Introduzione all'esperienza sulla verifica sperimentale della legge del moto di un proiettile

Si consideri il moto di una sferetta, dopo che è decollata da una guida con velocità $\boldsymbol{v_o}$ che forma un angolo $\boldsymbol{\theta_o}$ rispetto all'asse orizzontale **x** . Trascurando la resistenza dell'aria, il moto del centro di massa della sferetta è dato dalla combinazione di un moto rettilineo uniforme lungo l'asse x e di un moto rettilineo uniformemente accelerato lungo l'asse y, con accelerazione uguale all'accelerazione di gravità g (g = 980.55 cm/sec^2). Si dimostra che l'equazione teorica della traiettoria di un proiettile è la seguente:

$$y = (tg\vartheta_0)x + \left(\frac{g}{2{v_0}^2 \cos^2 \vartheta_0}\right)x^2 \qquad [1]$$

Se la guida è orizzontale in modo che la velocità v_o risulti parallela all'asse x (θ_0=0) l'equazione della traiettoria si semplifica così:

$$y = \left(\frac{g}{2{v_0}^2}\right)x^2 = n\, x^2 \qquad [2]$$

Un confronto tra la traiettoria determinata nell'esperimento e la legge teorica [2] consente di verificare la correttezza delle ipotesi fatte ed inoltre consente di determinare sperimentalmente (in modo indiretto) la velocità iniziale v_o e l'angolo di alzo θ_o.

Lancio pallina: nell'ipotesi di trascurare gli attriti, assumendo che la pallina si muova lungo lo scivolo di altezza h (figure A e B) con *moto puramente traslatorio*, il modulo della sua velocità v_o alla fine del trampolino può essere anche ricavata sulla base di considerazioni energetiche (teorema dell'energia cinetica): $mgh = \frac{1}{2}m{v_o}^2 \Rightarrow$ da cui si può ricavare: $v_{oT} = \sqrt{2gh}$ [3a]

Se invece si considera che la sferetta si muova di *moto di rotolamento puro* (senza strisciamento) la sua energia cinetica può essere scomposta nel contributo del moto traslatorio del centro di massa $\frac{1}{2}m{v_{oR}}^2$ e del moto rotatorio intorno ad un asse passante per il centro di massa $\frac{1}{2}I_{cm}{\omega_o}^2$ dove $\omega_o = \frac{v_{oR}}{R}$ è la velocità angolare e $I_{cm} = \frac{2}{5}mR^2$ è il momento di inerzia di una sfera in rotazione intorno ad un asse passante per il centro di massa. La conservazione dell'energia risulta quindi modificata in $mgh = \frac{1}{2}m{v_{oR}}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}{\omega_o}^2$ e la velocità risulta $\Rightarrow v_{oR} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$

[3b]

Sostituendo il valore di v_o nell'equazione della traiettoria risulta quindi

$$y = (tg\vartheta_0)\, x + \left(\frac{1}{4\, h \cos^2 \vartheta_0}\right)x^2 \quad \text{(traslazione pura)} \qquad [4a]$$

$$y = (tg\vartheta_0)\, x + \left(\frac{7}{20\, h \cos^2 \vartheta_0}\right)x^2 \quad \text{(rotolamento puro)} \qquad [4b]$$

Sulla base delle ipotesi fatte (assenza di attriti durante il moto della sferetta sulla guida e in aria) possiamo quindi concludere che:

i) la traiettoria del moto risulta parabolica
ii) la traiettoria seguita è indipendente dal valore della accelerazione di gravità ***g***
iii) la traiettoria seguita è indipendente dalla massa della sferetta

Se invece le dissipazioni dovute all'attrito radente o volvente della sferetta sullo scivolo fossero importanti, la velocità di uscita $\boldsymbol{v_o}$ risulterebbe **inferiore** ai suddetti valori [3a] e [3b]. La dissipazione di energia dovuta alla viscosità dell'aria è in linea di massima trascurabile per brevi traiettorie a velocità della sferetta molto inferiori a 100m/s.

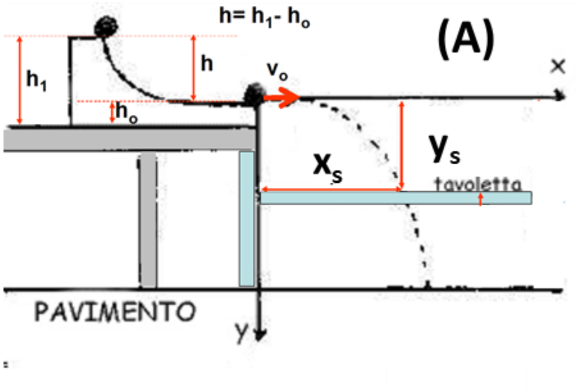
<u>Verifica sperimentale della legge del moto di un proiettile</u>

