

# Verifica sperimentale della legge del moto del proiettile

Dormicchi E.<sup>1</sup>, Pizzimbone R.<sup>1</sup>, Sotgia M.<sup>1, 2</sup>

<sup>1</sup>Gruppo C03, Esperienza di laboratorio n. 3

<sup>2</sup>In presenza in laboratorio per la presa dati

Presa dati— 16 dicembre 2020, 15:00– 18:00; Analisi dati— 17-19 dicembre 2020

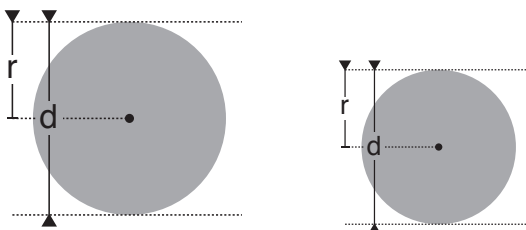
**Obiettivo:** Verificare che la traiettoria di una sfera in caduta libera può essere descritta come una parabola, e confrontare il valore teorico ricavato da due modelli diversi della velocità di uscita della sfera  $v_0$  con il valore ottenuto dall'analisi dei dati, per verificare la conservazione dell'energia meccanica. **Metodi:** Eseguiamo diversi lanci balistici con uno scivolo che permette di imprimere una velocità calcolabile in uscita, e servendoci di un piano posizionato a diverse quote misuriamo il relativo spostamento orizzontale. Eseguiamo poi un plot dei dati ed una successiva analisi servendoci degli strumenti realizzati durante le esperienze di calcolo. **Risultati:** Calcoliamo infine servendoci di questi strumenti il valore della velocità iniziale della sfera e l'angolo  $\theta_0$  di alzo, e li confrontiamo con quelli teorici. **Conclusione:** La teoria bene approssima il comportamento osservato di un corpo in caduta libera. Nonostante ciò alcune approssimazioni generalmente considerate, come il fatto di poter trascurare gli attriti, si sono mostrate molto strette rispetto all'osservazione sperimentale. Inoltre, l'approssimazione della sfera a punto materiale non soddisfa il comportamento reale, ma è necessario considerare la sfera come un sistema di punti, ovvero descriverne anche la rotazione.

## 1. Strumentazione

Flessometro (Portata: 3m; Sensibilità: 1mm);  
Nonio ventesimale singolo (Portata: 150mm; Sensibilità: 1/20mm);  
Micrometro di Palmer (Portata: 25mm; Sensibilità: 1 $\mu$ m);  
Bilancia Kern PCB 350– 4 (Portata: 350g; si considera come errore la linearità dello strumento: 0.004g);  
Peso a piombo;  
Livella a bolla;  
Pinza per fissare il foglio di carta millimetrata;  
Fogli di carta millimetrata;  
Foglio di carta carbone;  
Sfere di acciaio inox. (Fig. 1);  
Scivolo per imprimere velocità controllabile alla sfera (Fig. 2);  
Struttura per posizionare i fogli di carta millimetrata a diverse altezze.

## 2. Obiettivo

Lo scopo dell'esperienza è quello di verificare che la teoria che descrive la traiettoria in caduta libera di una sfera lanciata ad un angolo  $\theta_0$  sia consistente con quello che si osserva sperimentalmente. Inoltre analizzando i dati ricavati ci aspettiamo di poter ricavare inversamente la velocità  $v_0$  di uscita della pallina, e confrontarla con il modello utilizzato per calcolarla, sfruttando le leggi della conservazione dell'energia meccanica. Si utilizzeranno diversi modelli, per poter anche verificare quale modello teorico meglio approssima il comportamento della sfera.



**Fig. 1.** Sono state utilizzate due sfere per eseguire la verifica sperimentale, una di massa superiore dell'altra. Questo per consentire di verificare o meno la dipendenza della traiettoria dalla massa dell'oggetto.

**Tab. 1.** Valori medi  $\bar{x}_i$  delle  $x_i$ , Varianza ( $\sigma_N[x_i]$ ) e Dev. Standard adattata ( $s_N[x_i]$ ) calcolati considerando 10 lanci per ogni altezza  $y_i$ . L'errore Standard  $\varepsilon_N[x_i]$  è stato ricavato a partire dalla Dev. Std. adattata, con la formula  $\varepsilon_N[x_i] = (s_N[x_i]) \times (\sqrt{N})^{-1}$ .

