

Amplificatore lock-in ad allineamento in fase per la misura dei coefficienti di Fresnel su cristalli non dielettrici

Mattia Sotgia^a and Francesco Polleri^b

Università di Genova, Dipartimento di Fisica

(Dated: 8 luglio 2023)

Presentiamo la progettazione e la realizzazione di un esperimento per la misura dei coefficienti di Fresnel di un film sottile di cristallo di Silicio (c-Si) e di un sottile campione di oro (Au). La misura è effettuata sfruttando un sistema di accoppiamento di fase lock-in¹ che permette una migliore reiezione in frequenza del rumore. Descriviamo la progettazione del sistema di misura, e infine una descrizione e discussione dei risultati, confrontando con modelli teorici. Il sistema descritto permette di effettuare misure con sufficiente precisione dei coefficienti di Fresnel R_s e R_p , permettendo di ottenere i coefficienti di riflessione e trasporto $n_{c\text{-Si}}/\kappa_{c\text{-Si}}$ e $n_{\text{Au}}/\kappa_{\text{Au}}$. Per il cristallo di silicio (c-Si) possiamo anche inferire il valore dello spessore del film di ossido di silicio (SiO_2) depositato sul substrato di silicio.

PACS numbers: 42.25.Ja, 42.25.Gy, 42.68.Ay, 42.68.Mj

Keywords: Amplificatori LOCK-IN, strumenti di misura, equazioni di Fresnel, ellissometria.

1. INTRODUZIONE

L'utilizzo di un sistema sensibile allo sfasamento, come un amplificatore lock-in, può risultare molto comodo in applicazioni di misura in cui si fa utilizzo di segnali luminosi, in particolar modo se questi segnali sono periodici. In questo modo è infatti possibile ridurre sufficientemente i disturbi e le interferenze prodotte dal rumore esterno, che in un ambiente di laboratorio possono essere molteplici, e inoltre permette anche di controllare e ridurre fonti di rumore che sono invece causate dal sistema stesso, che sono di carattere aleatorio. Poiché il processo di lock-in consiste matematicamente nello spostare in frequenza un segnale, questo allora può anche essere utilizzato anche con segnali che sono teoricamente in continua, modulandoli con un segnale a frequenza definita o nota, in modo da spostarli nello spettro in una regione a minore rumore, e poi riportandolo alla frequenza di partenza, rimodulando il segnale fisico con un riferimento in fase. Considerando allora un sistema che permette di generare e di acquisire con una frequenza definita, possiamo infatti ridurre molti di questi contributi di rumore, e quindi incrementare il rapporto tra segnale e rumore (SNR).

Nel caso specifico della misura che vogliamo compiere il segnale è effettivamente un segnale in continua, dato da una sorgente coerente di luce sufficientemente collimata. Questa viene polarizzata e fatta incidere sul campione cristallino che la riflette. Il segnale riflesso è quello che poi viene acquisito. Trovandosi a bassissima frequenza il segnale è però estremamente soggetto a rumore. Se infatti studiassimo il segnale del laser in continua questo presenterebbe distorsioni legate al comportamento sub-ottimale a basse frequenze, dove la maggior parte delle fonti di rumore sono presenti. Per evitare tali distorsioni allora spostiamo il segnale in frequenza in una regione dello spettro con un migliore SNR. La soluzione allora è individuabile nel spostare il segnale da $\nu = 0 \text{ Hz}$ ad una frequenza che sia in una regione dello spettro il più possibile a basso rumore. Il passo successivo è convertire

il segnale in continua sfruttando l'accoppiamento in fase con un riferimento e infine riportare il segnale alla stessa frequenza di partenza.

Questo sistema così progettato può essere allora utilizzato per effettuare misure dei coefficienti di Fresnel^{2,3} r e R dati differenti campioni di cristalli, conduttori elettrici. L'obiettivo scientifico è quindi quello di poter caratterizzare le curve di Fresnel per i coefficienti di riflessione per i due campioni.

Il documento è diviso in una parte immediatamente successiva che descrive a grandi linee alcune formalizzazioni del sistema utilizzato, a cui segue poi un dettaglio sulla teoria fisica del fenomeno studiato, per definire al meglio le osservabili in questione, e infine una descrizione e caratterizzazione dell'esperimento, e una breve discussione sulle modalità di analisi dati e sui risultati ottenuti.

Teoria del lock-in Il segnale fisico (nel caso specifico il segnale è dato dal fascio luminoso) è modulato su un'onda sinusoidale⁴ come $V_0 \cos(\omega_r t)$, dove il pedice r indica che si tratta anche della frequenza con cui andiamo poi a stimolare il riferimento che forniamo al lock-in. V_0 è l'ampiezza del segnale fornita al sistema.

Il sistema complessivo avrà allora un output della forma $V_{\text{out}} \cos(\omega_r t + \phi_{\text{out}})$, dove una fase arbitraria, ma non casuale, può essere in generale aggiunta dal processo fisico che stiamo studiando. Il segnale di riferimento fornito in ingresso al lock-in allora deve anche esso presentare una fase ϕ_{ref} per fare in modo che sia accoppiato al segnale che viene letto dal rivelatore.

