Regressions- och tidsserieanalys

Föreläsning 10 - Autokorrelation. Autoregressiva modeller.

Mattias Villani

Statistiska institutionen
Stockholms universitet

Institutionen för datavetenskap
Linköpings universitet


mattiasvillani.com


@matvil


mattiasvillani

Översikt

- Autokorrelation
- Autoregressiva modeller
- Tidsserieregression
- Prognosutvärderingsmått

Repetition - Korrelation

- **Kovarians** mellan två variabler

$$s_{xy} = \text{cov}(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1}$$

- **Korrelation** mellan två variabler:

$$r_{xy} = \text{corr}(x, y) = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

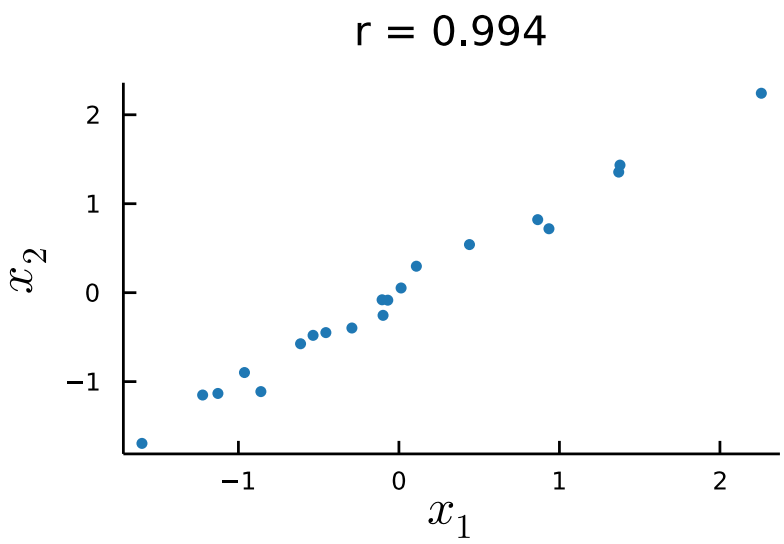
där

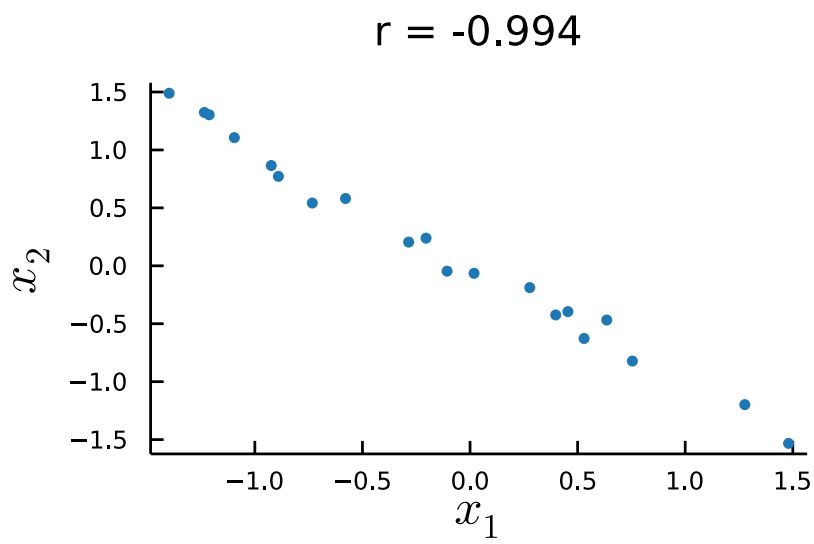
$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

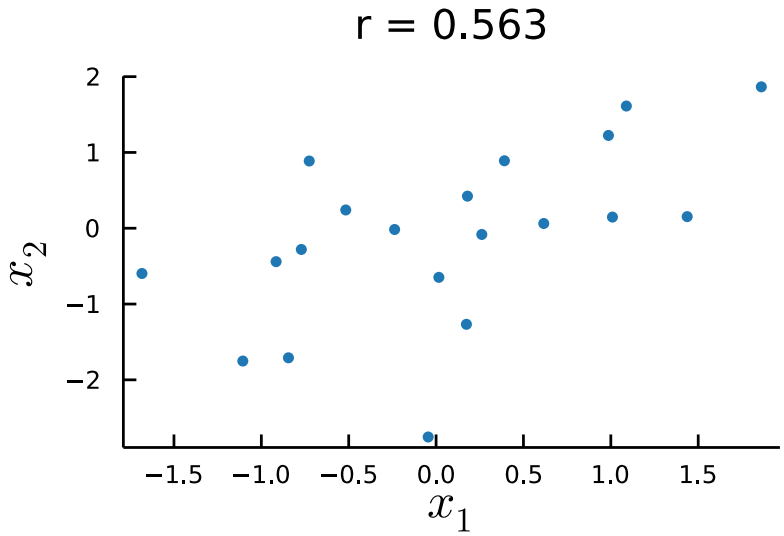
- Samma formel som i F2, men med andra symboler:

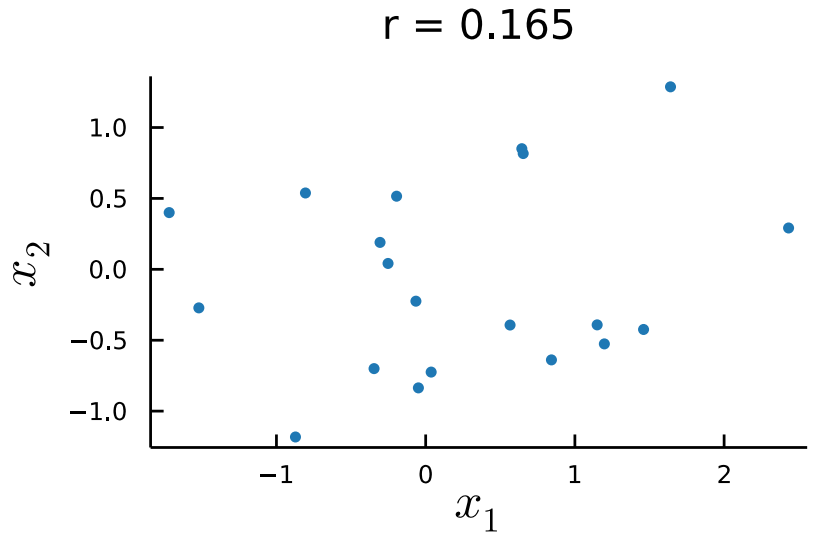
$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_i)(y_i - \bar{y}_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}_i)^2}}$$

