

# Misura della densità di portatori di carica su sonda tramite effetto Hall<sup>a</sup>

Francesco Polleri<sup>1,b</sup> e Mattia Sotgia<sup>1,c</sup>

(Gruppo A1)

<sup>1</sup>Dipartimento di Fisica, Università degli Studi di Genova, I-16146 Genova, Italia

(Dated: presa dati 11–12 maggio 2022, consegnata in data 1 giugno 2022)

L'effetto Hall si verifica quando delle cariche transitano attraverso una corrente  $i$  che è perpendicolare ad un campo magnetico  $B$ , tali per cui si viene a creare una tensione lungo il terzo asse ortogonale. Questa tensione è direttamente proporzionale a  $i$  e  $B$ , ed inversamente proporzionale alla carica dei portatori e alla loro densità volumica  $\eta$ . Si vuole misurare la densità di portatori di carica di una sonda di bismuto  $^{83}\text{Bi}$  realizzata per deposizione su film. Questa sonda è inserita nel traferro di un circuito magnetico, dove è sottoposta ad un campo  $B_t$ . La tensione  $V_H$  è misurata direttamente sulla sonda, ottenendo quindi una stima della densità volumica di portatori  $\eta = 1.31(18) \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$ . Confrontando con precedenti osservazioni sperimentali (V) troviamo che il risultato è superiore di circa un fattore 10 rispetto ad altri risultati, e con una significatività statistica oltre  $5\sigma$ .

## I. INTRODUZIONE

Il passaggio di corrente attraverso un sottile strato conduttore comporta la presenza di una densità di corrente, attraverso il materiale stesso,  $\vec{J} = nq\vec{v}_d$ , dove  $\vec{v}_d$  è la velocità di drift (o di spostamento) dei portatori di carica, e  $n$  indica la densità di portatori di carica che contribuiscono alla corrente, per unità di volume, misurata in  $\text{m}^{-3}$ . Sottponendo la lamina conduttrice ad un campo magnetico sufficientemente uniforme [1] otteniamo che le cariche saranno quindi sottoposte ad una forza di Lorentz

$$\vec{F}_m = q\vec{v}_d \times \vec{B} = qv_d B \hat{u}_H, \quad (1)$$

che avrà come risultato diretto lo spostamento dei portatori di carica  $q$  nella direzione  $\hat{u}_H$ . Considerando un materiale conduttore come composto da cariche  $q$  (portatori di corrente) immersi in una distribuzione che possiamo considerare uniforme (secondo la fisica classica) di cariche  $-q$  [2], possiamo allora osservare che dopo un certo tempo [3] si formerà un campo elettrico  $\vec{E}_H = \vec{F}_H/q$  in direzione ortogonale a  $\vec{J}$  e  $\vec{B}$ , che comporterà quindi l'esistenza di una differenza di potenziale agli estremi della lamina definita come

$$V_H = \frac{i}{ew\eta} B, \quad (2)$$

dove  $w$  indica lo spessore della lamina che utilizziamo, che comunque nel nostro apparato sperimentale riusciamo ad avere molto inferiore alle altre dimensioni della sonda utilizzata, e dove  $i = JA$  indica il flusso della densità di corrente, ovvero la corrente attraverso una sezione  $A$ . L'effetto misurato è noto come effetto Hall [4]. Misurando la tensione che si viene a creare sulla lamina, possiamo ottenere quindi una misura efficace della densità di portatori in funzione delle altre variabili del nostro setup.

I portatori di carica di un qualsiasi materiale classico sono elettroni, di carica  $e = 1.602 176 634 \times 10^{-19} \text{ C}$  [5].

## II. METODO Sperimentale

La misura dei portatori di carica viene effettuata utilizzando una sonda di Bi metallico costituita da un film sottile depositato su una lamina isolante. Il metodo di deposizione ci permette infatti di avere uno spessore  $w$  della lamina piuttosto basso,

permettendoci quindi di stabilire in modo univoco quale è la direzione perpendicolare rispetto al piano della sonda, e individuare quindi un sistema destrorso  $xyz$  come in figura 1b. Il sistema così individuato può essere utilizzato come riferimento per tutti i calcoli che verranno svolti.

La corrente infatti scorre nel verso negativo di  $\hat{e}_1$ , che invece è rivolto nella direzione di  $\vec{J}$  coerentemente alla direzione della velocità di drift  $v_e$  degli elettroni. Tale corrente viene controllata attraverso un generatore calibrato per avere in uscita una corrente costante, ovvero indipendente dal carico, inferiore a 10 mA per permettere alla sonda di lavorare in condizioni di dissipazione dell'energia verificabili e per avere inoltre fluttuazioni rispetto al valore medio della corrente molto inferiori a quelle che si avrebbero collegando semplicemente il generatore da banco, che essendo costruito per un utilizzo generico può non essere la scelta migliore per l'uso specifico di cui necessitiamo. Il generatore di corrente infatti permette di avere un valore di corrente in uscita pari a  $1.724(30) \times 10^{-3} \text{ A V}^{-1} \times (V_- - V_+)$ , dove  $V_- - V_+$  è la differenza di tensione fornita in ingresso al generatore di corrente (per la caratterizzazione del generatore di corrente vedere l'appendice A). Della tensione che forniamo al generatore facciamo una serie di misure insieme alla presa dati e dopo una trattazione di tipo statistico degli errori, troviamo un'incertezza sulla tensione di 2.6 mV e quindi una deviazione standard sulla corrente inferiore a 18 ppt [6].