	$\bar{x}_s$ (m)	$\sigma_N[x_i]$	$s_N[x_i]$	$\varepsilon_N[x_i]$
$x_1$	0.1917	1.5e-05	0.0041	0.0013
$x_2$	0.2192	1.3e-05	0.0039	0.0012
$x_3$	0.2489	1.4e-05	0.0040	0.0013
$x_4$	0.2669	9.5e-06	0.0032	0.0010
$x_5$	0.2914	2.4e-05	0.0051	0.0016

**Tab. 2.** Valori dell'altezza  $y_i$  a cui sono state prese le misure di  $x_i$ . Nella seconda colonna possiamo osservare che l'errore di  $y$  è dovuto a due fattori: la sensibilità dello strumento di misura e dalla sensibilità della bolla, di cui assumiamo comunque un errore di  $1^\circ \approx 0.01745$  rad.

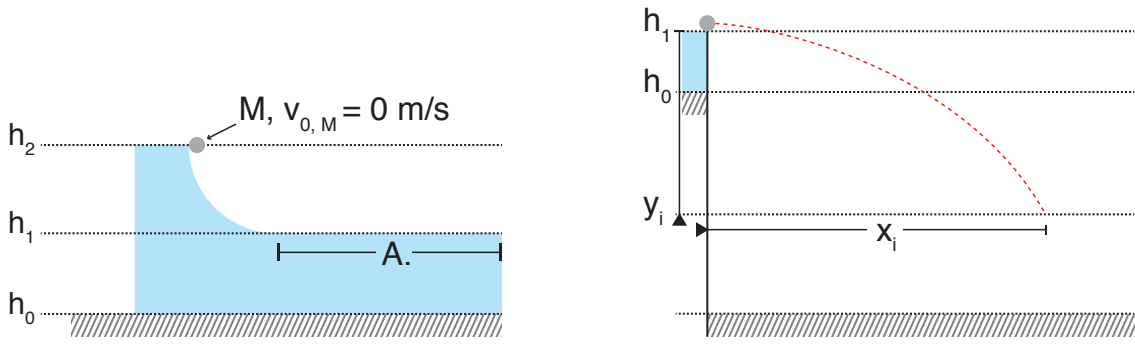
	$y_i$ (m)	$\Delta y_i + \bar{x}_i \sin \varphi_0$	$^a \varepsilon_N[y_i]$
$y_1$	0.262	0.001 + 0.0015	0.0025
$y_2$	0.372	0.001 + 0.0018	0.0028
$y_3$	0.482	0.001 + 0.0021	0.0031
$y_4$	0.592	0.001 + 0.0023	0.0033
$y_5$	0.702	0.001 + 0.0025	0.0035