Il segnale fisico che allora avremo in ingresso al lock-in è dato da un primo stadio di amplificazione, che compie l'operazione

$$V_{\text{out}} \cos(\omega_r t + \phi) \rightarrow s_{\text{in}}(t) = G_{\text{amp}} V_{\text{out}} \cos(\omega_r t + \phi), \quad (1)$$

dove anche un eventuale rumore $n(t)$ viene portato in $G_{\text{amp}} n(t)$. Successivamente all'accoppiamento in fase avremo il prodotto tra $s_{\text{in}}(t) r(t)$, con $r(t)$ il riferimento fornito dopo lo stadio di amplificazione. Come riportato in ref. 1, dopo un ultimo stadio passa-basso ottenuto con

un filtro LPF (*Low Pass Filter*), il sistema avrà ridotto notevolmente le componenti di rumore casuali, ma resterà ancora caratterizzato dalle componenti sistematiche del rumore

$$s_{\text{LPF}}(t) = \frac{GV_{\text{out}}}{2} \cos(\phi) + \frac{G\eta(\omega_0)}{2} \cos(\phi_n(\omega_0)), \quad (2)$$

dove indichiamo con $\eta(\omega_0)$ la componente di rumore che corrisponde alla frequenza a cui sta operando il sistema lock-in, che non può essere eliminata automaticamente, ma può essere ridotta scegliendo una precisa regione nel dominio delle frequenze dove sappiamo che abbiamo meno rumore (evitiamo ad esempio di scegliere come frequenza di modulazione la 50 Hz).

Per questa breve introduzione abbiamo trascurato di trattare un segnale di riferimento che non è sinusoidale ma può essere ad esempio un'onda quadra. Questa spettualmente presenta non solo un picco principale, ma introduce anche armoniche successive a quella principale ω_0 , che implicano la necessità di una migliore calibrazione del sistema. Per questo la frequenza di operazione del lock-in ω_0 dovrà essere calibrata assieme alla frequenza di taglio del LPF per tagliare con maggiore efficienza le armoniche a frequenze più alte.

Un altro termine su cui abbiamo controllo è infine la differenza di fase $\phi_{\text{out}} - \phi_{\text{ref}} = \phi$ della (2), dove osserviamo inoltre che massima efficienza per il sistema si ottiene per $\phi \ll 1$, per cui $\cos \phi \simeq 1$.

2. TEORIA

Prima di presentare la progettazione e caratterizzazione del sistema procediamo a definire con un po' più di rigore la misura che vogliamo effettuare e la teoria sottostante.

Considerato un fascio di luce generico ogni possibile angolo di polarizzazione è espresso dalla combinazione lineare di due vettori di una base di polarizzazione, che possono essere scelti in modo da essere ortonormali, posto uno parallelo, denotato da p , e l'altro ortogonale al piano di incidenza, denotato da s . Queste due polarizzazioni prendono anche altre definizioni, per esempio descrivendo quale campo è ortogonale al piano di incidenza. Avremo allora che onde polarizzate p sono anche definite *transverse-magnetic* (TM), e onde polarizzate s sono definite *transverse-electric* (TE). La percentuale di luce riflessa, dato un campione di materiale X, è dipendente dal grado di polarizzazione ed espressa dalle relazioni ottenute da Fresnel,^{2,3} per cui avremo che il coefficiente di riflessione per onde TE è dato come

$$r_s = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}, \quad (3)$$

mentre per le onde TM è dato come

$$r_p = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t}. \quad (4)$$

In generale il coefficiente n_i indica il coefficiente di rifrazione del materiale che si sta considerando. Tale coefficiente è generalmente reale, ma per materiali conduttori, si è osservata la necessità di estendere la teoria⁵ introducendo il coefficiente complesso $\underline{n} = n + i\kappa$, dove κ e n sono quantità caratteristiche del materiale in considerazione determinabili sperimentalmente. Generalizziamo allora le (3) e (4) considerando indici complessi. Questi sono allora effettivamente funzioni a variabile complessa. La frazione riflessa, detta riflettanza, è data allora da

$$R_i = |r_i|^2, \quad i = s, p \quad (5)$$

e tende a 1 per l'angolo di riflessione che tende a 90°.

Nelle relazioni (3) e (4) in realtà è possibile avere funzioni ad una sola variabile (che può essere sia θ_i che θ_t , generalmente con la scelta di poter controllare l'angolo di incidenza del fascio luminoso si considera θ_i) ricordando che dalle leggi di Snell

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i \right)^2}. \quad (6)$$

Questo modello è sufficientemente valido quando l'interfaccia che si sta studiando è semplice, e il materiale su cui il fascio di luce è fatto incidere sufficientemente profondo da disperdere al suo interno la maggior parte della radiazione incidente, e non avere quindi altri fenomeni di riflessioni secondarie. Questo è quindi valido per il caso del campione di oro (fig. 1b).

Ci possono essere però alcune situazioni in cui il modello semplificato non è sufficiente, soprattutto quando il materiale in questione, per quanto preparato con estrema precisione, presenta sottili strati superficiali di materiale con indice di rifrazione differente. Questo è vero in particolar modo per il cristallo di silicio, c-Si, per il quale si ha un deposito di ossido di silicio SiO₂ (vedi figura 1a) con uno spessore $d > 1$ nm sufficiente per avere fenomeni di riflessione multipla nel sottile film interposto ad ambiente (aria, con indice di rifrazione noto, n_{Air}) e il substrato di c-Si, con indice $n_{\text{c-Si}}$. La teoria che ne segue si complica. Dobbiamo allora introdurre il modello a tre fasi (*three-phases model*⁶⁻⁸)⁹ per cui i coefficienti introdotti in (3-4) non sono più sufficienti, ma dobbiamo introdurre i coefficienti

$$r = \frac{r_{al} + r_{ls} e^{2i\beta}}{1 + r_{al} r_{ls} e^{2i\beta}}, \quad (7)$$

valida sia per i modi TE che per i modi TM di oscillazione. I coefficienti r_{al} e r_{ls} hanno la stessa forma di (3-4), considerando questa volta che però gli angoli di incidenza sono relativi all'interfaccia che si sta considerando: aria/SiO₂ nel caso di r_{al} , e SiO₂/c-Si nel caso di r_{ls} . Il coefficiente β è invece indicativo della differenza di fase legata al cammino ottico all'interno del layer sottile depositato sulla superficie del cristallo (si veda l'eq. (1.16) di ref. 7), ed è espresso come

