

Verifica Sperimentale della Legge di Hooke con Metodo Statico e Dinamico

Eugenio Dormicchi¹, Giovanni Oliveri¹, Mattia Sotgia^{1, 2}

¹Gruppo C03, Esperienza di laboratorio n. 5

²In presenza in laboratorio per la presa dati

Presa dati– 10 Marzo 2021, 15:00– 18:00; Analisi dati– 16 Marzo 2021

Obiettivo– Vogliamo verificare la validità della legge di Hooke per cui la forza \vec{F} applicata su un corpo elastico è direttamente proporzionale all'elongazione causata, secondo la legge $F = k \cdot \delta l$.
Metodi– Sfruttiamo due modelli per ricavare in modo differente la costante k legata alla molla. Considerando la molla in una condizione statica, con un corpo di massa nota m_i , e misurando l'allungamento l_i causato dalla massa, possiamo ricavare k_{statico} . Se invece mettiamo in oscillazione dalla condizione di equilibrio l_0 possiamo dal periodo T_i ricavare k_{dinamico} (considerando il moto nel regime elastico).

Risultati–

Conclusione–

1. Obiettivo

Obiettivo dell'esperienza è quello di verificare la validità della relazione $\vec{F} = k\delta\vec{l}$ (che possiamo considerare nel nostro caso $F = k \cdot \delta l$, poiché consideriamo solo componenti lungo lo stesso asse) per cui la forza \vec{F} esercitata su un corpo elastico è direttamente proporzionale all'allungamento causato dalla stessa forza, a meno di una costante k . Per verificare la legge di Hooke eseguiamo misure su due modelli, uno statico e uno dinamico, e confrontiamo graficamente il risultato ottenuto.

Infine vogliamo ricavare il valore rispettivamente di k_{statico} e di k_{dinamico} , ed eseguire una verifica della compatibilità dei valori. Se tali valori risultano compatibili infine proviamo a ricavare il valore della miglior stima, ottenuto con una media pesata sugli errori associati.

2. Strumentazione

Abbiamo a disposizione come strumentazione:

- un calibro ventesimale di portata 20 cm e sensibilità 0.05 mm;
- un cronometro di portata molto maggiore alle misure effettuate e sensibilità 0.01 s;
- una bilancia elettronica KERN BCP-350/4, di portata 350 g, considerando come sensibilità la linearità dello strumento 0.04 g (non rischiamo così di sottostimare l'errore);
- un foglio di carta millimetrata attaccato con le pinze su un piano verticale posto sulla struttura che sostiene la molla, parallelo a quest'ultima;
- una squadra utilizzata per ridurre l'errore commesso di parallasse;
- una vite infinita con un gancio all'estremità e due bulloni, necessario per fissare le masse alla molla;
- una molla di costante elastica k ;
- diverse masse cilindriche forate, considerate di densità omogenea;

La struttura utilizzata prevede una guida fissata al muro dove a un estremo è vincolata tramite un braccetto una molla, libera per l'altro estremo. Sulla guida è collocato un piano mobile con sopra applicato il foglio di carta millimetrata con due pinze. Tale piano viene fermato con due viti sulla guida all'altezza tale da posizionare l'estremo libero della molla in cima al foglio millimetrato. In questo modo ci assicuriamo che l'aggiunta del peso all'estremo della molla e la relativa elongazione rimangano nei limiti del foglio.

