

Verifica sperimentale della dipendenza quadratica inversa d^{-2} del calore irradiato rispetto distanza^a

Francesco Polleri^{1, b} e Mattia Sotgia^{1, c}

(Gruppo A1)

¹Dipartimento di Fisica,

Università degli Studi di Genova

(Dated: presa dati 30 novembre, 1-2 dicembre 2021, consegnata in data 24 dicembre 2021)

INTRODUZIONE

Lo scopo principale di questa esperienza di laboratorio è fare una verifica sperimentale della dipendenza quadratica inversa dell'energia irradiata da una sorgente luminosa in funzione della distanza da essa. Per fare le misure necessarie abbiamo bisogno di diversi dispositivi e in particolare sfrutteremo il funzionamento di amplificatori per strumentazione, basati su amplificatori operazionali.

Come sorgente luminosa usiamo una piccola lampadina ad incandescenza che possiamo posizionare a diverse distanze da un termometro al platino (PT100) che usiamo quindi come sensore e la cui caratteristica principale è la dipendenza lineare, a temperature intorno a quella ambiente, della resistenza in funzione della variazione di temperatura (la derivata è 0.4 Ω/K).

STUDIO E CARATTERIZZAZIONE DI UN AMPLIFICATORE OPERAZIONALE

Poiché l'amplificatore per strumentazione che utilizziamo per la nostra misura è costituito da tre amplificatori operazionali inseriti in un unico circuito, ci interessa studiare meglio il loro comportamento in modo da progettare il circuito nel modo migliore possibile.

Iniziamo costruendo un semplice circuito (Figura 1) con un amplificatore LM741 alimentato con $\pm V_{cc} = \pm 15V$ e progettato in modo che il guadagno ad anello chiuso sia $G_{close} = 80$. Attraverso lo studio del circuito troviamo che il guadagno risulta essere $G = -R_1/R_2$. Per scegliere le resistenze da inserire nel circuito non ci basiamo però solo su questa condizione,



Figura 1 Schema circuitale amplificatore invertente

bensì le prendiamo in modo che siano molto più grandi della resistenza interna del generatore che dovrebbe essere circa 50 Ω . Prendiamo quindi come valore nominale di R_1 1 k Ω , mentre per R_2 80 k Ω . Misuriamo le resistenze con il tester a nostra disposizione e troviamo che $R_1 = 0.988(6)$ k Ω mentre $R_2 = 82.7(5)$ k Ω

Per effettuare la misura del guadagno raccogliamo 5 valori della tensione di uscita (V_{out}) con i rispettivi valori della tensione di entrata (V_{in}) a 50 Hz in modo da acquisire i dati in una zona in cui il guadagno non dipende dalla frequenza poiché l'amplificatore si comporta come un passa basso. Inoltre i valori di V_{in} li abbiamo scelti in modo che, una volta amplificati, fossero comunque minori di 15V, che è la tensione con cui alimentiamo l'amplificatore, perché altrimenti il valore di V_{out} sarebbe appunto uguale a V_{cc} . Eseguendo in fit lineare usando come funzione

$$V_{out} = G \cdot V_{in} + q$$

e impostando come parametri G e q Otteniamo quindi che

$$G = 78.6(81)$$

$$q = 0.03 V$$

Osserviamo quindi che il valore di G è compatibile con il valore che volevamo ottenere, cioè $G = 80$ e che la quota della retta è compatibile con zero e ciò rispecchia il fatto che se la tensione in entrata è nulla, anche quella in uscita deve esserlo.

Utilizzando sempre lo stesso circuito vogliamo creare un diagramma di Bode della funzione di trasferimento, in modo da osservare effettivamente il comportamento da passa-basso e da trovare la frequenza di taglio. Impostiamo quindi la V_{in} a 100mV e raccogliamo i valori di V_{in} , V_{out} e del periodo T con i loro rispettivi fondo scala, facendo variare la frequenza da 100Hz fino 20KHz raccogliendo circa 3 punti per ogni decade. Realizziamo un fit sui dati usando come funzione

$$|H[v]| = \frac{G}{\sqrt{1 + \left(\frac{v}{v_0}\right)^2}} \quad (1)$$

e scegliendo come parametri G e v_0 . Otteniamo quindi che

$$G = 83.2(12)$$

$$v_0 = 8.72(26) \text{ kHz}$$

Ripetiamo lo stesso procedimento utilizzando però come R_2 una resistenza da 8 k Ω in modo che il guadagno sia 10 volte

