RELAZIONE DI LABORATORIO

Misura Sperimentale dell'Accelerazione di Gravità Sfruttando il Pendolo di Kater

Eugenio Dormicchi[1, 2], Giovanni Oliveri[1], Mattia Sotgia[1]

[1]Gruppo C03, Esperienza di laboratorio n. 6
Presa dati– 24 Marzo 2021, 15:00– 18:00; Analisi dati– 30 Marzo 2021

Obiettivo– Si vuole sfruttare uno strumento di precisione come il pendolo di Kater per ricavare dalla misura accuraata del periodo di oscillazione un valore atendibile della misura dell'accelerazione di gravità g. *Metodi–* Sfruttando il periodo di isocronia T^* del pendolo di Kater, ricavato dalla posizione x_b della massa mobile M_b, possiamo ricavare il valore di g. *Risultati–*

Conclusione–

1. Obiettivo

Il valore della accelerazione di gravità g può essere ottenuto in diversi metodi, con strumenti via via più precisi, e di conseguenza con risultati che si spera permettano una miglior approssimazione del valore vero di g. Il pendolo può essere sfruttato come metodo per misurare tale grandezza, e si è già eseguito l'esperimento sfruttando il pendolo semplice. Per questo motivo dal pendolo semplice si è passati a considerare il pendolo fisico, in particolar modo il pendolo di Kater, che permette di estendere la natura del pendolo "semplice" e anche di eseguire misure con un livello maggiore di dettaglio.
Sfruttando quindi una precisione maggiore e proprietà particolari del pendolo di Kater come pendolo fisico, vogliamo quindi individuare il valore del periodo di isocronia T^* caratteristico del pendolo di Kater preso in considerazione e da questo valore ricavare una buona stima di g, verificandone infine la compatibilità con il valore noto $g_t = (\ 9.8056 \pm 0.0001 \ \text{stat}\ )\ \text{m/s}^2$.

2. Strumentazione

Abbiamo a disposizione i seguenti strumenti:
Calibro ventesimale, di portata 150 mm e sensibilità uguale all'accuratezza dello strumento di 50 μm;
Pendolo di Kater (si veda in seguto descrizione dettagliata dell'apparato);
Cronometro elettronico collegato a una fotocellula in grado di misurare una singola oscillazione del pendolo, di portata potenzialmente infinita (molto maggiore comunque dei periodi misurati), e sensibilità 10^{-7} s, che assumiamo anche come accuratezza;

Il pendolo di Kater è costituito da un'asta graduata, dotata di due coltelli sospensione, con una massa fissa ad un'estremità (M_a, massa rossa) ed una scorrevole (M_b, massa blu), posizionata arbitrariamente, vincolata da una vite che la può bloccare all'asta in ben definite posizioni, che sono indicate da $N = 25$ fori equidistanti 25 mm tra loro, eseguiti con strumentazione abbastanza precisa da poter trascurare l'incertezza associata a questa distanza. Il pendolo è poi poggiato su un sostegno tramite due perni che si incastrano perfettamente in una sede su una piastra posta orizzontalmente munita di livella a bolla, mantenuta in perfetto equilibrio. Il tutto viene montato su un dispositivo di sostegno in modo che l'asta risulti verticale. Lo strumento è realizzato in maniera tale che i centri di massa delle varie parti costituenti siano allineati su di una retta, intersecante gli assi definiti dai coltelli.
Il pendolo di Kater viene anche definito pendolo reversibile, in quanto possiamo agganciare il pendolo sia sul coltello di sospenzione posto sull'astremo vicino alla massa M_a, che su uno identico posto sull'estremo della massa M_b, consentendo quindi di misurare due periodi diversi T_1 e T_2.

3. Metodi

Tutte le misure sono riportate nelle unità del Sistema Internazionale (SI/MKS, ovvero metri, kilogrammi, secondi)

I valori riportati sono stati approssimati tenendo conto di alcune convenzioni prese. Si approssima l'errore a una cifra significativa se tale cifra è $\geqslant 3$, altrimenti se tale cifra è 1 o 2 allora si considerano due cifre significative. Considerando quindi le posizioni decimali significative dell'errore si approssima per eccesso il valore numerico della grandezza.