### Note:

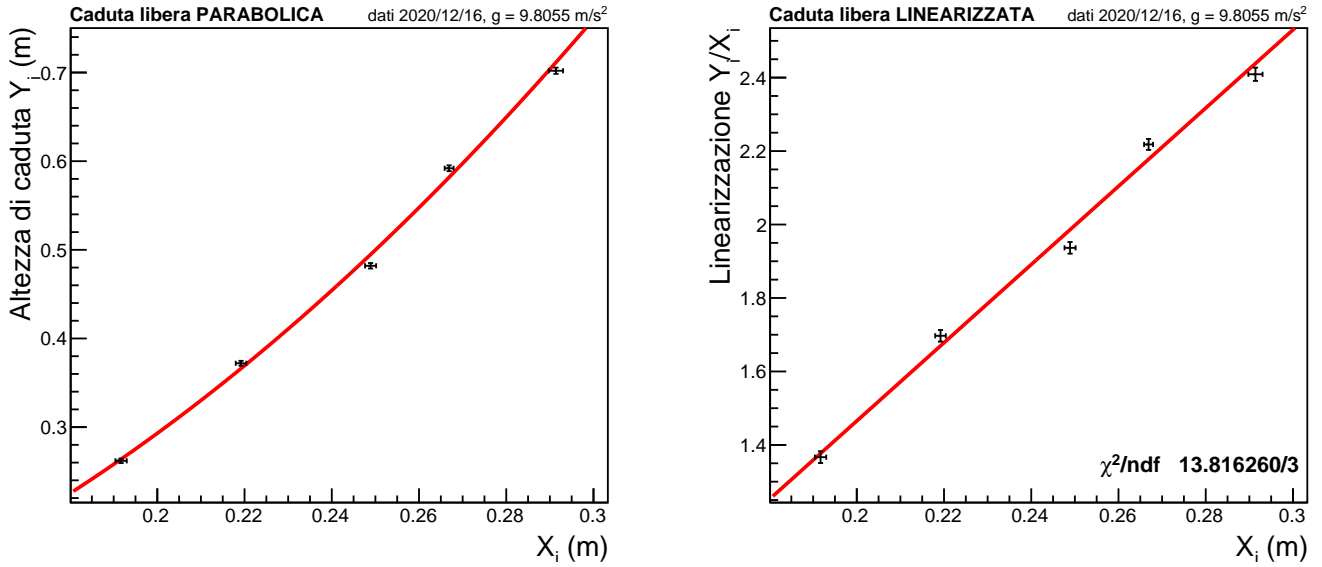
<sup>a</sup> Per convertire l'errore massimo sulle  $y_i$  in errore statistico sfruttiamo la regola del  $3\sigma$ , e consideriamo perciò  $\varepsilon_N[y_i] = \frac{\Delta y_i}{\sqrt{3}}$

## 3. Metodi

Si effettuano diversi lanci con due sfere di differenti dimensioni e masse da una rampa concava (Fig. 2). Al di sotto dell'estremità del piano, da cui sono cadono le sfere, è posizionato un foglio di carta millimetrata, con sopra un foglio di carta carbone, entrambi fissati al piano. Prima di ogni lancio ci assicuriamo che il piano e lo sbocco della rampa siano paralleli e in bolla. Si lasciano cadere dalla rampa la sfera di massa minore, per dieci volte, e la sfera di massa maggiore, una sola volta, sui fogli, senza muoverli, per cinque diverse quote. Ogni volta che l'altezza dei fogli cambia viene segnata un'origine sui fogli las-



**Fig. 2.** Apparato sperimentale. Sulla sinistra: Struttura a scivolo utilizzata per imprimere una velocità  $v_0$  alla sfera. Conoscendo  $h_2$  e  $h_1$  possiamo sfruttare il teorema Lavoro-Energia e, poiché intervengono solo forze conservative (Forza Peso – scegliamo inizialmente di considerare tutti gli attriti nulli), possiamo perciò ricavare la velocità con cui il corpo esce dallo scivolo. Sulla destra: Traiettoria teorica prevista (indicata in rosso); per effettuare le misurazioni si è sfruttato un piano che aveva la possibilità di spostarsi su cinque quote  $y_i$ .



**Fig. 3.** Sulla sinistra: Plot dei dati delle  $y_i$  e delle  $x_i$  raccolti in Tab. 1 e Tab. 2; si può osservare un andamento parabolico in accordo con la teoria. I dati sono stati presi da un oggetto in caduta, ma le quote  $y_i$  indicano la la distanza del piano di caduta e il piano da cui è lasciata cadere la sfera (la distanza tra  $h_0$  e  $y_i$  in Fig. 2 a destra). La linea rossa sottolinea l'andamento parabolico, ed è stata individuata da un fit non lineare. Sulla destra: rappresentazione linearizzata degli stessi punti. Per eseguire la linearizzazione si è fatto il plot delle coppie di punti  $(y_i/x_i, x_i)$ . Ugualmente è stato eseguito un fit, lineare, sfruttando il metodo dei minimi quadrati.

ciando cadere un peso a piombo attaccato ad un filo che viene teso dall'estremità del piano di lancio, facendo attenzione che il peso oscilli il meno possibile. Vengono così registrate più distanze per ogni altezza su cui sono poggiati i fogli, di queste verranno considerate le medie (con relativi errori standard) per verificare la compatibilità dei dati sperimentali con il modello teorico (Tab. 1 e Tab. 2).

