

# Misura della permeabilità magnetica relativa $\mu_R$ con circuito RLC risonante<sup>a</sup>

Francesco Polleri<sup>1, b</sup> e Mattia Sotgia<sup>1, c</sup>

(Gruppo A1)

<sup>1</sup>Dipartimento di Fisica,  
Università degli Studi di Genova,  
Italia

(Dated: presa dati 9 novembre 2021, consegnata in data 22 novembre 2021)

## INTRODUZIONE

Si vuole misurare il valore della permeabilità magnetica di due materiali di cui non conosciamo esatta composizione chimico-fisica ma che possiamo ipotizzare omogenei, lineari e isotropi (LHI) fino al primo grado di approssimazione.

Poiché i tipi di misure più precisi che siamo capaci di effettuare sono misure di tempo (in termini di periodo e di frequenza) sfruttiamo il circuito risonante RLC per determinare il valore della frequenza di taglio ( $\nu_0$ ), che risulta legata al valore dell'induttanza e della capacità del condensatore. Come induttanza usiamo un rocchetto plastico su cui sono avvolte  $N$  spire di rame, nel quale può essere appunto inserito il volume di materiale che è creato in modo da riempire quasi completamente il rocchetto.

Quindi dalla misura della frequenza troviamo il valore di  $L$ , essendo noti i valori delle altre componenti circuitali, e confrontando i diversi valori possiamo trovare  $\mu_R$  per ogni materiale.

## METODI

*Caratterizzazione del circuito RLC*— Il circuito RLC è definito da tre parametri: la frequenza di taglio  $\nu_0$ , il fattore di qualità  $Q$  e il parametro  $A$ . Analizzando il circuito troviamo infatti che il valore della funzione di trasferimento è dato da

$$|H[\nu]| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)^2}},$$

per cui osserviamo che il suo valore massimo (cioè 1), si ottiene per  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  che è il valore di quella che abbiamo chiamato frequenza di taglio ( $\omega_0$  oppure  $\nu_0$ ). Per valori più bassi e più alti di pulsazione e quindi di frequenza, il valore della funzione di trasferimento diminuisce, per cui il circuito si comporta come un filtro passa banda intorno al valore della frequenza di taglio che a seconda dei valori di  $L$  e di  $C$  del circuito può essere modificata. Allo stesso modo l'equazione della funzione di trasferimento può essere riscritta come

$$|H[\nu]| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_{id}^2 \left(\frac{\nu}{\nu_0} - \frac{\nu_0}{\nu}\right)^2}},$$

dove  $Q$  è  $Q_{id} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$  (e abbiamo sostituito  $\omega$  con  $\nu = \omega/2\pi$  dove  $\nu = 1/T$ ), per cui notiamo che il filtro diventa tanto più selettivo, tanto più diventa grande  $Q$ , che viene definito quindi fattore di qualità. Inoltre dobbiamo anche considerare che l'induttanza si comporta in realtà anche come una resistenza, per cui dobbiamo riconsiderare il valore della funzione di trasferimento inserendo questo ulteriore parametro  $A = \left(1 + \frac{R_L}{R}\right)^2$  da cui

$$|H[\nu]| = \frac{1}{\sqrt{A + Q_{id}^2 \left(\frac{\nu}{\nu_0} - \frac{\nu_0}{\nu}\right)^2}}. \quad (1a)$$

Perciò in base ai valori di resistenza, capacità e induttanza che inseriamo all'interno del circuito possiamo modificare i valori di tali parametri.

Analogamente a quanto avviene per il modulo della funzione di trasferimento (in eq. 1a), possiamo individuare la fase come

$$\varphi[\nu] = -\arctan\left(\frac{Q}{\sqrt{A}} \left(\frac{\nu}{\nu_0} - \frac{\nu_0}{\nu}\right)\right) \quad (1b)$$

*Caratterizzazione dell'induttanza*— La bobina su cui andiamo a eseguire le misure di  $L$  è composta da un rocchetto cilindrico di plastica cavo, attorno al quale viene avvolto un filo di rame smaltato, a comporre 900 spire. L'apparato così creato si comporta come un solenoide caratterizzato da

$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S \quad (2)$$

con  $\Phi_B = B \cdot NS$  il flusso del campo magnetico di un solenoide in cui scorre corrente  $I$ , dove consideriamo  $n = N/\ell$  ottenendo che il solenoide è caratterizzato da

$$L = \mu_0 n^2 \ell S. \quad (3)$$

Consideriamo, in primo ordine di approssimazione che il rocchetto di plastica abbia permeabilità magnetica pari a 1, valore che non si discosta molto dalla realtà sperimentale.

Inserendo un materiale all'interno del rocchetto ci aspettiamo una variazione del valore di  $L$ , dal quale vogliamo ricavare il valore di  $\mu_R$  corrispondente al materiale. I materiali risultano avere dimensioni ( $a \times a \times h$ ) uguali a  $11.90 \times 11.90 \times 68.00$  mm (dimensioni del materiale A) e  $12.10 \times 12.10 \times 68.00$  mm (secondo materiale, B). (Le misure sono riportate in Tab. 1) Una volta inseriti nella cavità del solenoide non riescono però a riempirne completamente la superficie. Coprono invece tutta la lunghezza del solenoide, eccedendo rispetto al rocchetto, lungo 60.00 mm, di pochi millimetri, per cui ci riserviamo di non considerare effetti di bordo che richiederebbero calcoli non eseguibili sulla base dei dati raccolti.

