

# Misura della permeabilità magnetica relativa con circuito RLC risonante<sup>a</sup>

Francesco Polleri<sup>1, b</sup> e Mattia Sotgia<sup>1, c</sup>

(Gruppo A1)

<sup>1</sup>Dipartimento di Fisica,  
Università degli Studi di Genova, I-16146 Genova,  
Italia

(Dated: presa dati 9 novembre 2021, analisi dati e relazione in data 17 novembre 2021, consegnata in data 17 novembre 2021)

## INTRODUZIONE

Si vuole misurare il valore della permeabilità magnetica di alcuni materiali dati, di cui non conosciamo esatta composizione chimico-fisica ma che possiamo ipotizzare omogenei, lineari e isotropi (LHI) fino al primo grado di approssimazione, avendo a disposizione un rocchetto plastico su cui sono avvolte  $N$  spire di rame, nel quale può essere inserito il volume di materiale creato in modo da riempire quasi completamente il rocchetto. Variando il materiale ci aspettiamo di poter misurare i differenti valori della permeabilità magnetica  $\mu_R$ .

Poiché i tipi di misure più precisi che siamo capaci a effettuare sono misure di tempo (in termini di periodo e di frequenza) sfruttiamo il circuito risonante RLC per determinare il valore della frequenza di taglio ( $\nu_0$ ), che risulta legata al valore dell'induttanza e della capacità del condensatore. Cambiando il nucleo all'interno del solenoide modifichiamo il valore di  $L$  e di conseguenza troveremo un valore differente di  $\nu_0$ . Dalla misura della frequenza troviamo il valore di  $L$ , essendo noti i valori delle altre componenti circuitali, e confrontando i diversi valori possiamo trovare  $\mu_R$  per ogni materiale.

## ANALISI DATI

Utilizziamo i dati raccolti per creare i grafici dei diagrammi di Bode della funzione di trasferimento e della fase. Per fare ciò calcoliamo  $|H[\nu]|$  come rapporto tra  $v_{in}$  e  $v_{out}$  e la fase  $\varphi$  come  $2\pi \frac{dt}{T}$ . Di conseguenza l'errore su  $|H[\nu]|$  è dato da

$$\varepsilon_{|H|} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{v_{out}}}{v_{in}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_{v_{in}} v_{out}}{v_{in}^2}\right)^2}$$

mentre l'errore su  $\varphi$  è pari a

$$\varepsilon_{\varphi} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{1}}$$

Gli errori statistici di  $v_{in}$ ,  $v_{out}$ ,  $T$  e  $dt$  sono pari agli errori assoluti divisi per  $\sqrt{3}$  e per trovare il valore degli errori assoluti cerchiamo sul data-sheet dell'oscilloscopio come calcolarli.

Alla fine quindi otteniamo

$$\varepsilon_{v_{in}} = \frac{8 \cdot 0.035 \cdot (\text{fondo-scala}_{v_{in}})}{\sqrt{3}} \quad (1a)$$

$$\varepsilon_{v_{out}} = \frac{8 \cdot 0.035 \cdot (\text{fondo-scala}_{v_{out}})}{\sqrt{3}} \quad (1b)$$

$$\varepsilon_T = \frac{10 \cdot 0.0016 \cdot (\text{fondo-scala}_T)}{\sqrt{3}} \quad (1c)$$

$$\varepsilon_{dt} = \frac{10 \cdot 0.0016 \cdot (\text{fondo-scala}_{dt})}{\sqrt{3}} \quad (1d)$$

Creiamo quindi delle tabelle in cui riportiamo i valori di  $|H[\nu]|$ ,  $\varphi$  e  $\nu$  con i rispettivi errori. Da tali tabelle costruiamo i grafici dei diagrammi di Bode per la funzione di trasferimento e per la fase.

Per realizzare il fit di  $|H[\nu]|$  utilizziamo l'equazione (2a) impostando come parametri  $A$ ,  $Q$  e  $\nu_0$ , mentre per la fase  $\varphi$  utilizziamo l'equazione (2b) impostando gli stessi parametri.