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sqrt{n_l^2 - n_a^2 \sin^2 \phi_a}. \quad (8)$$

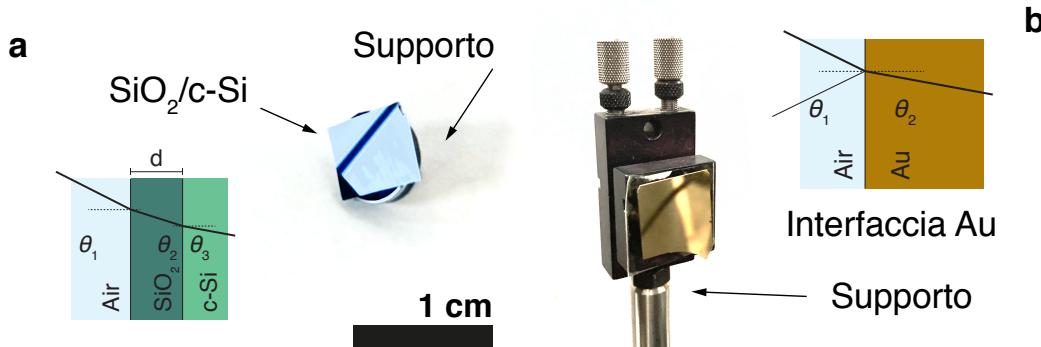


Figura 1. (a) Campione di cristallo di Silicio montato sul supporto necessario per poter effettuare le misure. A lato è anche schematizzata la struttura a layer dell'interfaccia del c-Si con l'aria, a cui è interposto un sottile strato di SiO₂ che cambia quindi l'angolo con cui la luce incide sul silicio. (b) Campione di oro e schema della struttura dell'interfaccia aria/oro. Il campione è montato al centro del goniometro. Sullo stesso supporto è possibile anche fissare il campione di c-Si.

Osserviamo subito che il modello è sicuramente più complesso del precedente, il che comporterà la necessità di fare assunzioni in fase di analisi dati per poter ottenere dei risultati corretti.

3. L'ESPERIMENTO

Descriviamo nel suo funzionamento e nelle scelte di progettazione l'esperimento, concentrandoci prima brevemente sul sistema ottico utilizzato e poi sulle scelte riguardanti il funzionamento e le caratteristiche dell'amplificazione e acquisizione del segnale, che possiamo considerare come una prima analisi *online* del dato ricevuto. Infatti dai differenti input che riceviamo possiamo passare poi ad un dato *pulito* che è più facile maneggiare.

Del sistema ottico andiamo a definire le tre componenti principali, quali la sorgente utilizzata, il campione con il relativo supporto e il ricevitore/trasduttore, che permette di acquisire segnali in tensione dal segnale fisico.

Dell'analisi online invece definiamo gli stadi principali come sono riportati in figura 3, e analizziamo le scelte di progettazione per assicurare il miglior funzionamento dell'esperimento.

3.1. Il sistema ottico

L'esperimento è costituito da un goniometro da banco ottico con precisione di 0°20' su entrambi gli angoli (incidenza e riflessione) rispetto al campione posizionato al centro. Il goniometro è assicurato ad un banco ottico sfruttato come supporto per l'intero setup, controllato localmente da un computer con LabView, che permette anche l'acquisizione dei dati. Uno dei due bracci del goniometro ospita il supporto per la sorgente laser, mentre l'altro ospita il fotodiodo rivelatore. Sul cammino ottico del fascio di luce è inoltre inserito un modulatore in frequenza, immediatamente vicino alla sorgente, e due filtri

polarizzatori, posizionati dopo il *chopper* ma prima del campione al centro del sistema. Quello più lontano dalla sorgente è l'ultima lente che il fascio attraversa prima di incidere sul campione, e definisce quindi il piano di polarizzazione dell'onda incidente. Quello immediatamente precedente è invece necessario per ridurre l'intensità della luce incidente sul campione e conseguentemente della frazione di luce che poi colpisce il fotodiodo per evitare una eccessiva usura del campione e dello strumento di misura e per evitare inoltre di avere un segnale con un'ampiezza eccessiva in ingresso sul sistema. La scheda di acquisizione è infatti limitata in ampiezza a circa 10 V, per cui la scelta dell'angolo relativo tra le due lenti polarizzatrici è importante per poter controllare l'intensità secondo queste limitazioni sperimentali. Uno schema del setup utilizzato è in figura 2a, mentre in figura 2b troviamo una sua fotografia.

Sorgente La sorgente è costituita da un laser verde estremamente collimato, alimentato in corrente continua. La luce emessa ha una lunghezza d'onda precisa e sufficientemente stabile a 532 nm. Non essendo possibile alternare l'emissione del laser elettronicamente, allora possiamo modularne il segnale meccanicamente. Introduciamo allora un chopper meccanico che lavorando su un motore elettrico in corrente continua può modulare il segnale con una frequenza che può andare da 1 Hz fino a 4 kHz. La scelta della frequenza con cui moduliamo il segnale è allora dettata dalle caratteristiche in spettro del rumore di fondo.

