

Misura della densità di portatori di carica su sonda tramite effetto Hall^a

Francesco Polleri^{1, b} e Mattia Sotgia^{1, c}

(Gruppo A1)

¹Dipartimento di Fisica, Università degli Studi di Genova, I-16146 Genova, Italia

(Dated: presa dati 11–12 maggio 2022, consegnata in data 29 maggio 2022)

L'effetto Hall si verifica quando delle cariche transitano attraverso una corrente i che è perpendicolare ad un campo magnetico B , tali per cui si viene a creare una tensione lungo il terzo asse ortogonale. Questa tensione è direttamente proporzionale a i e B , ed inversamente proporzionale alla carica dei portatori e alla loro densità volumica η . Si vuole misurare la densità di portatori di carica di una sonda di bismuto ^{83}Bi realizzata per deposizione su film. Questa sonda è inserita nel traferro di un circuito magnetico, dove è sottoposta ad un campo B_t . La tensione V_H è misurata direttamente sulla sonda, ottenendo quindi una stima della densità volumica di portatori η .

I. INTRODUZIONE

Il passaggio di corrente attraverso un sottile strato conduttore comporta la presenza di una densità di corrente, attraverso il materiale stesso, $\vec{J} = nq\vec{v}_d$, dove \vec{v}_d è la velocità di drift (o di spostamento) dei portatori di carica, e η indica la densità di portatori di carica che contribuiscono alla corrente, per unità di volume, misurata in m^{-3} . Sottponendo la lamina conduttrice ad un campo magnetico sufficientemente uniforme [1] otteniamo che le cariche saranno quindi sottoposte ad una forza di Lorentz

$$\vec{F}_m = q\vec{v}_d \times \vec{B} = qv_d B \hat{u}_H, \quad (1)$$

che avrà come risultato diretto lo spostamento dei portatori di carica q nella direzione \hat{u}_H . Considerando un materiale conduttore come composto da cariche q (portatori di corrente) immersi in una distribuzione che possiamo considerare uniforme (secondo la fisica classica) di cariche $-q$ [2], possiamo allora osservare che dopo un certo tempo [3] si formerà un campo elettrico $\vec{E}_H = \vec{F}_H/q$ in direzione ortogonale a \vec{J} e \vec{B} , che comporterà quindi l'esistenza di una differenza di potenziale agli estremi della lamina definita come

$$V_H = \frac{i}{ew} \frac{1}{\eta} B, \quad (2)$$

dove w indica lo spessore della lamina che utilizziamo, che comunque nel nostro apparato sperimentale riusciamo ad avere molto inferiore alle altre dimensioni della sonda utilizzata, e dove $i = JA$ indica il flusso della densità di corrente, ovvero la corrente attraverso una sezione A . L'effetto misurato è noto come effetto Hall [4]. Misurando la tensione che si viene a creare sulla lamina, possiamo ottenere quindi una misura efficace della densità di portatori in funzione delle altre variabili del nostro setup.

I portatori di carica di un qualsiasi materiale classico sono elettroni, di carica $e = 1.602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ C}$ [5].

II. METODO Sperimentale

La misura dei portatori di carica viene effettuata utilizzando una sonda di Bi metallico costituita da un film sottile depositato su una lamina isolante. Il metodo di deposizione ci permette infatti di avere uno spessore w della lamina piuttosto basso, permettendoci quindi di stabilire in modo univoco quale è

la direzione perpendicolare rispetto al piano della sonda, e individuare quindi un sistema destrorso xyz come in figura 1b. Il sistema così individuato può essere utilizzato come riferimento per tutti i calcoli che verranno svolti.