^a Esperienza n. 4

^b s5025011@studenti.unige.it

^c s4942225@studenti.unige.it



Figura 2 Grafico combinato dei diagrammi di Bode dell'amplificatore operazionale LM741 ottenuti in differenti configurazioni invertenti tali da avere guadagni diversi, ma possiamo osservare che convergendo asintoticamente sul fronte di discesa, possiamo qualitativamente verificare la conservazione del GBW (*Gain-Bandwidth*).

più piccolo. Vogliamo quindi verificare che il prodotto $\nu_0 \cdot G$ è costante. Raccogliamo quindi i nuovi dati e realizziamo un altro fit usando di nuovo l'equazione (1) e impostando gli stessi parametri e troviamo che

$$G = 8.00(10)$$

$$\nu_0 = 85.4(23) \text{ kHz}$$

Osserviamo che effettivamente il guadagno si presenta essere circa 10 volte più grande del valore misurato in precedenza.

Nel primo caso il prodotto vale $68.3(20) \times 10^4$, mentre nell'altro caso vale $72.6(24) \times 10^4$ e troviamo che quindi sono effettivamente compatibili.

Inoltre dalla Figura 2 possiamo osservare anche visualmente che il prodotto che prima abbiamo quantitativamente verificato essere costante sia visibile anche sovrapponendo i due diagrammi. Infatti possiamo osservare che diminuendo il guadagno G_{close} da 80 a 8, ovvero cambiando R_1 da 80 kΩ a 8 kΩ, osserviamo che la frequenza di taglio si sposta di un fattore 10, passando da 8 kHz a 80 kHz.

Un'altra cosa che vogliamo misurare è il valore dell'impedenza di ingresso per verificare che come da modello sia effettivamente pari ad R_1 . Per fare questo colleghiamo in serie una resistenza che abbia lo stesso valore di R_1 tra il punto che porta V_{in} e R_1 . Misuriamo quindi la tensione in uscita nel nodo di congiunzione tra le due resistenze e troviamo che il valore di V_{out} è circa pari a $\frac{V_{in}}{2}$ e ciò significa che la tensione si è ripartita a metà tra la nuova resistenza che abbiamo inserito e l'impedenza di ingresso del circuito e quindi effettivamente l'impedenza di ingresso del nostro circuito è proprio R_1 .

Successivamente costruiamo un circuito amplificatore non invertente il cui schema è riportato in Figura 3 e utilizzando le stesse resistenze usate in precedenza. Ripetiamo quindi



Figura 3 Schema circuitale amplificatore non-invertente



Figura 4 Schema circuitale del comparatore utilizzato per effettuare la misura della *slew rate*.

gli stessi procedimenti fatti prima per trovare il guadagno e troviamo che

$$G = 81.5(70)$$

$$q = 0.18(82) \text{ V}$$

per cui il guadagno è compatibile con quello che avremmo dovuto ottenere da modello cioè $G = 1 + R_1/R_2$ mentre la quota è compatibile con zero.

Per misurare la tensione di ingresso del circuito ripetiamo ciò che avevamo fatto prima e questa volta troviamo che V_{out} è praticamente uguale a V_{in} . Ciò significa che la resistenza di ingresso del circuito è molto più grande di 1 kΩ perché infatti sulla nuova resistenza inserita non vi è praticamente caduta di potenziale. Ciò significa che il modello è verificato in quanto la resistenza di ingresso dovrebbe essere infinita, cioè realisticamente nell'ordine di $10^6 \Omega$.

Un'altra caratteristica dell'amplificatore che possiamo misurare è la cosiddetta *slew rate*. La *slew rate* è una grandezza che indica la velocità, espressa in volt su secondi, con cui è capace di reagire un dispositivo o circuito elettronico, sollecitato sul suo ingresso, da un impulso di tensione, il cui valore, da minimo a massimo, è contenuto in un tempo brevissimo. Per misurarla costruiamo un comparatore a soglia nulla, il cui schema è riportato in Figura 4 e mandiamo in ingresso un'onda quadra. Poiché quindi la risposta del circuito non è immediata, sull'oscilloscopio non osserviamo un'onda quadra, bensì dei trapezi isosceli e ciò che a noi interessa è proprio la pendenza dei lati obliqui di questi trapezi. Utilizzando i cursori dell'oscilloscopio possiamo quindi misurare il rapporto tra la variazione di tensione (ΔY) e l'intervallo di tempo (ΔX). Troviamo quindi che il valore dello *slew rate* è $0.541(16) \text{ V}\mu\text{s}^{-1}$ che è molto vicino al valore indicato sul data-sheet del dispositivo.