### 3.1. Caratterizzazione apparato sperimentale

La prima misura effettuata è stata calcolare la massa e il diametro di entrambe le sferette, attraverso la bilancia elettronica e il Palmer. I valori così ottenuti sono  $m = (5.527 \pm 0.004) \times 10^{-3} \text{ kg}$ ,  $d = (1.0110 \pm 0.0001) \times 10^{-4} \text{ m}$  per la sfera piccola;  $M = (13.976 \pm 0.004) \times 10^{-3} \text{ kg}$ ,  $D = (15.009 \pm 0.001) \times 10^{-3} \text{ m}$ , per la sfera grande. Successivamente si è determinata l'altezza massima e minima della rampa con il calibro:  $h_2 = (1.1305 \pm 0.0005) \times 10^{-5} \text{ m}$ ,  $h_1 = (3.040 \pm 0.005) \times 10^{-2} \text{ m}$ . Il dislivello percorso dalla pallina sarà quindi  $\Delta h = h_2 - h_1 = (8.265 \pm 0.010) \times 10^{-4} \text{ m}$ .

### 3.2. Presa dati

Dopo aver messo in bolla il piano di sbocco della pallina assumiamo  $\vartheta_0 = 0 \pm 1^\circ \approx 0.01745 \text{ rad}$ , dove  $\Delta\vartheta_0$  è la sensibilità della bolla.

Le cinque diverse quote della tavoletta  $y_i$  sono riportate nella Tab. 2, con i rispettivi errori massimi di cui si considera sia la sensibilità del metro sia la sensibilità della bolla, ricavato quindi come  $\Delta y_i = \Delta y_0 + x_i \times \sin \vartheta_0$ .

Successivamente si effettuano i 10 lanci con la sfera più piccola e 1 con la sfera più grande per la prima quota facendo in modo che la velocità iniziale sia nulla. Al termine dei lanci si rimuove la carta carbone e si evidenzia il gruppo di spostamenti orizzontali ottenuti  $x_1$ . Si ripete lo stesso procedimento per le quattro quote rimanenti. Ad ogni quota si considera l'origine ottenuta con il peso a piombo, rispetto alle quali si misureranno le  $x_i$ ; ugualmente si misura per ogni quota l'altezza  $y_i$  dal piano. Si procede con un'analisi statistica dei dati degli spostamenti ottenuti attraverso l'uso del programma implementato a calcolo. Nella Tab. 1, sono riportati i valori medi degli spostamenti orizzontali così ottenuti con la rispettiva Varianza ( $\sigma_N[x_i]$ ), Devi-

azione Standard adattata ( $s_N[x_i]$ ) e Errore Standard ( $\varepsilon_n[x_i]$ ). A ciascuno di essi è associata la rispettiva quota  $y_i$  (Tab. 2) con Errore massimo e Errore standard (ottenuto dividendo l'errore massimo per la radice di 3,  $\varepsilon_n[x_i] = (\Delta y_i) \times (\sqrt{3})^{-1}$ , secondo la regola del  $3\sigma$ ).

### 3.3. Analisi qualitativa dati raccolti

Rappresentiamo i dati raccolti con un grafico con le relative barre di errore (Fig. 3 a sinistra). Possiamo osservare che la traiettoria di caduta (le  $y_i$  indicano la quota a partire dal piano di lancio, quindi il grafico è da leggersi dal basso verso l'alto) è parabolica.

### 3.4. Linearizzazione e verifica quantitativa della teoria

Verificato che la traiettoria sia effettivamente parabolica, si procede ad una analisi quantitativa dei dati. Innanzitutto linearizziamo i dati, per poter ottenere una funzione più semplice da trattare. Quindi consideriamo la conversione  $Y_i = y_i/x_i$ , con errore statistico ricavato come

$$\varepsilon_{Y_i} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{y_i}}{x_i}\right)^2 + \left(\frac{y_i \varepsilon_{x_i}}{x_i^2}\right)^2} \quad (1)$$

da cui la legge che lega  $y$  e  $x$  nella caduta libera

$$y_i = \tan \vartheta_0 x + \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \vartheta_0}\right) x^2 = kx_i + nx_i^2 \quad (2)$$