La corrente infatti scorre nel verso negativo di \hat{e}_1 , che invece è rivolto nella direzione di \vec{J} coerentemente alla direzione della velocità di drift v_e degli elettroni. Tale corrente viene controllata attraverso un generatore calibrato per avere in uscita una corrente costante, ovvero indipendente dal carico, inferiore a 10 mA per permettere alla sonda di lavorare in condizioni di dissipazione dell'energia verificabili e per avere inoltre fluttuazioni rispetto al valore medio molto inferiori a quelle che si avrebbero collegando semplicemente il generatore da banco, che essendo costruito per un utilizzo generico può non essere la scelta migliore per l'uso specifico di cui necessitiamo. Il generatore di corrente infatti permette di avere un valore di corrente in uscita pari a $1.724(30) \times 10^{-3} \text{ A V}^{-1} \times (V_- - V_+)$, dove $V_- - V_+$ è la differenza di tensione fornita in ingresso al generatore di corrente (per la caratterizzazione del generatore di corrente vedere l'appendice A). Della tensione che forniamo al generatore facciamo una serie di misure insieme alla presa dati e dopo una trattazione di tipo statistico degli errori, troviamo un'incertezza sulla tensione di 2.6 mV e quindi una deviazione standard sulla corrente inferiore a 18 ppt [6].

Lungo \hat{e}_2 abbiamo invece il campo magnetico, che sarà realmente la caratteristica chiave dell'apparato. Le caratteristiche di questo campo magnetico sono tali da imporre alcune particolarità nella sua realizzazione. Decidiamo infatti di utilizzare un elettromagnete. Tale strumento ci permette di creare un campo magnetico con un modulo sufficientemente elevato per il tipo di misure che vogliamo effettuare, cosa che una semplice bobina (realizzata con materiali classici) non sarebbe stata in grado di fare. Realizzando un circuito magnetico con traferro possiamo inoltre ottenere una regione di spazio dove ad un primo ordine di approssimazione [7] possiamo ottenere un campo uniforme al centro e quindi trascurare gli effetti di bordo. Altra cosa importante è che il campo sia anche facilmente controllabile dalle correnti che scorrono nelle bobine avvolte intorno ai suoi bracci. Se il materiale con cui l'elettromagnete è stato realizzato è ferro dolce allora il suo ciclo di isteresi sarà stretto, per cui possiamo considerare che per valori non troppo elevati di corrente la risposta del campo magnetico sia lineare. Per evitare possibili problemi legati alla magnetizzazione residua decidiamo di effettuare la presa dati fornendo alle bobine dell'elettromagnete valori di corrente sempre decrescenti che,

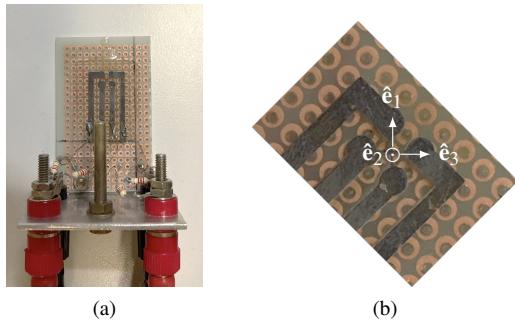


Figura 1. (a) Dettaglio della sonda utilizzata per misurare l'effetto Hall. In (b) indichiamo anche una terna destrorsa utilizzata per considerazioni fisiche.

partendo da un valore di 1.2 A/1.3 A, scendano sino ad avere corrente nulla [8] e poi crescano di nuovo in verso opposto [9].

Dalla legge di Hopkinson

$$\mathcal{F} = \oint \vec{H} \cdot d\ell = \Phi \oint \frac{d\vec{\ell}}{\mu S} = \Phi \mathcal{R}, \quad (3)$$

definita con

$$\mathcal{R} = \oint \frac{d\vec{\ell}}{\mu S} = \frac{\ell_m}{\mu S}$$

la riluttanza del circuito, possiamo interpretare il circuito magnetico come un circuito elettrico, e quindi, poiché la sezione dell'elettromagnete su tutto l'anello ferromagnetico è sempre la stessa, considerare il traferro come un elemento circuitle con riluttanza \mathcal{R}_t posto in serie. La riluttanza \mathcal{R}_e totale dell'elettromagnete quindi risulterà

