Regressions- och tidsserieanalys

Föreläsning 5 - Modeller: antaganden, kontroll och utvärdering

Mattias Villani

Statistiska institutionen
Stockholms universitet

Institutionen för datavetenskap
Linköpings universitet


mattiasvillani.com


@matvil


mattiasvillani

Översikt

- Modellkontroll
- Binära och kategoriska förklarande variabler.
- Modellutvärdering

Multipel linjär regression - antaganden

- **Populationsmodell för multipel regression**:

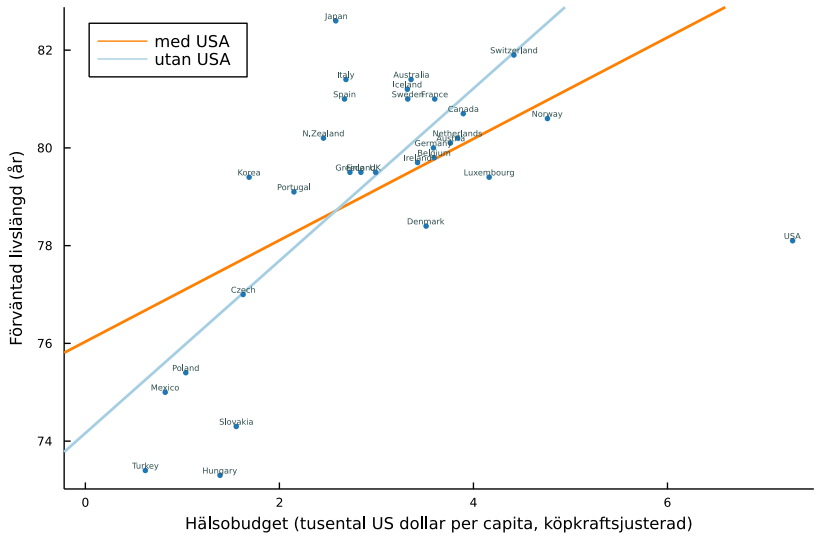
$$y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_k x_k + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

- **Antaganden**:
  - Betingade väntevärdet $\mu_{y|x}$ är en **linjär funktion** av x
  - Feltermerna ε_i har **samma varians** σ_ε^2 (homoskedastiticitet)
  - Feltermerna är **normalfördelade**
  - Feltermerna är **oberoende**.

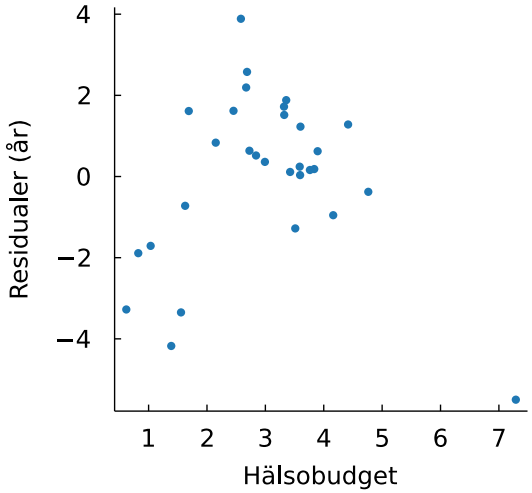
Antagandet om linjäritet, normalitet och oberoende

- **Linjäritet**:
  - **Plotta residualerna** mot varje förklarande variabel.
  - **Testa om icke-linjära effekter** är signifikanta (se F7).
- **Normalitet**:
  - **Histogram** över **residualerna**
  - **Q-Q-plot** för **residualerna**
  - **Normalitetstest**
- **Oberoende residualer**? Ofta problem när variabler i regression är **observerade över tid**. Ex. cykeluthyrningsdata. Återkommer till detta när vi pratar om tidsserier.