diventa più semplicemente

$$Y_i = k + nx_i \quad (3)$$

che quindi è una retta, dove

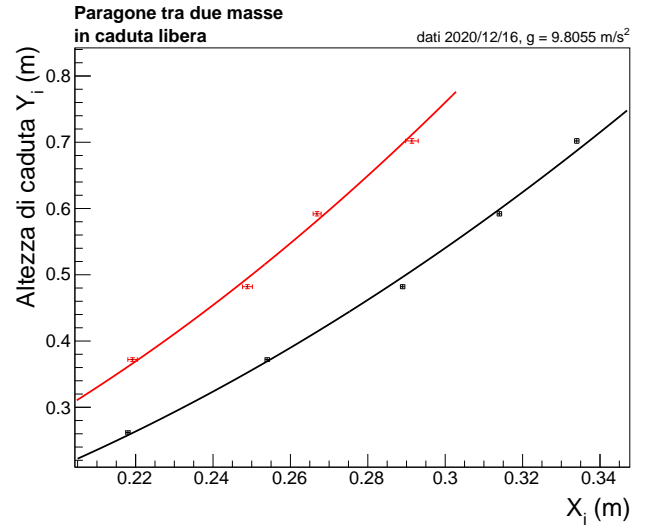
$$n = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \vartheta_0} \quad (4)$$

$$k = \tan \vartheta_0 \quad (5)$$

Stimiamo eseguendo un fit lineare della retta e troviamo quindi i coefficienti  $n \pm \varepsilon_n$  e  $k \pm \varepsilon_k$ . Realizziamo con i dati linearizzati un grafico (Fig. 3 a destra) e disegniamo anche la retta di fit (in rosso). Osserviamo che i punti hanno errori statistici piccoli, e che per tre punti su cinque il fit lineare ricade all'interno delle barre di errore.

## 4. Conclusione

Dai dati ottenuti possiamo concludere che la teoria bene si adatta a illustrare la traiettoria di un corpo in caduta libera. Osserviamo però che la teoria non descrive altrettanto bene altri aspetti meccanici, e soprattutto non tiene conto di attriti che invece non sono risultati trascurabili. Infatti constatiamo che la variazione della massa del corpo influisce sulla traiettoria, come si evince dalla Fig. 4, dove le traiettorie descritte da due corpi di massa diversa sono differenti. È importante sottolineare che però, mentre le misure ricavate per la sfera di massa minore (m) sono misure ripetute più volte, a cui sono stati applicati metodi statistici, le misure della sfera di massa maggiore (M) sono state effettuate una sola volta, e si è considerato per tali misure un errore massimo = 1mm, ovvero la sensibilità della carta millimetrata, che è stato convertito in errore statistico con la regola del  $3\sigma$  ( $\Delta x_i^M \rightsquigarrow \Delta x_i^M \times (\sqrt{3})^{-1}$ ).



**Fig. 4.** Plot dei dati raccolti in Tab. 1 e Tab. 2 (indicati in rosso, sono i dati della sfera piccola). In nero il plot dei punti individuati dalla sfera di massa maggiore.

### 4.1. Controlli

Consideriamo per una analisi più dettagliata i valori ottenuti considerando i dati della pallina di massa minore.

Ricavati dal fit lineare i valori di  $n \pm \varepsilon_n$  e  $k \pm \varepsilon_k$ , eseguendo il calcolo inverso otteniamo  $\vartheta_0 \pm \varepsilon_{\vartheta_0}$

$$\vartheta_0^{fit} = \arctan k \quad (6)$$

e  $v_0 \pm \varepsilon_{v_0}$  con le relazioni inverse

$$v_0^{fit} = \sqrt{\frac{g}{2n \cos^2 \vartheta_0}} \quad (7)$$

con i relativi errori standard per  $\vartheta_0$

$$\varepsilon_{\vartheta_0}^{fit} = \frac{1}{1+k^2} \times \varepsilon_k \quad (8)$$

e per  $v_0$

$$\varepsilon_{v_0}^{fit} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{g}{2}} \frac{n^{-\frac{3}{2}}}{2 \cos \vartheta_0} \varepsilon_n\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{g}{2}} n^{-\frac{1}{2}} \frac{\sin \vartheta_0}{\cos^2 \vartheta_0} \varepsilon_{\vartheta_0}\right)^2} \quad (9)$$

