

Misura Sperimentale dell'Accelerazione di Gravità Sfruttando il Pendolo di Kater

Eugenio Dormicchi^{1,2}, Giovanni Oliveri¹, Mattia Sotgia¹

¹Gruppo C03, Esperienza di laboratorio n. 6

Presi dati – 24 Marzo 2021, 15:00– 18:00; Analisi dati – 30 Marzo 2021

Obiettivo– Si vuole sfruttare uno strumento di precisione come il pendolo di Kater per ricavare dalla misura accurata del periodo di oscillazione un valore attendibile della misura dell'accelerazione di gravità g . **Metodi**– Sfruttando il periodo di isocronia T^* del pendolo di Kater, ricavato dalla posizione x_b della massa mobile M_b , possiamo ricavare il valore di g .

Risultati– Dai valori ottenuti dal fit ricaviamo $g = 9.802 \pm 0.004 \text{ m/s}^2$, che se consideriamo la relazione $|g_t - g| < 3 \cdot \sqrt{\varepsilon_{g_t}^2 + \varepsilon_g^2} \rightarrow 3.6 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2 < 12 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$ mostra la compatibilità con il valore teorico $g_t = (9.8056 \pm 0.0001 \text{ stat}) \text{ m/s}^2$. **Conclusioni**– L'esperienza mostra come il pendolo reversibile di Kater possa essere utilizzato per effettuare misure fini di g , anche se i rapporti χ^2/ndf ottenuti dai Fit con root mostrano dei risultati non perfettamente attendibili.

1. Obiettivo

Il valore della accelerazione di gravità g può essere ottenuto in diversi metodi, con strumenti via via più precisi, e di conseguenza con risultati che si spera permettano una miglior approssimazione del valore vero di g . Il pendolo può essere sfruttato come metodo per misurare tale grandezza, e si è già eseguito l'esperimento sfruttando il pendolo semplice. Per aumentare il livello di precisione dal pendolo semplice si è passati a considerare il pendolo fisico, in particolar modo il pendolo di Kater, che permette di estendere la natura del pendolo "semplice" e anche di eseguire misure con un livello maggiore di dettaglio.

Sfruttando quindi una precisione maggiore e proprietà particolari del pendolo di Kater come pendolo fisico, vogliamo quindi individuare il valore del periodo d'isocronia T^* caratteristico del pendolo di Kater preso in considerazione e da questo valore ricavare una buona stima di g , verificandone infine la compatibilità con il valore noto $g_t = (9.8056 \pm 0.0001 \text{ stat}) \text{ m/s}^2$.

2. Strumentazione

Abbiamo a disposizione i seguenti strumenti:

Calibro ventesimale, di portata 150 mm e sensibilità uguale all'accuratezza dello strumento di $50 \mu\text{m}$;

Calibro da banco di portata 1 m e sensibilità uguale all'accuratezza $10 \mu\text{m}$.

Pendolo di Kater (si veda in seguito descrizione dettagliata dell'apparato);

Cronometro elettronico collegato a una fotocellula in grado di misurare una singola oscillazione del pendolo, di portata potenzialmente infinita (molto maggiore comunque dei periodi misurati), e sensibilità 10^{-7} s , che assumiamo anche come accuratezza;

Il pendolo di Kater (Figura 1) è costituito da un'asta graduata, dotata di due coltellini di sospensione, con una massa fissa a un'estremità (M_a , massa rossa) e una scorrevole (M_b , massa blu), posizionata arbitrariamente, vincolata da una vite che la può bloccare all'asta in ben definite posizioni, che

sono indicate da $N = 25$ fori equidistanti 25 mm tra loro, eseguiti con strumentazione abbastanza precisa da poter trascurare l'incertezza associata a questa distanza. Il pendolo è poi poggiato su un sostegno tramite due perni che si incastriano perfettamente in una sede su una piastra posta orizzontalmente munita di livella a bolla, mantenuta in perfetto equilibrio. Il tutto viene montato su un dispositivo di sostegno in modo che l'asta risulti verticale. Lo strumento è realizzato in maniera tale che i centri di massa delle varie parti costituenti siano allineati su di una retta, intersecante gli assi definiti dai coltellini.