$$\mathcal{R}_e = \mathcal{R}_f + \mathcal{R}_t = \frac{\ell_m}{\mu S} + \frac{\ell_t}{\mu_0 S} = \frac{\ell_m + \mu_r(\text{Fe})\ell_t}{\mu S}, \quad (4)$$

con ℓ_t lo spessore del traferro e ℓ_m la lunghezza del circuito magnetico (escluso lo spessore del traferro). Otteniamo quindi il campo magnetico che attraversa la sonda nel traferro

$$B = \frac{iN\mu}{\ell_m + \mu_r(\text{Fe})\ell_t}. \quad (5)$$

Per ottenere campi magnetici dell'ordine di 0.5 T, dall'equazione (5), osserviamo che il valore della corrente che deve essere fornita all'elettromagnete deve essere almeno nell'ordine di 1 A. Caratteristica fondamentale di questa corrente è la possibilità di modificarne il valore digitalmente senza dover manualmente cambiare il valore. Utilizzando quindi una interfaccia seriale di comunicazione possiamo mettere in comunicazione il sistema di controllo del setup sperimentale con il generatore di corrente e quindi controllare in modalità remota il valore della corrente che viene erogata dal generatore [10], compresa tra il valore di 0.2 A e il valore 1.3 A, spaziata a intervalli regolari di 0.1 A.

Eseguendo una prima stima del valore di V_H ci accorgiamo che però, dai valori di progetto ($B = 0.1$ T, che bene può rappresentare un valore minimo per il campo magnetico misurabile in laboratorio, una corrente inferiore a 10 mA e lo spessore della sonda $w = 4.50(12) \times 10^{-6}$ m), data la (2), corrisponde ad un valore di $V_H \approx 1.4 \times 10^{21} \text{ V m}^3/\eta$. Supposto

quindi un valore di $\eta \approx 10^{25}$ [11] otterremmo un valore di $V_H \approx 0.1$ mV. Questo è ancora un valore estremamente piccolo rispetto ai valori che è possibile misurare in modo accurato con i nostri strumenti. Risulta quindi necessario amplificare il valore della tensione in uscita di un fattore di almeno 200, per poter ottenere quindi valori della tensione ≈ 20 mV. Realizzando un amplificatore per strumentazioni su due stadi possiamo ottenere una amplificazione pari a 200 con due amplificazioni successive di circa 10 e 20. Per una caratterizzazione dettagliata dell'amplificatore per strumentazione si veda l'appendice B.

III. ANALISI EFFETTI REALI SULLA MISURA DI V_H

Nell'analisi fatta sino a ora abbiamo descritto quali sono, a livello teorico e ideale, i fattori che influenzano la nostra misura. Tuttavia vi sono alcuni effetti, che possiamo definire reali, che possono derivare dalla non idealità degli strumenti che stiamo utilizzando. In particolare facendo un primo test ci possiamo accorgere che pur impostando la corrente fornita alla sonda a zero, misuriamo comunque la presenza di una tensione di Hall. Questo però può essere spiegato dal fatto che nonostante siamo arrivati a porre l'offset dell'amplificatore per strumentazione il più possibile vicino ad essere nullo, tutto il resto dell'apparato che stiamo utilizzando presenta degli offset anch'esso. Quindi è come se stessimo commettendo un errore sistematico che però possiamo comunque controllare inserendo nella nostra analisi dati la presenza di una certa V_{offset} .

Un problema più complicato da trattare deriva dal fatto che però anche se impostiamo B a zero ($i_B = 0$ A, generatore spento), misuriamo ancora una V_H diversa da zero. Ciò risulta appunto più difficile da spiegare perché se il campo magnetico è nullo dovrebbe essere allora nullo anche l'effetto Hall. Questo problema è legato in particolare ad un difetto di costruzione della sonda. Infatti se la sonda è leggermente imprecisa nella costruzione, ovvero se i punti dove misuriamo V_H non sono precisamente ortogonali alla direzione di \vec{J} e della corrente, osserviamo che il campo elettrico che misuriamo attraverso V_H è in realtà diverso da zero in assenza di un campo magnetico B , perché quindi avremo una lettura della corrente che attraversa il circuito. Però si può anche osservare che questo contributo si comporta come B^2 e vogliamo quindi sfruttare questo fatto per trovare in modo quantitativo quanto questa tensione che chiamiamo V_{long} influenza effettivamente sulla nostra misura. Possiamo quindi immaginare di scrivere la tensione che misuriamo come