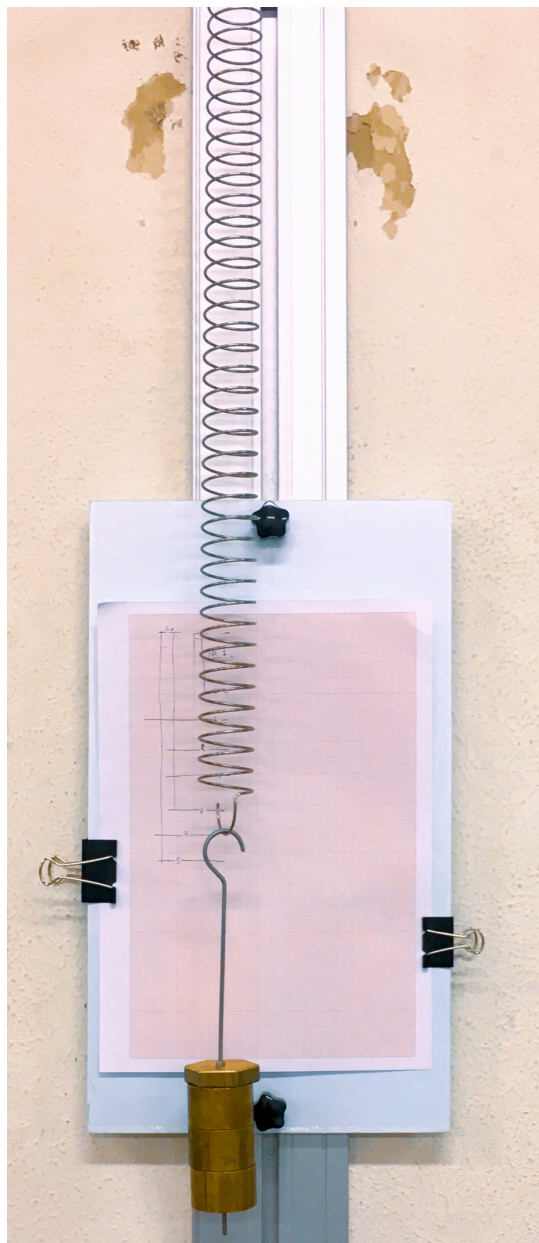


Figura 1. Apparato sperimentale

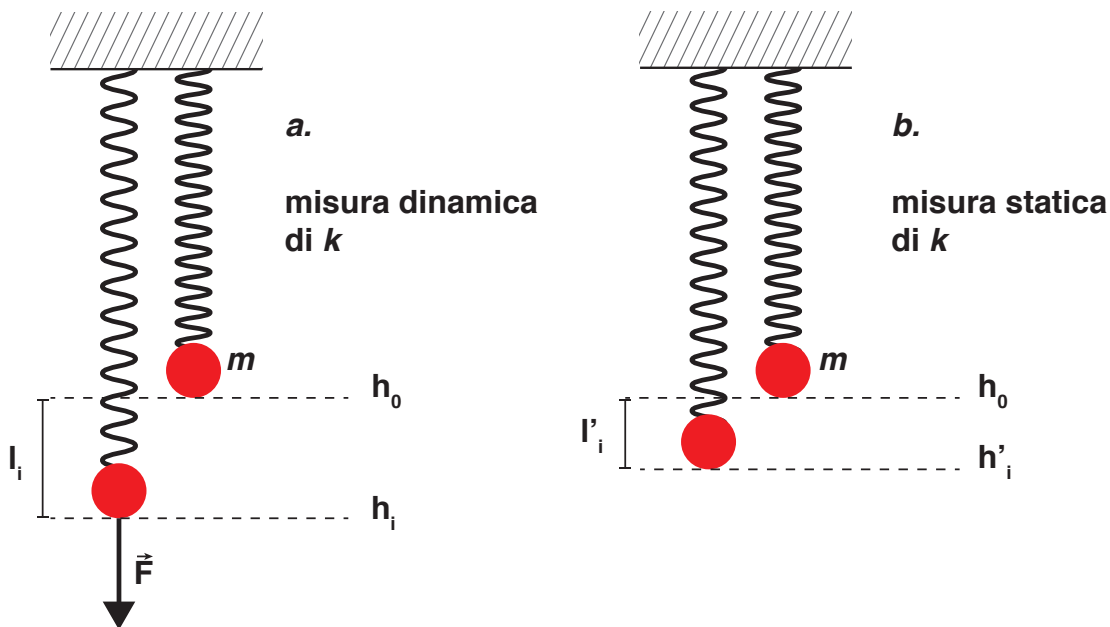


Figura 2. a. b.

3. Metodi

Tutte le misure sono riportate nelle unità del Sistema Internazionale (SI). Si assume come nota e costante l'accelerazione di gravità $g_t = (9.8056 \pm 0.0001 \text{ stat}) \text{ m/s}^2$.

Si fa spesso riferimento anche alla regola del 3σ , con la quale si vuole intendere la volontà di trasformare un errore di tipo massimo in errore statistico, e quindi considerando il valore vero con una probabilità statistica del $3\sigma \approx 99.73\%$ di probabilità del dato vero.

I valori riportati sono stati approssimati tenendo conto di alcune convenzioni prese. Si approssima l'errore a una cifra significativa se tale cifra è ≥ 3 , altrimenti se tale cifra è 1 o 2 allora si considerano due cifre significative. Considerando quindi le posizioni decimali significative dell'errore si approssima per eccesso il valore numerico della grandezza.

In entrambi i modelli la molla è sempre utilizzata in un regime elastico, tale per cui la molla è capace di ritornare alla condizione iniziale, e quindi in una condizione in cui l'energia totale del sistema si conserva.