Il pendolo di Kater viene anche definito pendolo reversibile, in quanto possiamo agganciare il pendolo sia sul coltellino di sospensione posto sull'estremo vicino alla massa M_a , che su uno identico posto sull'estremo della massa M_b , consentendo quindi di misurare due periodi diversi T_1 e T_2 .

3. Metodi

Tutte le misure sono riportate nelle unità del Sistema Internazionale (SI/MKS, ovvero metri, chilogrammi, secondi)

I valori riportati sono stati approssimati tenendo conto di alcune convenzioni prese. Si approssima l'errore a una cifra significativa se tale cifra è ≥ 3 , altrimenti se tale cifra è 1 o 2 allora si considerano due cifre significative. Considerando quindi le posizioni decimali significative dell'errore si approssima per eccesso il valore numerico della grandezza.

Si fa spesso riferimento anche alla regola del 3σ , con la quale si vuole intendere la volontà di trasformare un errore di tipo massimo in errore statistico, ovvero calcolando $\varepsilon_x = \Delta x / \sqrt{3}$.

Dopo aver eseguito un prima misura del periodo del pendolo considerandolo come pendolo semplice, consideriamo questa volta il pendolo fisico, ovvero come corpo più complesso e dotato di massa.

Il periodo dell'oscillazione di un pendolo fisico dipende in genere dal momento d'inerzia I rispetto l'asse di sospensione, dal valore di g e dall'ampiezza massima delle oscillazioni.

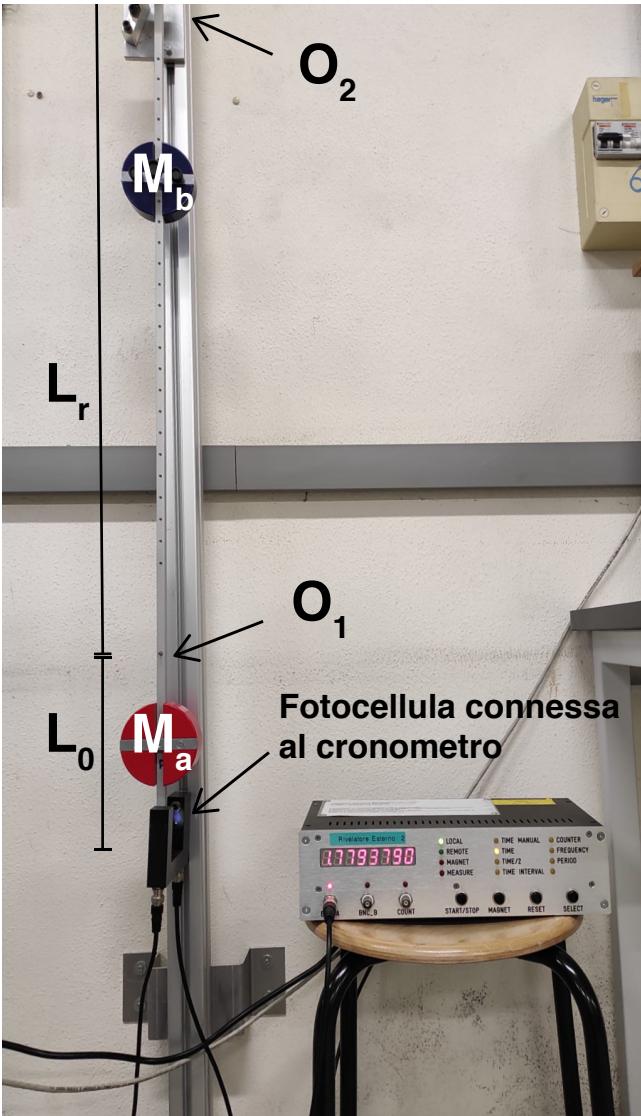


Figura 1. Fotografia del pendolo di Kater utilizzato. Si mettono in evidenza i punti O_1 e O_2 dove sono i due coltelli su cui si può fa oscillare il pendolo; le masse M_a (massa rossa) e M_b (massa blu). Sono indicate le lunghezze l_r e L_0 .

ni. Tuttavia l'esperimento è effettuato nel limite delle piccole oscillazioni per cui la dipendenza dall'ampiezza è trascurabile (isocronia delle piccole oscillazioni).