Repetition - Korrelation









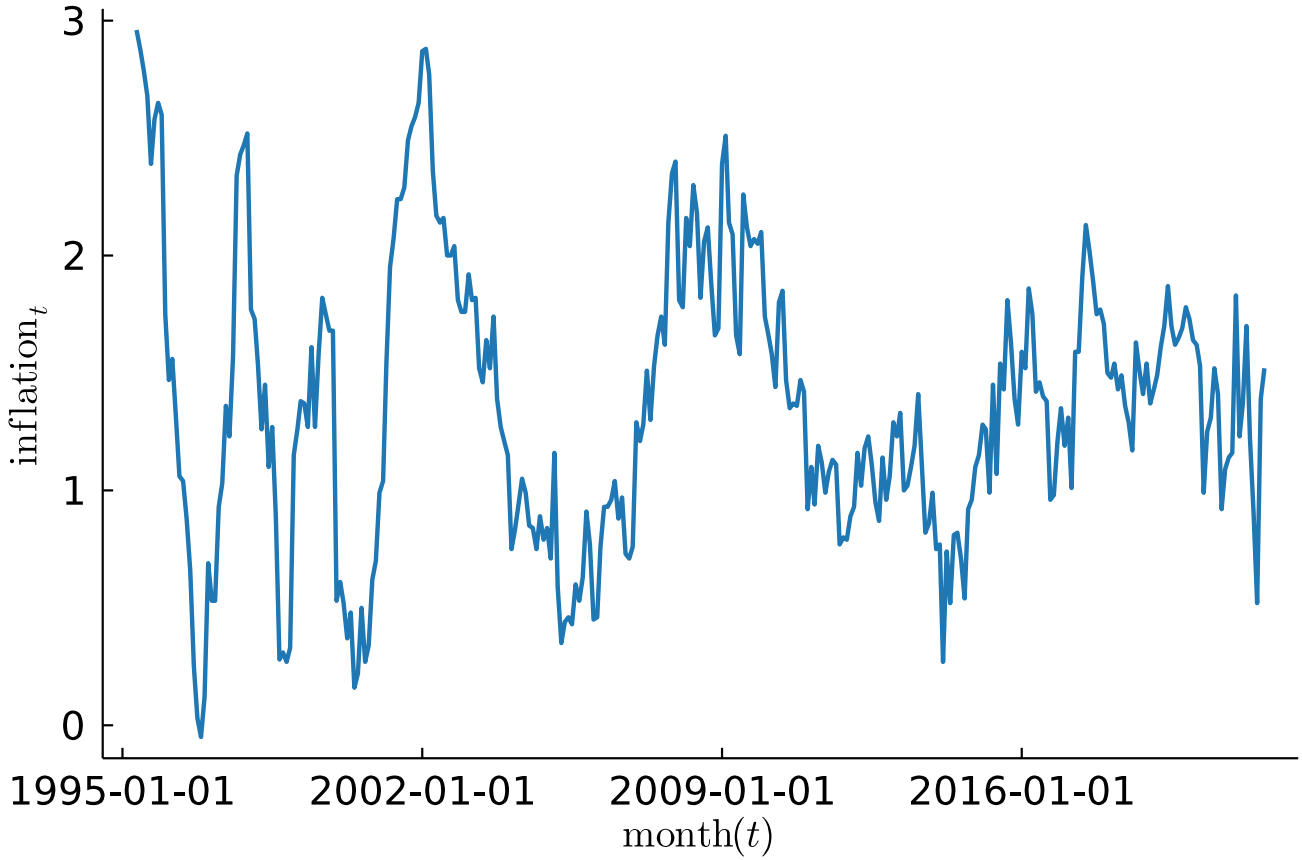
Autokorrelation av ordning 1

- Observationerna i en **tidsserie** y_t är ofta beroende/**korrelerade**.
- **Autokorrelation** av **ordning 1**:

$$r_1 = \text{corr}(y_t, y_{t-1})$$

- "Korrelation mellan dagens värde och gårdagens värde."
- "Korrelation mellan denna månad och förra månaden".
- "Första laggen": y_{t-1}.

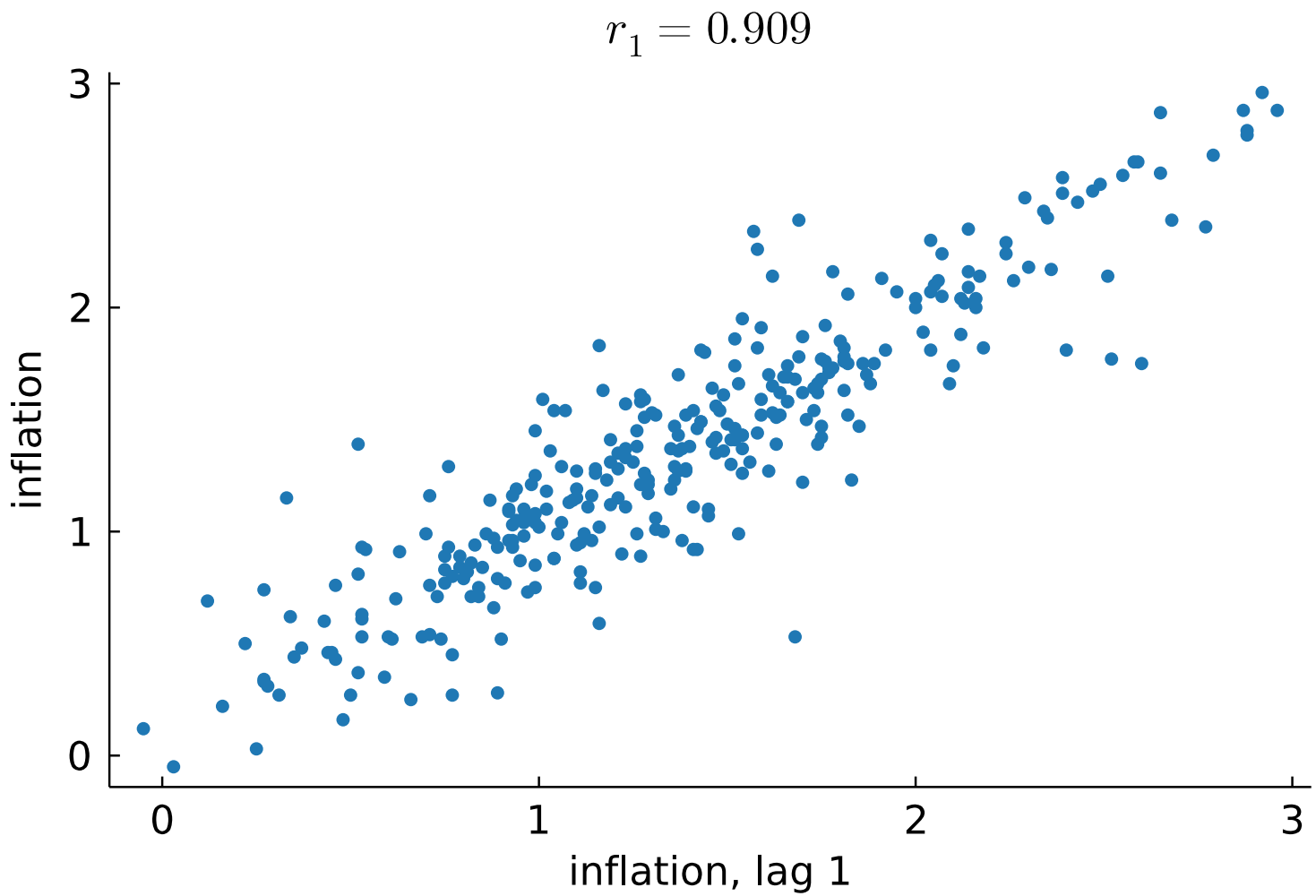
Inflation


3
2
1
0
inflation_t
1995-01-01
2002-01-01
2009-01-01
2016-01-01
$\text{month}(t)$