Lungo  $\hat{e}_2$  abbiamo invece il campo magnetico, che è realmente l'elemento chiave dell'apparato. Le caratteristiche di questo campo magnetico sono tali da imporre alcune particolarità nella sua realizzazione. Decidiamo infatti di utilizzare un elettromagnete. Tale strumento ci permette di creare un campo magnetico con un modulo sufficientemente elevato per il tipo di misure che vogliamo effettuare, cosa che una semplice bobina (realizzata con materiali classici) non sarebbe stata in grado di fare. Realizzando un circuito magnetico con traferro possiamo inoltre ottenere una regione di spazio dove ad un primo ordine di approssimazione [7] possiamo ottenere un campo uniforme al centro e quindi trascurare gli effetti di bordo. Altra cosa importante è che il campo sia anche facilmente controllabile dalle correnti che scorrono nelle bobine avvolte intorno ai suoi bracci. Se il materiale con cui l'elettromagnete è stato realizzato è ferro dolce allora il suo ciclo di isteresi sarà stretto, per cui possiamo considerare che per valori non troppo elevati di corrente la risposta del campo magnetico sia lineare. Per evitare possibili problemi legati alla magnetizzazione resi-

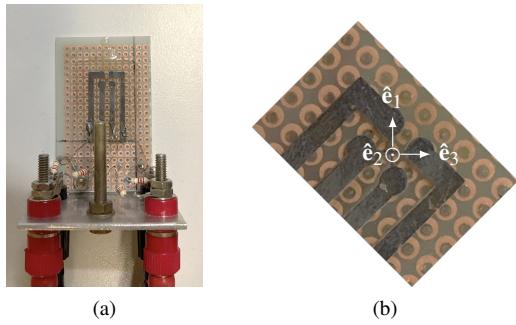


Figura 1. (a) Dettaglio della sonda utilizzata per misurare l'effetto Hall. In (b) indichiamo anche una terna destrorsa utilizzata per considerazioni fisiche.

dua decidiamo di effettuare la presa dati fornendo alle bobine dell'elettromagnete valori di corrente sempre decrescenti che, partendo da un valore di 1.2 A/1.3 A, scendano sino ad avere corrente nulla [8] e poi crescano di nuovo nel verso opposto [9].

Dalla legge di Hopkinson

$$\mathcal{F} = \oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \Phi \oint \frac{d\vec{\ell}}{\mu S} = \Phi \mathcal{R}, \quad (3)$$

definita con

$$\mathcal{R} = \oint \frac{d\vec{\ell}}{\mu S} = \frac{\ell_m}{\mu S}$$

la riluttanza del circuito, possiamo interpretare il circuito magnetico come un circuito elettrico, e quindi, poiché la sezione  $S$  dell'elettromagnete su tutto l'anello ferromagnetico è sempre la stessa, possiamo considerare il traferro come un elemento circuitale con riluttanza  $\mathcal{R}_t$  posto in serie. La riluttanza  $\mathcal{R}_e$  totale dell'elettromagnete quindi risulterà

$$\mathcal{R}_e = \mathcal{R}_f + \mathcal{R}_t = \frac{\ell_m}{\mu_0 S} + \frac{\ell_t}{\mu_0 S} = \frac{\ell_m + \mu_r(\text{Fe})\ell_t}{\mu_0 S}, \quad (4)$$

con  $\ell_t$  lo spessore del traferro e  $\ell_m$  la lunghezza del circuito magnetico (escluso lo spessore del traferro). Otteniamo quindi il campo magnetico che attraversa la sonda nel traferro

$$B = \frac{iN\mu}{\ell_m + \mu_r(\text{Fe})\ell_t}. \quad (5)$$

Per ottenere campi magnetici dell'ordine di 0.5 T, dall'equazione (5), osserviamo che il valore della corrente che deve essere fornita all'elettromagnete deve essere almeno nell'ordine di 1 A. Caratteristica fondamentale di questa corrente è la possibilità di modificarne il valore digitalmente senza doverlo cambiare manualmente. Utilizzando quindi una interfaccia seriale di comunicazione possiamo mettere in comunicazione il sistema di controllo del setup sperimentale con il generatore di corrente e quindi controllare in modalità remota il valore della corrente che viene erogata dal generatore [10], compresa tra il valore di 0.2 A e il valore 1.3 A, spaziata a intervalli regolari di 0.1 A.

Eseguendo una prima stima del valore di  $V_H$  ci accorgiamo che però, dai valori di progetto ( $B = 0.1$  T, che bene può rappresentare un valore minimo per il campo magnetico misurabile in laboratorio, una corrente inferiore a 10 mA e lo

spessore della sonda  $w = 4.50(12) \times 10^{-6}$  m), data la (2), corrisponde ad un valore di  $V_H \approx 1.4 \times 10^{21} \text{ V m}^3/\eta$ . Supposto quindi un valore di  $\eta \approx 10^{25}$  [11] otterremmo un valore di  $V_H \approx 0.1$  mV. Questo è ancora un valore estremamente piccolo rispetto ai valori che è possibile misurare in modo accurato con i nostri strumenti. Risulta quindi necessario amplificare il valore della tensione in uscita di un fattore di almeno 200, per poter ottenere quindi valori della tensione  $\approx 20$  mV. Realizzando un amplificatore per strumentazioni su due stadi possiamo ottenere una amplificazione pari a 200 con due amplificazioni successive di circa 10 e 20. Per una caratterizzazione dettagliata dell'amplificatore per strumentazione si veda l'appendice B.