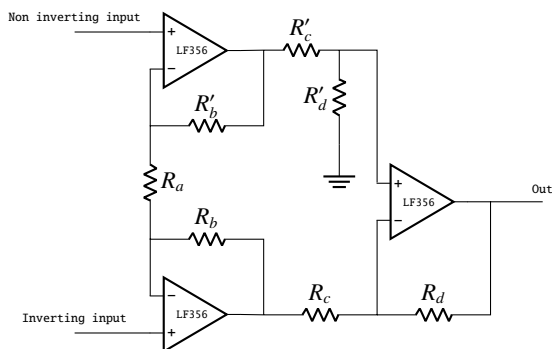


Figura 5 Schema circuitale amplificatore per strumentazione.

STUDIO E CARATTERIZZAZIONE AMPLIFICATORE PER STRUMENTAZIONE

Vogliamo costruire un amplificatore per strumentazione a due stadi il cui guadagno sia compreso tra 100 e 200. Infatti avere un guadagno troppo alto porta il segnale di uscita ad essere troppo sensibile a rumori e fluttuazioni. Dallo studio del circuito riportato in Figura 4 troviamo che se $R_b = R'_b$, $R_c = R'_c$ e $R_d = R'_d$ il guadagno è dato da

$$G = \frac{R_d}{R_c} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{R_b}{R_a} \right).$$

Prendiamo quindi come resistenze:

$$R_a = 17.80(110) \text{ k}\Omega$$

$$R_b = 37.50(17) \text{ k}\Omega$$

$$R_c = 1.000(64) \text{ k}\Omega$$

$$R_d = 32.20(15) \text{ k}\Omega$$

$$R'_b = 37.50(17) \text{ k}\Omega$$

$$R'_c = 1.000(64) \text{ k}\Omega$$

$$R'_d = 32.20(15) \text{ k}\Omega$$

(Per assicurarci che le resistenze che volevamo fossero uguali, avessero lo stesso valore abbiamo misurato ogni resistenza con il tester). Il valore del guadagno dovrebbe quindi essere $1.68(12) \times 10^2$.

Il circuito integrato nell'amplificatore per strumentazione (Figura 5) è caratterizzato da un guadagno complessivo dato da

$$V_{out} = G_{diff} \cdot (V_{non-inv} - V_{inv}) + G_{CM} \cdot V_{CM} + V_{offset}. \quad (2)$$

V_{offset} è il valore di offset dello strumento, ovvero il valore V_{out} che troviamo anche in assenza di segnale di ingresso ($V_{non-inv} - V_{inv}$) ed è causato dalla presenza di una differenza reale dei due amplificatori che usiamo nel primo stadio e di conseguenza anche nelle correnti che scorrono in essi.

G_{CM} è invece il guadagno di modo comune che è presente poiché le resistenze scelte R_c/R_d e R'_c/R'_d non sono coppie uguali perfettamente, e rendono asimmetrico l'ingresso, introducendo una tensione di modo comune V_{CM} che è la media delle tensioni in ingresso.

G_{diff} è il guadagno differenziale e caratterizza il guadagno

ideale che il circuito dovrebbe avere se i segnali in ingresso sono simmetrici rispetto allo zero, rendendo il termine $G_{CM} \cdot V_{CM} = 0$.

Per misurare il valore di offset vogliamo quindi che i primi due termini di (2) vengano annullati. Poniamo dunque

$$V_{non-inv} = V_{inv} = 0$$

e osserviamo il valore della tensione in uscita, verificando rispetto al valore di terra dove si pone la tensione in uscita V_{out} . Possiamo quindi usare un *trimmer* presente sulla scheda in modo da modificare la corrente in ingresso e cercare di eliminare l'offset.

Posto l'offset ad un valore trascurabile (nell'ordine dei mV), procediamo a valutare il valore di G_{CM} ponendo

$$V_{non-inv} = V_{inv} \neq 0$$

ed effettuando 5 diverse misure del valore di V_{out} per 5 diversi valori di V_{in} e facendo quindi un fit secondo l'equazione $V_{out} = G_{CM} \cdot V_{in} + q$ scegliendo come parametri G_{CM} e q . Troviamo quindi che i valori dei parametri sono rispettivamente

$$G_{CM} = 0.0133(11)$$

$$q = 0.172(99) \times 10^{-2} \text{ V}$$

e notiamo che giustamente il valore della quota è compatibile con zero.