È possibile quindi valutare g a partire dalla misura del periodo T e di I . Questo nella pratica non avviene data la difficoltà del calcolo di I ,

Il pendolo reversibile, come quello di Kater, elimina questa difficoltà riducendo la misura di g a quella di una serie di lunghezze e intervalli di tempo.

Le misure del periodo di oscillazione vengono effettuate utilizzando alternativamente i due coltelli di sospensione, al variare della posizione sull'asta della massa scorrevole.

L'equazione del periodo (nel limite delle piccole oscillazioni) di un pendolo fisico è $T = 2\pi \sqrt{I/mgh}$, che nel caso del pendolo semplice si può verificare essere $T = 2\pi \sqrt{l/g}$.

Il confronto con il pendolo semplice permette d'introdurre per il pendolo di Kater una grandezza caratteristica: la lunghezza ridotta l_r . Definiamo lunghezza ridotta (l_r), la lunghezza del pendolo semplice isocrono a esso $l_r = I/mh$.

Misuriamo con un calibro da banco di portata 1 m e sensibilità $10 \mu\text{m}$ il valore di $l_r = (0.800010 \pm 0.000010)$ m.

Attraverso considerazioni di meccanica si ottiene che $l_r = h_1 + h_2$ con h_1 la distanza del coltello di sospensione (O_1) al centro di massa (CM) e h_2 la distanza del coltello di sospensione O_2 dal CM.

I risultati ottenuti danno un'indicazione di come deve essere progettata una misura di g tramite un pendolo reversibile. Il pendolo deve essere costruito in maniera tale che il suo momento d'inerzia e la posizione del suo centro di massa rispetto agli assi di rotazione, possano essere variate con continuità: ciò viene realizzato utilizzando la massa mobile tra i due coltelli che definiscono gli assi di sospensione. In tale modo, con opportuni aggiustamenti della massa mobile, i due assi (fissi) di rotazione possono essere resi isocroni.

Raggiunta una configurazione con assi isocroni, la distanza tra questi ultimi è pari alla lunghezza ridotta del pendolo e quindi è possibile risalire al valore di g tramite una misura di periodo $g = 4\pi^2 \sqrt{l_r/T^2}$.

La massa mobile viene spostata partendo dal penultimo foro fino a quello adiacente, distante 25 mm, per un totale di sei posizioni.

Durante la messa in moto del pendolo, è necessario aver cura di non introdurre forze perpendicolari al piano d'oscillazione, in quanto questo comporterebbe oscillazioni anche sul piano normale a quello oscillatorio, introducendo un errore sistematico sulle misure.

La posizione della massa x_b si può ricavare dalla formula $x_b = L_0 + N \cdot 25 \text{ mm}$, dove L_0 è la distanza dall'estremo della sbarra al primo foro successivo alla massa fissa.

L_0 è stata misurata, in millimetri, attraverso tre misure distinte mediante l'uso del calibro.

Otteniamo che $L_0 = L_{0,1} + L_{0,2} + \text{diametro}_{Mb}/2 = (0.10415) + (0.14930) + [(0.09040)/2] \text{ m} = 0.29865 \text{ m}$.

Per questa misura introduciamo come errore l'errore ottenuto dalla propagazione degli errori di misura, quindi $50 \mu\text{m} + 50 \mu\text{m} + (50/2) \mu\text{m} = 125 \mu\text{m}$, considerando che nel limite in cui effettuiamo un fit non-lineare tramite il metodo dei minimi quadrati, assumiamo di avere errore Δx_b trascurabile. Otteniamo quindi una misura staticizzata di $\Delta x_b \rightarrow \varepsilon_{x_b} = \Delta x_b / \sqrt{3}$.