### III. ANALISI EFFETTI REALI SULLA MISURA DI $V_H$

Nell'analisi fatta sino a ora abbiamo descritto quali sono, a livello teorico e ideale, i fattori che influenzano la nostra misura. Tuttavia vi sono alcuni effetti, che possiamo definire reali, che possono derivare dalla non idealità degli strumenti che stiamo utilizzando. In particolare facendo un primo test ci possiamo accorgere che pur impostando la corrente fornita alla sonda a zero, misuriamo comunque la presenza di una tensione di Hall. Questo però può essere spiegato dal fatto che nonostante siamo arrivati a porre l'offset dell'amplificatore per strumentazione il più possibile vicino ad essere nullo, tutto il resto dell'apparato che stiamo utilizzando presenta degli offset anch'esso. Quindi è come se stessimo commettendo un errore sistematico che però possiamo comunque controllare inserendo nella nostra analisi dati la presenza di una certa  $V_H^{\text{offset}}$ .

Un problema più complicato da trattare deriva dal fatto che però anche se impostiamo  $B$  a zero ( $i_B = 0$  A, generatore spento), misuriamo ancora una  $V_H$  diversa da zero. Ciò risulta appunto più difficile da spiegare perché se il campo magnetico è nullo dovrebbe essere allora nullo anche l'effetto Hall. Questo problema è legato in particolare ad un difetto di costruzione della sonda. Infatti se la sonda è leggermente imprecisa nella costruzione, ovvero se i punti dove misuriamo  $V_H$  non sono precisamente ortogonali alla direzione di  $\vec{J}$  e della corrente, osserviamo che il campo elettrico che misuriamo attraverso  $V_H$  è in realtà diverso da zero in assenza di un campo magnetico  $B$ , perché infatti avremo una lettura della corrente che attraversa il circuito. Però si può anche osservare che questo contributo si comporta come  $B^2$  e vogliamo quindi sfruttare questo fatto per trovare in modo quantitativo quanto questa tensione che chiamiamo  $V_{\text{long}}$  influenza effettivamente sulla nostra misura. Possiamo quindi immaginare di scrivere la tensione che misuriamo come

$$V_{\text{read}} = kB^2 + GV_H + V_{\text{offset}} = kB^2 + G \frac{i}{we\eta} B + V_{\text{offset}} \quad (6)$$

dove  $kB^2$  rappresenta il contributo di  $V_{\text{long}}$  e  $GV_H$  la tensione di Hall amplificata. Questo comportamento come  $B^2$  fa sì che, anche invertendo il verso del campo magnetico, il contributo di  $V_{\text{long}}$  non cambi. Possiamo allora considerare due casi.

Nel primo caso sia  $B = B^+ > 0$  (ovvero il caso per cui  $\vec{B} = B\hat{e}_2$ ), allora

$$V_H^+ = kB^2 + G \frac{i}{we\eta} B^+ + V_{\text{offset}}; \quad (7)$$

Nel secondo caso sia  $B = B^- < 0$  (ovvero il caso per cui  $\vec{B} = -B\hat{e}_2$ ), allora

$$V_H^- = kB^2 - G \frac{i}{w\eta} B^+ + V_{\text{offset}}. \quad (8)$$

Notiamo allora che confrontando la (7) e la (8) otteniamo che (nell'ipotesi che le due tensioni di offset siano uguali [12]) la differenza

$$V_H = \frac{V_H^+ - V_H^-}{2} = \frac{GiB}{w\eta} \quad (9)$$

ci permette di ottenere una misura di  $V_H$  effettivamente libera dal termine in  $B^2$ , con anche il vantaggio di cancellare l'effetto di un offset sulla tensione.

Allo stesso modo, confrontando di nuovo la (7) e la (8) troviamo che

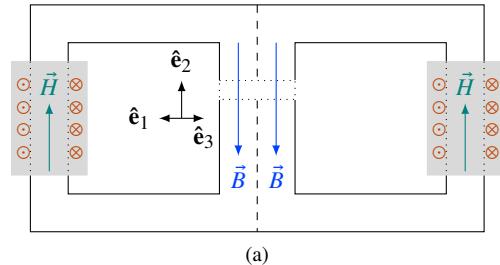
$$V_{\text{long}} = \frac{V_H^+ + V_H^-}{2} = \left( V_{\text{offset}} + k(B^+)^2 \right). \quad (10)$$

Tale relazione ci permette quindi di poter fare una misura quantitativa del valore di  $k$  e perciò anche dell'effetto di  $V_{\text{long}}$  sulla nostra misura.