## CONSIDERAZIONI SU ERRORI A BASSE E ALTE FREQUENZE

Quando operiamo con valori di  $\nu$  attorno a frequenze nell'ordine del 100Hz osserviamo visualmente sull'oscilloscopio che il segnale di  $v_{out}$  è molto disturbato, per cui per misurare il suo valore ci affidiamo a una media operata dall'oscilloscopio. Nel fare questo passaggio dobbiamo quindi tenere conto che l'errore su queste misure è diverso da quanto ricaviamo per gli altri punti. Possiamo scegliere di procedere in due modi. Da una parte possiamo decidere di sovrastimare l'errore facendo misure *a occhio* e quindi dare meno peso a questi punti nel fit. D'altra parte potremmo procedere invece con l'esclusione dal fit di questi punti. Scegliamo di procedere con questa seconda opzione in quanto la prima opzione non fornisce un risultato quantitativamente preciso, dove la seconda non è una forma di alterazione dei dati.

Una considerazione analoga viene effettuata per valori ad alte frequenze (superiori a 50kHz, nell'ordine dei 100kHz). Questo fattore viene

## METODI

*Caratterizzazione del circuito RLC*— Il circuito RLC è definito da tre parametri: la frequenza di taglio  $\nu_0$ , il fattore di qualità  $Q$  e il parametro  $A$ . Analizzando il circuito troviamo infatti che il valore della funzione di trasferimento è dato da

$$|H[\nu]| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)^2}},$$

<sup>a</sup> Esperienza n. 3

<sup>b</sup> s5025011@studenti.unige.it

<sup>c</sup> s4942225@studenti.unige.it

Tabella I Valori riferiti al grafico per il solenoide libero

Ampiezza (a. u.)	Fase (rad)	Frequenza (Hz)
$ H[v]  \pm \varepsilon_{ H }$	$\varphi[v] \pm \varepsilon_{\varphi}$	$\nu \pm \varepsilon_{\nu}$

Tabella II Valori riferiti al grafico per il solenoide con il materiale A nel nucleo

Ampiezza (a. u.)	Fase (rad)	Frequenza (Hz)
$ H[v]  \pm \varepsilon_{ H }$	$\varphi[v] \pm \varepsilon_{\varphi}$	$\nu \pm \varepsilon_{\nu}$

Tabella III Valori riferiti al grafico per il solenoide con il materiale B nel nucleo

Ampiezza (a. u.)	Fase (rad)	Frequenza (Hz)
$ H[v]  \pm \varepsilon_{ H }$	$\varphi[v] \pm \varepsilon_{\varphi}$	$\nu \pm \varepsilon_{\nu}$

per cui osserviamo che il suo valore massimo (cioè 1), si ottenga per  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  che è il valore di quella che abbiamo chiamato frequenza di taglio ( $\omega_0$  oppure  $\nu_0$ ). Per valori più bassi e più alti di pulsazione e quindi di frequenza, il valore della funzione di trasferimento diminuisce, per cui il circuito si comporta come un filtro passa banda intorno al valore della frequenza di taglio che a seconda dei valori di L e di C del circuito può essere modificata. Allo stesso modo l'equazione della funzione di trasferimento può essere riscritta come

$$|H[v]| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_{id}^2 \left( \frac{\nu}{\nu_0} + \frac{\nu_0}{\nu} \right)^2}}$$

dove Q è  $Q_{id} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$  (e abbiamo sostituito  $\omega$  con  $\nu = \omega/2\pi$  dove  $\nu = 1/T$ ), per cui notiamo che il filtro diventa tanto più selettivo, tanto più diventa grande Q, che viene definito quindi fattore di qualità. Inoltre dobbiamo anche considerare che l'induttanza si comporta in realtà anche come una resistenza, per cui dobbiamo riconsiderare il valore della funzione di trasferimento inserendo questo ulteriore parametro A uguale  $A = \left(1 + \frac{R_L^2}{R^2}\right)$  da cui

$$|H[v]| = \frac{1}{\sqrt{A + Q_{id}^2 \left( \frac{\nu}{\nu_0} + \frac{\nu_0}{\nu} \right)^2}} \quad (2a)$$

Perciò in base ai valori di resistenza, capacità e induttanza che inseriamo all'interno del circuito possiamo modificare i valori di tali parametri.