Le misure dei periodi T_1 e T_2 sono effettuate con un cronometro digitale azionato dalla fotocellula facendo attenzione a rimanere nel limite di piccole oscillazione e che il fascio di luce venga attraversato da entrambi i lati. Poiché il cronometro usato è uno strumento molto sensibile, i periodi ottenuti sono misure non ripetibili; le misure dei periodi sono perciò effettuate in modo statistico svolgendo 10 misure per ciascun periodo (T_1, T_2) per una singola posizione della massa mobile.

I dati raccolti sono riportati in Tabella A1.

4. Analisi dati

4.1. Trattazione statistica di T

I valori di T_1 e T_2 sono stati raccolti con 10 ripetizioni per ogni posizione di M_b in modo tale da poter minimizzare le fluttuazioni statistiche legate ai valori di T . Ricaviamo quindi i valori di $\bar{T}_1 = \sum_{i=1}^{10} (T_{1(i)}) / 10$, con i relativi errori standard $\varepsilon_{T_1} = S_{10_i} / \sqrt{10}$. Ripetiamo lo stesso calcolo per tutti i sei valori raccolti di T_1 e T_2 . Riportiamo i valori in Tabella 1 e Tabella 2.

4.2. Rappresentazione e analisi dei dati

Riportiamo su un grafico i valori di T_1 e T_2 sulle ordinate e i valori di x_b sulle ascisse. Osserviamo un andamento parabolico per entrambe le distribuzioni, ben più evidente per la distribuzione dei Periodi di T_2 , ma si può anche osservare sul grafico dei Periodi T_1 . Procediamo a costruire due funzioni polinomiali del tipo $y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$ che possano essere utilizzate per eseguire un fit non-lineare dei punti dei grafici.

Dal fit non-lineare ricaviamo il valore di a_0 , a_1 e a_2 per i punti di T_1 e i valori di a'_0 , a'_1 e a'_2 per i punti di T_2 . Considerando quindi la funzione $y = a_0 + a_1 x + a_2 \cdot x^2$ e $y' = a'_0 + a'_1 \cdot x + a'_2 \cdot x^2$ la condizione di isocronia è ottenuta quando $y - y' = 0$, ovvero possiamo ricavare $(a_0 - a'_0) + (a_1 - a'_1) \cdot x + (a_2 - a'_2) \cdot x^2 = 0$ che diventa $A_0 + A_1 \cdot x + A_2 \cdot x^2$. Quindi ricaviamo il valore di x^* come

$$x^* = \frac{-A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - 4A_0A_2}}{2A_0} = 0.837743 \text{ m} \quad (1)$$

Otteniamo due risultati, dei quali teniamo in considerazione solo quella il cui valore è incluso nell'intervallo delle x misurate. Sostituendo in y o y' il valore di x^* ottieniamo il valore $T^* = 1.7951$ s.

Per calcolare l'errore relativo a T^* consideriamo i punti le quali ascisse sono più vicine al valore x^* ; ne consideriamo quindi gli errori ε_{T1} e ε_{T2} , e calcoliamo

$$\varepsilon_{T^*} = \sqrt{\varepsilon_{T1}^2 + \varepsilon_{T2}^2} = 0.0004 \text{ s}$$

Per ricavare il valore di $g \pm \varepsilon_g$ consideriamo la formula

$$g = 4\pi^2 \frac{l_r}{T^{*2}} = 9.802 \text{ m/s}^2$$

con relativo errore

$$\varepsilon_g = \sqrt{\left(-\frac{8 \cdot l_r \cdot \pi^2}{T^{*3}}\right)^2 \cdot \varepsilon_{T^*}^2 + \left(\frac{4 \cdot \pi^2}{T^{*2}}\right)^2 \cdot \varepsilon_{l_r}^2} = 0.004 \text{ m/s}^2$$

4.3. Implementazione tramite root

I Fit e i calcoli successivi sono stati eseguiti con il programma `kater_plot.C` scritto in C++ sfruttando `root`. I dati di input sono raccolti nei file `valori_T1_x.txt` per i periodi T_1 e `valori_T2_x.txt` per i periodi di T_2 , nel formato `xb T1/2 err_xb err_T1/2`.