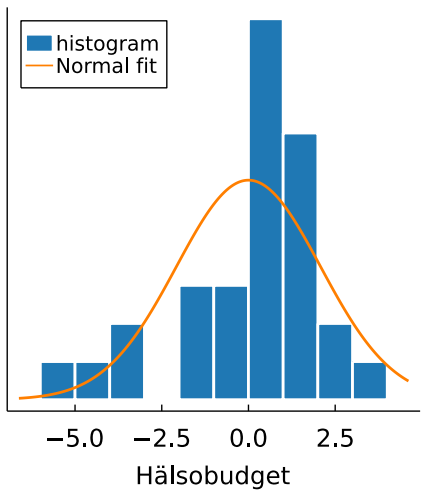
Hälsobudgetdata med USA



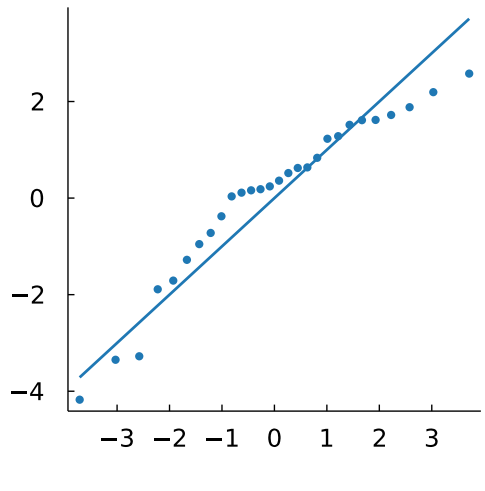
Residualer vs hälsobudget



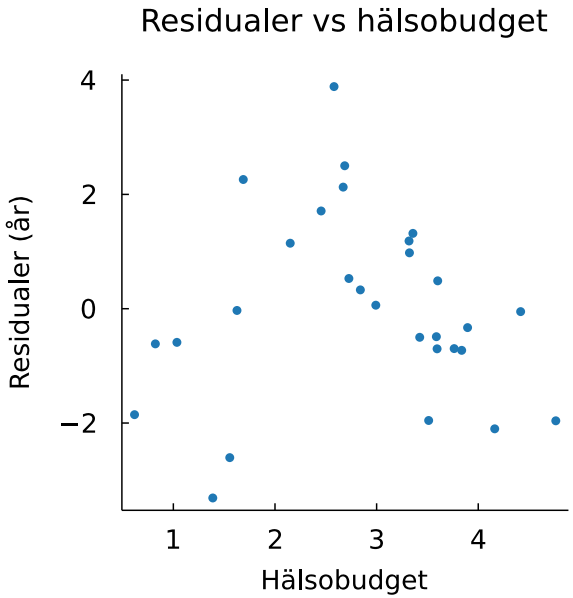
Histogram residualer

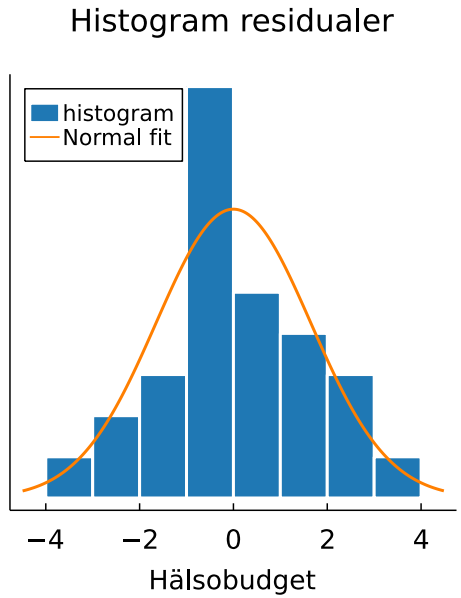


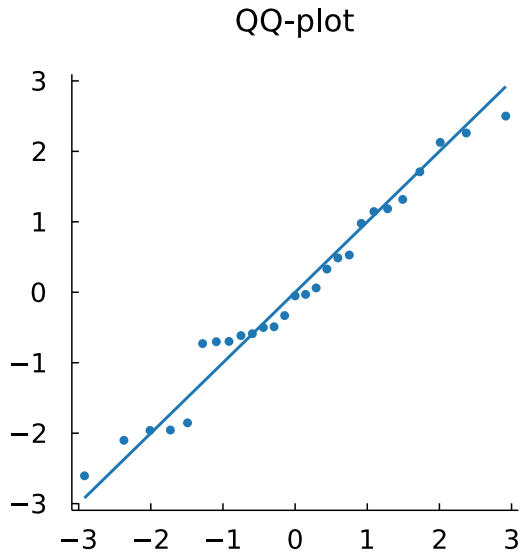
QQ-plot



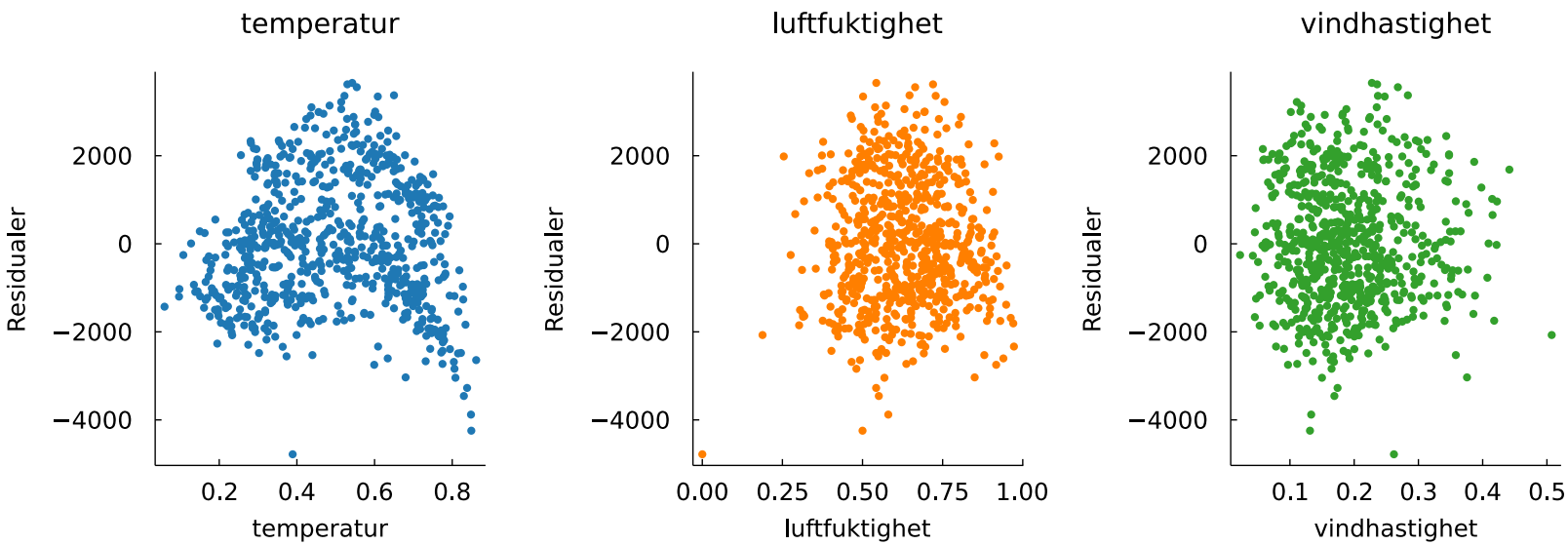
Hälsobudgetdata - utan USA

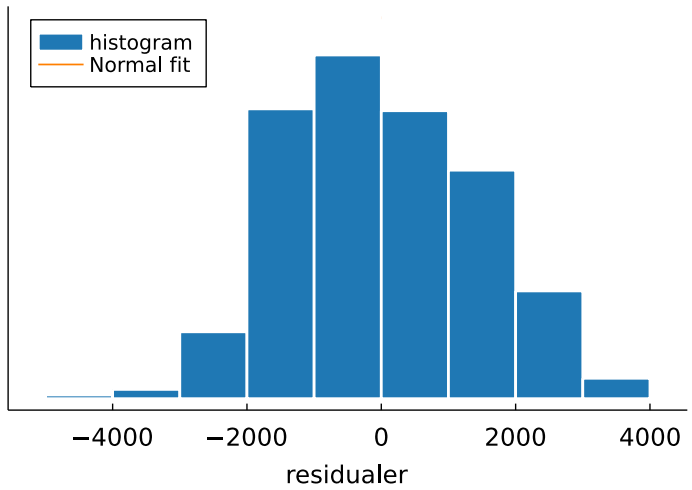


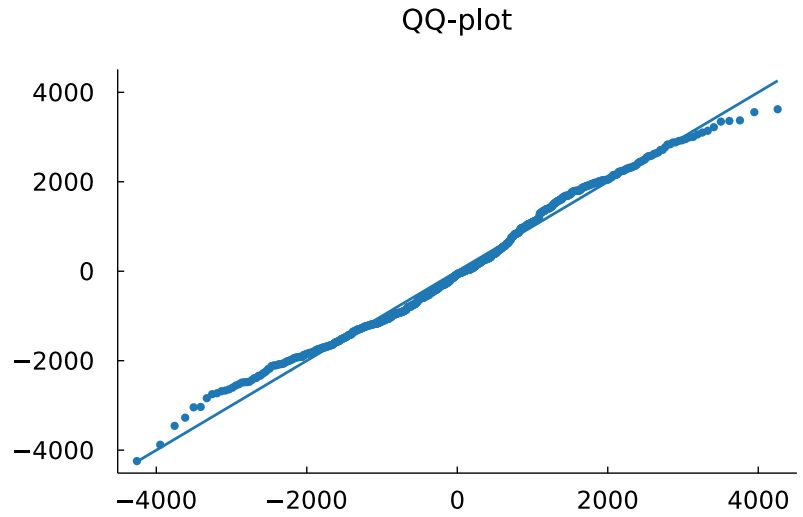




Cykeluthyrningar







Antagandet om konstant varians

- **Plotta residualerna mot varje förklarande variabel**.
- **Test för heteroskedasticitet**:

  H_0 : feltermerna har samma varians (homoskedastiska)

  H_1 : feltermerna har olika varians (heteroskedastiska)

- **Testprocedur**:
  - skatta regression med **kvadrerade residualer e^2 som y-variabel**