Misurato il G_{CM} , procediamo a calcolare il valore di G_{diff} usando lo stesso metodo con cui abbiamo trovato G_{CM} senza però impostare $V_{non-inv} = V_{inv}$. I valori dei parametri che il fit ci restituisce sono

$$G_{diff} = 183(16)$$

$$q = -0.04(45) \text{ V}$$

La quota è compatibile con zero e il valore di G_{diff} è compatibile con il guadagno teorico che avevamo calcolato quando abbiamo scelto le resistenze da inserire nel circuito ($G_{teorico} = 1.68(12) \times 10^2$). Inoltre vediamo anche che G_{diff} è diversi ordini di grandezza più grande di G_{CM} per cui possiamo considerare quest'ultimo trascurabile. Infatti il rapporto di reiezione di modo comune (CMRR) è pari a $13.8(16) \times 10^3$.

Un'altra caratteristica che possiamo misurare è la banda passante dell'amplificatore. Per fare ciò impostiamo la tensione di ingresso a diverse frequenze e raccogliamo i valori di V_{out} per costruire un diagramma di Bode della funzione di trasferimento e calcolare la frequenza di taglio (sappiamo infatti che il circuito dovrebbe comportarsi da passa-basso). Utilizziamo quindi di nuovo l'equazione (1) impostando gli stessi parametri e troviamo che

$$G = 182.0(36)$$

$$\nu_0 = 156(100) \text{ kHz}$$

Vediamo inoltre che il valore del guadagno trovato è compatibile con quello ricavato in precedenza. Inoltre il valore della frequenza di risonanza è anche fisicamente sensato; infatti

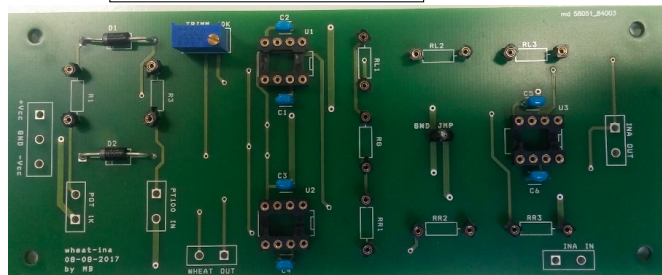
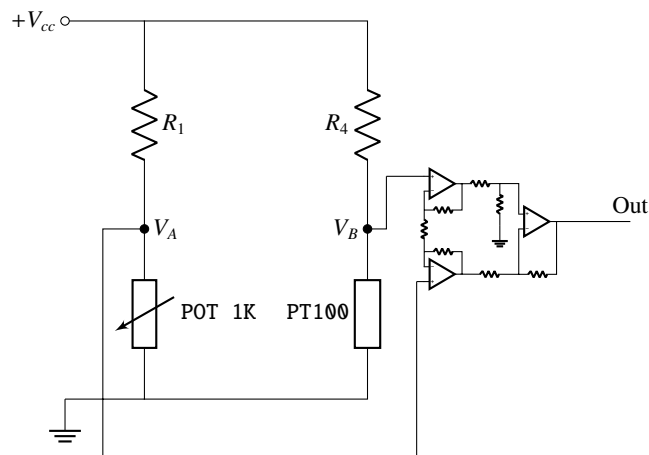


Figura 6 Sopra: Schematico del ponte di Wheatstone e della configurazione utilizzata per effettuare misure. La tensione $+V_{cc}$ fornita al ponte è la stessa utilizzata per alimentare l'amplificatore per strumentazione. Sotto: fotografia del circuito integrato utilizzato. Questo contiene sia posto per le componenti dell'amplificatore per strumentazione, sia il ponte di Wheatstone.

considerando l'amplificatore come costituito da due stadi consecutivi, dalla scelta delle resistenze otteniamo che il primo stadio porta con sé un guadagno pari a 5 (G_1), e il secondo un guadagno pari a circa 32 (G_2). Questi due stadi si comportano come due amplificatori operazionali (LF356) e hanno lo stesso prodotto Guadagno-Banda passante (GBW), del valore di 5 MHz (data-sheet). Quindi a parità di GBW taglia prima lo stadio a guadagno maggiore, e la frequenza di taglio risultante è data da $GBW/G_2 = 156 \text{ kHz}$, perfettamente compatibile con il valore ottenuto.

