

Regressions- och tidsserieanalys

Föreläsning 5 - Modeller: antaganden, kontroll och utvärdering

Mattias Villani

Statistiska institutionen
Stockholms universitet

Institutionen för datavetenskap
Linköpings universitet



mattiasvillani.com



@matvil



mattiasvillani

- Modellkontroll
- Binära och kategoriska förklarande variabler.

Multipl linjär regression - antaganden

■ Populationsmodell för multipl regression:

$$y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

■ Antaganden:

- ▶ Betingade väntevärdet $\mu_{y|x_1, \dots, x_k}$ en **linjär funktion** av alla x
- ▶ Feltermerna ε_i har **samma varians** σ_ε^2 (homoskedasticitet)
- ▶ Feltermerna är **normalfördelade**
- ▶ Feltermerna är **oberoende**.

Antagandet om linjäritet, normalitet och oberoende

■ Linjäritet:

- ▶ **Plotta residualerna** mot varje förklarande variabel.
- ▶ **Testa om icke-linjära effekter** är signifikanta (se F7).

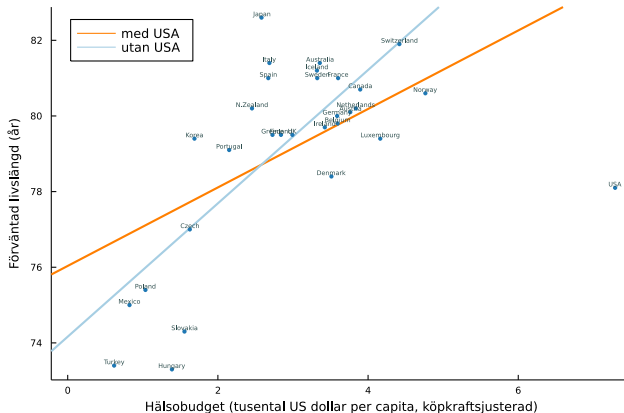
■ Normalitet:

- ▶ **Histogram** över **residualerna**
- ▶ **Q-Q-plot** för **residualerna**
- ▶ **Normalitetstest**

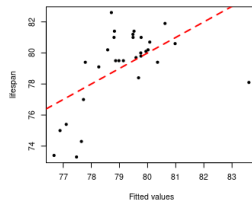
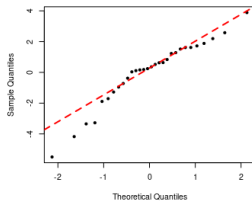
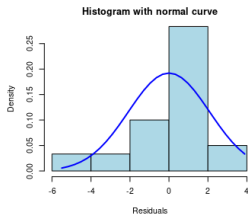
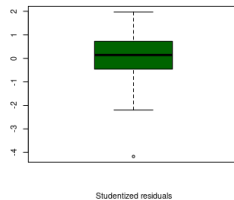
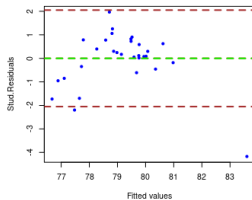
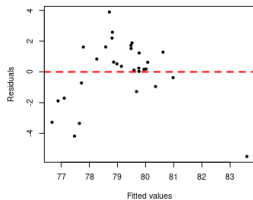
■ Outliers: **studentized residuals**. Standardiserade residualer.

■ **Oberoende residualer**? Ofta problem när variabler i regression är **observerade över tid**. Ex. cykeluthyrningsdata. Återkommer till detta när vi pratar om tidsserier.

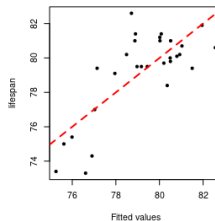
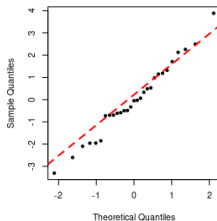
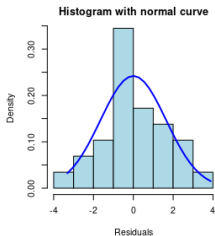
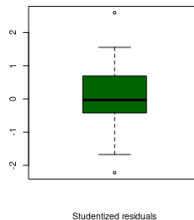
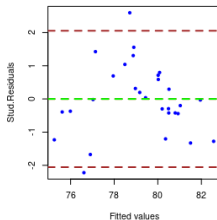
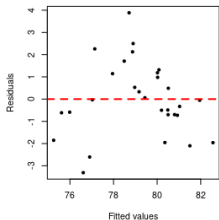
Hälsobudgetdata med USA