    $$e^2 = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}_1 x_1 + \ldots + \tilde{\beta}_k x_k + \tilde{\varepsilon}$$
  - använd t ex F-test för att testa $H_0 : \tilde{\beta}_1 = \ldots = \tilde{\beta}_k = 0$.
  - om F-testet förkastas så förkastar vi homoskedastiticitet.

- AJÅ: kvadrater $x_1^2, \ldots, x_k^2$ som förklarande variabler i regressionen för e^2. Kollar om variansen är ett **icke-linjär funktion** av någon förklarande variabel. Se F7.

Multikollinearitet

- **Förklarande variabler** är ofta **korrelerade**.
- **Multikollinearitet** - linjära beroenden mellan olika x_j.

```
Title "korrelationer";
proc corr data = work.cykeluthyr;
var temp hum windspeed;
run;
```

Pearson Correlation Coefficients, N = 731
Prob > |r| under H0: Rho=0

	temp	hum	windspeed
temp	1.00000	0.12696 0.0006	-0.15794 <.0001
hum	0.12696 0.0006	1.00000	-0.24849 <.0001
windspeed	-0.15794 <.0001	-0.24849 <.0001	1.00000

- **Problem vid multikollinearitet**:
  - **svårt att separera** de olika förklarande variablernas effekt på y
  - **stora standardfel** för b_j.
  - **insignifikans**.
- **Prediktioner påverkas inte** av multikollinearitet.

Variance inflation factors

- **Variance Inflation Factor (VIF)** för förklarande variabeln x_j

$$\text{VIF}_j = \frac{1}{1 - R_j^2}$$

- R_j^2 är förklaringsgraden i regressionen **med x_j som responsvariabel** och alla andra x som förklarande variabler.
- Tumregel: $\text{VIF} > 10$ är stark multikollinearitet.
- Cykeluthyrning. Ny variabel: *upplevd temperatur* (`feeltemp`).

variable	R^2	VIF
`temp`	0.033	1.034
`hum`	0.070	1.075
`windspeed`	0.078	1.085

variable	R^2	VIF
temp	0.984	62.969
feeltemp	0.984	63.632
hum	0.073	1.079
windspeed	0.113	1.127