Dopo aver eseguito un prima misura del periodo del pendolo considerandolo come pendolo semplice, considerimo questa volta il pendolo fisico, ovvero come corpo più complesso e dotato di massa.
Il periodo dell' oscillazione di un pendolo fisico dipende in genere dal momento di inerzia I rispetto l'asse di sospensione, dal valore di g e dall'ampiezza massima delle oscillazioni. Tuttavia l'esperimento è effettuato nel limite delle piccole oscillazioni per cui la dipendenza dall'ampiezza è trascurabile (isocronia delle piccole oscillazioni).
È possibile quindi valutare g a partire dalla misura del periodo T e di I. Questo nella pratica non avviene data la difficoltà del calcolo di I a cui sono associate incertezze significative.

Il pendolo reversibile, come quello di Kater, elimina questa difficoltà riducendo la misura di g a quella di una serie di lunghezze e intervalli di tempo.
In tale modo l'oscillazione del pendolo può essere limitata (nei limiti sperimentali) ad un piano verticale, perpendicolare all'asse orizzontale di rotazione e passante per il centro di massa del sistema. Le misure del periodo di oscillazione viene effettuate utilizzando alternativamente i due coltelli si sospensione, al variare della posizione sull'asta della massa scorrevole.
L'equazione del periodo (nel limite delle piccole oscillazio-

ni) di un pendolo reversibile è $T = 2\pi\sqrt{I/mgh}$, che nel caso del pendolo semplice si può verificare essere $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.
Il confronto con il pendolo semplice permette di introdurre per il pendolo composto una grandezza caratteristica: la lunghezza ridotta l_{r}. Definiamo lunghezza ridotta (l_{r}) del pendolo, la lunghezza del pendolo semplice isocrono ad esso $l_{\mathrm{r}} = I/mh$.
Misuriamo con un calibro da banco di portata 1 m e sensibilità 10 μm il valore di $l_{\mathrm{r}} = (0.800010 \pm 0.000010)$ m.
Attraverso considerazioni di meccanica si ottiene che $l_{\mathrm{r}} = h_1+h_2$ con h_1 la distanza del coltello di sospensione(O_1) al centro di massa e h_2 la distanza del coltello di sospensione O_2 dal centro di massa.
I risultati ottenuti danno un'indicazione di come deve essere progettata una misura di g tramite un pendolo reversibile. Il pendolo deve essere costruito in maniera tale che il suo momento d'inerzia e la posizione del suo centro di massa rispetto agli assi di rotazione, possa essere variata con continuità: ciò viene realizzato utilizzando la massa mobile tra i due coltelli che definiscono gli assi di sospensione. In tale modo, con opportuni aggiustamenti della massa mobile, i due assi (fissi) di rotazione possono essere resi isocroni.
L'asimmetria viene realizzata introducendo una massa fissa ad un'estremità del pendolo. Raggiunta una configurazione asimmetrica con assi isocroni, la distanza tra questi ultimi è pari alla lunghezza ridotta del pendolo e quindi è possibile risalire al valore di g tramite una misura di periodo $g = 4\pi^2\sqrt{l_r/T^2}$.

La massa mobile viene spostata partendo dal penultimo foro fino a quello adiacente, distante 25 mm, per un totale di 6 posizioni.

La posizione della massa x_b si può ricavare dalla formula $x_b = L_0 + N \cdot 25$ mm , dove L_0 è la distanza dall' estremo della sbarra al primo foro successivo alla massa fissa.
L_0 è stata misurata, in millimetri, attraverso 3 misure distinte mediante l' uso del calibro.
Otteniamo che $L_0 = L_{0,1} + L_{0,2} + \text{diametro}_{Mb}/2 = (0.10415) + (0.14930) + [(0.09040)/2]$ m $= 0.29865$ m.

Le misure dei periodo T_1 e T_2 sono effettuate con un cronometro digitale azionato dalla fotocellula facendo attenzione a rimanere nel limite di piccole oscillazione e che il fascio di luce venga attraversato da entrambi i lati. Le misure dei periodi sono effettuate in modo statistico svolgendo 10 misure per ciascun periodo (T_1, T_2) per una singola posizione della massa mobile.
I dati raccolti sono riportati in Tabella A1.