Per risolvere l'equazione 1 abbiamo utilizzato la funzione `isocrone_x()` che prende in argomento quattro array che contengono i valori dei parametri (e anche gli errori) restituiti dagli oggetti `f1` e `f2` della classe `TF1` utilizzate per eseguire il fit non-lineare, dove la funzione `pol2` rappresenta la polinomiale di 2° grado utilizzata.

Il risultato della funzione `isocrone_x()` viene dato come argomento poi alla funzione `get_isox()`, che presi entrambi i valori dell'equazione, restituisce il valore che corrisponde alla intersezione che possiamo osservare nel grafico.

Dal valore di x^* si è ricavato T^* tramite il metodo `Eval()` della classe `TF1`, che dato il valore di x , calcola il valore della funzione in tale punto.

Per calcolare il valore dell'errore di $T^* \varepsilon_{T^*}$ utilizziamo la funzione `get_err_T()`, che individua la coppia di punti più vicina a x^* e ne calcola l'errore come già trattato.

Infine le funzioni `get_g()` e `get_gerr()` ricavano il valore di $g \pm \varepsilon_g$.

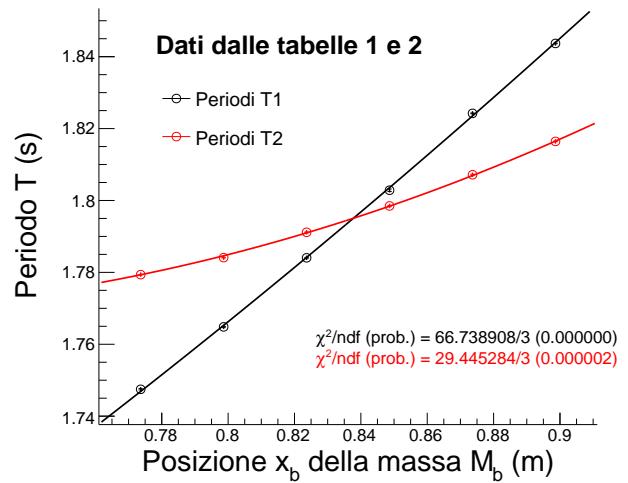


Figura 2. Grafico generato con `root`. Sono rappresentati i valori di T_1 e T_2 rispetto a x_b , dai dati raccolti in Tabella 1 e Tabella 2. Possiamo osservare che il rapporto χ^2/ndf per entrambi i fit piuttosto alto. Questo potrebbe essere legato agli errori che sono molto piccoli sia per i periodi che per le lunghezze.

Tabella 1. Valori di $x_b \pm \varepsilon_{x_b}$ e di $T_1 \pm \varepsilon_{T1}$ calcolati a partire dai valori presenti in Tabella A1 e trattati in sezione 4, sono rappresentati in Figura 2 dai punti neri.

	Posizione $x_b \pm \varepsilon_{x_b}$ (m)	Periodi $T_1 \pm \varepsilon_{T1}$ (s)
1	0.89865 ± 0.00007	1.84369 ± 0.00009
2	0.87365 ± 0.00007	1.82423 ± 0.00011
3	0.84865 ± 0.00007	1.80286 ± 0.00034
4	0.82365 ± 0.00007	1.78405 ± 0.00011
5	0.79865 ± 0.00007	1.76483 ± 0.00012
6	0.77365 ± 0.00007	1.74748 ± 0.00017

Tabella 2. Valori di $x_b \pm \varepsilon_{x_b}$ e di $T_2 \pm \varepsilon_{T2}$ calcolati a partire dai valori presenti in Tabella A1 e trattati in sezione 4, sono rappresentati in Figura 2 dai punti rossi.