Dall'equazione (2) abbiamo che  $L \cdot I = \Phi_B$ . Quando inseriamo il materiale il flusso  $\Phi_B$  si può ottenere come somma del flusso interno al materiale ed esterno (nello spazio tra il materiale e la bobina). Otteniamo quindi che

$$L_{eq} = \frac{\Phi_B^{int} + \Phi_B^{ext}}{I} = \mu_0 n^2 \ell (a^2 \mu_R + (S - a^2)) = \mu_0 n^2 \ell (S + a^2 (\mu_R - 1)) \quad (4a)$$

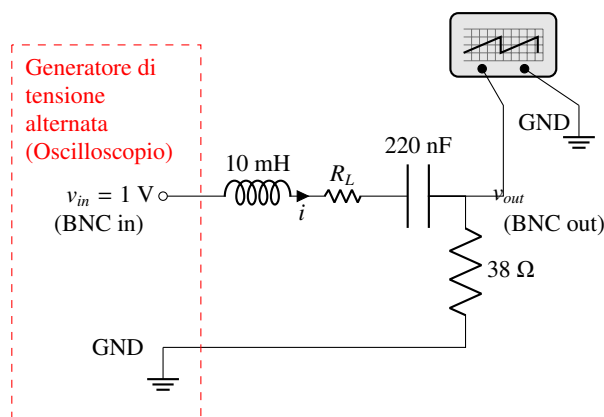


Figura 1 Circuito utilizzato per il filtro passa-banda progettato nell'esperienza, i valori di  $R$ ,  $L$  e  $C$  sono i valori nominali riportati sul componente. La resistenza  $R_L$  è la resistenza interna all'induttanza, che verifichiamo essere non nulla.

<sup>a</sup> Esperienza n. 3

<sup>b</sup> s5025011@studenti.unige.it

<sup>c</sup> s4942225@studenti.unige.it

Tabella I Caratteristiche fisiche solenoide e materiali.

Caratteristica	
Altezza solenoide (mm) <sup>a</sup>	60.0(1)
Diametro solenoide (mm)	24.0(1)
Numero di spire	900
Lato nucleo Fe (materiale A) (mm)	12.10(5)
Altezza nucleo Fe (mm)	68.00(5)
Lato nucleo Al (materiale B) (mm)	11.90(5)
Altezza nucleo Al (mm)	68.00(5)

<sup>a</sup> Valore  $\ell$  della lunghezza degli avvolgimenti; il rocchetto di plastica è più lungo per contenere il nucleo del materiale magnetico.

dove  $a^2$  indica la superficie di base del materiale considerato, con il fattore

$$\frac{\Phi_B^{\text{int}}}{I} = \mu_0 \mu_R n^2 \ell a^2 \quad (4b)$$

che tiene conto della permeabilità magnetica relativa del materiale e il fattore

$$\frac{\Phi_B^{\text{ext}}}{I} = \mu_0 n^2 \ell (S - a^2) \quad (4c)$$

che invece è il flusso fuori dal materiale.

Da queste considerazioni otteniamo che quindi possiamo ricavare il valore della permeabilità magnetica  $\mu_R$  come

$$\mu_R = \frac{L_{eq} - \mu_0 n^2 \ell S}{\mu_0 n^2 \ell a^2} + 1 \quad (5)$$

**Scelta dei componenti del circuito**— Vogliamo costruire un circuito la cui frequenza di taglio sia circa 3kHz in modo che intorno a questo valore di frequenza il segnale all'interno del circuito non sia disturbato da possibili rumori presenti a frequenze nell'ordine dei 100Hz o da altre interferenze presenti invece quando arriviamo a oltre 20KHz. Un'altra condizione che imponiamo è che il fattore di qualità sia almeno maggiore di 4 in modo che la banda che filtriamo attraverso il circuito sia sufficientemente stretta. Nello stesso momento vogliamo che questo fattore non sia troppo elevato perché ciò renderebbe invece la banda troppo stretta, rendendo potenzialmente più difficile eseguire un fit dei dati. Inoltre il fattore di qualità, per come è stato definito, è legato ai valori di  $R$ ,  $L$  e  $C$ , ma questi, per le condizioni in cui operiamo in laboratorio, cioè alle determinate frequenze descritte sopra, non permettono valori di  $Q$  elevati.

Dunque per il nostro progetto necessitiamo di particolari valori di  $R$ ,  $C$  ed  $L$ . Quest'ultimo è già determinato, in quanto è legato alle caratteristiche fisiche del rocchetto di filo che appunto utilizziamo come induttanza. Quindi partendo da tale valore, che possiamo determinare in modo diretto usando il tester a nostra disposizione, ricaviamo anche quelli di  $R$  e  $C$  imponendo le condizioni sulla frequenza di risonanza e sul fattore di qualità. Se quindi vogliamo che  $v_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{1}{2\pi}$  sia pari a 3kHz, con  $L$  misurato grazie al tester che vale 10.03mH, allora  $C = \frac{1}{L 4\pi^2 v_0^2}$  deve assumere un valore prossimo a 220nF. Prima di procedere a misurare  $R$ , attraverso la condizione su  $Q$ , misuriamo anche il valore della resistenza dell'induttanza, usando anche in questo caso il tester e otteniamo che  $R_L$  è pari 3.70Ohm. Imponiamo che il valore di  $Q$  sia 6 e in base alla relazione  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$  troviamo che  $R = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}}$ , valore a cui però devo sottrarre quello di  $R_L$  in quanto la  $R_{eq}$  che ottengo dall'equazione precedente deriva in realtà dalla serie di  $R$  e  $R_L$ . Troviamo quindi che  $R = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}} - R_L$ , cioè circa 380Ohm. In base ai valori trovati di  $R$  e  $C$ , cerchiamo tra i dispositivi presenti in laboratorio quelli che hanno valore nominale che più si avvicina a questi. Prendiamo quindi una capacità da 220nF e una resistenza da 380Ohm e misuriamo questi valori con il tester, per ottenere il loro effettivo valore.