Binära förklarande variabler

- **Binära (dummy) variabler** som bara kan anta två värden. Ex:

$$\text{holiday} = \begin{cases} 1 & \text{om röd dag} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$\text{workingday} = \begin{cases} 1 & \text{om arbetsdag} \\ 0 & \text{om helg eller arbetsfri dag} \end{cases}$$

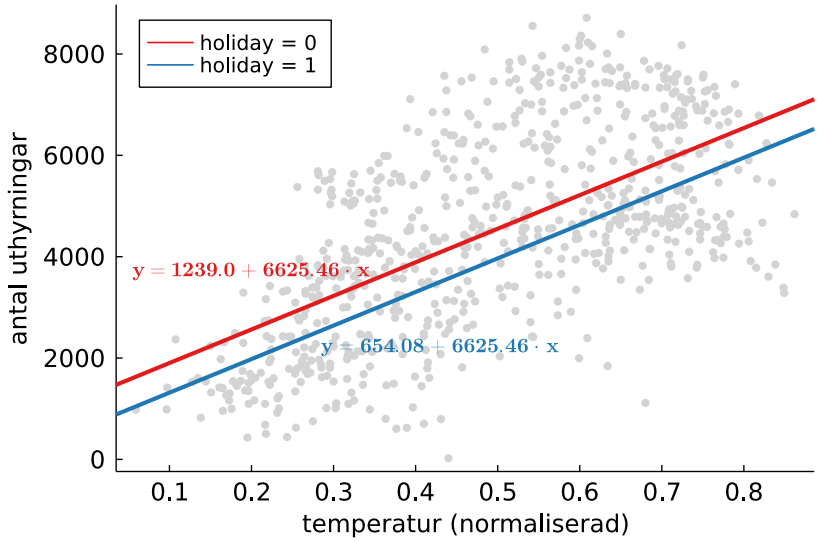
- Varianter av **kodning**: $(0,1)$ eller $(-1,1)$, eller `(true,false)`.
- Regressionsmodell med binär förklarande variabel:

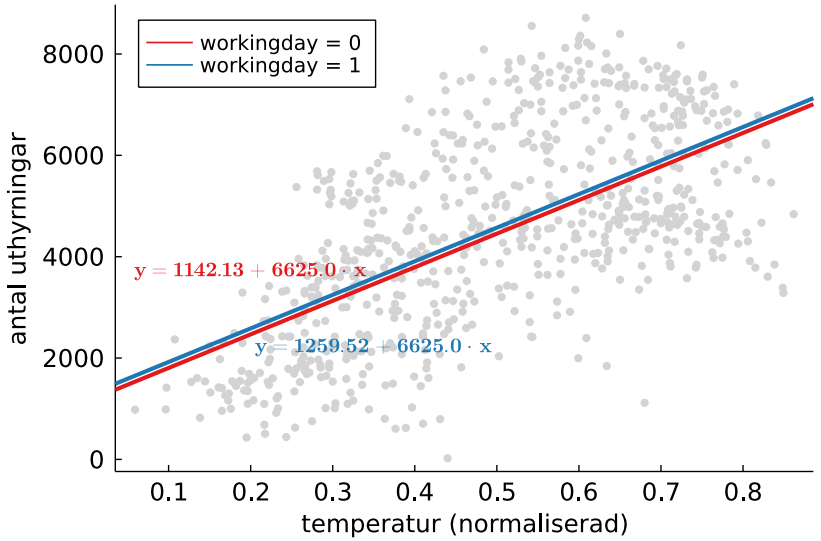
$$y = \alpha + \beta_1 \cdot \text{temp} + \beta_2 \cdot \text{workingday} + \varepsilon$$

innebär att vi får **två parallella regressionlinjer**

$$y = \begin{cases} \alpha + \beta_1 \cdot \text{temp} + \varepsilon & \text{om workingday} = 0 \\ (\alpha + \beta_2) + \beta_1 \cdot \text{temp} + \varepsilon & \text{om workingday} = 1 \end{cases}$$

Binära förklarande variabler





Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|	95% Confidence Limits	
Intercept	1	1239.00123	161.53482	7.67	<.0001	921.87157	1556.13090
temp	1	6625.45780	304.88015	21.73	<.0001	6026.90857	7224.00704
holiday	1	-584.91862	333.87396	-1.75	0.0802	-1240.38930	70.55207