$$V_{\text{read}} = kB^2 + GV_H + V_{\text{offset}} = kB^2 + G \frac{i}{wen} B + V_{\text{offset}} \quad (6)$$

dove kB^2 rappresenta il contributo di V_{long} e GV_H la tensione di Hall amplificata. Questo comportamento come B^2 fa sì che, anche invertendo il verso del campo magnetico, il contributo di V_{long} non cambi. Possiamo allora considerare due casi.

Nel primo caso sia $B = B^+ > 0$ (ovvero il caso per cui $\vec{B} = B\hat{\mathbf{e}}_2$), allora

$$V_H^+ = kB^2 + G \frac{i}{wen} B^+ + V_{\text{offset}}; \quad (7)$$

Nel secondo caso sia $B = B^- < 0$ (ovvero il caso per cui $\vec{B} = -B\hat{\mathbf{e}}_2$), allora

$$V_H^- = kB^2 - G \frac{i}{wen} B^+ + V_{\text{offset}}. \quad (8)$$

Notiamo allora che confrontando la (7) e la (8) otteniamo che (nell'ipotesi che le due tensioni di offset siano uguali[12]) la differenza

$$V_H^+ - V_H^- = 2 \frac{GiB^+}{wen} \quad (9)$$

ci permette di ottenere una misura di V_H effettivamente libera dal termine in B^2 , con anche il vantaggio di cancellare l'effetto di un offset sulla tensione.

Allo stesso modo, confrontando di nuovo la (7) e la (8) troviamo che

$$V_H^+ + V_H^- = 2(V_{\text{offset}} + k(B^+)^2). \quad (10)$$

Tale relazione ci permette quindi di poter fare una misura quantitativa del valore di k e perciò anche dell'effetto di V_{long} sulla nostra misura.

IV. VERIFICA DEL SEGNO DEI PORTATORI DI CARICA

Abbiamo considerato fino ad ora i portatori di carica aventi la stessa carica dell'elettrone e , senza però compiere nessuna ipotesi sul segno dei portatori stessi. Questo dato può unicamente essere ricavato eseguendo correttamente delle considerazioni sull'orientamento nello spazio dei campi \vec{B} e \vec{J} e sull'orientamento di E_H essendo misurato il potenziale V_H .

Dati completi e codice sorgente

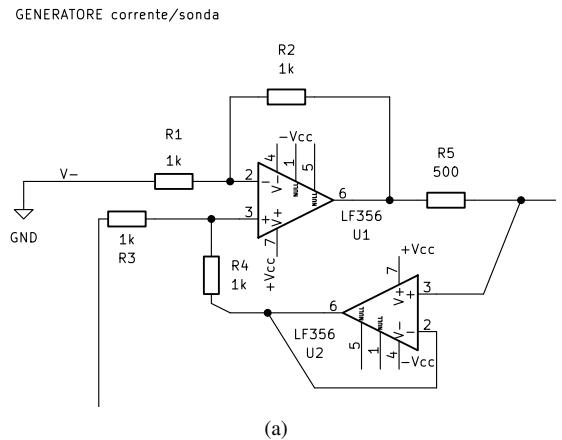
Tutti i dati completi a supporto dei grafici, e il relativo codice, sono visualizzabili su <https://github.com/mattiasotgia/Lab2>. L'analisi dati viene eseguita attraverso diversi notebook (<https://jupyter.org/>) scritti in C++/python basandosi su framework pubblici: ROOT, per la realizzazione dei grafici e il fit dei modelli (<https://root.cern/>), matplotlib, numpy e altri framework pubblici per l'analisi dei dati e la loro visualizzazione (<https://matplotlib.org/>, <https://numpy.org/>). I dati sono raccolti su file ROOT organizzati in dataset tabulari. Sono utilizzate anche le librerie uproot e Awkward Array (<https://uproot.readthedocs.io/>, <https://awkward-array.org/>).