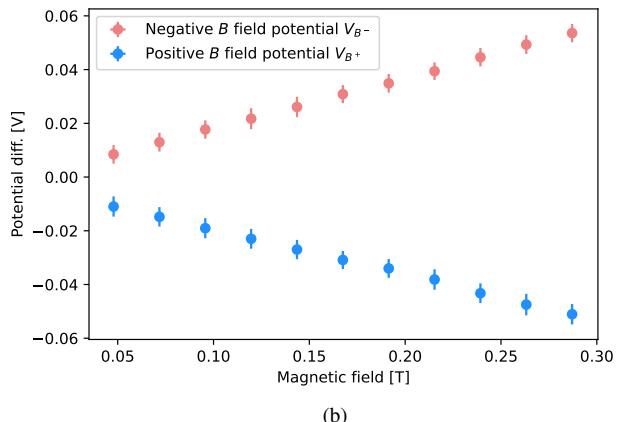
Tutto ciò rende quindi la presa dati più complicata in quanto dobbiamo dunque raccogliere le misure di tensione con e senza la corrente passante per la sonda, in modo da poter misurare  $V_{\text{offset}}$ , e con il campo magnetico rivolto in un verso e poi in quello opposto per trovare invece  $V_{\text{long}}$ . Quindi, come già detto in precedenza, realizziamo la presa dati impostando la corrente che forniamo all'elettromagnete da 1.2 A sino a 0.2 A a intervalli di 0.1 A per poi invertirne il verso, invertendo quindi anche il verso di  $B$ , andando da  $-0.2$  A a  $-1.2$  A e per ognuno di questi valori raccogliamo  $N$  misure con e senza la corrente attraverso la sonda.

#### IV. VERIFICA DEL SEGNO DEI PORTATORI DI CARICA

Abbiamo considerato fino ad ora i portatori di carica aventi la stessa carica dell'elettrone  $e$ , senza però compiere nessuna ipotesi sul segno dei portatori stessi. Questo dato può unicamente essere ricavato eseguendo correttamente delle considerazioni sull'orientamento nello spazio dei campi  $\vec{B}$  e  $\vec{J}$  e sull'orientamento di  $E_H$  essendo misurato il potenziale  $V_H$ . Consideriamo sempre il sistema ortonormale della figura 1b, allora abbiamo che la corrente spinge i portatori di carica lungo la direzione positiva di  $\hat{e}_1$ . Il secondo fattore che entra in gioco è quindi il campo magnetico, ovvero il suo orientamento, nel determinare come sarà fatta la forza di Lorentz (1). Questo orientamento possiamo ottenerlo conoscendo in quale verso scorre la corrente all'interno della bobina dell'elettromagnete. Osserviamo però che, nel caso in cui la corrente scorra in senso antiorario nelle bobine (viste dall'alto) allora il campo magnetico sarà diretto verso l'alto all'interno delle bobine e, per continuità, diretto verso il basso all'interno del traferro. Siamo quindi nel caso per cui  $B = B^-$ , ovvero  $\vec{B} = -B\hat{e}_2$ . In questo caso allora la forza di Lorentz sarà quindi proporzionale a  $-\hat{e}_3$ . Ipotizzando che le nostre cariche siano negative, dovremmo osservare allora che aumentando il valore del campo magnetico il valore della tensione di Hall diventa mano a mano minore (dovremmo effettivamente osservare un valore



(a)



(b)

Figura 2. (a) Schema dell'elettromagnete utilizzato per generare il campo magnetico  $B$  (nell'esempio si vede la configurazione per ottenere  $B^-$ ). (b) Plot dei valori di tensione misurati amplificati ai capi della sonda rispetto al valore del campo magnetico generato dall'elettromagnete. Si può osservare il comportamento atteso per cui applicando un campo magnetico positivo o negativo, la tensione risulta essere positiva o negativa, coerentemente con la teoria.

della tensione negativo, che però, per quanto detto in III, non osserviamo, avendo una tensione longitudinale molto maggiore dell'effetto di Hall). Viceversa se invece consideriamo la corrente che scorre nelle bobine diretta come  $\vec{B} = B\hat{e}_2$  allora otterremmo che  $\vec{F}_m \propto \hat{e}_3$ , quindi osservando, sempre nell'ipotesi di cariche negative, una tensione lungo  $\hat{e}_3$  positiva. Dai dati raccolti sperimentalmente osserviamo (figura 2b) un comportamento coerente con quanto previsto teoricamente, quindi possiamo confermare che i portatori di carica presentano segno negativo, trattandosi quindi di elettroni.

#### V. CALCOLO DI $\eta$ E CONCLUSIONI

Considerando una sonda di spessore  $w = 4.50(12) \mu\text{m}$  sottoposta al campo magnetico generato dall'elettromagnete descritto sopra, alimentato con correnti da 0.2 T a 1.2 T, possiamo allora ottenere una misura della tensione  $V_{G,H}$  lungo  $\hat{e}_3$  sul rivelatore. Se eliminiamo la componente quadratica  $kb^2$  dalla relazione (6), allora dall'eq. (2), considerando  $V_{G,H} = V_{G,H}(B)$ , possiamo ricavare, da un modello lineare, il coefficiente di proporzionalità  $C$  che contiene al suo interno tutte le informazioni legate alle caratteristiche della sonda, alla corrente  $i$  e alla densità di portatori  $\eta$ , oltre che al guadagno dell'amplificatore. In figura 3 i dati sono rappresentati già in seguito all'eliminazione della componente quadratica  $V_\ell$ , che viene invece isolata nel grafico sottostante per mettere in