Quindi misuriamo

$$R = 38.0(3) \Omega$$

$$L = 10.0(5) \text{ mH}$$

$$C = 220(2) \text{ nF}$$

**Presi dati**—Utilizziamo l'oscilloscopio come generatore di segnale in alternata che forniamo come input al nostro circuito. La frequenza di tale segnale è modificabile e il segnale di output del filtro cambia in base a tale frequenza.

Per individuare la frequenza di taglio del circuito misuriamo, sempre utilizzando l'oscilloscopio, la tensione in ingresso  $v_{in}$ , la tensione in uscita  $v_{out}$ , il periodo del segnale  $T$  (uguale per entrambi i segnali in quanto sono isofrequenziali) e il ritardo tra i due segnali  $dt$ , con i rispettivi fondo-scala necessari per ricavare l'errore.

La prima cosa che facciamo è far variare la frequenza di  $v_{in}$  per individuare il punto in cui il ritardo tra i due segnali è nullo, trovando quindi quella che dovrebbe essere  $v_0$ . A questo punto consideriamo un range di frequenze compreso tra una

decade prima e una decade dopo il valore della frequenza di taglio e per ogni decade prendiamo tre misure di  $v_{in}$ ,  $v_{out}$ ,  $T$  e  $dt$  (ad esempio a 1kHz, 2kHz, 5kHz). Insieme a questi valori ne raccogliamo di ulteriori intorno a  $v_0$ .

Ripetiamo questo procedimento tre volte, prima senza inserire alcun materiale all'interno dell'induttanza e poi aggiungendo uno per volta i due materiali che abbiamo a disposizione.

I valori che abbiamo acquisito sono riportati nelle tabelle S-7, S-8 e S-9.

## MODELLO DI FIT SUI PARAMETRI DI CARATTERIZZAZIONE DEL FILTRO RLC

Utilizziamo i dati raccolti per creare i grafici dei diagrammi di Bode della funzione di trasferimento e della fase. Per fare ciò calcoliamo  $|H[v]|$  come rapporto  $v_{out}/v_{in}$  e la fase  $\varphi$  come  $2\pi \cdot dt/T$ . Di conseguenza gli errori relativi a  $|H[v]|$  e  $\varphi[v]$  sono ricavati come

$$\varepsilon_{|H|} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{v_{out}}}{v_{in}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_{v_{in}} v_{out}}{v_{in}^2}\right)^2}$$

$$\varepsilon_{\varphi} = 2\pi \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{dt}}{T}\right)^2 + \left(\frac{dt \cdot \varepsilon_T}{T^2}\right)^2}$$

Gli errori statistici di  $v_{in}$ ,  $v_{out}$ ,  $T$  e  $dt$  sono pari agli errori assoluti divisi per  $\sqrt{3}$ . Per trovare il valore degli errori assoluti cerchiamo sul data-sheet dell'oscilloscopio come calcolarli.

Trascriviamo quindi in tabelle (si vedano Tabella II, III, IV) i valori di  $|H[v]|$ ,  $\varphi$  e  $v$  con i rispettivi errori. Da tali tabelle costruiamo i grafici dei diagrammi di Bode per la funzione di trasferimento e per la fase (Figura 2).

Per realizzare il fit di  $|H[v]|$  utilizziamo l'equazione (1a) impostando come parametri  $A$ ,  $Q^2$  e  $v_0$ , mentre per la fase  $\varphi$  utilizziamo l'equazione (1b) impostando come parametri  $\frac{Q}{\sqrt{A}}$  e  $v_0$ . Quindi, una volta che gli abbiamo ricavati, possiamo verificare la compatibilità per  $\frac{Q}{\sqrt{A}}$  (dal primo fit ricaviamo separatamente  $Q^2$  e  $A$ , però da questi possiamo comunque calcolare  $\frac{Q}{\sqrt{A}}$ ) e  $v_0$ . Se questi si rivelano compatibili, ricaviamo la miglior stima e in particolare dalla relazione

$$v_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}$$

considerando noto il valore assunto da  $C$ , possiamo trovare la miglior stima del coefficiente di autoinduzione  $L$ .

Quindi, nei casi in cui abbiamo inserito il materiale dentro al rocchetto, in base all'equazione (5) troviamo  $\mu_R$  del relativo metallo. Inoltre in quest'ultima relazione troviamo che in realtà  $\mu_0 n^2 IS$  è proprio il valore dell'induttanza quando non vi sono materiali dentro al solenoide (la chiamiamo  $L_0$ ). Perciò dal primo caso ci possiamo ricavare il valore di  $L_0$  per poi utilizzarla successivamente.

## CALCOLO DELLA PERMEABILITÀ MAGNETICA RELATIVA

Dal fit del modulo della funzione di trasferimento  $|H[v]|$  troviamo i valori dei parametri  $A$ ,  $Q$  e  $v_0$  ( $A$  e  $v_0$  sono effettivi parametri utilizzati nel fit, mentre  $Q$  è ricavato dal parametro di fit  $Q^2$  con relativo errore che discende dalla propagazione degli errori statistici). Dal fit della fase otteniamo invece i valori dei parametri  $Q/\sqrt{A}$  e  $v_0$  con i relativi errori.