Appendice A: Caratterizzazione del generatore di corrente

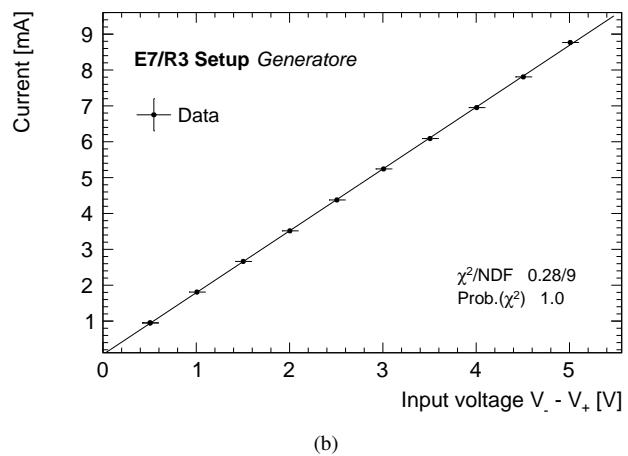
In figura 2a è riportato lo schema circuitale del generatore di corrente. Tale circuito è tale per cui data una differenza di potenziale fornita al circuito come $V^- - V^+$ si ha in uscita una corrente $i_{\text{out}} = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{V^- - V^+}{R_s}$. Siccome abbiamo previsto che la tensione che forniamo al circuito è pari a 5 V e vogliamo che la corrente che va alla sonda non superi 10 mA allora il fattore $G_g = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{R_s}$ dovrà essere minore di 2 mA V^{-1} . Scegliamo quindi $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ e $R_s = 500 \Omega$. Per verificare se effettivamente il fattore G_g sia pari a 1/500 possiamo raccogliere una serie di coppie valori di i_{out} e $V^- - V^+$ e realizzare un fit (figura 2b) secondo la funzione $i_{\text{out}} = G_g \cdot (V^- - V^+) + i_0$ dove sceglieremo come parametri di fit G_g e i_0 . Otteniamo che

$$G_g = 1.724(30) \text{ mA V}^{-1}$$

$$i_0 = 0.067(89) \text{ A.}$$



(a)



(b)

Figura 2. (a) Schema del circuito del generatore di corrente. L'uscita dalla resistenza R_5 porta la corrente di circa 10 mA alla sonda. (b) Caratterizzazione del generatore di corrente.

Il valore teorico di G_g è $1.78(12) \text{ mA V}^{-1}$ per cui troviamo che è compatibile con il valore ricavato dal fit e troviamo anche che il valore di i_0 è compatibile con zero, per cui possiamo dire che non c'è un offset sulla corrente che mandiamo alla sonda. Un ulteriore test fatto è stato quello di mantenere costante il valore di $V^- - V^+$ e verificare che, cambiando il carico in uscita dal generatore, la corrente rimane sempre la stessa.

Appendice B: Caratterizzazione dell'amplificatore operazionale per strumentazione

In figura 3a è riportato lo schema circuitale dell'amplificatore per strumentazione che è caratterizzato da una funzione di trasferimento

$$V_{\text{out}} = G_{\text{diff}} \cdot (V_{\text{non-inv}} - V_{\text{inv}}) + G_{\text{CM}} \cdot V_{\text{CM}} + V_{\text{offset}} \quad (\text{B1})$$