Hälsobudgetdata med USA

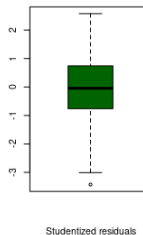
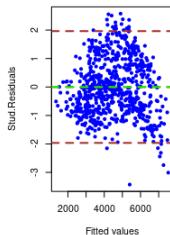
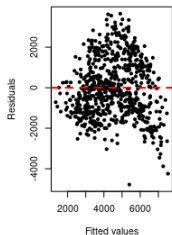


Hälsobudgetdata - utan USA

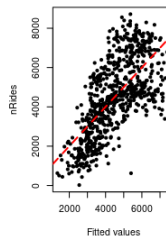
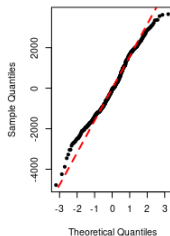
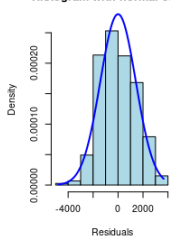


Cykeluthyrningar - residualanalys 1

- `lmfit = lm(nRides ~ temp + hum + windspeed, data = bike)`
- `res.diagnostics(lmfit)`

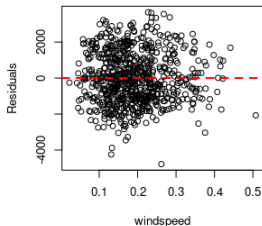
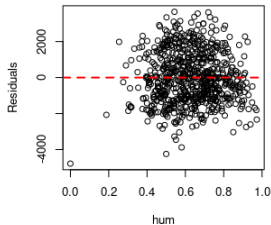
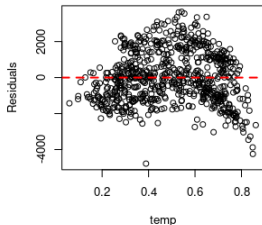


Histogram with normal curve



Cykeluthyrningar - residualanalys 2

- `lmfit = lm(nRides ~ temp + hum + windspeed, data = bike)`
- `res.diagnostics(lmfit, regressors = T)`



Antagandet om konstant varians

- Plotta residualerna mot varje förklarande variabel.
- Test för heteroskedasticitet:

H_0 : feltermerna har samma varians (homoskedastiska)

H_1 : feltermerna har olika varians (heteroskedastiska)

- Testprocedur:

- ▶ skatta regression med **kvadrerade residualer e^2 som y-variabel**

$$e^2 = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}_1 x_1 + \dots + \tilde{\beta}_k x_k + \tilde{\varepsilon}$$

- ▶ använd t ex F -test för att testa $H_0 : \tilde{\beta}_1 = \dots = \tilde{\beta}_k = 0$.
- ▶ om F -testet förkastas så förkastar vi homoskedasticitet.

- AJÅ: kvadrater x_1^2, \dots, x_k^2 som förklarande variabler i regressionen för e^2 . Kollar om variansen är ett **icke-linjär funktion** av någon förklarande variabel. Se F7.

Multikollinearitet

- Förklarande variabler är ofta **korrelerade**.
- **Multikollinearitet** - linjära beroenden mellan olika x_j .

	temp	hum	windspeed
temp	1.00	0.13	-0.16
hum	0.13	1.00	-0.25
windspeed	-0.16	-0.25	1.00

- **Problem vid multikollinearitet:**
 - ▶ **svårt att separera** de olika förklarande variabelernas effekt på y
 - ▶ **stora standardfel** för b_j .
 - ▶ **insignifikans**.
- **Prediktioner påverkas inte** av multikollinearitet.