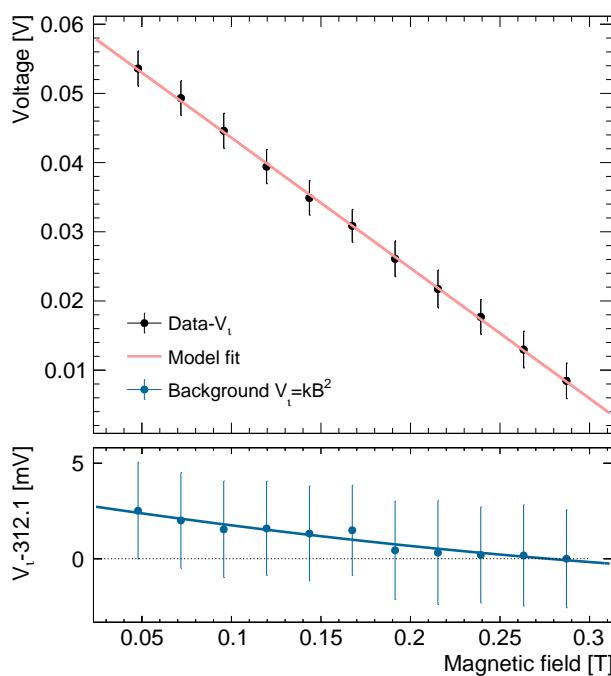


Figura 3. Dipendenza lineare della tensione di Hall (rappresentata con un guadagno di  $G_{\text{diff}} = 2.07(24) \times 10^2$ ) dal campo magnetico prodotto dall'elettromagnete. I valori di tensione sono ottenuti eliminando la componente quadratica, che viene isolata sotto (i dati per  $V_\ell$  sono riscalati portando il valore più basso a zero). Possiamo infatti osservare un andamento quadratico della componente di background  $V_\ell$  che permette quindi anche di stimare il parametro  $k$ .

evidenza l'andamento quadratico.

Adattando il modello lineare (9) possiamo allora ricavare il coefficiente  $C$ , e quindi, noti i parametri di costruzione della sonda e del setup sperimentale (raccolti in tabella I) possiamo calcolare il valore

$$\eta = 1.31(18) \times 10^{25} \text{ m}^{-3}. \quad (11)$$

Osserviamo però che dalla figura 3 la tensione di Hall sembra essere decrescente all'aumentare di  $B$  nel traferro. Questo è solamente legato a come si sono ricavati i dati privati della componente  $kB^2$ , infatti, invertendo i segni nella relazione (9) otterremmo che il potenziale risulta crescere (la differenza di potenziale è effettivamente presa a meno di una costante, che quindi può far cambiare il segno dei dati ottenuti).

Passando invece a considerare il termine  $kB^2$  possiamo innanzitutto osservare che questo contributo è decisamente rilevante, tanto da fare sì che sia con  $B^+$  sia con  $B^-$  i valori misurati di tensione fossero positivi per tutti i valori del campo magnetico. Possiamo quindi ipotizzare che il difetto legato alla forma della sonda non sia trascurabile, o che comunque una variazione molto piccola (solo qualche decina di  $\mu\text{m}$ ) porti ad osservare una tensione molto maggiore dell'effetto di Hall (un valore medio di circa 320 mV rispetto ad una variazione totale legata al fenomeno di Hall di  $\approx 50$  mV). Modellando una curva parametrica di secondo ordine sui dati ottenuti isolando il termine  $kB^2$  otteniamo un valore del coefficiente

$$k = 11.9(38) \text{ V T}^{-2}. \quad (12)$$

Ritornando ad analizzare infine il valore trovato di  $\eta$  in (11) allora possiamo sicuramente dire che tale valore risulta essere piuttosto sensato, perché otteniamo un valore che si trova intorno agli ordini di grandezza di altre densità di portatori di altri elementi come già detto in [11]. Allo stesso tempo però confrontando il valore ottenuto da altri risultati scientifici [14–16] con  $\eta$  calcolato in (11), osserviamo che, seppur solo di solo un ordine di grandezza, non risultano essere compatibili.

#### Appendice A: Caratterizzazione del generatore di corrente

In figura A4a è riportato lo schema circuitale del generatore di corrente. Tale circuito è tale per cui data una differenza di potenziale fornita al circuito come  $V^- - V^+$  si ha in uscita una corrente  $i_{\text{out}} = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{V^- - V^+}{R_5}$ . Siccome abbiamo previsto che la tensione che forniamo al circuito è pari a 5 V e vogliamo che la corrente che va alla sonda non superi 10 mA allora il fattore  $G_g = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{R_5}$  dovrà essere minore di  $2 \text{ mA V}^{-1}$ . Scegliamo quindi  $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$  e  $R_5 = 500 \Omega$ . Per verificare se effettivamente il fattore  $G_g$  sia pari a 1/500 possiamo raccogliere una serie di coppie valori di  $i_{\text{out}}$  e  $V^- - V^+$  e realizzare un fit (figura A4b) secondo la funzione  $i_{\text{out}} = G_g \cdot (V^- - V^+) + i_0$  dove scegliamo come parametri di fit  $G_g$  e  $i_0$ . Otteniamo che

$$G_g = 1.724(30) \text{ mA V}^{-1}$$

$$i_0 = 0.067(89) \text{ A}.$$

Il valore teorico di  $G_g$  è  $1.78(12) \text{ mA V}^{-1}$  per cui troviamo che è compatibile con il valore ricavato dal fit e troviamo anche che il valore di  $i_0$  è compatibile con zero, per cui possiamo dire che non c'è un offset sulla corrente che mandiamo alla sonda. Un ulteriore test fatto è stato quello di mantenere costante il valore di  $V^- - V^+$  e verificare che, cambiando il carico in uscita dal generatore, la corrente rimane sempre la stessa.