Laggade variabler - inflation

	A	B	C	D	E	F
1	Månad	Inflation(t)	Inflation(t-1)	Inflation(t-2)	Inflation(t-3)	Inflation(t-4)
2	1995-05-01	2.96				
3	1995-06-01	2.88	2.96			
4	1995-07-01	2.79	2.88	2.96		
5	1995-08-01	2.68	2.79	2.88	2.96	
6	1995-09-01	2.39	2.68	2.79	2.88	2.96
7	1995-10-01	2.58	2.39	2.68	2.79	2.88
8	1995-11-01	2.65	2.58	2.39	2.68	2.79
9	1995-12-01	2.6	2.65	2.58	2.39	2.68
10	1996-01-01	1.75	2.6	2.65	2.58	2.39
11	1996-02-01	1.47	1.75	2.6	2.65	2.58
12	1996-03-01	1.56	1.47	1.75	2.6	2.65
13	1996-04-01	1.31	1.56	1.47	1.75	2.6
14	1996-05-01	1.06	1.31	1.56	1.47	1.75
15	1996-06-01	1.04	1.06	1.31	1.56	1.47
16	1996-07-01	0.88	1.04	1.06	1.31	1.56
17	1996-08-01	0.66	0.88	1.04	1.06	1.31
18	1996-09-01	0.25	0.66	0.88	1.04	1.06
19	1996-10-01	0.03	0.25	0.66	0.88	1.04
20	1996-11-01	-0.05	0.03	0.25	0.66	0.88
21	1996-12-01	0.12	-0.05	0.03	0.25	0.66
22	1997-01-01	0.69	0.12	-0.05	0.03	0.25

Inflation - autokorrelation lag 1



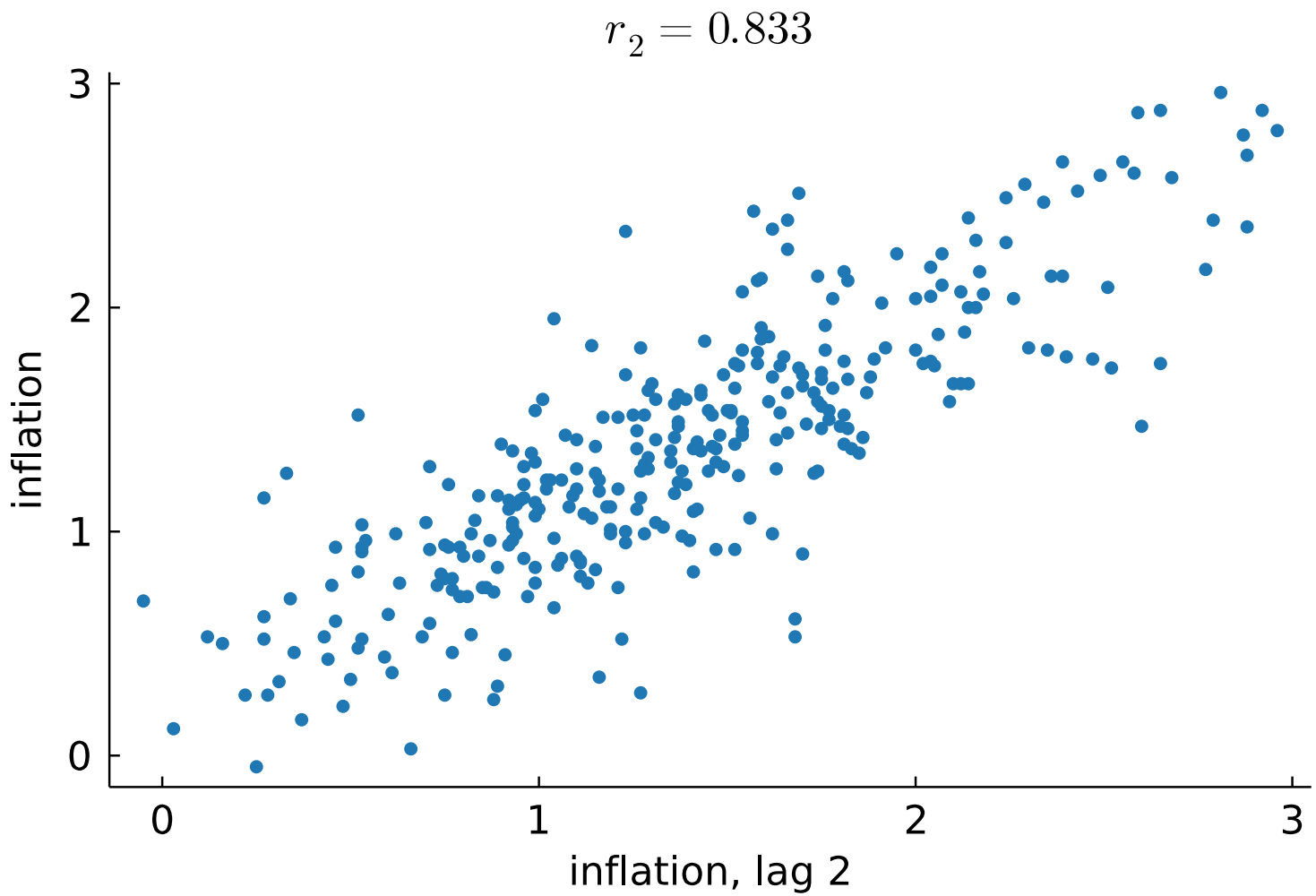
Autokorrelation av ordning 2

- **Autokorrelation** av **ordning 2**:

$$r_2 = \text{corr}(y_t, y_{t-2})$$

- "Korrelation mellan dagens värde och förrgårs värde."
- "Korrelation mellan denna månad och förrförra månaden".
- "Andra laggen": y_{t-2}.