Il chopper permette di misurare la frequenza del segnale prodotto e la fornisce su una linea di uscita TTL. Questa quindi può essere utilizzata come referenza in ingresso allo stadio centrale del lock-in (figura 3) ed è inoltre letta in ingresso alla scheda di acquisizione per verificare che la frequenza sia costante nel tempo. L'errore che viene rilevato è inferiore a 0.5%, osservando solo variazioni sui decimi di Hz, su un segnale a 2745 Hz su tutte le acquisizioni. Queste fluttuazioni sono sufficientemente piccole per poter considerare eventuali effetti sul segnale

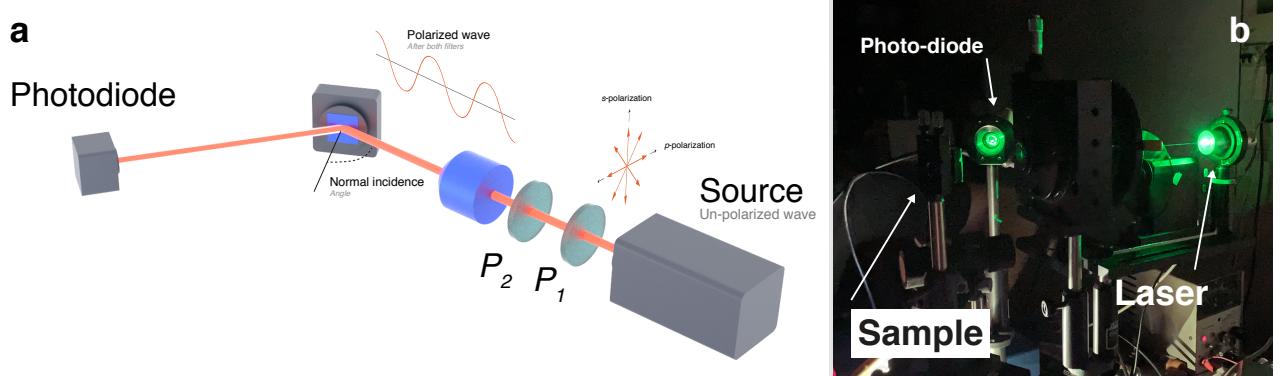


Figura 2. (a) Schema del setup utilizzato. P_1 è il primo polarizzatore, che controlla l'intensità del fascio, insieme a P_2 , che inoltre permette di definire la polarizzazione della luce, ricordando che l'intensità dopo due filtri è proporzionale al $\cos \theta_{1,2}$ dell'angolo compreso tra i due filtri. (b) Fotografia dell'esperimento completo durante una misura. Si può facilmente vedere il sottile fascio laser in uscita dalla sorgente, che attraversa il disco del chopper e poi due lenti polarizzatrici. Il fotodiodo è pure visibile. Il campione è nascosto invece dal supporto posto al centro del goniometro.

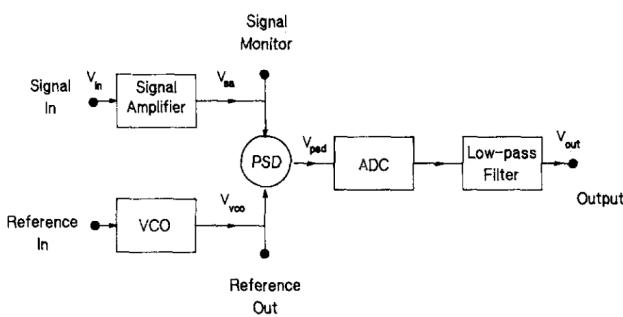


Figura 3. Diagramma a blocchi del lock-in. Dall'alto abbiamo un primo stadio di amplificazione; sotto l'ingresso per il segnale di riferimento; PSD: allineamento in fase e raddrizzamento del segnale amplificato sul riferimento. ADC: convertitore analogico-digitale, scheda di acquisizione National Instruments BNC-2120. Il segnale è così fatto passare su un filtro passa basso implementato digitalmente.

in uscita dal lock-in trascurabili.

Il fascio luminoso in uscita dalla sorgente è allineato per incidere ortogonalmente e centralmente sulle lenti polarizzatrici così da poter trascurare anche possibili effetti di bordo.

Il campione Si utilizzano per realizzare la misura due campioni differenti, un primo costituito da un cristallo di silicio, che indichiamo con c-Si, e un secondo dato da una sottile lamina di oro, che indichiamo con il simbolo Au. Si tratta di campioni sufficientemente lisci, in particolare il campione di c-Si, che non presenta deformazioni notevoli sulla superficie, e soprattutto di materiali conduttori, come nel caso dell'Au, o semiconduttori, come nel caso del c-Si. Questo come detto prima implica la presenza di un coefficiente di assorbimento indicato con $\kappa_{\text{Au}/\text{c-Si}}$.

Il campione è montato su un sostegno centrotipo rispetto

al goniometro, con la possibilità di muoversi lungo gli assi x , y e z locali, dove indichiamo l'asse z come l'asse normale alla superficie del campione, e x , y gli assi della terna destrorsa che indicano spostamento nella direzione verticale al piano del banco ottico e di spostamento laterale. In questo modo è infatti possibile spostare in tre dimensioni il campione, per fare in modo che il punto in cui è colpito dal fascio luminoso sia sempre invariato. Questo passaggio è importante perché permette di controllare se il punto in cui il fascio incide sul campione si trova in corrispondenza del centro del goniometro. Se così non fosse ci sarebbe da tenere conto di un'ulteriore incertezza sulla misura degli angoli. Possiamo compiere questa verifica fissando le direzioni x e y , e andando a variare la posizione lungo z , facendo in modo che piccole rotazioni del supporto sull'asse verticale non facessero variare la posizione dello spot di incisione del fascio luminoso. Questo controllo viene eseguito ogni giorno e ogni volta che il campione è cambiato. Il supporto può accogliere il campione tramite un incastro standard, che permette di poter intercambiare facilmente il materiale presente.