#### Appendice B: Caratterizzazione dell'amplificatore operazionale per strumentazione

In figura B5a è riportato lo schema circuitale dell'amplificatore per strumentazione che è caratterizzato da una funzione di trasferimento

$$V_{\text{out}} = G_{\text{diff}} \cdot (V_{\text{non-inv}} - V_{\text{inv}}) + G_{\text{CM}} \cdot V_{\text{CM}} + V_{\text{offset}} \quad (\text{B1})$$

La parte predominante di  $V_{\text{out}}$  è data da  $G_{\text{diff}}(V_{\text{non-inv}} - V_{\text{inv}})$  dove  $G_{\text{diff}}$ , se  $R_b = R'_b$ ,  $R_c = R'_c$  e  $R_d = R'_d$ , è pari a  $\frac{R_d}{R_c} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{R_b}{R_a}\right)$ . Siccome vogliamo amplificare il segnale in uscita dalla sonda di circa 200 volte scegliamo resistenze da  $1 \text{ k}\Omega$  per  $R_a$ ,  $R_c$  e da  $10 \text{ k}\Omega$  per  $R_b$  e  $R_d$ . Per caratterizzare l'amplificatore è necessario trovare quali sono gli effettivi valori di  $V_{\text{offset}}$ ,  $G_{\text{CM}}$  e  $G_{\text{diff}}$ . Per trovare  $V_{\text{offset}}$  fissiamo  $V_{\text{non-inv}} = V_{\text{inv}} = 0$  e osserviamo che il valore misurato è nell'ordine dei mV. Per far diminuire ancora di più questo valore possiamo utilizzare un trimmer (una resistenza variabile che correge le differenze di impedenza presenti tra i due amplificatori operazionali del primo stadio) presente sul circuito stampato in modo che  $V_{\text{offset}}$  sia più prossimo possibile a zero. Per trovare invece  $G_{\text{CM}}$  impostiamo  $V_{\text{non-inv}} = V_{\text{inv}} \neq 0$

Tabella I. Parametri utilizzati nel fit del modello (9) per ricavare il valore di  $\eta$ .

Quantità	Valore	
Carica elettrone	$1.602\ 176\ 634 \times 10^{-19} \text{ C}$	
Spessore della sonda	$4.50(12) \mu\text{m}$	Fonte: [13]
Corrente	$8.62(15) \text{ mA}$	Calcolata da $G_g = 1.724(30) \text{ mA V}^{-1}$ (Appendice A).
Guadagno differenziale	$2.07(24) \times 10^2$	Appendice B.

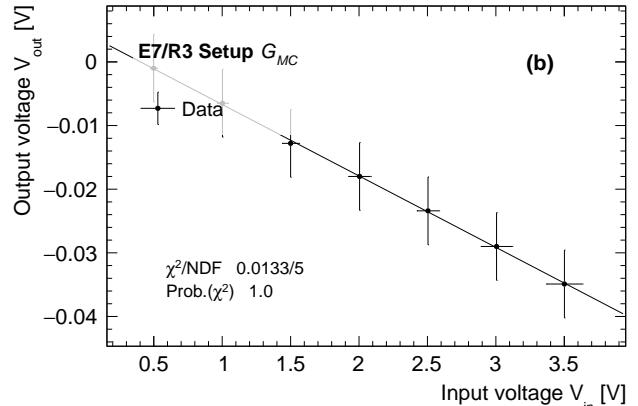
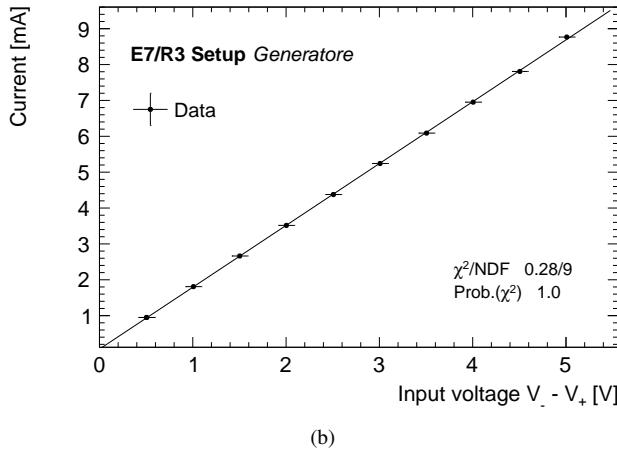
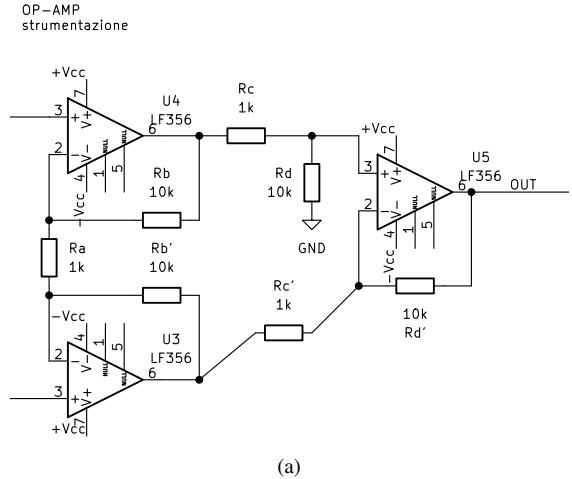
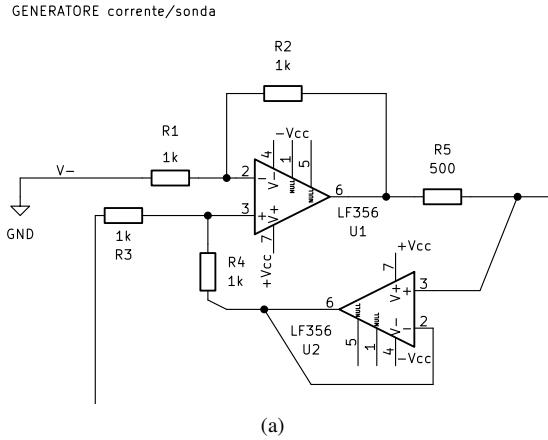