Inflation - autokorrelation lag 2



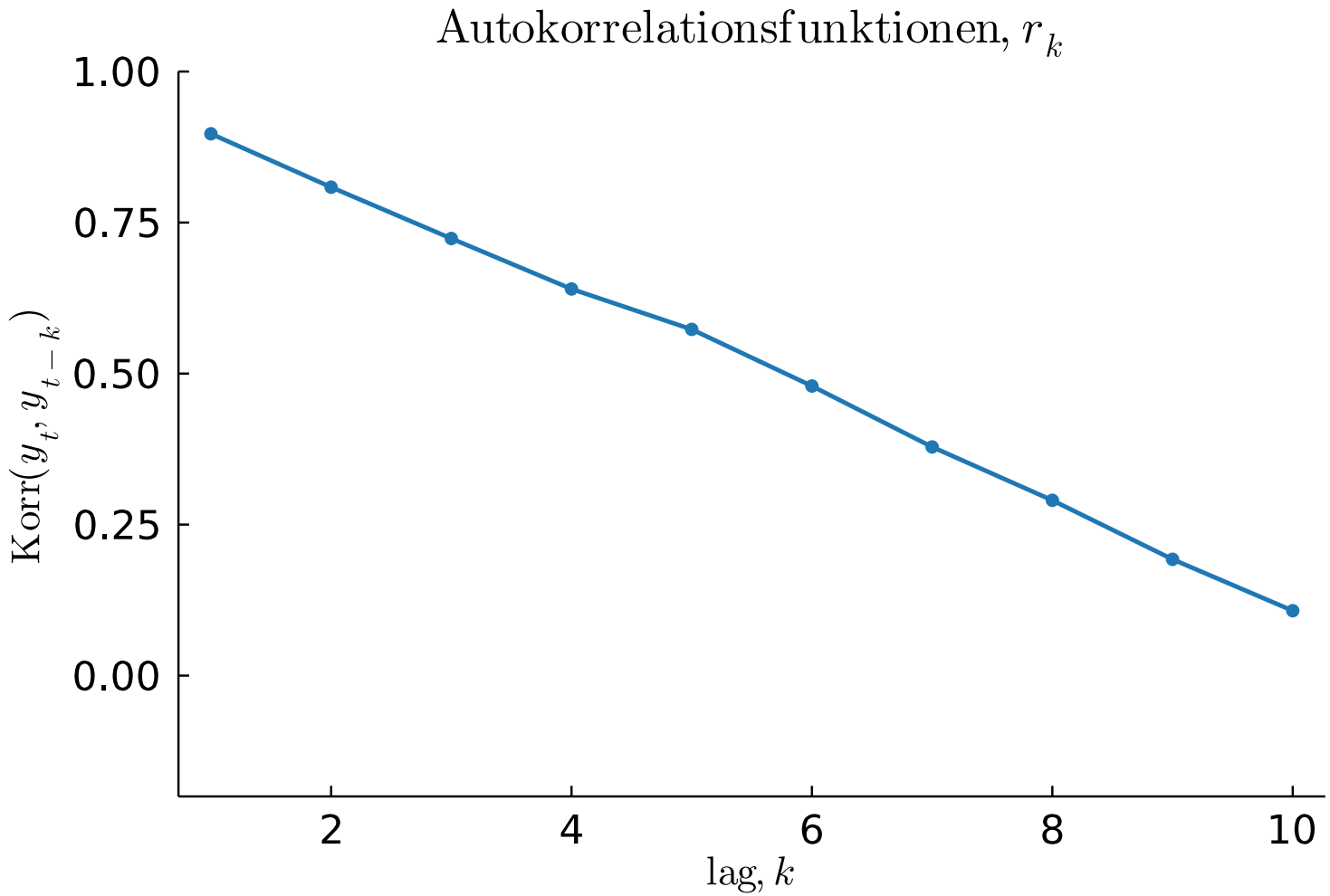
Autokorrelationsfunktionen

- **Autokorrelation** av **ordning** k

$$r_k = \text{corr}(y_t, y_{t-k})$$

- "Korrelation mellan månadens värde och k månader innan".
- **Autokorrelationsfunktionen** (**ACF**) är r_k som en funktion av tidsavståndet k.

Inflation - autokorrelationsfunktion



Autoregressiva modeller

- Autoregressiv modell av ordning 1 ($\mathrm{AR}(1)$)

$$y_t = \alpha + \beta y_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

- $\mathrm{AR}(1)$ är **regression med y_{t-1} som förklarande variabel**!
- Skattas med **minstakvadrat-metoden**

$$y_t = a + b y_{t-1}$$

- Autoregressiv modell av ordning p ($\mathrm{AR}(p)$)

$$y_t = \alpha + \beta_1 y_{t-1} + \ldots + \beta_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

- $\mathrm{AR}(p)$ är en **multipel regression** med de p förklarande variablerna $y_{t-1}, \ldots, y_{t-p}$.

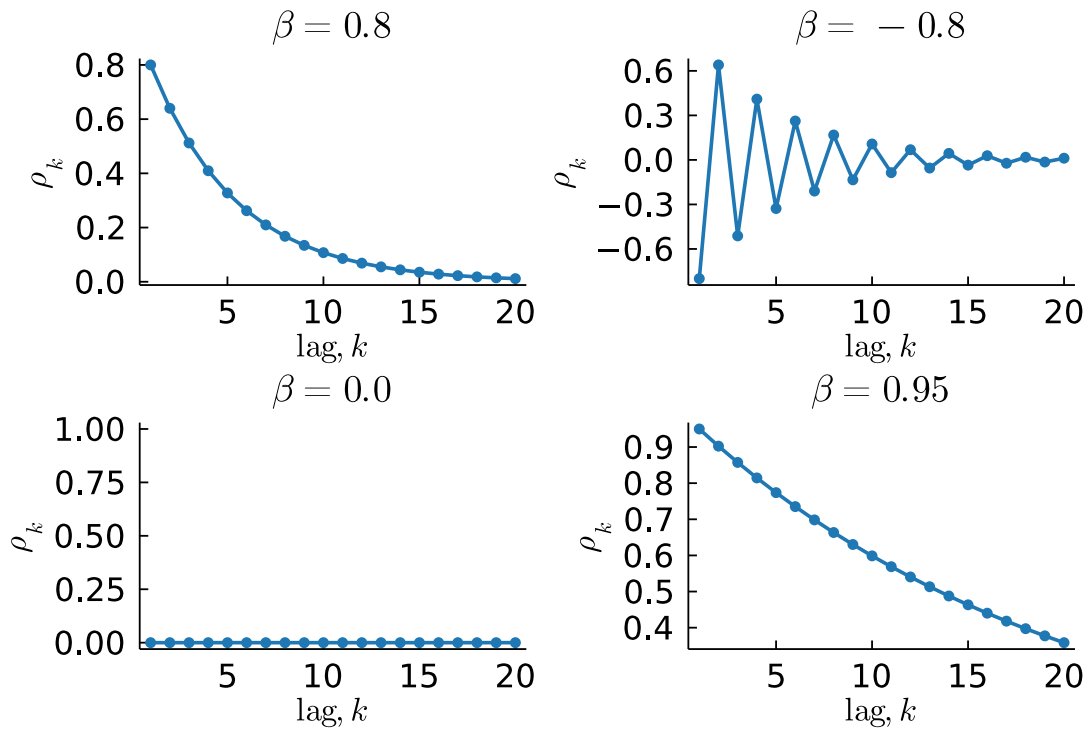
Autoregressiva modeller

- AR(1)