Tabella II Valori riferiti al grafico per il solenoide libero

Ampiezza $ H[v]  \pm \varepsilon_H$	Fase (rad) $\varphi[v] \pm \varepsilon_\varphi$	Frequenza (Hz) $\nu \pm \varepsilon_\nu$
0.0642(20)	1.5017(92)	500.00(72)
0.1377(43)	1.4244(93)	1000.0(14)
0.353(12)	1.1687(92)	2000.0(29)
0.361(12)	1.1624(92)	2000.0(29)
0.582(20)	0.8796(91)	2500.0(36)
0.764(28)	0.5982(91)	2800.3(40)
0.850(28)	0.1244(96)	3300.3(50)
0.776(25)	-0.407(11)	3599.7(62)
0.453(15)	-1.0367(94)	5000.0(74)
0.1572(49)	-1.3572(89)	10 000(10)
0.0733(23)	-1.4200(90)	20 000(30)
0.0322(11)	-1.4451(89)	50 000(70)

Tabella III Valori riferiti al grafico per il solenoide con il materiale A nel nucleo

Ampiezza $ H[v]  \pm \varepsilon_H$	Fase (rad) $\varphi[v] \pm \varepsilon_\varphi$	Frequenza (Hz) $\nu \pm \varepsilon_\nu$
0.0407(14)	1.5080(96)	500.00(74)
0.0969(32)	1.376(1)	1000.0(16)
0.1261(47)	1.2894(97)	1200.1(18)
0.1882(63)	1.1085(95)	1500.2(22)
0.272(15)	0.806(10)	1799.9(29)
0.319(10)	-0.256(10)	2500.0(40)
0.342(11)	-0.0058(94)	2311.1(35)
0.2335(84)	-0.652(11)	3000.3(50)
0.1802(59)	-0.836(11)	3500.2(61)
0.1103(41)	-1.0367(97)	5000.0(76)
0.0905(31)	-1.086(11)	6000(10)
0.0556(21)	-1.1561(97)	10 000(20)

Tabella IV Valori riferiti al grafico per il solenoide con il materiale B nel nucleo

Ampiezza $ H[v]  \pm \varepsilon_H$	Fase (rad) $\varphi[v] \pm \varepsilon_\varphi$	Frequenza (Hz) $\nu \pm \varepsilon_\nu$
0.0381(14)	1.531(10)	500.00(79)
0.0815(32)	1.470(10)	1000.0(16)
0.2094(78)	1.294(11)	2000.0(35)
0.336(13)	1.123(10)	2500.0(39)
0.541(21)	0.7729(98)	3000.3(47)
0.755(29)	0.088(11)	3500.2(59)
0.619(23)	-0.573(10)	4000.0(67)
0.446(17)	-0.905(10)	4500.5(73)
0.342(13)	-1.0681(97)	5000.0(76)
0.273(10)	-1.165(11)	5500.6(92)
0.2300(89)	-1.221(10)	5998.8(96)
0.1080(40)	-1.370(10)	10 000(20)

In generale inoltre osserviamo che l'unico fattore di correlazione tra i dati dei due grafici è il periodo, che però presenta errore molto piccolo rispetto all'errore sul modulo o sulla fase della funzione di trasferimento, rendendo quindi in prima approssimazione i due set di dati scorrelati. Questa conclusione può essere sfruttata per ricavare una miglior stima dei parametri ottenuti, considerandone una media pesata sugli errori. Questa miglior stima può inoltre essere utilizzata per ottenere un valore vero di  $L_{eq}$  più preciso.

Dal circuito considerato con l'induttanza vuota otteniamo

$$\begin{aligned} A &= 1.369(60) \\ Q &= 2.336(35) \\ \nu_0^H &= 3.312(24) \text{ kHz} \\ Q/\sqrt{A} &= 2.089(20) \\ \nu_0^\varphi &= 3.3336(58) \text{ kHz} \end{aligned}$$

dove possiamo verificare entro  $3\sigma$  la compatibilità di  $\nu_0^H$  e  $\nu_0^\varphi$  e del rapporto  $Q/\sqrt{A}$  tra il primo diagramma di Bode e il se-

condo. Poichè otteniamo che i valori delle frequenze di taglio risultano compatibili, possiamo ottenere una miglior stima del suo valore. Questo valore ( $\nu_0^* = 3.3325(57) \text{ kHz}$ ) possiamo sfruttarlo perciò per ottenere il valore del coefficiente di autoinduzione  $L_0$ , valore che corrisponde all'induttanza libera, e potrà esserci utile nel calcolo della permeabilità relativa per i casi successivi. Otteniamo quindi

$$L_0 = (4\pi^2 C)^{-1} = 10.368(96) \text{ mH}$$

che risulta essere un valore compatibile entro  $3\sigma$  con il valore di  $L$  misurato in laboratorio.

Inserendo invece il materiale A i valori dei parametri sono

$$\begin{aligned} A &= 8.90(42) \\ Q &= 5.134(90) \\ \nu_0^H &= 2.291(19) \text{ kHz} \\ Q/\sqrt{A} &= 1.658(15) \\ \nu_0^\varphi &= 2.3826(45) \text{ kHz} \end{aligned}$$

In questo caso possiamo verificare la non compatibilità dei valori entro  $3\sigma$ . Anche i valori di  $\nu_0^H$  e  $\nu_0^\varphi$  non risultano compatibili entro  $3\sigma$ .

Procediamo quindi a calcolare il valore di  $L$  e del coefficiente di permeabilità magnetica nei due casi separati. Dalla equazione (5) otteniamo una relazione che lega il valore di  $\mu_R$  con il valore di  $L_{eq}$ , ma dalle osservazioni precedenti per cui  $L_0 = \mu_0 n^2 \ell S$  (3), possiamo descrivere il valore della permeabilità magnetica come

$$\frac{L_{eq}^{H,\varphi}(\text{Fe}) - L_0}{\mu_0 n^2 \ell a^2} + 1$$

ottenendo quindi

$$\begin{aligned} \mu_R^H(\text{Fe}) &= 5.66(12) \\ \mu_R^\varphi(\text{Fe}) &= 4.992(86) \end{aligned}$$

Infine per il materiale B troviamo che i valori ricavati sono

$$\begin{aligned} A &= 1.77(10) \\ Q &= 3.755(56) \\ \nu_0^H &= 3.549(19) \text{ kHz} \\ Q/\sqrt{A} &= 2.719(26) \\ \nu_0^\varphi &= 3.5710(57) \text{ kHz} \end{aligned}$$

dove osserviamo come nel caso iniziale, la compatibilità entro  $3\sigma$  dei valori ottenuti.