4. Risultati

Si fa spesso riferimento anche alla regola del 3σ, con la quale si vuole intendere la volontà di trasformare un errore di tipo massimo in errore statistico, ovvero calcolando $\varepsilon_x = \Delta x/\sqrt{3}$.
Nella trattazione che segue consideriamo come limite per definire un dato accettabile un valore che rientra in 3σ (tre deviazioni standard) dal valore vero.

5. Conclusione

5.1. Controlli

5.2. Possibili errori sistematici

A. Dati estesi

Tabella A1. Dati grezzi dei periodi T_1 e T_2 misurati alle diverse lunghezze x_b.

	Misure di x_b calcolate (m) $x_b = \left[L_{0,\,1} + L_{0,\,2} + \frac{d}{2} + (N_{\text{fori}} \cdot 0.025)\right]$ m (errore massimo $\pm 1 \times 10^{-3}$ m)					
x_b	0.899	0.874	0.849	0.824	0.799	0.774
	Periodi T_1 presi 10 volte per ogni i-esimo valore di x_b (s) $T_{1_{(n\times1)}}, \ldots, T_{1_{(n\times6)}}$ (errore massimo $\pm 10^{-7}$ s)					
$T_{1_{(1\times i)}}$	1.8433475	1.8241344	1.8010792	1.7842967	1.7646188	1.7469742
$T_{1_{(2\times i)}}$	1.8438321	1.8250191	1.8014794	1.7831672	1.7654354	1.7470051
$T_{1_{(3\times i)}}$	1.8436974	1.8243224	1.8021671	1.7844837	1.7653484	1.7474456
$T_{1_{(4\times i)}}$	1.8441519	1.8246017	1.8026592	1.7838530	1.7646805	1.7473891
$T_{1_{(5\times i)}}$	1.8438134	1.8238088	1.8024890	1.7842300	1.7648372	1.7476352
$T_{1_{(6\times i)}}$	1.8440039	1.8240085	1.8030486	1.7839835	1.7650848	1.7468288
$T_{1_{(7\times i)}}$	1.8434289	1.8238919	1.8031204	1.7841418	1.7649879	1.7475854
$T_{1_{(8\times i)}}$	1.8437870	1.8239454	1.8048308	1.7838625	1.7647196	1.7475552
$T_{1_{(9\times i)}}$	1.8432011	1.8243763	1.8040768	1.7843554	1.7644894	1.7489131
$T_{1_{(10\times i)}}$	1.8436028	1.8242312	1.8036150	1.7840838	1.7641298	1.7474017
	Periodi T_2 presi 10 volte per ogni i-esimo valore di x_b (s) $T_{2_{(n\times1)}}, \ldots, T_{2_{(n\times6)}}$ (errore massimo $\pm 10^{-7}$ s)					
$T_{2_{(1\times i)}}$	1.8162160	1.8069800	1.7978242	1.7904099	1.7837065	1.7793795
$T_{2_{(2\times i)}}$	1.8162461	1.8074008	1.7982385	1.7919054	1.7839124	1.7790879
$T_{2_{(3\times i)}}$	1.8164208	1.8066094	1.7983828	1.7912305	1.7838475	1.7794034
$T_{2_{(4\times i)}}$	1.8162922	1.8068046	1.7984080	1.7911800	1.7840367	1.7794454
$T_{2_{(5\times i)}}$	1.8165907	1.8073671	1.7984383	1.7912973	1.7837570	1.7793693
$T_{2_{(6\times i)}}$	1.8161985	1.8071854	1.7986348	1.7911650	1.7840481	1.7794584
$T_{2_{(7\times i)}}$	1.8163087	1.8080697	1.7989685	1.7908471	1.7845240	1.7793767
$T_{2_{(8\times i)}}$	1.8162481	1.8068933	1.7985901	1.7912831	1.7840374	1.7792549
$T_{2_{(9\times i)}}$	1.8167033	1.8072342	1.7986484	1.7910748	1.7848659	1.7794661
$T_{2_{(10\times i)}}$	1.8170554	1.8069937	1.7986683	1.7911061	1.7842935	1.7793790