DESCRIZIONE SETUP SPERIMENTALE

Vogliamo misurare la variazione di tensione ai capi del termometro al platino PT100, per ricavarne la resistenza interna che è legata in modo lineare alla variazione di temperatura. Poiché misuriamo variazioni di tensione possiamo decidere dove porre lo zero della misura, e perciò sfruttiamo il funzionamento del ponte di Wheatstone, che permette, in una precisa configurazione, di imporre il valore della tensione in uscita uguale a zero, e misurare solo le variazioni da questa condizione. Il ponte permette tale funzionamento solo se è ben bilanciato, ovvero se i prodotti incrociati delle resistenze sono uguali tra loro (nel caso della Figura 6: $R_1 \cdot R_{PT} = R_2 \cdot R_4$). Per evitare che la dissipazione di calore per effetto Joule possa influire sulla misura, impostiamo che la corrente massima che possa scorrere nel ramo del PT100 sia 5 mA. Poiché la tensione con cui alimentiamo il ponte è 15 V in quanto utilizziamo V_{cc} , inserendo come R_4 una resistenza da 3 kΩ e poiché

questa resistenza è collegata in serie con il PT100 la resistenza complessiva dovrebbe essere 3100 Ω per cui la corrente nel ramo arriva a valere $V_{cc}/R_{tot} \approx 5 \text{ mA}$. Imponendo la condizione per il bilanciamento del ponte e impostando il potenziometro a 500 Ω ricaviamo che R_1 deve valere 15 kΩ.

Per controllare che il ponte sia effettivamente ben bilanciato, colleghiamo l'uscita del ponte all'oscilloscopio e regolando il potenziometro possiamo vedere quando il segnale è più vicino possibile a zero. Per fare una regolazione ancora migliore colleghiamo l'uscita del ponte all'amplificatore e quella dell'amplificatore all'oscilloscopio, in modo che pur essendo amplificato, il valore della tensione d'uscita, una volta regolata, sia comunque prossima a zero.

L'uscita del ponte di Wheatstone è collegata all'amplificatore per strumentazione in modo che la variazione di tensione sia amplificata e quindi misurabile in modo migliore.

PRESA DATI

Attraverso una interfaccia seriale e un programma di interpretazione del seriale possiamo acquisire e trascrivere a intervalli temporali regolari il valore di tensione misurato dal multimetro da banco Keitley che legge il segnale in uscita dall'amplificatore (Figura 6).

Lasciando il sistema allo stato iniziale (lampadina spenta e strumentazione di misura attiva) colleghiamo l'uscita dell'amplificatore allo sciloscopo per osservare qualitativamente la dimensione della banda del rumore. Per quantificare tali fluttuazioni statistiche dovute al rumore utilizziamo il Keitley e acquisiamo per circa 100 s a intervalli regolari la misura della tensione. Una successiva analisi di questi dati ci porterà a quantificare l'errore per le successive misure.

Poiché vogliamo misurare l'andamento della temperatura rispetto alla distanza della sorgente posizioniamo tale sorgente a distanze fissate rispetto alla posizione del termometro PT100. Misurata tale distanza, vogliamo poi assicurarci che il termometro sia in una condizione stabile, e quindi avviamo il programma di acquisizione dati, e una volta che osserviamo valori stabili della tensione procediamo ad accendere la lampadina e da questo istante consideriamo un intervallo temporale [100 s, 180 s], dopo il quale interrompiamo la presa dati. Ripetiamo questo processo per alcuni valori diversi della distanza d .

SCELTA DEI DATI RACCOLTI

Delle serie di dati raccolti effettuiamo una prima analisi di tipo qualitativo, semplicemente osservandone i grafici di tensione in funzione del tempo. Se il sistema si trova a riposo infatti la tensione in uscita non dovrebbe variare rispetto alla posizione iniziale se non per fluttuazioni legate all'ambiente e ad altri fattori casuali. Dovremmo quindi osservare un comportamento stabile fino all'istante in cui la lampadina non viene accesa e quindi la variazione di tensione è legata al fenomeno dell'irraggiamento.

Prendiamo quindi in considerazione solo i dati per cui le fluttuazioni prima che la lampadina venga accesa siano almeno un ordine di grandezza inferiori alla variazione legata al fenomeno fisico considerato, ovvero per cui una volta accesa

Tabella I Quantità e incertezze legate alla determinazione della distanza.