Poiché i valori dei parametri sono compatibili possiamo ottenere il valore della miglior stima di  $\nu_0$ , che risulta essere

$$\nu_0^* = 3.5693(54) \text{ kHz}$$

per ottenere

$$L_{eq}(\text{Al}) = (4\pi^2 C)^{-1} = 9.038(83) \text{ mH}.$$

Dato questo valore del coefficiente di autoinduzione, dall'equazione trovata per il primo materiale derivata da (5) otteniamo il valore della permeabilità magnetica relativa

$$\mu_R(\text{Al}) = 0.446(53).$$

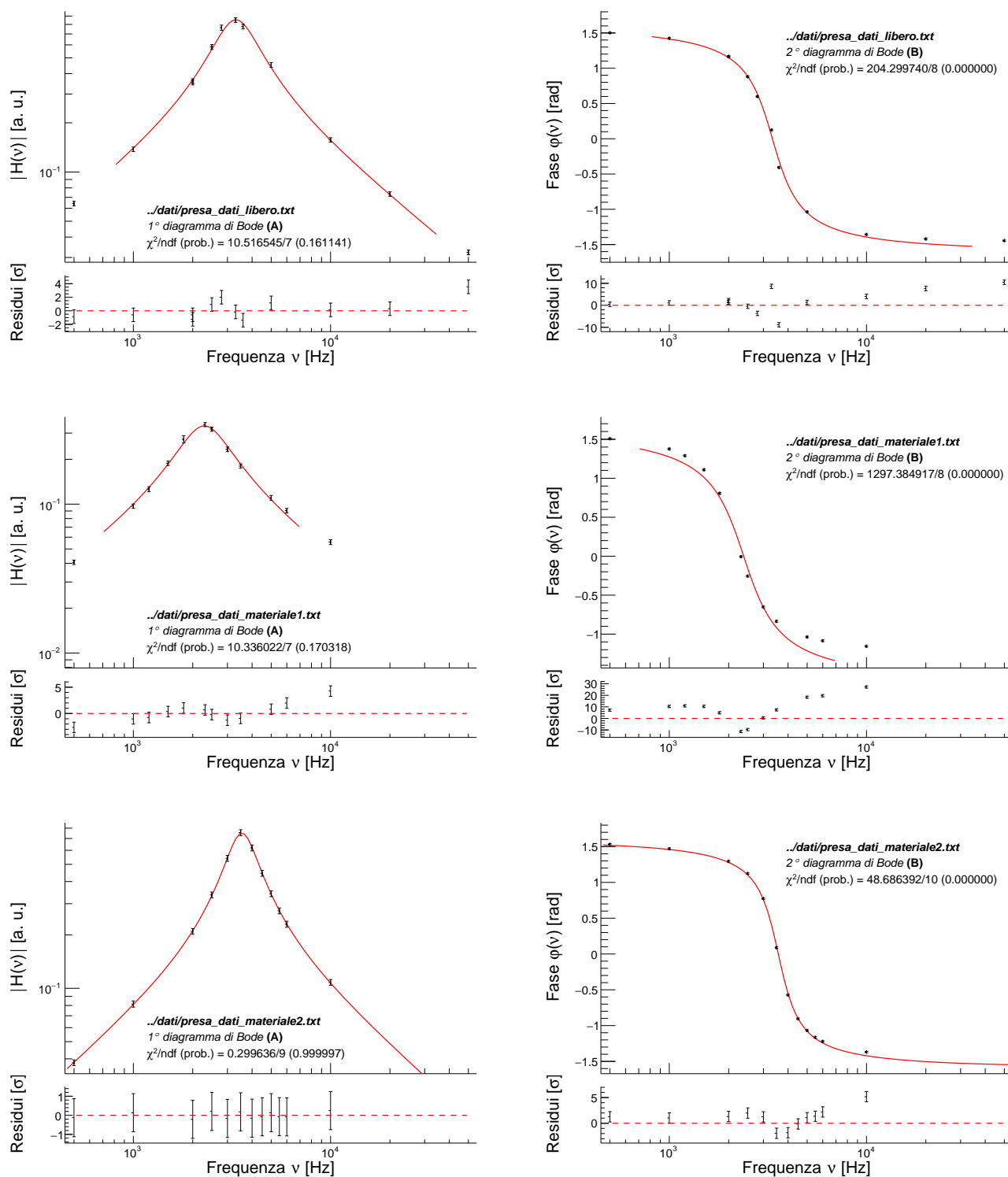


Figura 2 Diagrammi di Bode per il filtro circuito RLC utilizzato. Dall'alto verso il basso: caso solenoide vuoto, solenoide con materiale A (Fe), solenoide con materiale B (Al). Gli assi sono allineati per evidenziare lo spostamento della frequenza di risonanza (picco della funzione di trasferimento) verso frequenze più basse per il materiale A, e invece la quasi identità tra il caso libero e il secondo materiale, che possiamo quindi presupporre essere scarsamente magnetico, ovvero diamagnetico o paramagnetico (la distinzione richiede analisi più dettagliata del risultato in termini quantitativi).