Ci siamo posti inizialmente in una condizione per cui l'angolo di alzo era nullo ( $\vartheta_0 = 0rad$ ). Il valore di  $\vartheta_0^{fit}$  ricavato dal fit è (Tab. 3)  $-0.59 \pm 0.10$ , che non è compatibile con il valore di  $\vartheta_0 = 0 \pm 0.010rad$  ( $\vartheta_0 \pm \varepsilon_{\vartheta_0}$ ). Infatti la relazione

$$|\vartheta_0 - \vartheta_0^{fit}| < 3 \sqrt{\varepsilon_{\vartheta_0}^2 + (\varepsilon_{\vartheta_0}^{fit})^2} \quad (10)$$

non è rispettata ( $|\vartheta_0 - \vartheta_0^{fit}| \nless \varepsilon_{\vartheta_0} + \varepsilon_{\vartheta_0}^{fit}$ ), e quindi i due risultati non sono compatibili. Assumendo nota  $g = 9.8055m/s^2$  senza errore, possiamo sfruttare la relazione (7) per ricavare  $v_0^{fit}$  (poiché dal fit abbiamo ottenuto che  $\vartheta \neq 0$ , nella formula consideriamo anche l'angolo di alzo). Otteniamo quindi che  $v_0^{fit, \vartheta \neq 0} = 0.80 \pm 0.05$ . Proviamo anche a calcolare  $v_0^{fit}$  considerando l'angolo di alzo = 0, ottenendo  $v_0^{fit, \vartheta=0} = 0.68 \pm 0.01$ . Confrontiamo queste misure con il valore teorico di  $v_0$  trovato utilizzando due modelli diversi: il primo che considera un moto puramente traslatorio, il secondo che prevede un moto di rotolamento puro. Consideriamo ora il modello 1 (moto puramente traslatorio): ponendo l'energia potenziale del sistema a

**Tab. 3.** Risultati dell'analisi dati. i valori sono indicati con relativo errore standard ( $a \pm \varepsilon_a$ ).  $E_{r\%}$  indica invece l'errore relativo in percentuale. L'errore sull'angolo  $\vartheta_0$  è stato ottenuto considerando  $1^\circ$  di errore sulla misura, che è dunque stato convertito in radianti e poi, secondo la regola del  $3\sigma$ , diviso per  $\sqrt{3}$ , ottenendo  $\varepsilon_{\vartheta} = 0.010$  rad.

Modelli teorici					Osservazione sperimentale	
Moto puramente traslatorio		Moto di rotolamento puro			(Risultato fit)	
$v_0$ (m/s)	$1.49 \pm 0.19$	$E_{r\%} = 12.8\%$	$1.26 \pm 0.23$	$E_{r\%} = 18.3\%$	$0.80 \pm 0.05$ (considerando $\vartheta_0$ il valore ottenuto dal fit)	$E_{r\%} = 6.25\%$
$\vartheta_0$ (rad)	$0 \pm 0.010$		$0 \pm 0.010$		$0.68 \pm 0.01$ (considerando $\vartheta_0 = 0$ )	$E_{r\%} = 1.47\%$
					$-0.59 \pm 0.10$	$E_{r\%} = 16.9\%$

zero nella parte orizzontale dello scivolo (Fig. 2 a sinistra, tratto A.), possiamo dire che quando la sfera viene lasciata nel punto  $h_2$ , la sua energia è puramente potenziale ( $E_{i,tot} = U = mg\Delta h$ ). Quando la sfera lascia il piano la sua Energia totale è dovuta solo ad una componente Cinetica ( $E_{f,tot} = K = 1/2mv^2$  dove  $v = v_0$ ). Applicando il teorema Lavoro-Energia otteniamo che

$$v_0^T = \sqrt{2g\Delta h} = 1.49 \text{ m/s} \quad (11)$$

$$\varepsilon_{v_0}^T = \left| \sqrt{\frac{g}{2\Delta h}} \right| \times \varepsilon_{\Delta h} = 0.19 \text{ m/s} \quad (12)$$

Confrontando con il valore ottenuto dal fit otteniamo che

$$\left| v_0^T - v_0^{fit, \vartheta \neq 0} \right| \not\leq 3 \sqrt{(\varepsilon_{v_0}^T)^2 + (\varepsilon_{v_0}^{fit, \vartheta \neq 0})^2} \quad (13)$$

ovvero che le due misure non sono compatibili. Questo può significare che il modello scelto non rispecchi la realtà dell'esperimento. Osserviamo che considerando anche  $v_0^{fit, \vartheta=0}$  otteniamo una discrepanza.