$$y_t = \alpha + \beta y_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

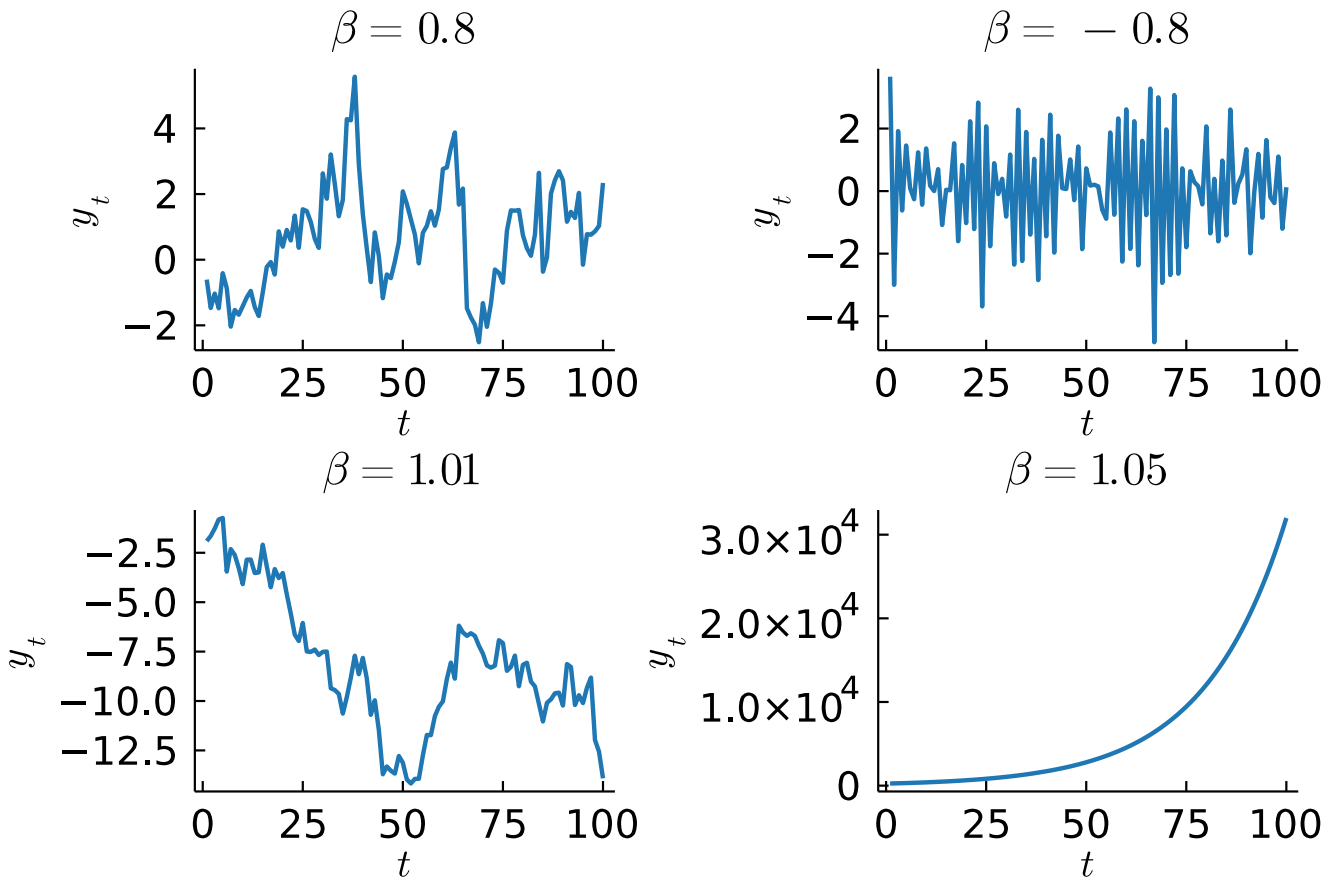
- Autokorrelationsfunktion för AR(1) i populationen:

$$\rho_k = \beta^k, \text{ för } k = 1, 2, \ldots$$



Autoregressiva modeller - stationäritet

- AR(1) är **stationär** (icke-explosiv) modell om $-1 < \beta < 1$.



Autoregressiva modeller - prognoser

- Skattad AR(1)-modell

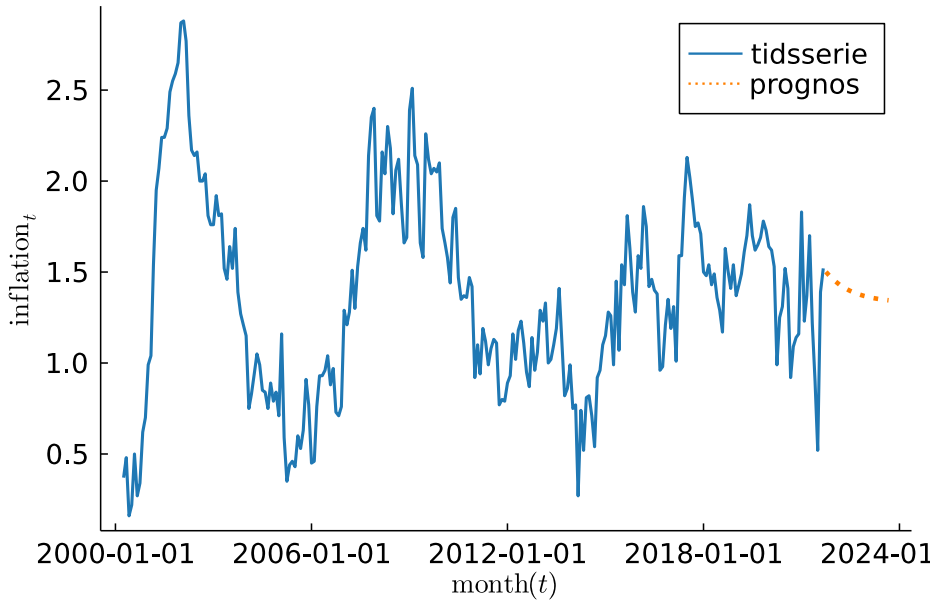
$$y_t = a + b \cdot y_{t-1}$$

- Vid tidpunkt T, **prognos för nästa månad** $T + 1$

$$\hat{y}_{T+1} = a + b \cdot y_T$$

- **Prognos för** $T + 2$

$$\hat{y}_{T+2} = a + b \cdot \hat{y}_{T+1}$$



Regression för tidsserier

- Regression

$$y = \alpha + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k + \varepsilon$$

  där **feltermerna** ε antas bara **oberoende** från $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$.
- **Oberoende = korrelerade** för **normalfördelade** variabler.
- Regressionen skattas med