#### MODELLO DI FIT SULLE COMPONENTI CIRCUITALI

di fatto derivati dai valori di  $R$ ,  $R_L$ ,  $L$  e  $C$ , secondo le relazioni

$$A = \left(1 + \frac{R_L}{R}\right)^2 \quad (6)$$

Il modello prima usato sfruttava i parametri  $A$ ,  $Q^2$  e  $\nu_0$  per la funzione di trasferimento e  $\frac{Q}{\sqrt{A}}$  e  $\nu_0$  per la fase, che sono però

$$Q^2 = \frac{1}{R^2} \frac{L}{C} \quad (7)$$

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \quad (8)$$

La funzione di trasferimento e la funzione della fase trovate in (1a) e (1b) sono perciò effettivamente funzioni di  $R$ ,  $R_L$ ,  $L$  e  $C$  definite rispettivamente come

$$|H[v]| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_L}{R}\right)^2 + \frac{1}{R^2} \left(2\pi\nu L - \frac{1}{2\pi\nu C}\right)^2}} \quad (9a)$$

dove i parametri della funzione sono  $R$ ,  $R_L$ ,  $L$  e  $C$ , e

$$\varphi[v] = -\arctan\left(\frac{2\pi\nu L - \frac{1}{2\pi\nu C}}{R + R_L}\right) \quad (9b)$$

dove i parametri sono  $R + R_L$ ,  $L$  e  $C$ .

Eseguendo un fit di questi modelli relativamente ai diagrammi di Bode come in Figura 2, otteniamo che minimizzando  $|H[v]|$  e  $\varphi[v]$  sul primo e sul secondo diagramma di Bode possiamo ricavare i valori delle componenti del circuito.

### VALORI DELLE COMPONENTI E CALCOLO DEL COEFFICIENTE DI PERMEABILITÀ MAGNETICA

Minimizzando le funzioni secondo questo secondo modello considerato, otteniamo i valori dei coefficienti come riportato in Tabella V.

Tabella V Valori ottenuti dalla minimizzazione del secondo modello

Caso	Resist. eq. $R + R_L$ ( $\Omega$ )	Coeff. autoinduzione $L$ (mH)	Capacità $C$ (nF)
$ H $ (Libero) <sup>a</sup>	80(10) + 12.9(30)	8.5(15)	270(50)
$ H $ (Fe) <sup>a</sup>	49.0(82) + 97(17)	17.5(29)	276(46)
$ H $ (Al) <sup>a</sup>	$5(18) \times 10^1 + 17(59)$	9(30)	$24(83) \times 10^1$
$\varphi$ (Libero)	98(21)	9.8(21)	233(50)
$\varphi$ (Fe)	179(56)	19.8(62)	225(70)
$\varphi$ (Al)	75(40)	9.1(48)	218(116)

<sup>a</sup> Il valore di  $R + R_L$  è ottenuto come somma dei due parametri di fit

Con i valori ottenuti possiamo, dopo averne verificato la compatibilità, ricavare la miglior stima del valore di  $L_{eq}$  rispettivamente a ogni caso studiato, ottenendo

$$\begin{aligned} L_0^* &= 8.9(12) \text{ mH} \\ L^*(\text{Fe}) &= 17.9(27) \text{ mH} \\ L^*(\text{Al}) &= 9.1(48) \text{ mH} \end{aligned}$$

Di conseguenza i valori di  $\mu_R$  per il materiale A (Fe) e il materiale B (Al) sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} \mu_R(\text{Fe}) &= 4.6(12) \\ \mu_R(\text{Al}) &= 1.1(21) \end{aligned}$$

### CONSIDERAZIONI SU ERRORI A BASSE E ALTE FREQUENZE

Quando abbiamo operato con valori di  $\nu$  attorno a frequenze nell'ordine del 100Hz abbiamo osservato visivamente sull'oscilloscopio che il segnale di  $v_{out}$  era molto disturbato, per cui per misurare il suo valore ci siamo affidati a una media operata dall'oscilloscopio. Nel fare questo passaggio abbiamo dovuto

quindi tenere conto che l'errore su queste misure era diverso da quanto abbiamo ricavato per gli altri punti. Avevamo la possibilità scegliere di procedere in due modi. Da una parte decidere di sovrastimare l'errore facendo misure *a occhio* e quindi dare meno peso a questi punti nel fit. D'altra parte procedere invece con l'esclusione dal fit di tali punti. Abbiamo di procedere con quest'ultima opzione in quanto la prima non fornisce un risultato quantitativamente preciso e ci porta a fare un'alterazione dei dati raccolti, mentre la seconda lascia inalterati i valori numerici dei dati ed è in grado di fornirci un risultato più preciso.

Un problema analogo si verifica quando i segnali oscillano ad alte frequenze (superiori a 50kHz, nell'ordine dei 100kHz), infatti il circuito viene realizzato su una base di lavoro (*breadboard*) che presenta tante superfici conduttrici (necessarie per connettere i pin delle diverse componenti) che si possono comportare come capacità perciò quando operiamo a basse frequenze il filtro, che si comporta come un passa alto, non risente dell'effetto di questi condensatori (che possiamo definire *virtuali* all'opposto del condensatore *reale*), mentre ad alte frequenze l'effetto può essere influente.

Quindi nel caso del solenoide libero il fit è ristretto da 800Hz fino a 35kHz, eliminando quindi due punti alle code. Nel caso del materiale A (nucleo di Fe) le problematiche descritte sopra sono evidenziabili sotto i 700Hz e sopra i 10kHz, per cui utilizziamo un range più ristretto per eseguire il fit. Nel caso del terzo materiale (nucleo di Al) non riscontriamo gli stessi effetti e quindi consideriamo tutti i punti raccolti.

### CONSIDERAZIONI SULL'ERRORE LEGATO AL RITARDO

Osseviamo che i grafici relativi alla fase presentano un errore associato molto piccolo. Potremmo procedere considerando diversi metodi per compensare questa sottostima, eseguendo o un processo di *error scaling* oppure facendo ragionamenti legati agli errori nei valori alle code e nella condizione di risonanza.