Quantità	Incertezza (mm)
(stat)	
Allineamento del bulbo con il supporto	1
Allineamento del supporto con il righello	1
Allineamento del righello con la base del PT100	1
Errore di parallasse per ogni allineamento	2
Errore sul possibile scivolamento durante le misure	2
(syst)	
Perpendicolarità degli indicatori di allineamento sul PT100	3
Perpendicolarità degli indicatori di allineamento sul supporto della lampada	3
Disallineamento orizzontale sorgente/PT100 ^a	...
Totale statistico (1σ)	$7/\sqrt{3}$
Totale sistematico (1σ)	$6/\sqrt{3}$

^a Non valutabile in una analisi dati a posteriori.

la lampadina, si osservi in modo evidente una variazione della tensione rispetto alla condizione di stabilità precedente. Decidiamo quindi di ignorare i valori presi per distanze maggiori di 20 cm. Tuttavia osserviamo che i dati raccolti a una distanza di 15 cm non rientrano nelle condizioni prefissate, quindi non li consideriamo per successive analisi.

Inoltre ci preoccupiamo di rimuovere i valori corrispondenti agli istanti precedenti all'accensione della lampadina, in quanto non sono influenti per la nostra analisi.

VALUTAZIONE PROPAGAZIONE ERRORI

MODELLO #1 DI ANALISI DELLA VARIAZIONE DI TENSIONE

I dati ottenuti si presentano come letture di tensione in funzione del tempo. Non essendo a conoscenza di una precisa legge fisica che regoli questo andamento della tensione in relazione al tempo, possiamo però procedere ipotizzando alcuni modelli che possano descrivere il fenomeno che si osserva.

Innanzitutto quando la lampadina viene accesa la luce raggiunge in modo immediato il sensore resistivo che quindi per il fenomeno dell'irraggiamento viene scaldato, e poiché la resistenza del PT100 dipende in modo lineare dalla sua temperatura, cambierà anche la tensione ai capi dello strumento.

Tuttavia la lampadina scalda anche il vetro e l'aria che circondano il nostro sensore. Questo trasferimento di calore al vetro e all'aria fa sì che il PT100 risenta anche del loro effetto. Noi però siamo interessati solamente all'effetto prodotto dalla lampadina per mezzo dell'irraggiamento. Poiché quindi possiamo considerare la velocità di trasferimento di calore per irraggiamento molto maggiore della velocità di trasferimento di calore per conduzione termica, ipotizziamo che i primi secondi dall'accensione della lampadina siano caratterizzati principalmente dall'effetto dell'irraggiamento.

Inoltre, ad un primo ordine di approssimazione su t , per i primi secondi possiamo ipotizzare che l'andamento della tensione sia lineare. Osservando i dati raccolti vediamo che il massimo intervallo che possiamo prendere affinché il comportamento lineare della curva sia presente in tutti i grafici che abbiamo selezionato è di 10 s per tutte le curve.

Eseguendo un fit lineare possiamo quindi ottenere il valore della velocità di variazione della tensione dV/dt per ogni distanza che abbiamo selezionato.

A questo punto procediamo a raccogliere le coppie $(d, dV/dt)$ in un grafico per poterne osservare il comportamento. La nostra ipotesi è infatti che maggiore è la distanza, minore sarà la velocità con cui la tensione cambierà a causa dell'irraggiamento.

Volgiamo infatti verificare che i punti raccolti siano in relazione come

$$\frac{dV}{dt} \propto d^{-2}$$

e quindi eseguiamo un fit come

$$\frac{dV}{dt} = p_0 \cdot (d + p_2)^{p_1}$$

dove il fattore p_1 vogliamo verificare che sia compatibile con il valore atteso di -2, mentre il valore di p_2 rappresenta l'eventuale offset sui valori raccolti della distanza. Il parametro p_0 rappresenta invece la costante di proporzionalità, ed è caratteristica del problema che stiamo considerando.

Dati completi e codice sorgente

Tutti i dati completi a supporto dei grafici, e il relativo codice, sono visualizzabili su <https://github.com/mattiasotgia/Lab2>. L'analisi dati viene eseguita su un programma sviluppato in C++ basandosi su framework pubblici: ROOT, per la realizzazione dei grafici e il fit dei modelli (<https://root.cern/>).