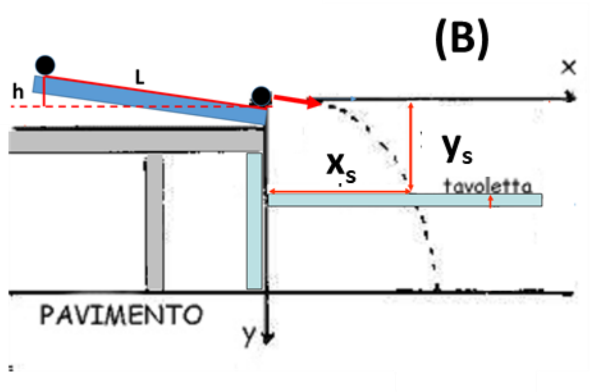
Sopra un tavolo è fissato uno scivolo, realizzato in modo tale che una pallina lasciata cadere liberamente lungo lo scivolo arriverà al punto di sbocco con una velocità di modulo v_o diretta orizzontalmente (caso A) oppure con alzo θ_o (caso B) quindi percorrerà in caduta libera una traiettoria parabolica del tipo indicato in figura. Per determinare questa traiettoria basterà misurare lo spostamento orizzontale x_s della pallina in corrispondenza di diverse altezze y_s.

A tale scopo si lasci cadere la pallina su una tavoletta su cui è stato posto un foglio di carta millimetrata con sopra un foglio di carta carbone, fissata ad un'altezza y_s dallo sbocco dello scivolo. Per ogni quota della tavoletta, si determini sul foglio, utilizzando un filo a piombo, la proiezione del punto di sbocco dello scivolo sul piano orizzontale (origine ascisse $\boldsymbol{x_{s0}}$). Si ripeta il lancio della pallina per circa 10 volte e si ricavi lo spostamento orizzontale medio $\boldsymbol{x_s}$ tramite analisi statistica

Per determinare la deflessione verticale $\boldsymbol{y_s}$ si può misurare direttamente il dislivello tra lo sbocco dello scivolo e la tavoletta.

In questo modo in corrispondenza di 5 differenti posizioni della tavoletta, si otterranno coppie di valori ($\boldsymbol{x_s}$, $\boldsymbol{y_s}$) che, riportate su un grafico con i rispettivi errori, daranno la traiettoria cercata.





Obiettivi formativi dell'esperienza:
- Studio del moto di un proiettile in caduta libera, e del moto roto-traslatorio di un corpo
- Misure di grandezze cinematiche affette da incertezze statistiche
- Trattazione delle incertezze di tipo statistico (varianza, varianza adattata, deviazione standard, deviazione standard adattata, errore standard)
- Grandezze derivate: propagazione di errori statistici. Trasformazione di errore di tipo massimo in statistico e viceversa.
-Linearizzazione di legge fisica. Rappresentazione dei dati tramite grafici in scala lineare
-Uso di programmi al calcolatore per realizzare grafici (ROOT/Scidavis)
-Determinazione di parametri della miglior retta di fit: metodo dei minimi quadrati (programma realizzato a Calcolo). Calcolo delle rette di massima e minima pendenza
-Criterio di compatibilità (discrepanza) tra grandezze affette da errore massimo e statistico.

Traccia per l'Esperienza di Laboratorio n.3 - a.a. 2020-21

Verifica sperimentale della legge del moto di un proiettile

1) Componenti gruppo presenti, Data , Ora

2) Breve descrizione degli obiettivi dell'esperienza:
-verificare se la traiettoria di una sferetta in caduta libera può essere descritta come una parabola.
-determinare la velocità di uscita della sferetta.
-Verificare la conservazione dell'energia meccanica

3) Breve descrizione del metodo, dell'apparato e degli strumenti a disposizione (sensibilità/accuratezza e portata).

4) Caratterizzazione dell'apparato sperimentale.
-Determinare la loro massa *m* tramite la bilancia elettronica (eliminare tracce d'olio) ed il loro diametro D.
-Determinare il dislivello verticale *h* percorso dalla sferetta sulla rampa di lancio.
-Determinare l'inclinazione θ_o della rampa al suo sbocco (nell'apparato A si metta lo sbocco in bolla (θ_o=0° , sensibilità bolla $\Delta\theta_0 \approx 1°$ *)*, nella rampa B si ricavi l'alzo $\theta_o \neq 0$ da $\sin(\theta_0) = h/L$ dove *L*=lunghezza rampa).