Poiché la portata della bilancia elettronica è di 350 g e le masse da noi utilizzate combinate danno valori superiori, procediamo a pesare le masse in combinazioni tali da non superare tale limite della bilancia, ma con lo scopo di non effettuare troppe misure sommate poiché l'errore totale della misura è la somma degli errori delle singole pesate. Inoltre per il medesimo motivo il gancio viene pesato in una delle pesate e non singolarmente.

Per riportare le misure di lunghezza raggiunte dalla molla sul foglio abbiamo utilizzato una squadra per ridurre l'errore dovuto alla parallasse.

Misuriamo la massa della molla utilizzando la squadra come piano d'appoggio per allargare il piatto della bilancia. Tale massa risulta essere $83.894 \pm 0.004 \text{ g}$.

Segniamo sul foglio millimetrato la proiezione della lunghezza l_0 raggiunta dalla molla a riposo quando essa è libera senza masse ulteriori appese.

3.1. Metodo Statico

Vogliamo ricavare tramite misure di statica un valore k_{statico} (ovvero una misura di k).

Dai pesetti componiamo una massa m_i tale che la massa rientri nel regime delle elongazioni elastiche per la molla, ovvero che $0.150 \text{ kg} < m_i < 1.200 \text{ kg}$. Pesata quindi la massa totale (come somma delle diverse pesate) fissiamo sulla vite senza fine tramite i bulloni i pesetti. Agganciamo dunque il sistema composto da masse + gancio alla molla, attendiamo che questa si stabilizzi su una condizione di equilibrio e segniamo sul foglio la lunghezza raggiunta dall'estremo della molla. Misuriamo dunque la variazione di elongazione δl_i , a cui associamo un errore di $\Delta l_i = 1 \text{ mm}$, considerando come incertezza sulla misura il minimo valore misurabile dalla carta millimetrata. Convertiamo poi l'errore assoluto in errore standard $\varepsilon_{l_i} = \Delta l_i / \sqrt{3}$ secondo la regola del 3σ .

Ripetiamo questo procedimento per sette misure di massa differenti, e trascriviamo i valori in tabella.

3.2. Metodo dinamico

Per ogni massa utilizzata nel metodo statico effettuiamo anche una considerazione di tipo dinamico del sistema, per ricavare un valore k_{dinamico} da confrontare poi con k_{statico} , per verificarne il valore. Applichiamo una forza \vec{F} al sistema molla + m_i , spostando la molla dalla sua posizione di equilibrio di un δx abbastanza piccolo. Questa necessità può essere spiegata da due fatti: innanzitutto il periodo di oscillazione della sistema non dipende dall'ampiezza dell'oscillazione, e inoltre un'ampiezza maggiore porta ad avere una velocità maggiore e quindi, poiché l'attrito viscoso dell'aria è direttamente proporzionale alla velocità v ($\vec{f}_v = -\beta \vec{v}$) causando quindi uno smorzamento del moto. Per dimostrare il primo punto, partendo dalle equazioni delle forze in gioco ricaviamo:

$$\vec{f}_{el} + \vec{P} = M_{\text{tot}} \vec{a}$$

da cui

$$k \cdot x - M \cdot g = -M \cdot \ddot{x}$$

Dividendo per la massa M

$$\frac{k}{M} \cdot x - g = -\ddot{x}$$

Se riscriviamo il termine $\frac{k}{M} \cdot (x - g \cdot \frac{M}{k}) = \xi$, osserviamo che $\ddot{\xi} = \ddot{x}$, quindi possiamo riscrivere come

$$-\frac{k}{M} \cdot \xi = \ddot{\xi}$$

Se consideriamo il fattore $\frac{k}{M}$ questo ha dimensioni s^{-1} , quindi possiamo riscrivere

$$-\omega^2 \cdot \xi = \ddot{\xi}$$

Che è una equazione differenziale al secondo ordine, che se risolta ci dà proprio l'equazione del moto armonico oscillatorio, dove però il termine $g \cdot \frac{M}{k}$ rappresenta la posizione x_{eq} di equilibrio. Da $\omega = \sqrt{k/M}$ possiamo ricavare il periodo di oscillazione del sistema.

Se infatti il periodo è $T = \frac{2\pi}{\omega}$, allora otteniamo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}}$$

che denota la non dipendenza del periodo dall'ampiezza di oscillazione.

4. Risultati

5. Conclusione

5.1. Controlli

5.2. Possibili errori sistematici

A. Dati completi