Analogamente a quanto avviene per il modulo della funzione di trasferimento (in eq. 2a), possiamo individuare la fase come

$$\varphi[v] = -\arctan\left(Q\left(\frac{\nu}{\nu_0} + \frac{\nu_0}{\nu}\right)\frac{1}{\sqrt{A}}\right) \quad (2b)$$

**Caratterizzazione dell'induttanza**— La bobina su cui andiamo a eseguire le misure di L è composta da un rocchetto cilindrico di plastica dura cavo, attorno al quale

viene avvolto un filo di rame smaltato, a comporre 900 spire. L'apparato così creato si comporta come un solenoide caratterizzato da

$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S \quad (3)$$

con  $\Phi_B = B \cdot NS$  il flusso del campo magnetico di un solenoide in cui scorre corrente I, dove consideriamo  $n = N/\ell$  ottenendo che il solenoide è caratterizzato da

$$L = \mu_0 n^2 \ell S. \quad (4)$$

Consideriamo, in primo ordine di approssimazione che il rocchetto di plastica abbia permeabilità magnetica pari a 1, valore che non si discosta molto dalla realtà sperimentale.

Inserendo un materiale all'interno del rocchetto ci aspettiamo una variazione del valore di L, dal quale vogliamo ricavare il valore di  $\mu_R$  corrispondente al materiale. I materiali risultano avere dimensioni ( $a \times a \times h$ ) uguali a  $11.90 \times 11.90 \times 68.00$  mm (dimensioni del materiale A) e  $12.10 \times 12.10 \times 68.00$  mm (secondo materiale, B). (Le misure sono riportate in Tab. IV) Una volta inseriti nella cavità del solenoide non riescono però a riempire completamente la superficie. Coprono invece tutta la lunghezza del solenoide, eccedendo rispetto al rocchetto, lungo 60.00 mm, di pochi millimetri, per cui ci riserviamo di non considerare effetti di bordo che richiederebbero calcoli non eseguibili sulla base dei dati raccolti.

Tabella IV Caratteristiche fisiche solenoide.

Caratteristica	
Altezza solenoide (mm)	$60.0 \pm 0.1$
Diametro solenoide (mm)	$24.0 \pm 0.1$
Lato nucleo Fe (materiale A) (mm)	$12.10 \pm 0.05$
Altezza nucleo Fe (mm)	$68.00 \pm 0.05$
Lato nucleo Al (materiale B) (mm)	$11.90 \pm 0.05$
Altezza nucleo Al (mm)	$68.00 \pm 0.05$

Dall'equazione (3) abbiamo che  $L \cdot I = \Phi_B$ . Quando inseriamo il materiale il flusso  $\Phi_B$  si può ottenere come somma del flusso interno al materiale ed esterno (nello spazio tra il materiale e la bobina). Otteniamo quindi che

$$L_{eq} \cdot I = \Phi_B^{int} + \Phi_B^{ext} = \mu_0 n^2 \ell (a^2 \mu_R + (S - a^2)) = \mu_0 n^2 \ell (S + a^2 (\mu_R - 1)) \quad (5a)$$

dove  $a^2$  indica la superficie di base del materiale considerato, con il fattore

$$\Phi_B^{int} = \mu_0 \mu_R n^2 \ell a^2 \quad (5b)$$

che tiene conto della permeabilità magnetica relativa del materiale e il fattore

$$\Phi_B^{ext} = \mu_0 n^2 \ell (S - a^2) \quad (5c)$$

che invece è il flusso fuori dal materiale.

Da queste considerazioni otteniamo che quindi possiamo ricavare il valore della permeabilità magnetica  $\mu_R$  come

$$\mu_R = \frac{L_{eq} - \mu_0 n^2 \ell S}{\mu_0 n^2 \ell a^2} + 1 \quad (6)$$

**Scelta dei componenti del circuito**— Vogliamo costruire un circuito la cui frequenza di taglio sia circa 3kHz in modo che intorno a questo valore di frequenza il segnale all'interno del circuito non sia disturbato da possibili rumori presenti a frequenze nell'ordine dei 100Hz o da altre interferenze presenti invece quando arriviamo a oltre 20KHz. Un'altra condizione che imponiamo è che il fattore di qualità sia almeno maggiore di 4 in modo che la banda che filtriamo attraverso il circuito sia sufficientemente stretta. Nello stesso momento vogliamo che questo fattore non sia troppo elevato perché ciò renderebbe invece la banda troppo stretta, rendendo potenzialmente più difficile eseguire un fit dei dati. Inoltre il fattore di qualità, per come è stato definito, è legato ai valori di R, L e C, ma questi, per le condizioni in cui operiamo in laboratorio, cioè alle determinate frequenze descritte sopra, non permettono valori di Q elevati.