Consideriamo inoltre che i materiali utilizzati non siano estremamente esotici nella loro costituzione, per cui possiamo inoltre supporre che nella riflessione la frequenza della luce incidente non sia cambiata, per fenomeni di riflessioni multiple o per splitting di un'onda multicomponente. Possiamo fare queste assunzioni fondandoci su alcune considerazioni importanti.

1. Il campione, anche nel caso del c-Si, dove è presente un sottile film di SiO_2 , è comunque sufficientemente liscio, e sufficientemente sottile per poter trascurare eventuali riflessioni multiple.
2. Il passo del cristallo, sia del c-Si che per l'Au,

determinato dalla costante reticolare,^{10–15}

$$5.431\,020\,511(89) \times 10^{-10} \text{ m per c-Si}$$

$$4.065(4) \times 10^{-10} \text{ m per Au},$$

è praticamente trascurabile rispetto alla lunghezza d'onda del laser utilizzato, $532 \times 10^{-9} \text{ m}$ avendo una separazione di quattro ordini di grandezza tra le due quantità.

3. Infine possiamo considerare che il laser sia estremamente monocromatico, producendo un fascio solo ad una lunghezza d'onda definita.

Queste considerazioni possono tranquillamente farci assumere che anche se ci sono delle variazioni in frequenza, queste sono trascurabili percentualmente.

Il ricevitore L'ultima componente del setup è dato da un fotodiodo, utilizzato come ricevitore (LASER-OPTRONIC/detector mod. 260). È anche questo assicurato al goniometro, con un supporto ad anello, come si può vedere in figura 4, e può muoversi quindi lungo la circonferenza con centro sul punto in cui è fissato il campione. Ha una precisione su supporto che va come per tutto il goniometro a $0^\circ 20'$. In realtà la superficie sensibile del fotodiodo, il singolo pixel semiconduttore, ha una larghezza che copre più di un terzo di grado, come sempre possiamo vedere nella figura 4, dove oltre ad osservare che l'apertura effettiva angolare del fotodiodo è maggiore della sensibilità angolare del goniometro, la risposta in termini di tensione è costante su tutta la larghezza, fatta eccezione per i fenomeni di bordo, dove però possiamo osservare una riduzione del segnale legato alla forma del laser che non è uniforme in potenza su tutta la superficie incidente ma diffusa sui bordi, come si può vedere nelle regioni evidenziate in verde.

Otteniamo allora che la precisione angolare complessivamente può essere considerata di circa 2° , circa sei volte la precisione sul goniometro. Questo rende comunque l'incertezza sugli angoli inferiore all'incertezza che invece abbiamo sui valori di tensione e quindi sui coefficienti di riflessione. Questo può quindi permetterci di semplificare il modello andando poi a costruire una unica funzione da minimizzare che risulta essere più semplice rispetto a dover considerare anche incertezze sugli angoli. Discuteremo più avanti queste considerazioni, andando a vedere se possono avere inficiato in qualche modo i risultati ottenuti.

Il sensore è anche caratterizzato in efficienza rispetto alla lunghezza d'onda della luce incidente, con la curva riportata in fig. 5. La regione in cui il laser produce è centrata a 532 nm, con una incertezza trascurabile. Per questa lunghezza d'onda la risposta del pixel corrisponde a circa 0.303 A W^{-1} , che in termini di efficienza di risposta corrisponde ad una efficienza del 61.7% circa. Questo però non è un problema per quanto già detto in precedenza commentando i campioni utilizzati, in quanto la lunghezza d'onda della luce incidente sul sensore è sempre uguale, a meno di variazioni trascurabili, anche rispetto

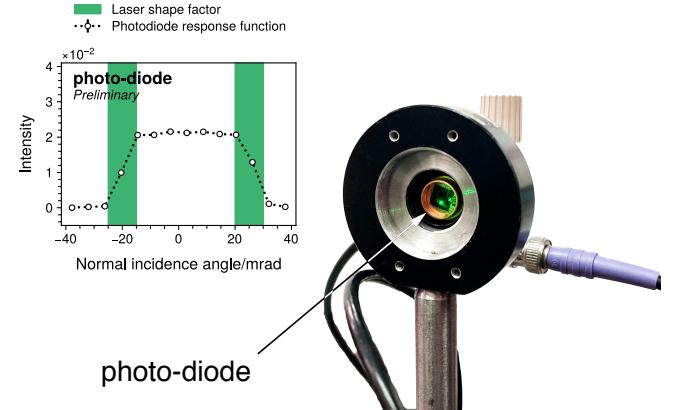


Figura 4. Immagine del fotodiodo utilizzato per la acquisizione dei dati. Il laser colpisce ortogonalmente il cristallo semiconduttore, che ha una apertura angolare di circa 2° , sulla quale la risposta è pressoché uniforme, come possiamo dedurre anche dal grafico, ad eccezione fatta per le regioni ai bordi, evidenziate in verde, per le quali interviene il fattore di forma del fascio di luce laser, che per quanto estremamente collimato presenta una distribuzione approssimativamente gaussiana, della quale stiamo osservando le code.