Consideriamo quindi il modello 2 (moto di rotolamento puro). Sempre ponendo  $E_{i,tot} = U = mg\Delta h$ , e ponendo  $U(h) = 0$  nel tratto A., consideriamo invece che una parte dell'energia potenziale iniziale venga dissipata dal corpo nel moto di rotolamento, e che quindi  $E_{f,tot} = K + I\vec{\omega} = 1/2mv^2 + 2/5mR^2$ , dove  $R$  è il raggio della sfera e  $v = v_0$ . Se  $\vec{\omega} = \vec{R} \times \vec{v}_0$ , per il teorema Lavoro-Energia otteniamo che

$$v_0^R = \sqrt{\frac{10}{7}g\Delta h} \quad (14)$$

$$\varepsilon_{v_0}^R = \left| \sqrt{\frac{7g}{10\Delta h}} \right| \times \varepsilon_{\Delta h} \quad (15)$$

Confrontando con il valore ottenuto dal fit otteniamo che

$$\left| v_0^R - v_0^{fit, \vartheta=0} \right| < 3 \sqrt{(\varepsilon_{v_0}^R)^2 + (\varepsilon_{v_0}^{fit})^2} \quad (16)$$

ovvero che le due misure sono compatibili. Quindi possiamo dire che il modello di rotolamento puro approssima meglio la realtà rispetto al modello di pura traslazione. Ugualmente si osserva che considerando  $v_0^{fit, \vartheta=0}$  si ottengono valori compatibili.

#### 4.2. Possibili errori sistematici

In Tab. 3 sono riportati i valori ottenuti dal fit. Come abbiamo già trattato nella sezione 4.1. *Controlli*, l'angolo  $\vartheta_0$  viene  $\approx 30^\circ$ . Questo valore è in disaccordo con l'apparato di misura utilizzato, e potrebbe essere un dato generato da imperfezioni della struttura sperimentale nel punto in cui la sfera lascia lo scivolo. Possiamo ipotizzare qualitativamente che questa incompatibilità del valore dell'intercetta, e di conseguenza del valore di  $\vartheta_0$  sia causata da un errore sistematico.

Osserviamo che i punti misurati sono solo 5. Le variabili in gioco nel fit sono 2,  $n$  e  $k$ , e quindi i gradi di libertà ( $ndf = [N_{punti}] - [N_{par, fit}]$ ) sono 3. Il rapporto  $\chi^2/ndf = 13.8/3 \approx 5$  (Fig. 3), che è  $\gg 1$  ma anche  $< 10$ , quindi non rappresenta un fit perfetto, ma è comunque significativo. Dobbiamo però tenere conto del fatto che sono stati raccolti dati solo per 5 quote, e quindi si sono ottenuti 5 punti. Un maggiore numero di punti avrebbe perciò migliorato la qualità del fit, permettendoci di ottenere un rapporto  $\chi^2/ndf \approx 1$ . Inoltre si osserva che l'errore sulle  $x_i$  è comparabile con l'errore sulle  $y_i$ , quindi non siamo dentro alle strette condizioni che permettono di applicare il metodo dei minimi quadrati per eseguire il fit, che prevedono che l'errore sulle  $x$  sia trascurabile.

Come abbiamo già detto, abbiamo osservato che la variazione di massa influisce sulla traiettoria del corpo. La teoria non prevede infatti che la velocità dipenda da altri fattori oltre che l'altezza  $\Delta h$ . Possiamo perciò ipotizzare che in realtà tale velocità dipenda anche in una certa maniera anche dalla massa del corpo. Quando abbiamo considerato la conservazione dell'energia, abbiamo ipotizzato che fossero presenti solo forze conservative nel sistema (forza di gravità). Questo risultato ci fa invece pensare che potrebbero essere invece presenti forse dissipative, quali gli attriti (attrito radente del piano con la sfera, attrito viscoso dell'aria...) che dissipano parte dell'energia del sistema sotto altre forme. Se avessimo posseduto un termometro sufficientemente accurato avremmo potuto probabilmente osservare un innalzamento della temperatura delle due superfici a contatto.