migliore precisione tra quelli disponibili. Massa del solido con bilancia elettronica (Misura in aria) e

riportarla con il suo **errore assoluto ed errore relativo** : $m \pm \Delta m$ e $\frac{\Delta m}{m}$

-Ogni componente del gruppo riporti la misura di m da lui effettuata

6) Effettuare la misura diretta delle dimensioni di un solido regolare, con lo strumento che consente di ottenere la migliore precisione tra quelli disponibili.

-Riportare ciascuna misura con il suo errore assoluto ed errore relativo.

Verificare la regolarità del solido : le misure del solido sono ripetibili ? La relazione di definizione del volume (formula geometrica) si adatta bene al campione?

-Ogni componente del gruppo riporti le misure delle dimensioni del solido da lui effettuate

7) Scegliere e caratterizzare filo utilizzato per sospendere il corpo per la misura idrostatica (diametro sezione, lunghezza filo immersa).

- Stimare il volume V_f della porzione di filo immersa (stima qualitativa -non propagate incertezza)

8) Determinazione della spinta idrostatica del corpo immerso in un fluido.

E' possibile ricavare con una singola pesata la variazione di massa $M=m-m'$ dovuta alla spinta di Archimede del liquido sul corpo: (a) Ponete sulla bilancia il contenitore con il liquido, (b) rimuovete la tara della bilancia, (c) immergete completamente il corpo tenendolo sospeso con il filo senza appoggiarlo alle pareti o al fondo. (d) la lettura della bilancia $M \pm \Delta M$ vi fornisce la massa del volume di liquido spostato dal corpo immerso. (e) *Misurate anche la massa M_2 rilevata quando il corpo viene completamente appoggiato sul fondo del contenitore (senza che il filo eserciti tensione)*

-Ogni componente del gruppo riporti la misura da lui effettuata della massa d'acqua spostata dal solido immerso

9) I componenti del gruppo scelgano tra le misure di ciascuno quella più promettente per proseguire l'analisi dati (giustificare la scelta). *Ad esempio si considerino (a) la precisione e/o l'accuratezza delle misure di massa e delle dimensioni del solido (b) la validità del modello geometrico per stimare il volume del solido (c) eventuali difficoltà sperimentali che possono avere inficiato la misura (ripetibilità misure, instabilità strumento... ecc).*

10) Determinare il Volume Solido V in modo indiretto, tramite la sua relazione di definizione geometrica (V è grandezza derivata). Propagazione Errori Massimi sul Volume (Esplicitare formula errori utilizzata nel calcolo)

$$\Delta V = \sum_j \left| \frac{\partial V}{\partial x_j} \right|_{x_j=x_{j0}} \Delta x_j$$

Riportare il volume con il suo **errore assoluto** $V \pm \Delta V$ ed **errore relativo** $\frac{\Delta V}{V}$.

11) Tramite la tabella fornita con la traccia si determini la densità del liquido ρ_{liq} in corrispondenza della temperatura del liquido $T \pm \Delta T$ misurata un termometro avente accuratezza ΔT . Se non disponete di un termometro per misurare la temperatura dell'acqua, assumete un valore $T = 20 \pm 1^\circ C$.

Ricavate l'incertezza assoluta $\Delta \rho_{liq}$ dalla tabella, come differenziale $\Delta \rho_{liq} = \left| \frac{\rho_{liq}(T_2) - \rho_{liq}(T_1)}{T_2 - T_1} \right| \Delta T$

dove T_1 e T_2 sono due valori di temperatura della tabella più prossimi al valore di T misurato.

12) Si ricavi il volume V del solido tramite il metodo della bilancia idrostatica $V = \frac{m - m'}{\rho_{liq}} = \frac{M}{\rho_{liq}}$

dove $M = m - m'$ è la variazione di massa letta dalla bilancia dovuta alla spinta di Archimede del liquido sul corpo ricavata in precedenza al punto (8.d).

Calcolare propagazione incertezze assolute e relative su V .

13) Si ricavi la densità del solido ρ_s in modo indiretto. La misura della densità del solido viene effettuata sfruttando la relazione di definizione $\rho_s = m/V$. Determinare l'incertezza **assoluta** e **relativa**.

14) Controlli:

- La stima di V e di ρ_s ottenuta con i due metodi è compatibile o discrepante?
- Quale dei due metodi è caratterizzato da una migliore precisione?
- Se aveste a disposizione più tempo e più soldi, quale strumento sostituireste tra quelli utilizzati per misurare masse e lunghezze?
- Opzionale: A cosa corrisponde la pesata M_2 (discussa al punto 8.e) ricavata quando il corpo è sul fondo del contenitore (si consideri il diagramma di corpo libero del sistema)?

15) Stimare eventuali sorgenti di errori sistematici.

Alcuni spunti:

- Stimare il volume del filo V_f che risulterà immerso e verificare se esso è trascurabile rispetto all'incertezza ΔV con cui è noto il volume del solido

- La spinta Archimede dell'aria sul solido influenza la misura della massa m ?

- L'espansione volumica del solido dovuta a variazioni di temperatura non controllate tra la misura in aria e in acqua può essere significativa? (si consideri come coefficiente espansione volumica del solido $\alpha \sim 60 \times 10^{-6} K^{-1}$)