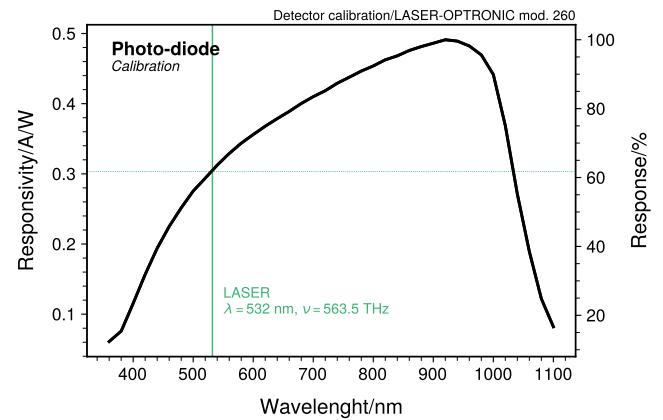


Figura 5. Calibrazione del fotodiodo, nel range 360 nm–1100 nm. Il laser utilizzato è corrispondente a 532 nm, a cui corrisponde una risposta di $0.303 \text{ A W}^{-1} \simeq 61.7\%$. Considerando sempre la stessa frequenza del laser possiamo in generale non preoccuparci dell'efficienza ridotta dell'accoppiamento di fotodiodo con il laser considerato.

alla curva di risposta al sensore riportata in figura. Infatti per una variazione della lunghezza d'onda di circa 20 nm, corrispondente a circa una variazione del 3.75% della lunghezza d'onda del laser, abbiamo una variazione in intensità corrispondente a circa 0.018 A W^{-1} , corrispondente ad una variazione massima del 3.8%. Possiamo quindi trascurare anche questa possibile fonte di errore, ipotizzando, per le ragioni sopracitate, che la lunghezza d'onda abbia variazioni dell'ordine delle decine di nanometri, e che quindi l'incertezza del 5% sia trascurabile.

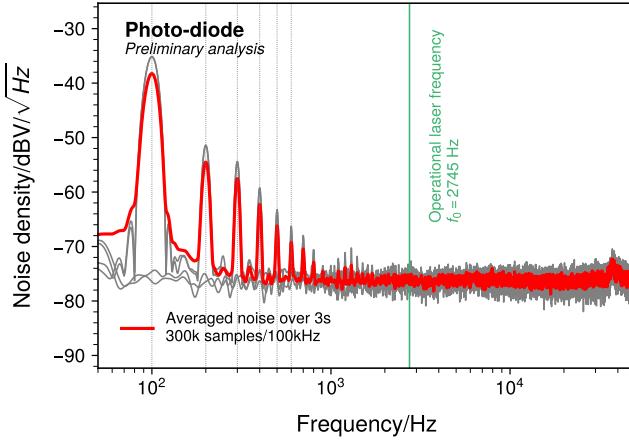


Figura 6. Spettro di densità¹⁶ del rumore elettronico ottenuto da 3 s di dati, con *Fast Fourier Transform*, FFT, di 0.5 s. Osserviamo la presenza dell'armonica principale a 100 Hz, e le armoniche di ordine da 2 a 9 sufficientemente distinte. La frequenza di operazione dell'esperimento è invece spostata de tale regione, ed è evidenziata dalla linea verde, a 2745 Hz.

Vogliamo anche caratterizzare in frequenza elettronica il segnale che riceviamo dal fotodiodo, per cui acquisiamo tre sequenze da 1 secondo che componiamo in una sequenza da tre secondi di dati lasciando tutto il sistema acceso (e quindi anche la parte di amplificazione del segnale del fotodiodo, che descriviamo nel prossimo paragrafo) fatta eccezione per il laser, che non viene puntato sul campione. Possiamo quindi eseguire uno spettro di densità di potenza del segnale ottenuto utilizzando il metodo introdotto da Welch,¹⁶ eseguendo *fast Fourier transforms*, FFT, del segnale, che dividiamo in sequenze da 0.5 s e sovrapponiamo per metà, compiendo delle medie. Lo spettro così ottenuto è riportato in fig. 6. Sono anche riportati gli spettri di densità delle singole sequenze di un secondo, che presentano le stesse caratteristiche dello spettro combinato. In scala logaritmica possiamo osservare un primo picco alla frequenza di 100 Hz, e le successive armoniche di ordine dal 2 al 6, ben visibili, corrispondenti al segnale elettrico di rete.

Per questo decidiamo allora di operare la modulazione del segnale luminoso ad una frequenza di circa 2.7 kHz, che sia distante dalle prime armoniche del segnale di rete e facciamo in modo che sia non multiplo interno della frequenza di rete per spostarci da eventuali effetti di rumore. In questo modo potremo poi anche pensare di valutare il rapporto tra rumore e segnale (SNR).

3.2. Lock-in, analisi online preliminare

La rappresentazione a blocchi del lock-in¹ riportata in figura 3 è schematica ma indicativa del percorso che il segnale compie dal momento in cui è convertito dal fotodiodo a quando poi viene infine salvato.

Dal trasduttore il segnale elettrico viene amplificato su un amplificatore per strumentazione con guadagno combinato sui due stadi separati di circa $G_{\text{amp}} = 0.1 \text{ K}/\text{K}$. La scelta del guadagno viene fatta assieme alla scelta dell'angolo compreso tra i piani di polarizzazione di P_1 e P_2 (figura 2a) per fare in modo che ci sia un ottima efficienza di amplificazione rispetto al rumore, ma anche considerando che il segnale così posto in ingresso alla scheda di acquisizione non vada oltre il limite consentito di $\pm 10 \text{ V}$.

In parallelo dal chopper abbiamo in uscita un segnale TTL standardizzato che possiamo dare in input allo sfasatore (VCO in figura 3).

Questi due segnali si accoppiano al centro del lock-in dove il primo è rettificato sul secondo, utilizzato come referenza, e quindi risulta essere un segnale praticamente in continua. Questo purtroppo non avviene perché come accennato all'inizio il segnale che si utilizza come referenza non è un segnale sinusoidale, che quindi presenta solo una frequenza corrispondente all'armonica principale, ma invece è un segnale dato da un'onda quadra, che quindi presenta anche armoniche successive, che portano quindi ad avere effetti a frequenze maggiori. Per ovviare a questo problema introduciamo allora un filtro passa basso, che però implementiamo digitalmente con LabView dopo aver convertito il segnale.