Figura A4. (a) Schema del circuito del generatore di corrente. L'uscita dalla resistenza  $R_5$  porta la corrente di circa 10 mA alla sonda. (b) Caratterizzazione del generatore di corrente.

e raccogliamo una serie di coppie di valori ( $V_{\text{non-inv/inv}}, V_{\text{out}}$ ) realizzando un fit secondo la funzione  $V_{\text{out}} = G_{CM} \cdot V + V_0$ , dove  $G_{CM}$  e  $V_0$  sono i parametri. Dal fit (figura B5b) otteniamo  $G_{CM} = -1.12(20) \times 10^{-2}$  e  $V_0 = 4.5(45) \times 10^{-3}$  V. Notiamo che come ci aspettavamo  $V_0$  è compatibile con zero.

Per trovare  $G_{\text{diff}}$  raccogliamo alcune coppie di valori ( $V_{\text{non-inv}} - V_{\text{inv}}, V_{\text{out}}$ ) e, facendo un fit (figura B5c) secondo la funzione  $V_{\text{out}} = G_{\text{diff}} \cdot (V_{\text{non-inv}} - V_{\text{inv}}) + V_0$ , otteniamo  $G_{\text{diff}} = 2.07(24) \times 10^2$  e  $V_0 = -1.49(87)$  V.

Il valore teorico di  $G_{\text{diff}}$  ottenuto dai valori di progetto e dalle misure delle resistenze risulta essere  $2.09(10) \times 10^2$ , che osserviamo essere perfettamente compatibile con il valore che abbiamo ottenuto.

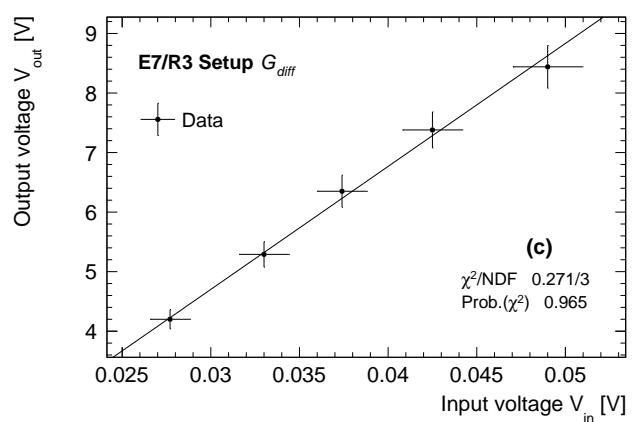


Figura B5. (a) Schema circuitale dell'amplificatore operazionale per strumentazione. Analisi del guadagno di modo comune (b) e del guadagno differenziale (c) dell'amplificatore operazionale per strumentazione.

### Appendice C: Logica di controllo del setup sperimentale

Riportiamo in nell'algoritmo 1 la logica di controllo del micro-controllore Arduino MEGA 2560 che permette di automatizzare la presa dati.

```

Data: analog pins Arduino MEGA 2650
Result: serial write → ROOT TFile with TTree structure
create TTree ← "dataBpos"
set  $i_B = 1.3 \text{ A}$ 
for  $M = 12 \text{ cycles over } m$  do
    for  $N = 100 \text{ cycles over } n$  do
        set  $i < 10 \text{ mA}$  using digital 5 V output
        read
             $V_{\text{out}}[n] \leftarrow \text{op-amp out}$ 
             $V_{\text{gen}}[n] \leftarrow \text{digital 5 V out}$ 
        set  $i = 0 \text{ V}$  (turn off digital out)
        read
             $V_{\text{out}}^{i=0}[n] \leftarrow \text{op-amp out}$ 
             $V_{\text{gen}}^{i=0}[n] \leftarrow \text{digital 5 V out}$ 
        Output: write data → TBranches
        increment  $i := i + 0.1 \text{ V}$ 
    wait for  $\Delta t = 45 \text{ s}$ : invert B field polarity
    create TTree ← "dataBneg"
    for  $M = 12 \text{ cycles over } m$  do
        for  $N = 100 \text{ cycles over } n$  do
            set  $i < 10 \text{ mA}$  using digital 5 V output
            read
                 $V_{\text{out}}[n] \leftarrow \text{op-amp out}$ 
                 $V_{\text{gen}}[n] \leftarrow \text{digital 5 V out}$ 
            set  $i = 0 \text{ V}$  (turn off digital out)
            read
                 $V_{\text{out}}^{i=0}[n] \leftarrow \text{op-amp out}$ 
                 $V_{\text{gen}}^{i=0}[n] \leftarrow \text{digital 5 V out}$ 
            Output: write data → TBranches
            decrement  $i := i - 0.1 \text{ V}$ 
    Result: ROOT TFile ← ("dataBpos", "dataBneg")