	Posizione $x_b \pm \varepsilon_{x_b}$ (m)	Periodi $T_2 \pm \varepsilon_{T2}$ (s)
1	0.89865 ± 0.00007	1.81643 ± 0.00008
2	0.87365 ± 0.00007	1.80715 ± 0.00012
3	0.84865 ± 0.00007	1.79848 ± 0.00009
4	0.82365 ± 0.00007	1.79115 ± 0.00011
5	0.79865 ± 0.00007	1.78410 ± 0.00011
6	0.77365 ± 0.00007	1.77936 ± 0.00003

5. Risultati

Dall'analisi dati in sezione 4 abbiamo ottenuto il valore di $g = 9.802 \pm 0.004 \text{ m/s}^2$. Verifichiamo ora tramite la relazione

$$|g_t - g| < 3 \cdot \sqrt{\varepsilon_{g_t}^2 + \varepsilon_g^2} \rightarrow$$

$$|9.8056 - 9.802| \text{ m/s}^2 < 3 \cdot \sqrt{(0.0001)^2 + (0.004)^2} \text{ m/s}^2 \rightarrow$$

$$3.6 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2 < 12 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

che mostra la compatibilità del valore ottenuto con il valore di $g_t = (9.8056 \pm 0.0001 \text{ stat}) \text{ m/s}^2$ teorico.

6. Conclusione

6.1. Controlli

Abbiamo ottenuto dall'esperienza un valore di g più preciso e più sensibile rispetto a quello ricavato durante l'esperienza sullo studio del pendolo semplice, dimostrando l'efficacia del pendolo di Kater.

Tuttavia avendo ottenuto un valore del rapporto χ^2/ndf molto alto ($66.7389/3$ per T_1 , $29.4453/3$ per T_2), e di conseguenza una probabilità del χ^2 molto bassa (2.1×10^{-14} per T_1 e 1.8×10^{-6} per T_2) non potremmo essere fiduciosi delle misurazioni effettuate.

6.2. Possibili errori sistematici

Possiamo provare a posteriori a individuare alcuni possibili errori sistematici che possono essere intervenuti nelle misurazioni.

Un possibile errore può essere causato dalla forza di attrito viscoso dell'aria, in grado di dissipare energia rallentando il sistema oscillatorio, e diminuendo conseguentemente il valore del periodo misurato. Si è comunque osservato che il pendolo anche dopo diversi minuti il pendolo continuava a oscillare con lo stesso periodo. Un altro possibile errore può essere causato dalla spinta idrostatica dell'aria nei confronti del sistema in grado d'introdurre delle oscillazioni perpendicolari al piano di moto del pendolo, a causa dell'asimmetria del sistema. Di nuovo si è però stati molto attenti a non introdurre oscillazioni perpendicolari. Infine possiamo considerare l'angolo di oscillazione nel limite delle piccole oscillazioni, in quanto lo spostamento orizzontale δ abbiamo misurato essere $\approx 0,02$ m, ovvero sottendere un angolo ottenuto come $\phi_0 = \arctan(\delta/L_{\text{totale}})$, dove consideriamo $L_{\text{totale}} \approx 1$ m, ovvero $\phi_0 = 0.02$ rad ≈ 1 .

A. Dati estesi

Di seguito il listato di output dal programma `kater_plot.C` in `root` (viene utilizzata la versione 6.22/06).

```
*****
PROCESSING G1...
*****

FCN=66.7389 FROM MINOS      STATUS=SUCCESSFUL    490 CALLS      1623 TOTAL
                           EDM=2.00447e-07   STRATEGY= 1    ERROR MATRIX ACCURATE
EXT PARAMETER          STEP          FIRST
NO.  NAME        VALUE       ERROR      SIZE      DERIVATIVE
 1  p0          1.43416e+00  2.44915e-03  3.73245e-05  5.24168e+00
 2  p1          8.34825e-02  5.56173e-03 -4.48136e-05  4.47109e+00
 3  p2          4.14566e-01  3.31706e-03  3.31706e-03 -1.36586e-01

** CHI2 / NDF ( PROB. ) 66.7389 / 3 ( 2.12974e-14 )

*****
PROCESSING G2...
*****
```

```
FCN=29.4453 FROM MINOS      STATUS=SUCCESSFUL    320 CALLS      1126 TOTAL
                           EDM=2.4987e-09   STRATEGY= 1    ERROR MATRIX ACCURATE
EXT PARAMETER          STEP          FIRST
NO.  NAME        VALUE       ERROR      SIZE      DERIVATIVE
 1  p0          2.14657e+00  2.02257e-03  2.78818e-06 -1.59149e-01
 2  p1          -1.13945e+00 4.85001e-03 -3.16833e-06 -1.26467e-01
 3  p2          8.59254e-01  2.94517e-03  2.94517e-03 -1.20685e+00

** CHI2 / NDF ( PROB. ) 29.4453 / 3 ( 1.80529e-06 )

*****
RESULTS ...
*****
```

```
x* = 0.837743 +/- 0.0224793
T* = 1.79505 +/- 0.000355199

*****
COMPATIBLE VALUES
*****
```

```
g = 9.80176 +/- 0.00387929
```