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|	95% Confidence Limits	
Intercept	1	1142.13473	177.46139	6.44	<.0001	793.73757	1490.53190
temp	1	6624.99960	305.62194	21.68	<.0001	6024.99407	7225.00512
workingday	1	117.38410	120.25018	0.98	0.3293	-118.69442	353.46262

```
proc reg data = work.cykeluthyr;
model NRIDES = TEMP HOLIDAY / clb alpha=0.05;
run;
```

```
proc reg data = work.cykeluthyr;
model NRIDES = TEMP WORKINGDAY/ clb alpha=0.05;
run;
```

Ännu fler binära förklarande variabler

Multipel linjär regression - nRides mot temp och hum

The REG Procedure
Model: MODEL1
Dependent Variable: nRides

Number of Observations Read	731
Number of Observations Used	731

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	6	1995735713	332622619	323.77	<.0001
Error	724	743799679	1027348		
Corrected Total	730	2739535392			

Root MSE	1013.58158	R-Square	0.7285
Dependent Mean	4504.34884	Adj R-Sq	0.7262
Coeff Var	22.50229		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|	95% Confidence Limits	
Intercept	1	2577.86429	252.55993	10.21	<.0001	2082.02702	3073.70157
temp	1	6280.85581	209.04363	30.05	<.0001	5870.45174	6691.25988
hum	1	-2220.63420	275.17032	-8.07	<.0001	-2760.86122	-1680.40718
windspeed	1	-4363.74853	504.41242	-8.65	<.0001	-5354.03420	-3373.46287
workingday	1	76.55228	83.45154	0.92	0.3593	-87.28362	240.38817
holiday	1	-607.03615	232.02130	-2.62	0.0091	-1062.55104	-151.52126
yr	1	2008.60930	75.63209	26.56	<.0001	1860.12490	2157.09370

Kategoriska förklarande variabler

- Kategoriska (klass) förklarande variabler. Ex:

$$\text{season} = \begin{cases} 1 & \text{om vinter} \\ 2 & \text{om vår} \\ 3 & \text{om sommar} \\ 4 & \text{om höst} \end{cases}$$

- Koda som fyra binära variabler

	vinter	vår	sommar	höst	temp	···
2011-01-01	1	0	0	0	0.344	
2011-01-02	1	0	0	0	0.363	
⋮						
2011-04-28	0	1	0	0	0.453	
⋮						
2011-07-14	0	0	1	0	0.830	
⋮						
2011-10-04	0	0	0	1	0.521	

Kategoriska förklarande variabler

- Regressionen kan inte skattas pga **perfekt multikollinearitet**!

$$y = a + b_1 \cdot \text{temp} + b_2 \cdot \text{vinter} + b_3 \cdot \text{vår} + b_4 \cdot \text{sommar} + b_5 \cdot \text{höst}$$

- Lösning: **ta bort en** av de fyra dummyvariabler, t ex vinter:

$$y = a + b_1 \cdot \text{temp} + b_3 \cdot \text{vår} + b_4 \cdot \text{sommar} + b_5 \cdot \text{höst}$$

- Vinter blir nu **referenskategorin** (alla tre dummies är noll då).
- Vinterdag:

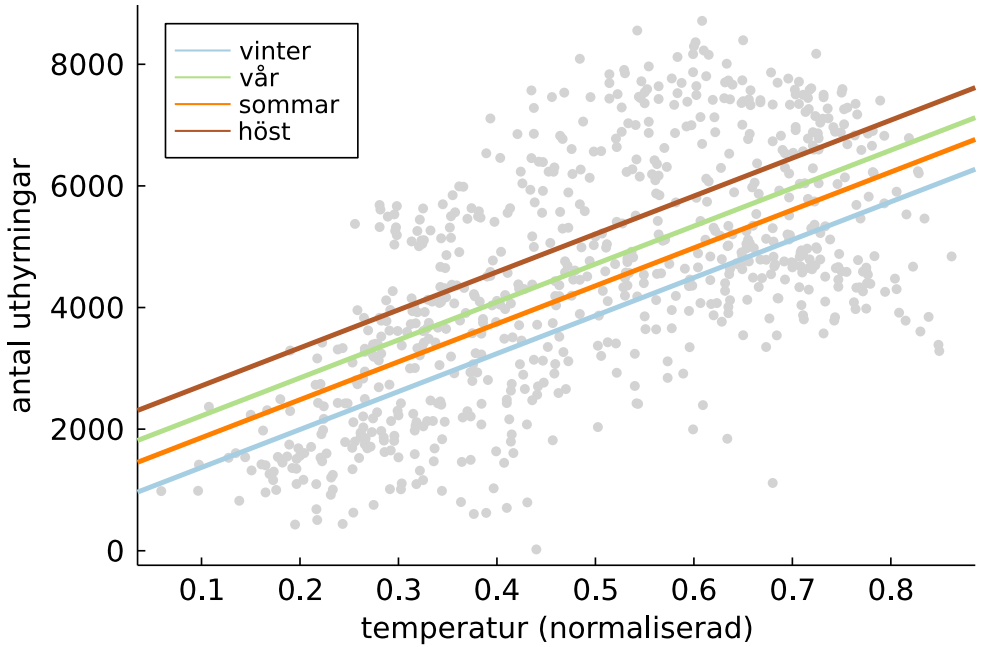
$$y = a + b_1 \cdot \text{temp}$$

- Vårdag:

$$y = (a + b_3) + b_1 \cdot \text{temp}$$

- Koefficienten b_3 är **hur många fler** cyklar hyrs ut under en vårdag **jämfört med en vinterdag**.
- Koefficienten b_4 är hur många fler cyklar hyrs ut under en sommardag **jämfört med en vinterdag**.

Cykeluthyrning - säsongsdummies




```
nRides ~ 1 + temp + spring + summer + fall

Coefficients:
```

	Coef.	Std. Error	t	Pr(>|t|)	Lower 95%	Upper 95%
(Intercept)	745.787	187.476	3.98	<1e-04	377.728	1113.85
temp	6241.35	518.142	12.05	<1e-29	5224.11	7258.58
spring	848.724	197.082	4.31	<1e-04	461.806	1235.64
summer	490.196	259.006	1.89	0.0588	-18.2936	998.685
fall	1342.87	164.588	8.16	<1e-14	1019.75	1666.0

F-test för en grupp av förklarande variabler

- **Testa om det finns en säsongseffekt?** Vi kan t-testa varje säsonsdummy (vår, sommar, höst).
- *F*-test kan användas för att **testa en grupp av variabler**

$$H_0 : \beta_{\text{vår}} = \beta_{\text{sommar}} = \beta_{\text{höst}} = 0$$

H_1 : någon av $\beta_{\text{vår}}, \beta_{\text{sommar}}$ eller $\beta_{\text{höst}}$ är skild från noll.

- **Teststatistiska**

$$F = \frac{\left(R^2_{\text{UR}} - R^2_{\text{R}}\right) / r}{\left(1 - R^2_{\text{UR}}\right) / (n - k - 1)}$$

  - R^2_{UR} är R^2 för regressionen **U**tan nollhypotesens **R**estriktioner (de tre säsongsdummies är med i modellen)
  - R^2_{R} är R^2 för regressionen med nollhypotesens **R**estriktioner (de tre säsongsdummies är inte med i modellen)
  - r är antalet restriktioner under H_0, dvs $r = 3$ här.
- Under H_0 följer teststatistikan F en $F(r, n - k - 1)$-fördelning.

F-test för säsong i cykeluthyrningsdata

- Under H_0: temp, hum, windspeed.
- Under H_1: temp, hum, windspeed, vår, sommar, höst.
- Så $k = 6$ och $r = 3$.
- $R^2_{\text{UR}} = 0.5354$
- $R^2_{\text{R}} = 0.4609$

$$F_{\text{obs}} = \frac{(0.5354 - 0.4609)/3}{(1 - 0.5354)/(731 - 6 - 1)} = 38.698$$

$$F_{\text{crit}} = F_{0.95}(3, 724) = 2.617$$

- $F_{\text{obs}} > F_{\text{crit}}$ så nollhypotesen förkastas på signifikansnivån 5%. Det verkar finns en säsonseffekt.