Dunque per il nostro progetto necessitiamo di particolari valori di R, C ed L. Quest'ultimo è già determinato, in quanto è legato alle caratteristiche fisiche del rocchetto di filo che appunto utilizziamo come induttanza. Quindi partendo da tale valore, che possiamo determinare in modo diretto usando il tester a nostra disposizione, ricaviamo anche quelli di R e C imponendo le condizioni sulla frequenza di risonanza e sul fattore di qualità. Se quindi vogliamo che  $\nu_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{1}{2\pi}$  sia pari a 3kHz, con L misurato grazie al tester che vale 10.03mH, allora  $C = \frac{1}{L 4\pi^2 \nu_0^2}$  deve assumere un valore prossimo a 220nF. Prima di procedere a misurare R, attraverso la condizione su Q, misuriamo anche il valore della resistenza dell'induttanza, usando anche in questo caso il tester e otteniamo che  $R_L$  è pari 3.70hm. Imponiamo che

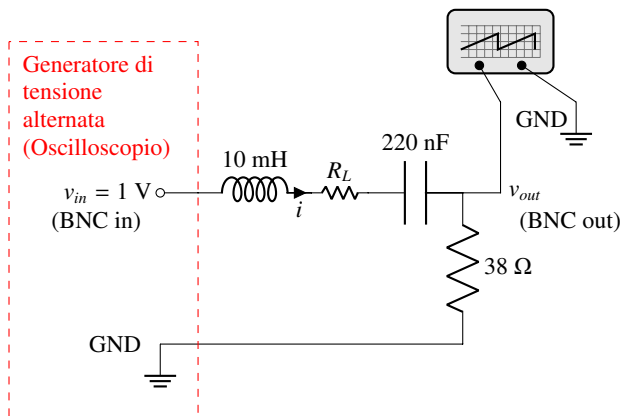


Figura 1 Circuito utilizzato per il filtro passa-banda progettato nell'esperienza, i valori di R, L e C sono i valori nominali riportati sul componente. La resistenza  $R_L$  è la resistenza interna all'induttanza, che verifichiamo non essere nulla.

il valore di  $Q$  sia 6 e in base alla relazione  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$  troviamo che  $R = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}}$ , valore a cui però devo sottrarre quello di  $R_L$  in quanto la  $R_{eq}$  che ottengo dall'equazione precedente deriva in realtà dalla serie di  $R$  e  $R_L$ . Troviamo quindi che  $R = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}} - R_L$ , cioè circa 380Ω. In base ai valori trovati di  $R$  e  $C$ , cerchiamo tra i dispositivi presenti in laboratorio quelli che hanno valore nominale che più si avvicina a questi. Prendiamo quindi una capacità da 220nF e una resistenza da 380Ω e misuriamo questi valori con il tester, per ottenere il loro effettivo valore. **Quindi  $C = 220nF$ ,  $R = 380\Omega$  e  $L = 10.03mH$ .**

**Presi dati**—Utilizziamo l'oscilloscopio come generatore di segnale in alternata che forniamo come input al nostro circuito. **La frequenza di tale segnale è modificabile e il segnale di output del filtro cambia in base a tale frequenza.**

Per individuare la frequenza di taglio del circuito misuriamo, sempre utilizzando l'oscilloscopio, la tensione in ingresso  $v_{in}$ , la tensione in uscita  $v_{out}$ , il periodo del segnale  $T$  (uguale per entrambi i segnali in quanto sono isofrequenziali) e il ritardo tra i due segnali  $dt$ , con i rispettivi fondo-scala necessari per ricavare l'errore.

La prima cosa che facciamo è far variare la frequenza di  $v_{in}$  per individuare il punto in cui il ritardo tra i due segnali è nullo, trovando quindi quella che dovrebbe

essere  $v_0$ . A questo punto consideriamo un range di frequenze compreso tra una decade prima e una decade dopo il valore della frequenza di taglio e per ogni decade prendiamo tre misure di  $v_{in}$ ,  $v_{out}$ ,  $T$  e  $dt$  (ad esempio a 1kHz, 2kHz, 5kHz). Insieme a questi valori ne raccogliamo di ulteriori intorno a  $v_0$ .