La parte predominante di V_{out} è data da $G_{\text{diff}}(V_{\text{non-inv}} - V_{\text{inv}})$ dove G_{diff} , se $R_b = R'_b$, $R_c = R'_c$ e $R_d = R'_d$, è pari a $\frac{R_d}{R_c} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{R_b}{R_a}\right)$. Siccome vogliamo amplificare il segnale in uscita dalla sonda di circa 200 volte scegliamo resistenze da $1 \text{ k}\Omega$ per R_a , R_c e da $10 \text{ k}\Omega$ per R_b e R_d . Per caratterizzare l'amplificatore è necessario trovare quali sono gli effettivi valori di V_{offset} , G_{CM} e G_{diff} . Per trovare V_{offset} fissiamo $V_{\text{non-inv}} = V_{\text{inv}} = 0$ e osserviamo che il valore misurato

è nell'ordine dei mV. Per far diminuire ancora di più questo valore possiamo utilizzare un trimmer (una resistenza variabile che corregge le differenze di impedenza presenti tra i due amplificatori operazionali del primo stadio) presente sul circuito stampato in modo che V_{offset} sia più prossimo possibile a zero. Per trovare invece G_{CM} impostiamo $V_{\text{non-inv}} = V_{\text{inv}} \neq 0$ e raccogliamo una serie di coppie di valori ($V_{\text{non-inv/inv}}, V_{\text{out}}$) realizzando un fit secondo la funzione $V_{\text{out}} = G_{\text{CM}} \cdot V + V_0$, dove G_{CM} e V_0 sono i parametri. Dal fit (figura 3b) otteniamo

$$G_{\text{CM}} = -1.12(20) \times 10^{-2}$$

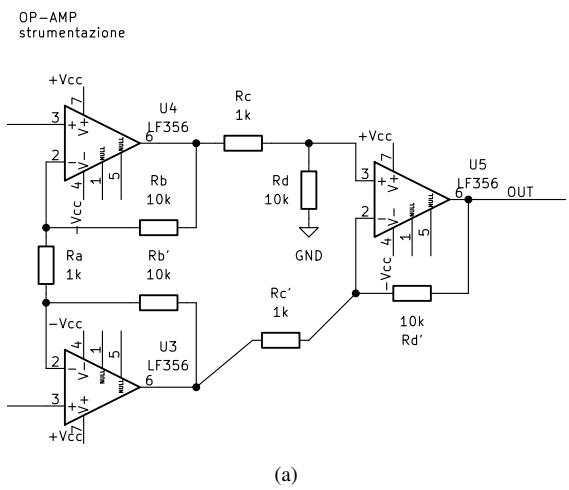
$$V_0 = 4.5(45) \times 10^{-3} \text{ V}$$

Notiamo che come ci aspettavamo V_0 è compatibile con zero. Per trovare G_{diff} raccogliamo alcune coppie di valori ($V_{\text{non-inv}} - V_{\text{inv}}, V_{\text{out}}$) e, facendo un fit (figura 3c) secondo la funzione $V_{\text{out}} = G_{\text{diff}} \cdot (V_{\text{non-inv}} - V_{\text{inv}}) + V_0$, otteniamo

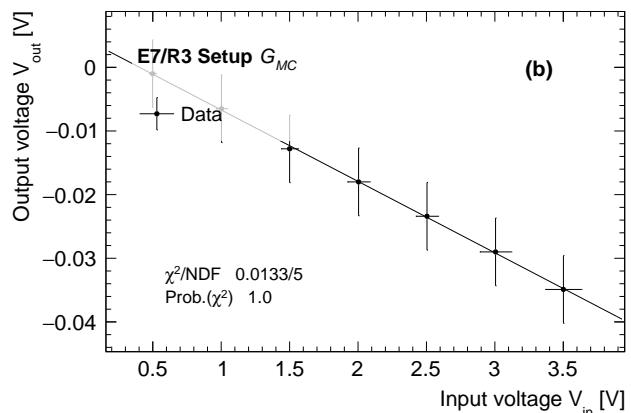
$$G_{\text{diff}} = 2.07(24) \times 10^2$$