Prognosförmåga på testdata

- Dela upp observationer i två delmängder:
  - **Träningsdata** för att skatta modellens parametrar.
  - **Testdata** för att utvärdera modellens prediktioner.
- Modellen får aldrig chans att anpassa sig till testdata.
- Prediktionsmått: **kvadrerade prediktionsfel på testdata**

$$Q_{\text{test}} = \sum_{j=1}^{n_{\text{test}}} (y_j - \hat{y}_j)^2$$

- Observera:
  - summan är över observationerna i testdata.
  - modellen som ger $\hat{y}_j$ är **skattad enbart på träningsdata**.
  - överanpassning på träningsdata $\Rightarrow$ dåliga prediktioner på testdata.

Korsvalidering

- Vilka observationer ska vara i träning respektive test?
  - Tidsserier: låt de senare observationerna vara i test.
  - Regression: **Korsvalidering**.

Split 1

country	spending (x)	lifespan (y)
Australia	3.357	81.4
Austria	3.763	80.1
Belgium	3.595	79.8
Canada	3.895	80.7
Czech	1.626	77
Denmark	3.512	78.4
Finland	2.84	79.5
France	3.601	81
Germany	3.588	80
Greece	2.727	79.5
Hungary	1.388	73.3
Iceland	3.319	81.2
Ireland	3.424	79.7
Italy	2.686	81.4
Japan	2.581	82.6
Korea	1.688	79.4
Luxembourg	4.162	79.4
Mexico	0.823	75
Netherlands	3.837	80.2
N.Zealand	2.454	80.2
Norway	4.763	80.6
Poland	1.035	75.4
Portugal	2.15	79.1
Slovakia	1.555	74.3
Spain	2.671	81
Sweden	3.323	81
Switzerland	4.417	81.9
Turkey	0.618	73.4
UK	2.992	79.5
USA	7.29	78.1

Split 2

country	spending (x)	lifespan (y)
Australia	3.357	81.4
Austria	3.763	80.1
Belgium	3.595	79.8
Canada	3.895	80.7
Czech	1.626	77
Denmark	3.512	78.4
Finland	2.84	79.5
France	3.601	81
Germany	3.588	80
Greece	2.727	79.5
Hungary	1.388	73.3
Iceland	3.319	81.2
Ireland	3.424	79.7
Italy	2.686	81.4
Japan	2.581	82.6
Korea	1.688	79.4
Luxembourg	4.162	79.4
Mexico	0.823	75
Netherlands	3.837	80.2
N.Zealand	2.454	80.2
Norway	4.763	80.6
Poland	1.035	75.4
Portugal	2.15	79.1
Slovakia	1.555	74.3
Spain	2.671	81
Sweden	3.323	81
Switzerland	4.417	81.9
Turkey	0.618	73.4
UK	2.992	79.5
USA	7.29	78.1

Split 3

country	spending (x)	lifespan (y)
Australia	3.357	81.4
Austria	3.763	80.1
Belgium	3.595	79.8
Canada	3.895	80.7
Czech	1.626	77
Denmark	3.512	78.4
Finland	2.84	79.5
France	3.601	81
Germany	3.588	80
Greece	2.727	79.5
Hungary	1.388	73.3
Iceland	3.319	81.2
Ireland	3.424	79.7
Italy	2.686	81.4
Japan	2.581	82.6
Korea	1.688	79.4
Luxembourg	4.162	79.4
Mexico	0.823	75
Netherlands	3.837	80.2
N.Zealand	2.454	80.2
Norway	4.763	80.6
Poland	1.035	75.4
Portugal	2.15	79.1
Slovakia	1.555	74.3
Spain	2.671	81
Sweden	3.323	81
Switzerland	4.417	81.9
Turkey	0.618	73.4
UK	2.992	79.5
USA	7.29	78.1

Träning
Test

- **Mått på modellens prognosförmåga**: genomsnittligt Q_{test} över alla $K = 3$ testdataset.
- Prognosförmåga på testdata kan användas för **modellval**.
- För mer info: masterkursen *Maskininlärning 7.5 hp*.