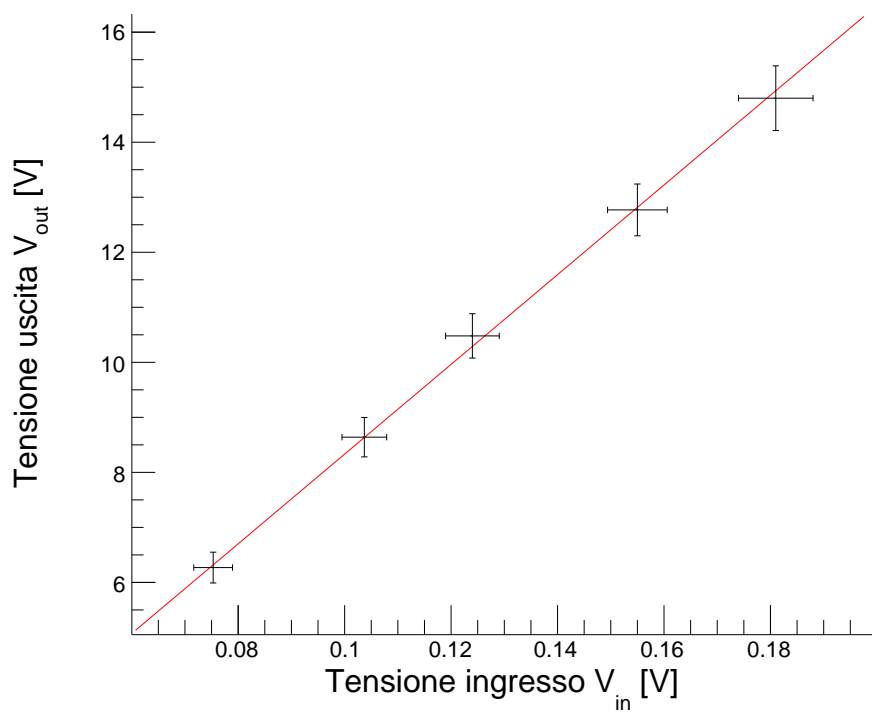
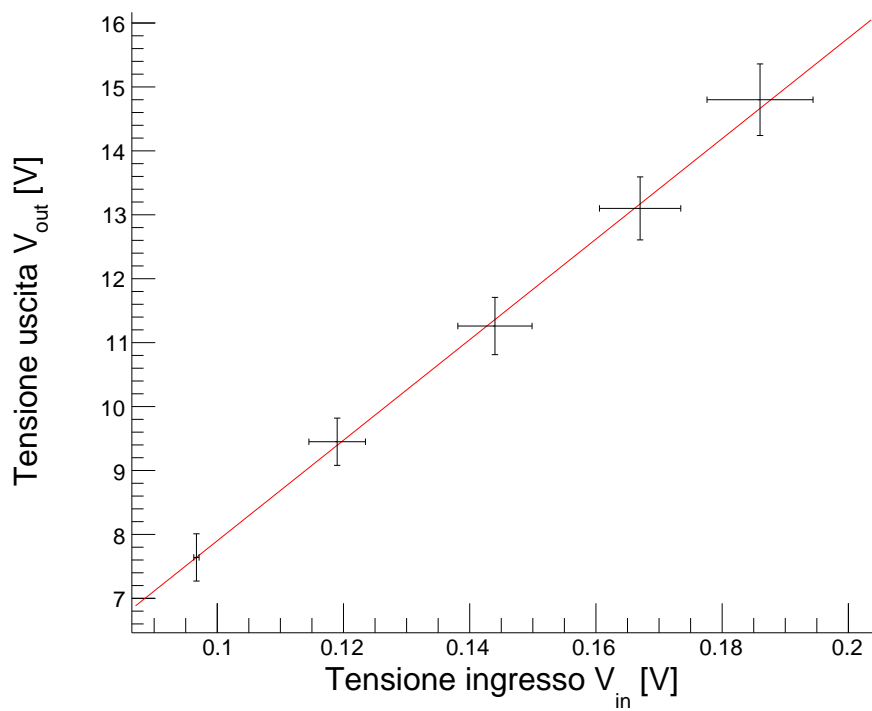


Figura S-7 Misura del guadagno degli amplificatori operazionali realizzati in sezione . Sopra: valori variabili di tensione in ingresso e in uscita per misurare il guadagno dello strumento, in configurazione invertente. Sotto: come sopra, per la configurazione non invertente.