Ripetiamo questo procedimento tre volte, prima senza inserire alcun materiale all'interno dell'induttanza e poi aggiungendo uno per volta i due materiali che abbiamo a disposizione.

I valori che abbiamo acquisito sono riportati nelle tabelle S-5, S-6 e S-7.

### Dati completi e codice sorgente

Tutti i dati completi a supporto dei grafici, e il relativo codice, sono visualizzabili su <https://github.com/mattiasotgia/Lab2>. L'analisi dati viene eseguita su un programma sviluppato in C++ basandosi su framework pubblici: ROOT, per la realizzazione dei grafici e il fit dei modelli (<https://root.cern/>).

# RELAZIONE DI LABORATORIO N. 1 (2021)

Tabella S-5 Dati grezzi (induttanza libera)

Tensione ingresso (mV)		Tensione uscita (mV)		Periodo (ms)		Ritardo (ms)	
$v_{in}$	$range_{v_{in}}$	$v_{out}$	$range_{v_{out}}$	$T$	$range_T$	$dt$	$range_{dt}$
992.3	132	63.7	9	2	0.310	0.478	0.310
981.7	132	135.2	19	1	0.156	0.2267	0.156
907.4	132	320.2	45	0.5	0.078	0.093	0.078
907.4	132	327.2	44	0.5	0.078	0.0925	0.078
817.2	132	476.0	64	0.4	0.062	0.056	0.062
753.5	132	576.0	80	0.3571	0.056	0.034	0.056
559.5	80	475.7	68	0.303	0.050	0.006	0.050
601.6	86	467.0	66	0.2778	0.052	-0.018	0.052
868.3	132	393.0	54	0.2	0.032	-0.033	0.032
973.0	132	153.0	21	0.1	0.015	-0.0216	0.015
981.7	132	72.0	10	0.05	0.0076	-0.0113	0.0076
992.3	132	32.0	5	0.02	0.0030	-0.0046	0.0030

Tabella S-6 Dati grezzi (materiale A)

Tensione ingresso (mV)		Tensione uscita (mV)		Periodo (ms)		Ritardo (ms)	
$v_{in}$	$range_{v_{in}}$	$v_{out}$	$range_{v_{out}}$	$T$	$range_T$	$dt$	$range_{dt}$
990.6	140	40.3	6	2	0.320	0.480	0.320
973.7	140	94.4	14	1	0.168	0.219	0.168
960.0	156	121.1	20	0.8333	0.136	0.171	0.136
907.4	132	170.8	25	0.6666	0.108	0.1176	0.108
827	196	225.3	54	0.5556	0.098	0.0713	0.098
748.4	104	256.2	36	0.4327	0.070	-0.0004	0.070
768.5	108	245.0	35	0.4	0.070	-0.0163	0.070
838.0	132	195.7	31	0.3333	0.060	-0.0346	0.060
882.3	124	159.0	23	0.2857	0.054	-0.038	0.054
947.0	156	104.5	17	0.200	0.033	-0.033	0.033
955.0	144	86.4	13	0.1667	0.030	-0.0288	0.030
971.0	160	54.0	9	0.1	0.0164	-0.0184	0.0164

Tabella S-7 Dati grezzi (materiale B)

Tensione ingresso (mV)		Tensione uscita (mV)		Periodo (ms)		Ritardo (ms)	
$v_{in}$	$range_{v_{in}}$	$v_{out}$	$range_{v_{out}}$	$T$	$range_T$	$dt$	$range_{dt}$
996.0	164	37.9	6	2	0.340	0.4874	0.340
982.0	164	80.0	14	1	0.176	0.234	0.176
935.0	152	195.8	32	0.5	0.096	0.103	0.096
849.9	140	285.8	47	0.4	0.068	0.0715	0.068
704.2	116	381	64	0.3333	0.056	0.041	0.056
575.0	96	434.2	72	0.2857	0.052	0.004	0.052
646.9	108	400.6	66	0.250	0.045	-0.0228	0.045
756.4	128	337	56	0.2222	0.039	-0.032	0.039
838.6	140	286.5	47	0.2	0.033	-0.034	0.033
887	148	242.5	40	0.1818	0.033	-0.0337	0.033
910	152	209.3	36	0.1667	0.029	-0.0324	0.029
972.0	156	105	17	0.1	0.0168	-0.0218	0.0168