$$V_0 = -1.49(87) \text{ V}$$

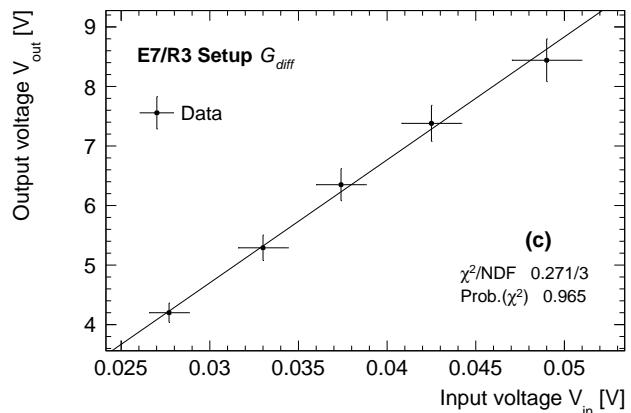
Il valore teorico di G_{diff} ottenuto dai valori di progetto e dalle misure delle resistenze risulta essere $2.09(10) \times 10^2$, che osserviamo essere perfettamente compatibile con il valore che abbiamo ottenuto.



(a)



(b)



(c)

Figura 3. (a) Schema circuitale dell'amplificatore operazionale per strumentazione. Analisi del guadagno di modo comune (b) e del guadagno differenziale (c) dell'amplificatore operazionale per strumentazione.

- [1] Il campo magnetico deve essere posto ortogonalmente alla densità di corrente \vec{J} , evitando di dover effettuare anche misurazioni dell'angolo α di orientamento di \vec{B} rispetto a \vec{J} .
- [2] Stiamo considerando il valore di q in termini assoluti, non ponendoci quindi problemi sul segno dei portatori di un conduttore. Un conduttore è però elettricamente neutro, quindi a dei portatori di carica q devono corrispondere delle cariche $-q$ che bilancino complessivamente elettricamente la carica.
- [3] Definiamo questo tempo *tempo caratteristico*, e osserviamo che è sufficientemente piccolo da poter considerare questo processo praticamente istantaneo.
- [4] E. H. Hall, On a new action of the magnet on electric currents, *American Journal of Mathematics* **2**, 287 (1879).
- [5] Valore esatto, fonte BIPM, *defining constants*: <https://www.bipm.org/en/measurement-units/si-defining-constants>, valore risultato di [13].
- [6] Ottieniamo una corrente di (8.62 ± 0.15) mA.
- [7] Consideriamo le due superfici sufficientemente grandi e realizzando lo spessore del traferro $\ell_t \ll D_j$, dove con D_j indichiamo una tra le due dimensioni del nucleo ferromagnetico.
- [8] Nei dati raccolti non abbiamo mai considerato valori della corrente inferiori a 200 mA.
- [9] Quando la corrente arriva al valore minimo, il sistema entra in blocco e attende che manualmente vengano invertiti i cavi che portano la corrente all'elettromagnete.
- [10] Per la connessione seriale è necessaria la conversione di una tensione 0 V/5 V (uscita seriale del sistema di controllo) a 12 V/-12 V (ingresso seriale del generatore PL303QMD-P).
- [11] Se utilizzassimo il valore di $\eta_{\text{Cu}} \simeq 10^{28} \text{ m}^{-3}$ otterremmo un valore di V_H troppo piccolo per poter effettivamente riuscire a misurarne il valore ($\simeq 1 \mu\text{V}$) anche considerandone una amplificazione, dove invece il Bi ha un valore $\eta_{\text{Bi}} \leq 10^{25} \text{ m}^{-3}$, che porta 3 ordini di grandezza in meno nel conto.

- [12] Non troviamo un valido motivo per cui le due tensioni di offset non dovrebbero esserlo in quanto non dipendendo teoricamente in alcun modo dal campo magnetico a cui è sottoposta la sonda.
- [13] D. B. Newell, F. Cabiati, J. Fischer, K. Fujii, S. G. Karshenboim, H. S. Margolis, E. de Mirandés, P. J. Mohr, F. Nez, K. Pachucki, T. J. Quinn, B. N. Taylor, M. Wang, B. M. Wood, and Z. Zhang, The CODATA 2017 values of \hbar , e , k and N_A for the revision of the SI, *Metrologia* **55**, L13 (2018).