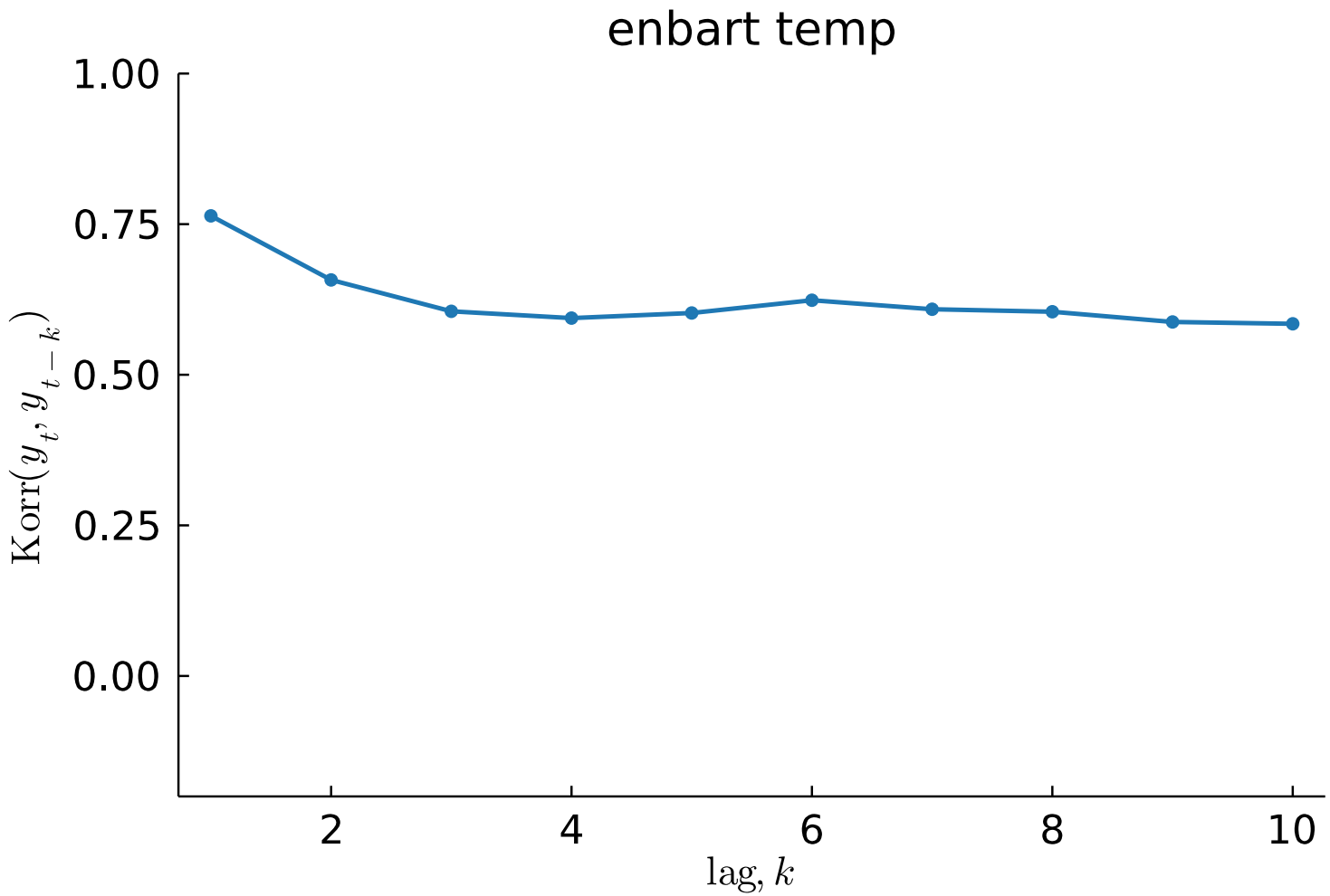
$$y = a + b_1 x_1 + \ldots + b_k x_k$$

  och vi får residualer

$$e_t = y_t - \hat{y}_t.$$

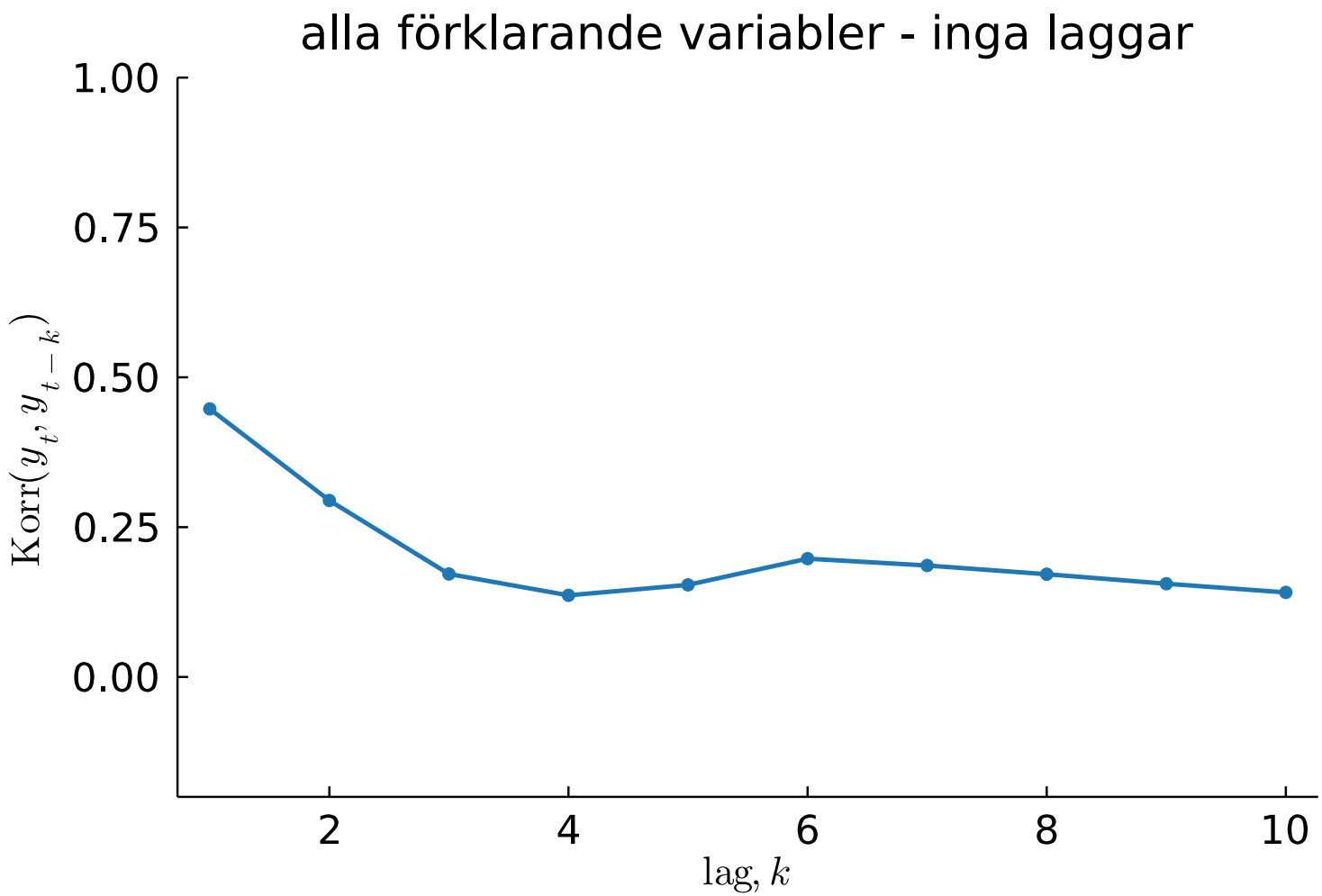
- Vi kan undersöka om **residualerna är okorrelerade**.
- Två metoder:
  - Visuellt genom att **plotta autokorrelationsfunktionen för** e_t
  - **Durbin-Watson test**

ACF residualer - temp



ACF residualer - alla variabler

- Regression med alla förklarande variabler:
  `temp,hum,windspeed,holiday,workingday,säsong,yr`.