La conversione del segnale avviene attraverso la scheda di acquisizione National Instrument BNC-2120, che presenta alcune caratteristiche limitanti già citate. Innanzitutto su ogni ingresso abbiamo un limite all'ampiezza di 10 V, che possono essere riferiti a terra o riferiti ad un altro ingresso. Avendo tutto il sistema posto a massa e la massa posta a terra possiamo fare misure riferite a terra. La frequenza di campionamento della scheda è limitata a 250 kilo samples/s distribuita su tutti i canali, che limita su due canali di acquisizione ogni canale ad una frequenza di 100 kHz. Questo implica anche una risoluzione di circa $1/(100 \times 10^3) = 1 \times 10^{-5} \text{ Hz}$ sulla FFT, con una acquisizione di 1 s.

Il segnale digitale è quindi filtrato su un filtro passa basso con frequenza di taglio corrispondente a $f_{\text{cut}} = 200 \text{ Hz}$, per fare in modo che solo il segnale in continua sia preservato, e invece tutte le successive armoniche (che corrispondono ai multipli interi di $f_0 = 2745 \text{ Hz}$) siano ridotte e rese trascurabili.

Il dato così ottenuto è quello che alla fine può essere salvato, corrispondente, a meno di costanti, in prima approssimazione con una relazione lineare, al valore di intensità, espressa in Watt, della luce incidente. Per ogni polarizzazione misuriamo anche l'intensità di incidenza normale che prendiamo come intensità di riferimento. Avremo quindi che la riflettanza R potrà essere espressa come

$$R_{s/p} = \frac{I_{s/p}}{I_{0,s/p}} \simeq \frac{V_{\text{PD}}}{V_{0,\text{PD}}}, \quad (9)$$

considerando una relazione lineare a meno di costanti per l'intensità luminosa rispetto alla tensione. La linearità

della relazione tra V e I è garantita dalle considerazioni che abbiamo fatto in precedenza.

4. ANALISI DATI

4.1. Valutazione del rumore e SNR

Già nel paragrafo precedente abbiamo valutato in frequenza lo spettro di densità del rumore presente nell'ambiente del laboratorio. Purtroppo non avendo raccolto durante le misure fisiche le serie di tempo del segnale, ma avendo raccolto già un prodotto frutto di una analisi, non ci è possibile ottenere uno spettro di densità per i segnali, e quindi un valore del rapporto SNR per tutte le frequenze. Possiamo però ottenere puntualmente una misura di questo rapporto considerando solo la frequenza a cui lo strumento opera, e quindi andando a valutare tale rapporto in funzione dell'angolo di incidenza e in funzione della polarizzazione del segnale.

Il rapporto SNR è definito come

$$\text{SNR} = \frac{S_\ell(f|\theta)}{N_\ell(f|\theta)} = \frac{S_\ell(\theta|f_0)}{N_\ell(\theta|f_0)}, \quad (10)$$

dove abbiamo indicato con il pedice ℓ il modo di polarizzazione, che può essere equivalentemente TE (corrispondente ad una polarizzazione s) o TM (oppure p), e dove la dipendenza dalla frequenza è in realtà nel nostro caso specifico trascurata. In figura 6 abbiamo che il rumore è misurato in deciBel (dB) seguendo la convenzione che

$$S_{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10}(S_v), \quad (11)$$

possiamo allora convertire anche il segnale fisico in decibel, per cui avremo, poiché il logaritmo della frazione corrisponde alla differenza dei logaritmi, che allora possiamo calcolare il valore in deciBel del segnale fisico e poi ottenerne al variare di θ , e in base al valore di $\ell = s, p$, il valore del rapporto SNR.

In questo caso possiamo fare l'ipotesi, rispetto all'equazione (10), che il valore di $N_\ell(\theta)$ sia in realtà costante e indipendente da θ e dal modo di polarizzazione, per cui avremo che

$$\text{SNR} = \frac{S_\ell(\theta|f_0)}{N_0(f_0)}, \quad (12)$$

e possiamo ottenere che per $f_0 = 2745$ Hz, allora $N_0(f_0) = -76.45$ dB. Possiamo inoltre valutare il valore della magnitudine in dB del segnale che misuriamo, e quindi osservare come varia il rapporto SNR in funzione dell'angolo. Considerando separatamente il caso per oro e silicio, e le due differenti polarizzazioni, otteniamo l'andamento riportato in figura 7. Osserviamo che abbiamo in generale un'ottima reiezione del rumore, con un rapporto SNR che è praticamente costante a 80 dB per quasi tutti gli angoli, e al minimo vale comunque 65 dB.

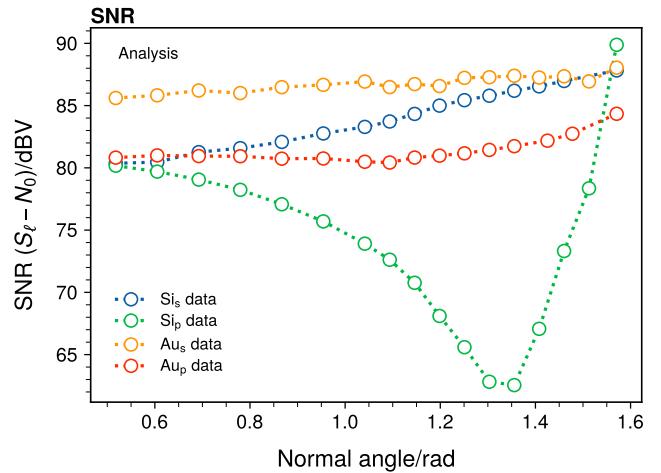


Figura 7. *Signal-to-Noise Ratio* per il sistema utilizzato dipendente dall'angolo di incidenza.