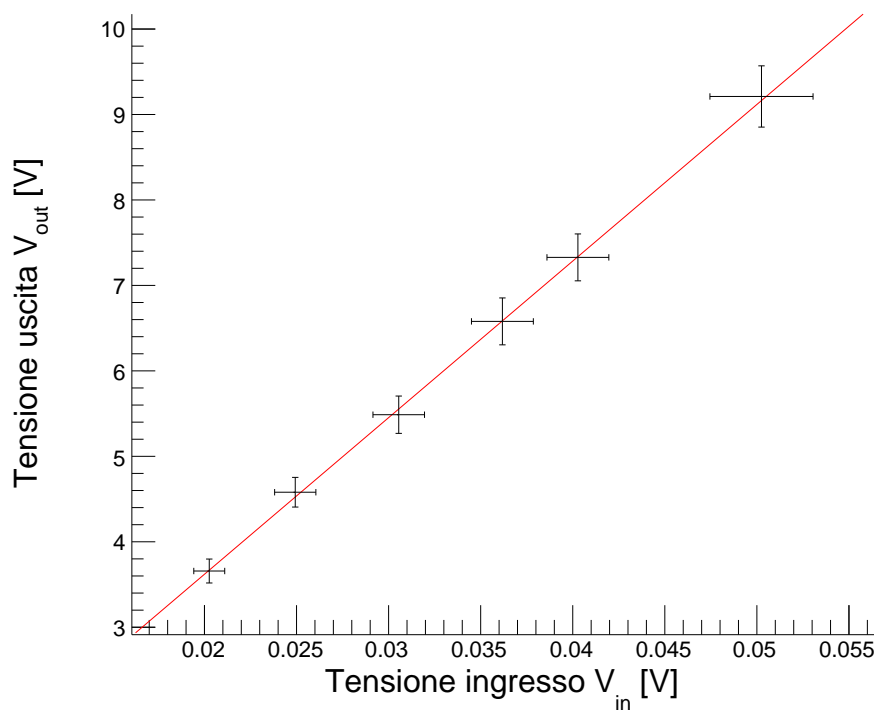
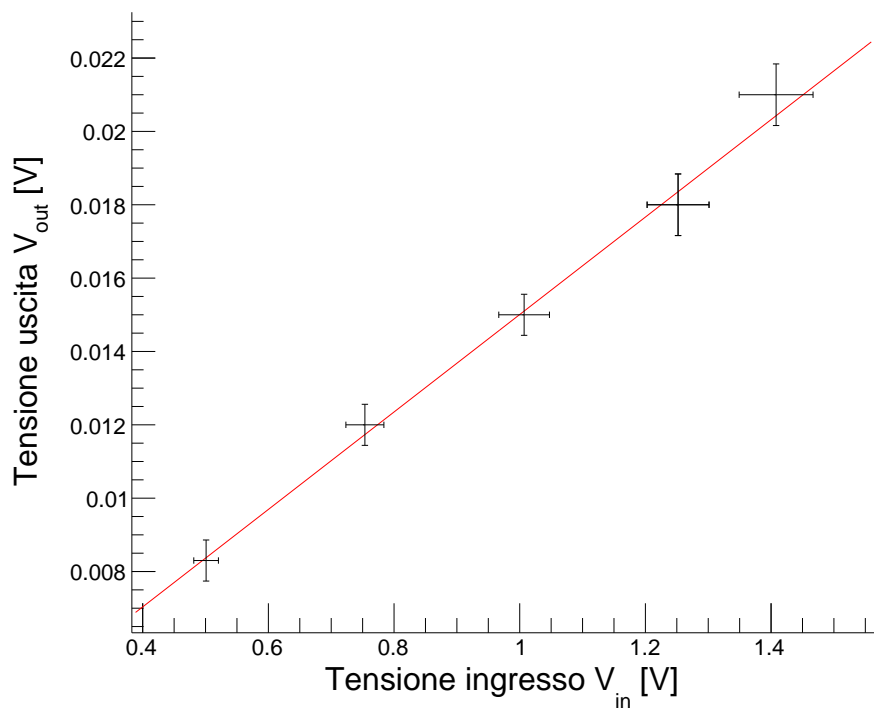


Figura S-8 Sopra: Analisi del guadagno in modo comune G_{CM} dell'amplificatore per strumentazione ottenute misurando la tensione in ingresso e in uscita all'amplificatore operazionale, fornendo tensione uguale al capo invertente e non invertente. Sotto: Analisi del guadagno differenziale G_{diff} dell'amplificatore per strumentazione, eseguito utilizzando tensioni diverse ai capi invertente e non invertente.