Per ottenere valori però sensati avremmo dovuto procedere già in sede di presa dati ad una considerazione di tipo statistico del ritardo e quindi ottenere relativamente a ogni frequenza un valor medio di  $dt$  e deviazione standard. Questo processo sarebbe dovuto però essere in qualche modo previsto già in fase di progettazione e attuato nella presa dati considerando di automatizzare la presa dati e ottenere un set di dati più strutturato.

Osservando quanto otteniamo dal valore del fit, non riteniamo opportuno però procedere neanche ad un ragionamento relativo allo scaling dell'errore, in quanto non osserviamo un miglioramento legato al cambio di fattore di scala. Gli errori quindi benché sottostimati, sono tutti ricavati secondo la relazione fornitaci dal data-sheet.

### OSSERVAZIONI SUL COMPORTAMENTO DEL MATERIALE A (NUCLEO DI Fe)

Dai grafici in Figura 2 possiamo osservare che la fase del nucleo di Fe ha un comportamento differente dagli altri due casi. Infatti senza aver bisogno di analizzare il fit possiamo



notare che i valori ad alte frequenze tendono a una fase maggiore di  $-\frac{\pi}{2}$ , valore atteso dal modello utilizzato. Questo mostra come in realtà per questo caso il modello non sia corretto e giustifica il fatto che la funzione non riesca a eseguire il fit, e si ottenga un valore di  $\chi^2/\text{ndf}$  elevato.

Un'altra conseguenza è legata al fatto che i parametri che otteniamo dai due fit non vengano compatibili, ed entrambi non portano a un risultato corretto. Scegliamo però comunque di portare a termine i calcoli per ottenere un valore di  $\mu_R$ , su cui possiamo fare ulteriori osservazioni.

## CONCLUSIONI

Analizzando il primo modello di fit, troviamo che i valori di  $R$ ,  $L$  e  $C$  ottenuti a partire da  $A$ ,  $Q^2$  e  $\nu_0$  non sono compatibili con i valori che abbiamo misurato in modo diretto (Tabella VI). Tuttavia notiamo che si trovano comunque nel loro stesso ordine di grandezza e che il risultato del prodotto di  $L$  e  $C$  ci restituisce un valore costante che rispecchia il fatto che  $\nu_0$  sia effettivamente simile al valore trovato direttamente quando abbiamo impostato che  $dt$  fosse nullo. Questo è legato al fatto che in questo modello di fit non abbiamo impostato direttamente come parametri i valori delle componenti circuitali e quindi il fit ci ha comunque dato il risultato che ci serviva adattandosi però sugli altri parametri che sono comunque legati a  $R$ ,  $L$  e  $C$ , dandoci però una diversa combinazione di questi ultimi valori. Ricaviamo infatti poi il valore di  $L$  considerando noto il valore di  $C = 220(2) \text{ nF}$  e sfruttando la miglior stima, dove possibile, di  $\nu_0$ .

Passando invece ad analizzare i valori di  $\mu_R$  ottenuti, abbiamo trovato che per il materiale B, poichè tra il fit della funzione di trasferimento e quello della fase c'era compatibilità dei parametri, abbiamo ricavato un unico valore della permeabilità magnetica, che deriva dalla miglior stima tra i due. Il valore ottenuto è  $\mu_R(\text{Al}) = 0.446(53)$ . Questo valore ha senso fisico in quanto sappiamo che, per come è definito,  $\mu_R$  deve assumere valori positivi e a seconda se il materiale si comporta come un diamagnete, un paramagnete o un ferromagnete,  $\mu_R$  può essere leggermente minore di 1, leggermente maggiore di 1, oppure molto maggiore di 1. Perciò in base al valore ottenuto possiamo dire che secondo questo modello il materiale B ha un comportamento diamagnetico.

Nel caso del materiale A invece i parametri tra il fit di  $|H[\nu]|$  e quello della fase non sono risultati compatibili (risultato che in realtà ci aspettavamo, in quanto già abbiamo detto che questo modello non riesce a spiegare il comportamento del Fe) e quindi abbiamo calcolato per ogni diagramma di Bode, un valore di  $\mu_R$ . I valori ottenuti sono

$$\begin{aligned}\mu_R^H(\text{Fe}) &= 5.66(12) & (\text{da } |H[\nu]|) \\ \mu_R^\varphi(\text{Fe}) &= 4.992(86) & (\text{da } \varphi[\nu])\end{aligned}$$

che sono appunto differenti, però sono entrambi nello stesso ordine di grandezza e non molto maggiori di 1. Perciò il materiale ha comunque un comportamento che porta a far aumentare il campo magnetico all'interno dell'induttanza (quindi paramagnetismo o ferromagnetismo), ma non raggiunge quei valori che sono tipicamente assunti dai materiali come quello che stiamo utilizzando.

Analizzando il secondo modello di fit troviamo che in tutti e tre i casi i parametri dal fit della funzione di trasferimento e i parametri dal fit della fase sono compatibili tra di loro. Però in particolar modo a noi interessa vedere se i valori di  $L$  ottenuti nei tre casi attraverso il primo modello sono compatibili con i corrispondenti del secondo modello in modo da vedere se c'è corrispondenza tra i due oppure no.

Nel caso dell'induttanza senza materiali all'interno i due valori non vengono compatibili.

Nel caso del materiale A invece troviamo che entrambe le induttanze trovate dal primo modello sono compatibili con l'induttanza trovata attraverso il secondo modello.

Infine nell'ultimo caso, cioè per il materiale B, i due valori sono compatibili.