4.2. Definizione degli osservabili e incertezze associate

Sia per i modi TM/ s che per modi TE/ p , per ogni angolo di incidenza abbiamo raccolto più valori di tensione riferiti alla stessa misura. In questo modo, per ogni angolo di incidenza selezionato è possibile fare una media del valore della tensione e ricavarne la deviazione standard. Dividendo per il valore ottenuto della tensione riferita all'incidenza normale, considerato massimo, otteniamo quindi il valore del rapporto $I_\ell/I_{0,\ell}$, con $\ell = s, p$, e del suo errore che otteniamo propagando con l'errore su I_0 . Possiamo quindi realizzare i plot dei coefficienti di riflessione in funzione dell'angolo di incidenza. Riguardo alla misura dell'angolo di incidenza, come già detto prima possiamo essere confidenti nel considerare l'errore su questa misura trascurabile rispetto agli errori legati alle altre misure. Tuttavia è possibile che sia stato introdotto un errore sistematico nella misura. Infatti per misurare l'angolo di incidenza abbiamo considerato un punto sul goniometro come riferimento per il nostro zero e abbiamo definito il valore dell'angolo come differenza dallo zero, a patto poi di traslare rigidamente fissando il punto di intensità massima a 90.0°. Questo però comporta che se appunto questa selezione dell'angolo di riferimento non è stata fatta in modo abbastanza accurato, allora ogni angolo che abbiamo misurato si discosta di un certa quantità rispetto all'effettivo angolo di incidenza. Per poter risolvere questo problema possiamo pensare di inserire un parametro ϕ che appunto tenga conto di questo possibile errore sistematico. Tutte le funzioni espresse sull'angolo, $f(\theta)$, sono allora da considerarsi funzioni sull'angolo e su questo parametro di fase, $f(\theta - \phi)$.

Invece per quanto riguarda le misure di tensione osserviamo che i valori sono sufficientemente stabili e si ottengono errori nell'ordine del 5 – 10 %.

4.3. Campione di Au

Come detto in precedenza, per il campione d'oro possiamo fare un'analisi più semplificata in quanto possiamo assumere che sulla superficie del campione non sia presente un'ulteriore strato di materiale. Per fare l'analisi possiamo quindi usare direttamente le relazioni (3) e (4) tenendo conto della (6) e della (5). Siccome sia R_s che R_p dipendono dagli stessi parametri la cosa migliore da fare è realizzare un fit combinato di entrambi i plot che si ottiene minimizzando il χ^2 definito come somma dei singoli χ^2 delle due funzioni,

$$\chi_{\text{Au}}^2 = \chi_{R_p}^2 + \chi_{R_s}^2. \quad (13)$$

Possiamo infatti definire in questo modo abbastanza semplice la funzione da minimizzare in quanto sappiamo che i due set di dati sono scorrelati tra loro in quanto punto per punto ciò che accomuna i due set è il valore dell'angolo di incidenza che però noi abbiamo considerato privo di errore e quindi non può contribuire alla correlazione. Il parametro di questo fit è n_{Au} in quanto consideriamo che n_{Air} sia un parametro fissato, pari a

$$n_{\text{Air}} = 1.000\,278\,21 + 0i.$$

I risultati che otteniamo sono

^a s4942225@studenti.unige.it

^b s5025011@studenti.unige.it

¹ J. H. Scofield, American journal of physics **62**, 129 (1994).

² A.-J. Fresnel and G. R. t. Putland, *Annales de Chimie et de Physique* (2021), 10.5281/zenodo.4561712.

³ A.-J. Fresnel, Annales de Chimie et de Physique 2, **17**, 102 (1821).

⁴ Nel caso sperimentale il segnale è modulato su un'onda quadra, essendo utilizzato un *chopper*, ma la matematica si complicherebbe, riportiamo quindi eventuali correzioni alla teoria generale nelle note.

⁵ D. Attwood, *Soft X-Rays and Extreme Ultraviolet Radiation: Principles and Applications* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).

⁶ C. Cobet, in *Ellipsometry of Functional Organic Surfaces and Films*, Springer Series in Surface Sciences, edited by K. Hinrichs and K.-J. Eichhorn (Springer International Publishing, Cham, 2018) pp. 1–27.

⁷ K. Hinrichs and K.-J. Eichhorn, eds., *Ellipsometry of Functional Organic Surfaces and Films*, Springer Series in Surface Sciences, Vol. 52 (Springer International Publishing, Cham, 2018).

⁸ P. Yeh, *Optical Waves in Layered Media* (Wiley, New York, 1988).

⁹ Nel caso della ref. 8 la convenzione sul segno dell'esponenziale è differente da quella utilizzata invece dalla ref. 7, ma questo è indifferente considerato che l'esponenziale complesso è periodico 2π . Nella (7) utilizziamo la convenzione presentata nella seconda.

¹⁰ “Basic Parameters of Silicon (Si),” www.ioffe.ru (2023).

¹¹ “CODATA Value: Lattice parameter of silicon,” physics.nist.gov.

¹² W. P. Davey, *Physical Review* **25**, 753 (1925).

¹³ *Materials Data on Au by Materials Project*, Tech. Rep. mp-81 (Lawrence Berkeley National Lab. (LBNL), Berkeley, CA (United States). LBNL Materials Project, 2020).

¹⁴ *Materials Data on Si by Materials Project*, Tech. Rep. mp-149 (Lawrence Berkeley National Lab. (LBNL), Berkeley, CA (United States). LBNL Materials Project, 2020).

¹⁵ “NSM Archive - Physical Properties of Semiconductors,” http://www.ioffe.ru/SVA/NSM/Semicond/.

¹⁶ P. Welch, *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics* **15**, 70 (1967).