Variance inflation factors

- **Variance Inflation Factor (VIF)** för förklarande variabeln x_j

$$\text{VIF}_j = \frac{1}{1 - R_j^2}$$

- R_j^2 är förklaringsgraden i regressionen **med x_j som responsvariabel** och alla andra x som förklarande variabler.
- Tumregel: $\text{VIF} > 10$ är stark multikollinearitet.
- Cykeluthyrning. Ny variabel: *upplevd temperatur* (feeltemp).

variable	R^2	VIF	variable	R^2	VIF
temp	0.033	1.034	temp	0.984	62.969
hum	0.070	1.075	feeltemp	0.984	63.632
windspeed	0.078	1.085	hum	0.073	1.079
			windspeed	0.113	1.127

- **Binära (dummy) variabler** som bara kan anta två värden. Ex:

$$\text{holiday} = \begin{cases} 1 & \text{om röd dag} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$\text{workingday} = \begin{cases} 1 & \text{om arbetsdag} \\ 0 & \text{om helg eller arbetsfri dag} \end{cases}$$

- Varianter av **kodning**: (0,1) eller $(-1,1)$, eller (true,false).
- Regressionsmodell med binär förklarande variabel:

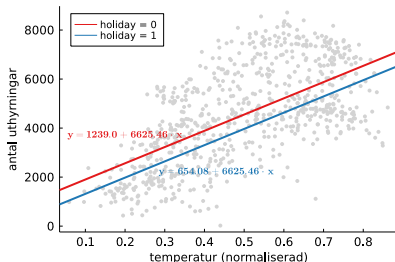
$$y = \alpha + \beta_1 \cdot \text{temp} + \beta_2 \cdot \text{workingday} + \varepsilon$$

innebär att vi får **två parallella regressionlinjer**

$$y = \begin{cases} \alpha + \beta_1 \cdot \text{temp} + \varepsilon & \text{om workingday} = 0 \\ (\alpha + \beta_2) + \beta_1 \cdot \text{temp} + \varepsilon & \text{om workingday} = 1 \end{cases}$$

¹Videon [binarycovariates.mp4](#) finns i Videos mappen på Athena.

Binära förklarande variabler



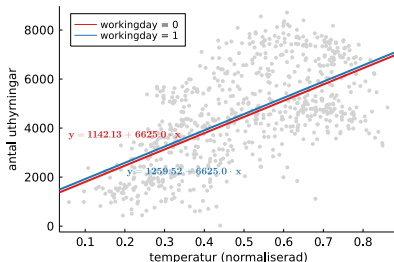
```
> lmfit = lm(nRides ~ temp + holiday, data = bike)
> regsummary(lmfit, conf_intervals = T, anova = F)
```

Measures of model fit

Root MSE	R2	R2-adj
1507.25087	0.39629	0.39464

Parameter estimates

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	2.5 %	97.5 %
(Intercept)	1239.00	161.53	7.6702	5.516e-14	921.87	1556.131
temp	6625.46	304.88	21.7314	4.296e-81	6026.91	7224.007
holiday	-584.92	333.87	-1.7519	8.021e-02	-1240.39	70.552



```
> lmfit = lm(nRides ~ temp + workingday, data = bike)
> regsummary(lmfit, conf_intervals = T, anova = F)
```

Measures of model fit

Root MSE	R2	R2-adj
1509.43722	0.39454	0.39288

Parameter estimates

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	2.5 %	97.5 %
(Intercept)	1142.13	177.46	6.43596	2.2248e-10	793.74	1490.53
temp	6625.00	305.62	21.67711	8.7933e-81	6024.99	7225.01
workingday	117.38	120.25	0.97617	3.2931e-01	-118.69	353.46

Ännu fler binära förklarande variabler

```
> lmfit = lm(nRides ~ temp + hum + windspeed + workingday +  
+           workingday + holiday + yr, data = bike)  
> regsummary(lmfit, conf_intervals = T)
```

Analysis of variance - ANOVA

```
-----  
              df          SS          MS          F          Pr(>F)  
Regr       6 1995735713 332622619 323.77 3.7475e-201  
Error    724  743799679   1027348  
Total    730 2739535392
```

Measures of model fit

```
-----  
      Root MSE          R2      R2-adj  
1013.58158      0.72849      0.72624
```