Infine in Tabella A1 possiamo trovare i valori raccolti in laboratorio prima di essere analizzati.

Tabella A1. Dati grezzi dei periodi T_1 e T_2 misurati alle diverse lunghezze x_b .

Misure di x_b calcolate (m)						
$x_b = [L_{0,1} + L_{0,2} + \frac{d}{2} + (N_{\text{fori}} \cdot 0.025)]$ m (errore massimo $\pm 1 \times 10^{-3}$ m)						
x_b	0.899	0.874	0.849	0.824	0.799	0.774
Periodi T_1 presi 10 volte per ogni i -esimo valore di x_b (s)						
$T_{1(n \times 1)}, \dots, T_{1(n \times 6)}$ (errore massimo $\pm 10^{-7}$ s)						
$T_{1(1 \times i)}$	1.8433475	1.8241344	1.8010792	1.7842967	1.7646188	1.7469742
$T_{1(2 \times i)}$	1.8438321	1.8250191	1.8014794	1.7831672	1.7654354	1.7470051
$T_{1(3 \times i)}$	1.8436974	1.8243224	1.8021671	1.7844837	1.7653484	1.7474456
$T_{1(4 \times i)}$	1.8441519	1.8246017	1.8026592	1.7838530	1.7646805	1.7473891
$T_{1(5 \times i)}$	1.8438134	1.8238088	1.8024890	1.7842300	1.7648372	1.7476352
$T_{1(6 \times i)}$	1.8440039	1.8240085	1.8030486	1.7839835	1.7650848	1.7468288
$T_{1(7 \times i)}$	1.8434289	1.8238919	1.8031204	1.7841418	1.7649879	1.7475854
$T_{1(8 \times i)}$	1.8437870	1.8239454	1.8048308	1.7838625	1.7647196	1.7475552
$T_{1(9 \times i)}$	1.8432011	1.8243763	1.8040768	1.7843554	1.7644894	1.7489131
$T_{1(10 \times i)}$	1.8436028	1.8242312	1.8036150	1.7840838	1.7641298	1.7474017
Periodi T_2 presi 10 volte per ogni i -esimo valore di x_b (s)						
$T_{2(n \times 1)}, \dots, T_{2(n \times 6)}$ (errore massimo $\pm 10^{-7}$ s)						
$T_{2(1 \times i)}$	1.8162160	1.8069800	1.7978242	1.7904099	1.7837065	1.7793795
$T_{2(2 \times i)}$	1.8162461	1.8074008	1.7982385	1.7919054	1.7839124	1.7790879
$T_{2(3 \times i)}$	1.8164208	1.8066094	1.7983828	1.7912305	1.7838475	1.7794034
$T_{2(4 \times i)}$	1.8162922	1.8068046	1.7984080	1.7911800	1.7840367	1.7794454
$T_{2(5 \times i)}$	1.8165907	1.8073671	1.7984383	1.7912973	1.7837570	1.7793693
$T_{2(6 \times i)}$	1.8161985	1.8071854	1.7986348	1.7911650	1.7840481	1.7794584
$T_{2(7 \times i)}$	1.8163087	1.8080697	1.7989685	1.7908471	1.7845240	1.7793767
$T_{2(8 \times i)}$	1.8162481	1.8068933	1.7985901	1.7912831	1.7840374	1.7792549
$T_{2(9 \times i)}$	1.8167033	1.8072342	1.7986484	1.7910748	1.7848659	1.7794661
$T_{2(10 \times i)}$	1.8170554	1.8069937	1.7986683	1.7911061	1.7842935	1.7793790