Possiamo allora controllare se sono compatibili tra di loro i valori che abbiamo trovato per la permeabilità magnetica. Per il materiale A troviamo la compatibilità dei due valori di  $\mu_R$  del primo modello con il valore di  $\mu_R$  del secondo e per il materiale B troviamo anche in questo caso che sono compatibili. Queste compatibilità trovate tra i valori delle permeabilità magnetiche ci portano quindi a dedurre che in effetti i due modelli sono legati, come era anche lecito aspettarsi, in quanto, pur avendo modificato la funzione di fit, i parametri scelti nel primo modello sono in realtà derivanti da quelli del secondo. Tuttavia se analizziamo i valori della permeabilità magnetica trovati per il materiale B, vediamo che l'errore per  $\mu_R$  trovato dal secondo modello è elevato per cui il valore ottenuto potrebbe essere minore o maggiore di 1 o addirittura negativo. Perciò il secondo modello utilizzato non ci permette di definire con precisione le proprietà magnetiche del materiale.

Tabella VI Valori di  $R$ ,  $L$  e  $C$  ottenuti dal fit attraverso il primo modello utilizzato per il primo diagramma di Bode (funzione di trasferimento) partendo dai valori di  $A$ ,  $Q^2$  e  $\nu_0$  e considerando  $R_L = 3.70(25) \Omega$  come valore noto.

Caso	Resistenza $R \pm \varepsilon_R (\Omega)$	Induttanza $L \pm \varepsilon_L (\text{mH})$	Capacità $C \pm \varepsilon_C (\text{nF})$
Nucleo vuoto	21.8(15)	2.86(17)	$8.07(66) \times 10^2$
Nucleo materiale A (Fe)	1.87(14)	1.985(53)	$2.43(57) \times 10^3$
Nucleo materiale B (Al)	11.23(77)	2.51(13)	$8.00(75) \times 10^2$

## Dati completi e codice sorgente

Tutti i dati completi a supporto dei grafici, e il relativo codice, sono visualizzabili su <https://github.com/mattiasotgia/Lab2>. L'analisi dati viene eseguita su un programma sviluppato in C++ basandosi su framework pubblici: ROOT, per la realizzazione dei grafici e il fit dei modelli (<https://root.cern/>).

Tabella S-7 Dati grezzi (induttanza libera)

Tensione ingresso (mV)		Tensione uscita (mV)		Periodo (ms)		Ritardo (ms)	
$v_{in}$	$range_{v_{in}}$	$v_{out}$	$range_{v_{out}}$	$T$	$range_T$	$dt$	$range_{dt}$
992.3	132	63.7	9	2	0.310	0.478	0.310
981.7	132	135.2	19	1	0.156	0.2267	0.156
907.4	132	320.2	45	0.5	0.078	0.093	0.078
907.4	132	327.2	44	0.5	0.078	0.0925	0.078
817.2	132	476.0	64	0.4	0.062	0.056	0.062
753.5	132	576.0	80	0.3571	0.056	0.034	0.056
559.5	80	475.7	68	0.303	0.050	0.006	0.050
601.6	86	467.0	66	0.2778	0.052	-0.018	0.052
868.3	132	393.0	54	0.2	0.032	-0.033	0.032
973.0	132	153.0	21	0.1	0.015	-0.0216	0.015
981.7	132	72.0	10	0.05	0.0076	-0.0113	0.0076
992.3	132	32.0	5	0.02	0.0030	-0.0046	0.0030

Tabella S-8 Dati grezzi (materiale A)

Tensione ingresso (mV)		Tensione uscita (mV)		Periodo (ms)		Ritardo (ms)	
$v_{in}$	$range_{v_{in}}$	$v_{out}$	$range_{v_{out}}$	$T$	$range_T$	$dt$	$range_{dt}$
990.6	140	40.3	6	2	0.320	0.480	0.320
973.7	140	94.4	14	1	0.168	0.219	0.168
960.0	156	121.1	20	0.8333	0.136	0.171	0.136
907.4	132	170.8	25	0.6666	0.108	0.1176	0.108
827	196	225.3	54	0.5556	0.098	0.0713	0.098
748.4	104	256.2	36	0.4327	0.070	-0.0004	0.070
768.5	108	245.0	35	0.4	0.070	-0.0163	0.070
838.0	132	195.7	31	0.3333	0.060	-0.0346	0.060
882.3	124	159.0	23	0.2857	0.054	-0.038	0.054
947.0	156	104.5	17	0.200	0.033	-0.033	0.033
955.0	144	86.4	13	0.1667	0.030	-0.0288	0.030
971.0	160	54.0	9	0.1	0.0164	-0.0184	0.0164

Tabella S-9 Dati grezzi (materiale B)

Tensione ingresso (mV)		Tensione uscita (mV)		Periodo (ms)		Ritardo (ms)	
$v_{in}$	$range_{v_{in}}$	$v_{out}$	$range_{v_{out}}$	$T$	$range_T$	$dt$	$range_{dt}$
996.0	164	37.9	6	2	0.340	0.4874	0.340
982.0	164	80.0	14	1	0.176	0.234	0.176
935.0	152	195.8	32	0.5	0.096	0.103	0.096
849.9	140	285.8	47	0.4	0.068	0.0715	0.068
704.2	116	381	64	0.3333	0.056	0.041	0.056
575.0	96	434.2	72	0.2857	0.052	0.004	0.052
646.9	108	400.6	66	0.250	0.045	-0.0228	0.045
756.4	128	337	56	0.2222	0.039	-0.032	0.039
838.6	140	286.5	47	0.2	0.033	-0.034	0.033
887	148	242.5	40	0.1818	0.033	-0.0337	0.033
910	152	209.3	36	0.1667	0.029	-0.0324	0.029
972.0	156	105	17	0.1	0.0168	-0.0218	0.0168