```

**Algorithm 1:** Logica di controllo del setup sperimentale.

- [6] Otteniamo una corrente di  $(8.62 \pm 0.15) \text{ mA}$ .
- [7] Consideriamo le due superfici sufficientemente grandi e realizzando lo spessore del traferro  $\ell_t \ll D_j$ , dove con  $D_j$  indichiamo una tra le due dimensioni del nucleo ferromagnetico.
- [8] Nei dati raccolti non abbiamo mai considerato valori della corrente inferiori a 200 mA.
- [9] Quando la corrente arriva al valore minimo, il sistema entra in blocco e attende che manualmente vengano invertiti i cavi che portano la corrente all'elettromagnete.
- [10] Per la connessione seriale è necessaria la conversione di una tensione 0 V/5 V (uscita seriale del sistema di controllo) a 12 V/-12 V (ingresso seriale del generatore PL303QMD-P).
- [11] Se utilizzassimo il valore di  $\eta_{\text{Cu}} \approx 10^{28} \text{ m}^{-3}$  otterremmo un valore di  $V_H$  troppo piccolo per poter effettivamente riuscire a misurarne il valore ( $\approx 1 \mu\text{V}$ ) anche considerandone una amplificazione, dove invece il Bi ha un valore  $\eta_{\text{Bi}} \leq 10^{25} \text{ m}^{-3}$ , che porta 3 ordini di grandezza in meno nel conto.
- [12] Non troviamo un valido motivo per cui le due tensioni di offset non dovrebbero esserlo in quanto non dipendendo teoricamente in alcun modo dal campo magnetico a cui è sottoposta la sonda.
- [13] D. B. Newell, F. Cabiati, J. Fischer, K. Fujii, S. G. Karshenboim, H. S. Margolis, E. de Mirandés, P. J. Mohr, F. Nez, K. Pachucki, T. J. Quinn, B. N. Taylor, M. Wang, B. M. Wood, and Z. Zhang, The CODATA 2017 values of  $\hbar$ ,  $e$ ,  $k$  and  $N_A$  for the revision of the SI, *Metrologia* **55**, L13 (2018).
- [14] Y. Hasegawa, Y. Ishikawa, T. Saso, H. Shirai, H. Morita, T. Komine, and H. Nakamura, A method for analysis of carrier density and mobility in polycrystalline bismuth, *Physica B: Condensed Matter* **382**, 140 (2006).
- [15] J. P. Michenaud and J. P. Issi, Electron and hole transport in bismuth, *Journal of Physics C: Solid State Physics* **5**, 3061 (1972).
- [16] V. S. Édel'man, Properties of electrons in bismuth, *Soviet Physics Uspekhi* **20**, 819 (1977).
- [17] C. R. Harris, K. J. Millman, S. J. van der Walt, R. Gommers, P. Virtanen, D. Cournapeau, E. Wieser, J. Taylor, S. Berg, N. J. Smith, R. Kern, M. Picus, S. Hoyer, M. H. van Kerkwijk, M. Brett, A. Haldane, J. F. del Río, M. Wiebe, P. Peterson, P. Gérard-Marchant, K. Sheppard, T. Reddy, W. Weckesser, H. Abbasi, C. Gohlke, and T. E. Oliphant, Array programming with numpy, *Nature* **585**, 357 (2020).
- [18] J. D. Hunter, Matplotlib: A 2d graphics environment, *Computing in Science & Engineering* **9**, 90 (2007).
- [19] R. Brun, F. Rademakers, P. Canal, A. Naumann, O. Couet, L. Moneta, V. Vassilev, S. Linev, D. Piparo, G. GANIS, B. Bellonot, E. Guiraud, G. Amadio, wverkerke, P. Mato, TimurP, M. Tadel, wlav, E. Tejedor, J. Blomer, A. Gheata, S. Hageboeck, S. Roiser, marsupial, S. Wunsch, O. Shadura, A. Bose, Cristina-Cristescu, X. Valls, and R. Isemann, root-project/root: v6.18/02 (2019).
- [20] J. Pivarski, I. Osborne, I. Ifrim, H. Schreiner, A. Hollands, A. Biswas, P. Das, S. Roy Choudhury, and N. Smith, *Awkward array* (2018), if you use this software, please cite it as below.
- [21] J. Pivarski, H. Schreiner, N. Smith, D. Kalinkin, C. Burr, G. Stark, N. Hartmann, D. Davis, J. Rübenach, R. O'Neil, A. Novak, B. Greiner, B. Tovar, B. Stanislaus, ChristopheRappold, C. Deaconu, D. Cervenkov, D. Macleod, J. Bendavid, K. Liebert, M. Proffitt, M. Peresano, P. Fackeldey, R. Ehlers, R. Turra, T. Gal, A. Held, and mpad, *scikit-hep/uproot4: 4.2.3* (2022).

Tutti i dati completi a supporto dei grafici, e il relativo codice, sono consultabili <https://github.com/mattiasotgia/Lab2>. L'analisi dati viene eseguita attraverso diversi notebook (<https://jupyter.org>) scritti in C++/python basandosi su framework pubblici: ROOT, per la realizzazione dei grafici e il fit dei modelli (<https://root.cern>), matplotlib, numpy, framework pubblici per l'analisi dei dati e la loro visualizzazione [17–19]. I dati sono raccolti su file ROOT organizzati in dataset tabulari. Sono utilizzate anche le librerie uproot e Awkward Array [20, 21].