Parameter estimates

```
-----  
              Estimate Std. Error  t value  Pr(>|t|)    2.5 %    97.5 %  
(Intercept)  2577.864    252.560  10.20694 6.0523e-23 2082.027 3073.70  
temp         6280.856    209.044  30.04567 2.1247e-129 5870.452 6691.26  
hum          -2220.634    275.170  -8.07004 2.9221e-15 -2760.861 -1680.41  
windspeed    -4363.749    504.412  -8.65115 3.2727e-17 -5354.034 -3373.46  
workingday     76.552     83.452   0.91733 3.5928e-01  -87.284   240.39  
holiday       -607.036    232.021  -2.61629 9.0743e-03 -1062.551 -151.52  
yr            2008.609     75.632  26.55763 4.9489e-109 1860.125 2157.09
```

- Kategoriska (klass) förklarande **variabler**. Ex:

$$\text{season} = \begin{cases} 1 & \text{om vinter} \\ 2 & \text{om vår} \\ 3 & \text{om sommar} \\ 4 & \text{om höst} \end{cases}$$

- Koda som **fyra binära variabler**

	vinter	vår	sommar	höst	temp	...
2011-01-01	1	0	0	0	0.344	
2011-01-02	1	0	0	0	0.363	
⋮						
2011-04-28	0	1	0	0	0.453	
⋮						
2011-07-14	0	0	1	0	0.830	
⋮						
2011-10-04	0	0	0	1	0.521	

Kategoriska förklarande variabler

- Regressionen kan inte skattas pga **perfekt multikollinearitet**!

$$y = a + b_1 \cdot \text{temp} + b_2 \cdot \text{vinter} + b_3 \cdot \text{vår} + b_4 \cdot \text{sommar} + b_5 \cdot \text{höst}$$

- Lösning: **ta bort en** av de fyra dummyvariabler, t ex vinter:

$$y = a + b_1 \cdot \text{temp} + b_3 \cdot \text{vår} + b_4 \cdot \text{sommar} + b_5 \cdot \text{höst}$$

- Vinter blir nu **referenskategorin** (alla tre dummies är noll då).

- Vinterdag:

$$y = a + b_1 \cdot \text{temp}$$

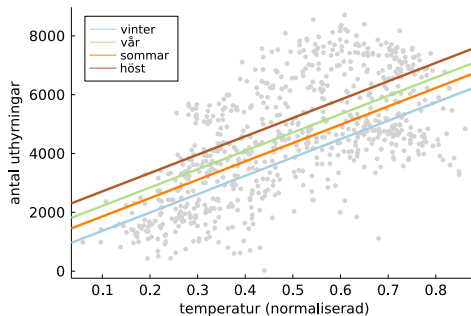
- Vårdag:

$$y = (a + b_3) + b_1 \cdot \text{temp}$$

- Koefficienten b_3 är **hur många fler** cyklar hyrs ut under en vårdag **jämfört med en vinterdag**.

- Koefficienten b_4 är hur många fler cyklar hyrs ut under en sommardag **jämfört med en vinterdag**.

Cykeluthyrning - säsongsdummies



Parameter estimates

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	2.5 %	97.5 %
(Intercept)	745.79	187.48	3.9780	7.6450e-05	377.728	1113.85
temp	6241.35	518.14	12.0456	1.3596e-30	5224.110	7258.58
springTRUE	848.72	197.08	4.3065	1.8870e-05	461.806	1235.64
summerTRUE	490.20	259.01	1.8926	5.8808e-02	-18.294	998.68
fallTRUE	1342.87	164.59	8.1590	1.4872e-15	1019.748	1666.00

Cykeluthyrning - säsongsdummies

```
> bike$spring <- bike$season == 2
> bike$summer <- bike$season == 3
> bike$fall <- bike$season == 4
> lmfit = lm(nRides ~ temp + spring + summer + fall, data = bike)
> regsummary(lmfit, conf_intervals = T)
```

Analysis of variance - ANOVA

```
-----
              df          SS          MS          F          Pr(>F)
Regr         4 1248576475 312144119 151.99 2.0539e-94
Error       726 1490958917  2053662
Total       730 2739535392
```

Measures of model fit

```
-----
      Root MSE          R2      R2-adj
1433.06051      0.45576      0.45276
```