Regression för tidsserier

- **Regressionsmodeller för tidsserier**

$$y_t = \alpha + \beta_1 x_t + \varepsilon_t$$

får ofta korrelerade residualer. 🥺

- Kombinera **enkel regression och** $\mathrm{AR}(1)$ 😄

$$y_t = \alpha + \beta_1 x_t + \beta_2 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

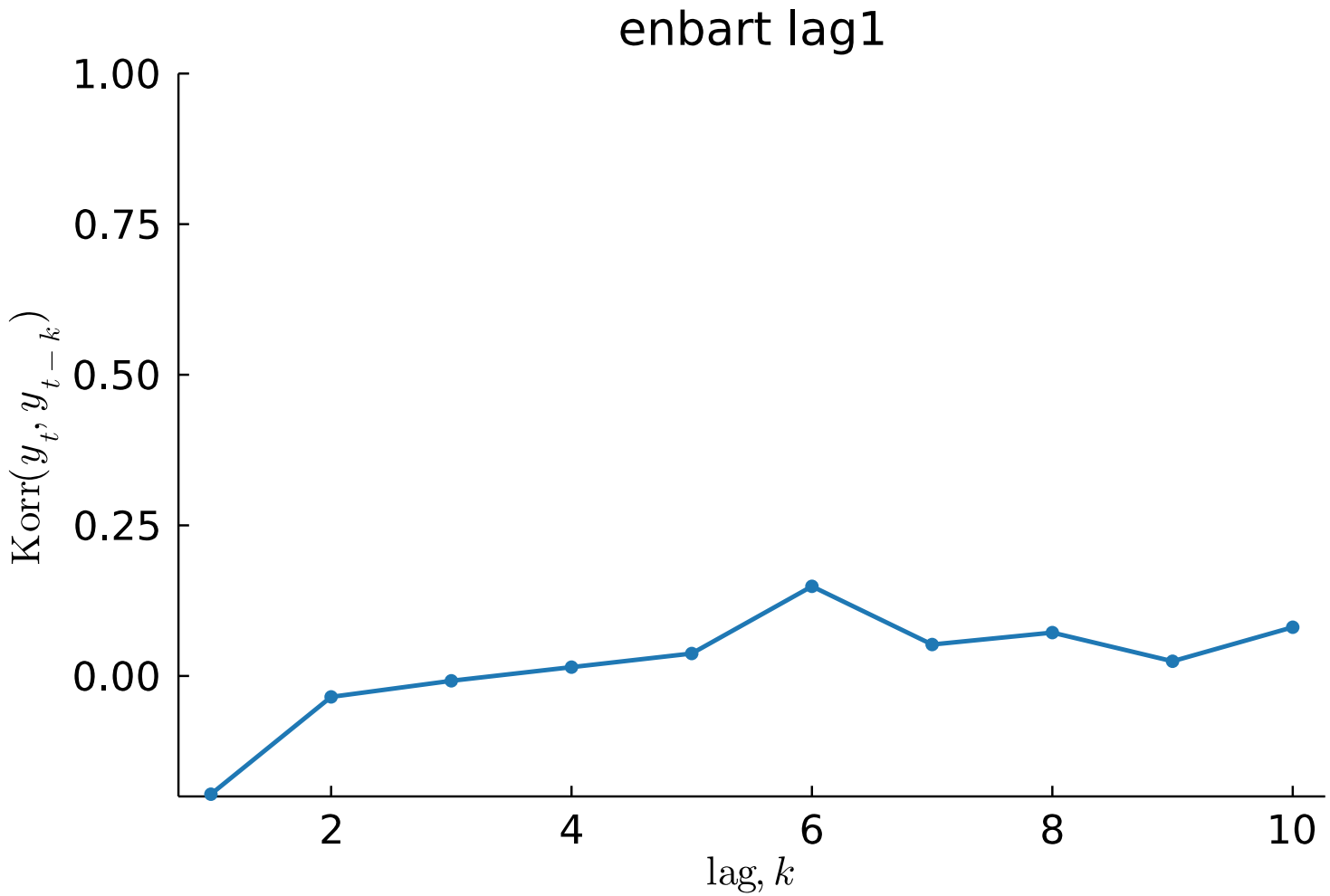
- Kombinera **multipel regression och** $\mathrm{AR}(p)$ 😍

$$y_t = \alpha + \beta_1 x_t + \ldots + \beta_k x_{kt} + \beta_{k+1} y_{t-1} + \ldots + \beta_{k+p} y_{t-p} + \varepsilon_t$$

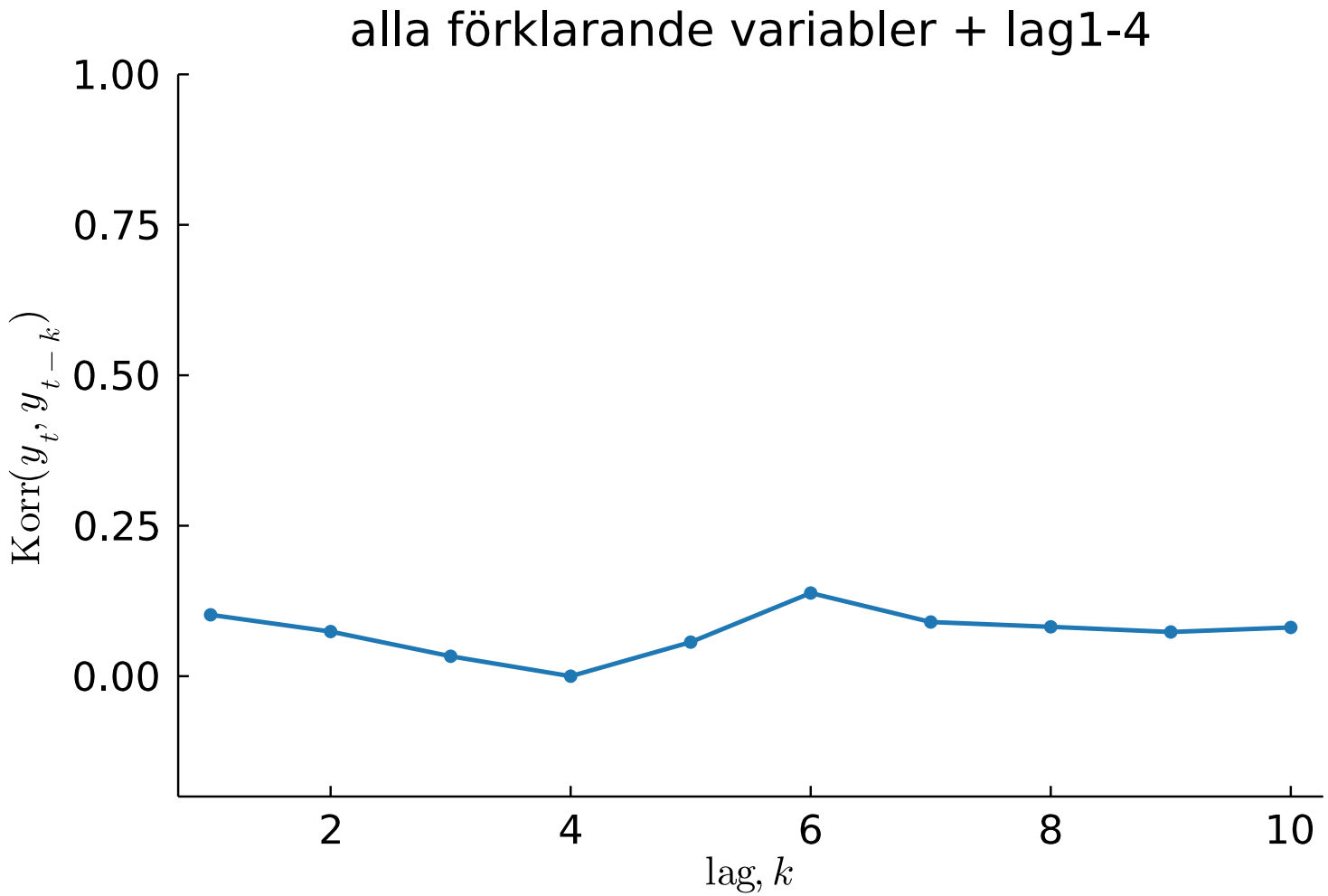
- Cykeluthyrning:

$$\texttt{AntalUthyr}_{\text{idag}} = a + b_1 \cdot \texttt{temp}_{\text{idag}} + b_2 \cdot \texttt{AntalUthyr}_{\text{igar}}$$

ACF residualer - enbart lag 1



ACF residualer - alla variabler + lag 1-4



Durbin-Watson test

- **Test för autokorrelation** (i feltermer).
- **Teststatistika**

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{T}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T} e_t^2}$$

- Durbin-Watson **testar första autokorrelationen** (AJÅ)

$$d \approx 2(1 - r_1)$$

- Teststatistikan uppfyller

$$0 \leq d \leq 4$$

- Grova **kritiska gränser**:

$$\begin{aligned} d \text{ nära } 2 &\implies \text{ej signifikant} \\ d < 1 &\implies \text{signifikant positiv autokorrelation} \\ d > 1 &\implies \text{signifikant negativ autokorrelation} \end{aligned}$$

- Durbin-Watson test kan inte användas när man har laggar av målvariabeln (y_{t-1} etc) som förklarande variabler.

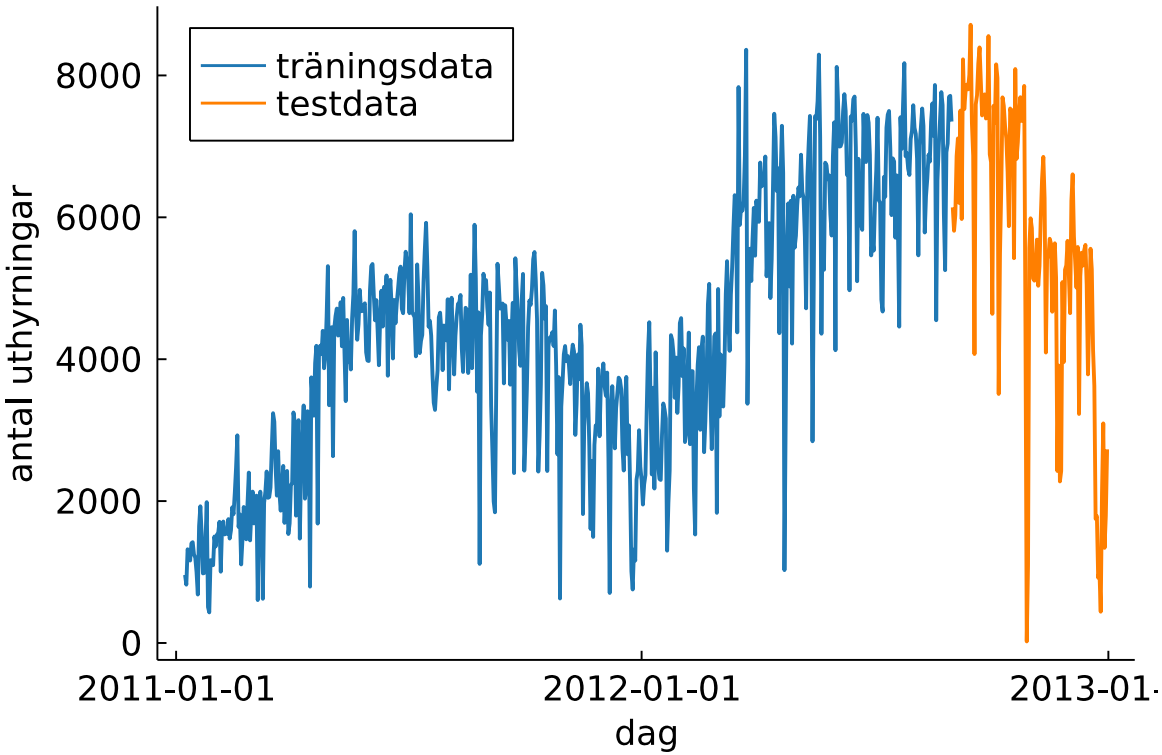
Durbin-Watson test - cykeluthyrning

Förklarande variabler	R^2	$r_1^{(\text{res})}$	d	p-värde
`temp`	0.385	0.764	0.471^{***}	$<$ 1e-93
`temp,hum,windspeed,holiday,workingday,säsong,yr`	0.795	0.447	1.104^{***}	$<$ 1e-33

Cykeluthyrningar - utvärdera prognosförmåga

- **Träningsdata**: Jan 1, 2011 - Aug 31, 2012.
- **Testdata**: Sept 1, 2012 - Dec 31, 2012.
- **Prediktionsmått RMSE**

$$\text{RMSE}_{\text{test}} = \sqrt{\frac{1}{n_{\text{test}}} \sum_{t \in \text{Testdata}} (y_t - \hat{y}_t)^2}$$



Cykeluthyrningar

- Training data: Jan 1, 2011 - Aug 31, 2012.
- Test data: Sept 1, 2012 - Dec 31, 2012.

Förklarande variabler	R^2	$\text{RMSE}_{\text{test}}$	d
`temp`	0.385	2346.60	0.471^{***}
`temp,hum,windspeed,holiday,workingday,säsong,yr`	0.795	1292.07	1.104^{***}
`lag1`	0.714	1274.32	NA
`lag1,lag2`	0.730	1279.30	NA
`lag1-lag4`	0.746	1267.84	NA
`lag1-lag6`	0.764	1262.10	NA
`temp,hum,windspeed,holiday,workingday,säsong,yr,lag1`	0.825	1127.63	NA
`temp,hum,windspeed,holiday,workingday,säsong,yr,lag1-lag4`	0.827	1118.83	NA
`temp,hum,windspeed,holiday,workingday,säsong,yr,lag1-lag6`	0.830	1117.63	NA
`temp,hum,windspeed,holiday,workingday,säsong,yr,lag1-lag6,Lasso`	NA	1118.34	NA