5) Determinare la quota della tavoletta y_s riferita alla quota di uscita dello scivolo (origine) con le sue incertezze assolute e relative.
Attenzione*: All'incertezza* Δy_s *contribuiscono 2 termini: i) La misura diretta con il metro (errore di sensibilità* Δy_0 *e ii) errore di non-parallelismo della tavoletta (sensibilità bolla* $\vartheta_0 \approx 1°$ *) contribuisce per un termine* $\Delta y_s \approx x_s \sin\vartheta_0$ *(ad esempio* $\Delta y_s \approx \Delta y_0 + x_s \sin\vartheta_0 \approx (1+4)mm$ *ad una distanza* x_s*=200mm dall'origine).*

6) Si determini lo spostamento orizzontale $x_{s,i}$ in modo statistico ripetendo circa 10 lanci della sferetta piccola. L'origine degli spostamenti orizzontali x_{s0} =0 è definita tramite la proiezione del punto di sbocco dello scivolo sul piano mobile (utilizzando un filo a piombo).
-Utilizzando i programmi di Calcolo valutare valor medio, varianza, deviazione standard adattata, errore standard $\bar{x}_s, \quad \sigma_N[x_s], \quad s_N[x_s], \quad \varepsilon_N[x_s] = \frac{s_N[x_s]}{\sqrt{N}}$.
- Per ciascuna delle quote, al termine dei 10 lanci si provi a fare lancio singolo con la sferetta grande e si verifichi se la traiettoria è compatibile con le altre.

Attenzione:
- non ha senso aumentare il numero di lanci N se errore standard diviene inferiore a (S/√3) dove S è sensibilità del righello
- si esprimano le x_s *e* y_s *in cm,*

7) Si ripeta la misura degli spostamenti orizzontali x_s in corrispondenza di 5 differenti quote della tavoletta y_s usando la sferetta piccola.
Riportare in forma tabellare le coppie di punti $x_s \pm \varepsilon(x_s)$, $y_s \pm \varepsilon(y_s)$ che definiscono la traiettoria.
N.B. Nelle procedure di fit si considerano errori di tipo statistico (convertire errore di sensibilità sulle y_s *da massimo in statistico* $\varepsilon(y_s)$*= S/√3).*

8) Si realizzi un grafico in scala lineare dei dati originali $x_s \pm \varepsilon(x_s)$, $y_s \pm \varepsilon(y_s)$. Qualitativamente si osserva un andamento parabolico (commentare)?

9) Verifichiamo quindi quantitativamente l'ipotesi che il moto della sferetta sia compatibile con la traiettoria parabolica $y = (tg\,\theta_0)x + \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}\right)x^2 \quad = k\,x + n\,x^2 \quad [1]$. Sfruttando la sostituzione $Y_s = \frac{y_s}{x_s}$ si linearizza la relazione [1] ottenendo la legge $Y_s = k + n\,x_s$

Attenzione: *-per le propagazioni degli errori* $\varepsilon(Y_s)$ *sulla nuova variabile* Y_s *si considerino le incertezze su* x_s *e* y_s *come statistiche (per la propagazione degli errori si vedano le note discusse a lezione).* Riportare i dati linearizzati e le loro incertezze in forma tabellare.

10) Stimiamo il coefficiente angolare $n \pm \varepsilon_n$ e l'intercetta $k \pm \varepsilon_k$ della miglior retta $Y = k + n\,x$ che approssima i dati tramite il metodo dei minimi quadrati, utilizzando il programma realizzato nel modulo di calcolo.
Alternativa: si faccia un fit lineare tramite Scidavis o Root

11) Si realizzi un grafico in scala lineare che riporta i dati linearizzati $(Y_s\ vs.\ x_s)$ con le relative barre di incertezza e la retta di fit (*si usi la macro ROOT vista a Calcolo oppure si usi Scidavis*)
-Si verifichi qualitativamente la bontà dell'accordo del fit con i dati sul grafico: commentare.

12) Controlli
a) Si verifichi se, entro le incertezze, l'angolo di alzo θ_o ricavato sperimentalmente è compatibile con il valore $\theta_o = atan(k)$ ricavato dal termine noto del fit $k = tg\theta_0$ *(per la propagazione degli errori si vedano le note discusse a lezione)*

b) A partire dal coefficiente angolare del fit $n = \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\vartheta_0}\right)$ e assumendo nota ***g=980.55 cm/s²***

(trascurare incertezza), si determini il modulo della velocità di uscita dallo scivolo $v_0 = \sqrt{\frac{g}{2n}}\frac{1}{\cos(\vartheta_0)}$
(per la propagazione degli errori su v_0 si vedano le note discusse a lezione).
c) Nota la misura del dislivello ***h*** dello scivolo, si ricavino i valori teorici della velocità di uscita della sfera $v_{oT} = \sqrt{2gh}$ [3a] e $v_{oR} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$ [3b] calcolati assumendo rispettivamente moto di scivolamento puro e moto di rotolamento puro in assenza di dissipazione per attrito. Si verifichi se sono compatibili con il valore di $\boldsymbol{v_o}$ ricavato dal fit dei dati sperimentali. Commentare.
d) Opzionale: le traiettorie di sferette con massa diversa sono differenti ? Commentare.