Parameter estimates

```
-----
              Estimate Std. Error t value  Pr(>|t|)    2.5 %  97.5 %
(Intercept)    745.79    187.48   3.9780 7.6450e-05  377.728 1113.85
temp           6241.35    518.14  12.0456 1.3596e-30 5224.110 7258.58
springTRUE      848.72    197.08   4.3065 1.8870e-05  461.806 1235.64
summerTRUE      490.20    259.01   1.8926 5.8808e-02  -18.294  998.68
fallTRUE       1342.87    164.59   8.1590 1.4872e-15 1019.748 1666.00
```

Kategoriska variabler med R's faktorvariabler

```
> lmfit = lm(nRides ~ temp + as.factor(season), data = bike)
> regsummary(lmfit, conf_intervals = T)
```

Analysis of variance - ANOVA

```
-----
              df          SS          MS          F          Pr(>F)
Regr         4 1248576475 312144119 151.99 2.0539e-94
Error       726 1490958917   2053662
Total       730 2739535392
```

Measures of model fit

```
-----
      Root MSE          R2          R2-adj
1433.06051      0.45576      0.45276
```

Parameter estimates

```
-----
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    2.5 %  97.5 %
(Intercept)      745.79    187.48   3.9780 7.6450e-05  377.728 1113.85
temp             6241.35    518.14  12.0456 1.3596e-30 5224.110 7258.58
as.factor(season)2   848.72    197.08   4.3065 1.8870e-05  461.806 1235.64
as.factor(season)3   490.20    259.01   1.8926 5.8808e-02  -18.294  998.68
as.factor(season)4  1342.87    164.59   8.1590 1.4872e-15 1019.748 1666.00
```

F-test för en grupp av förklarande variabler 3

- Testa om det finns en säsongseffekt? Vi kan t -testa varje säsongsdummys (vår, sommar, höst).
- F -test kan användas för att testa en grupp av variabler

$$H_0 : \beta_{\text{vår}} = \beta_{\text{sommar}} = \beta_{\text{höst}} = 0$$

H_1 : någon av $\beta_{\text{vår}}$, β_{sommar} eller $\beta_{\text{höst}}$ är skild från noll.

■ Teststatistiska

$$F = \frac{(R_{\text{UR}}^2 - R_{\text{R}}^2) / r}{(1 - R_{\text{UR}}^2) / (n - k - 1)}$$

- ▶ R_{UR}^2 är R^2 för regressionen **U**tan nollhypotesens **R**estriktioner (de tre säsongsdummys är med i modellen)
- ▶ R_{R}^2 är R^2 för regressionen med nollhypotesens **R**estriktioner (de tre säsongsdummys är inte med i modellen)
- ▶ r är antalet restriktioner under H_0 , dvs $r = 3$ här.

- Under H_0 följer teststatistikan F en $F(r, n - k - 1)$ -fördelning.

³Videon [Ftest_for_group.mp4](#) finns i Videos mappen på Athena.

F-test för säsong i cykeluthyrningsdata

- Under H_0 : temp, hum, windspeed.
- Under H_1 : temp, hum, windspeed, vår, sommar, höst.
- Så $k = 6$ och $r = 3$.
- $R_{UR}^2 = 0.5354$
- $R_R^2 = 0.4609$

$$F_{\text{obs}} = \frac{(0.5354 - 0.4609)/3}{(1 - 0.5354)/(731 - 6 - 1)} = 38.698$$

$$F_{\text{crit}} = F_{0.95}(3, 724) = 2.617$$

- $F_{\text{obs}} > F_{\text{crit}}$ så nollhypotesen förkastas på signifikansnivån 5%.
Det verkar finnas en säsongseffekt.

Bonusmaterial som inte ingår i kursen

Tidigare år har jag fått frågor från studenter som går lite utanför kursen som jag ändå har valt att besvara med bonusvideos på Athena (Videos-mappen):



I videon [interaktioner.mp4](#) förklarar jag hur man kan skapa **interaktioner** mellan förklarande variabler, och varför man skulle vilja göra det.

Filmens trailer: en interaktion med en dummy-variabel kan få regressionslinjen att byta lutning! 🤪



I videon [omittedvar.mp4](#) förklarar jag vad som händer om man missar att ta med en viktig förklarande variabel i en regressionsmodell.

Filmens trailer: jag glömde en viktig variabel och du kan inte gissa vad som hände sen! 🤯