# Regressions- och tidsserieanalys

## Föreläsning 3 - Regression som sannolikhetsmodell

**Mattias Villani**

Statistiska institutionen
Stockholms universitet

Institutionen för datavetenskap
Linköpings universitet

mattiasvillani.com   @matvil   mattiasvillani

# Översikt

- Regression som sannolikhetsmodell
- Konfidensintervall
- Hypotestest
- Prediktionsintervall

# Repetition sannolikhetsmodeller

- Underliggande **populationsmodell**:

$$X_1, \ldots, X_n \overset{\text{ober}}{\sim} N(\mu, \sigma^2), \quad \sigma^2 \text{ känd}$$

- Medelvärdet

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

  är en **estimator** för $\mu$.

- **Väntevärdesriktig** (rätt i genomsnitt över alla möjliga stickprov)

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = \mu$$

- **Samplingfördelningen** (hur medelvärdet varierar från stickprov till stickprov):

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

# Regression som sannolikhetsmodell

- Underliggande **populationsmodell** för regression:

$$y = \alpha + \beta x + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

- Regression är en modell för den **betingade fördelningen**

$$y|x \sim N\left(\mu_{y|x}, \sigma_\varepsilon^2\right)$$

där det betingade väntevärdet för $y$ nu beror på $x$ genom regressionen

$$\mu_{y|x} = \alpha + \beta x$$

- $\alpha$ är interceptet i den underliggande populationen.
- $\beta$ är lutningen på regressionslinjen i den underliggande populationen.

# Regression som sannolikhetsmodell

- Stickprov/datamaterial med $n$ observationspar $(y_1, x_1), \ldots (y_n, x_n)$.
- Vanligt att anta oberoende feltermer $\varepsilon$ för alla observationer:

$$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \overset{\text{ober}}{\sim} N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

- Modell för hela stickprovet

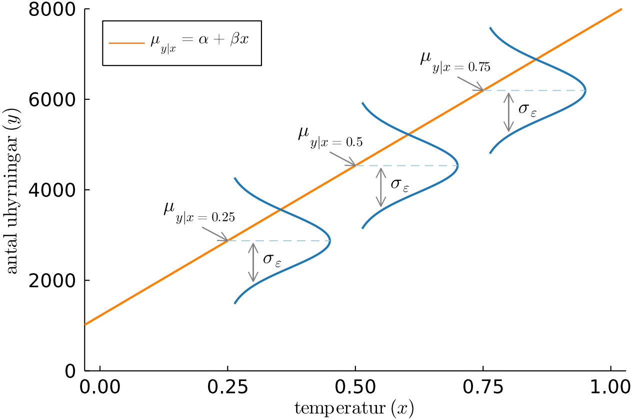
$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \overset{\text{ober}}{\sim} N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

# Regression som sannolikhetsmodell

- Regression som modell för betingad fördelning

$$y|x \sim N\left(\mu_{y|x}, \sigma_\varepsilon^2\right)$$

$$\mu_{y|x} = \alpha + \beta x$$



# Simulera data

- Simulera regressionsdata med stickprovstorlek $n$:
  - Bestäm populationens parametrar $\beta_0$, $\beta_1$ och $\sigma^2$.
  - Bestäm $x_1, \ldots, x_n$(som antas vara icke-slumpmässiga)
  - Simulera feltermer $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ från $N(0, \sigma^2)$.
  - Beräkna $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ för varje observation.

# Samplingfördelning - minstakvadratskattningen

- Minstakvadratestimatorerna

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$s_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}$$

- **Väntevärdesriktiga**

$$\mathbb{E}(b) = \beta$$
$$\mathbb{E}(a) = \alpha$$
$$\mathbb{E}(s_e^2) = \sigma_\varepsilon^2$$

# Samplingfördelning för b

- Estimatorn för lutningskoefficienten

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

har **samplingvarians** (hur mycket varierar $b$ över olika stickprov?)

$$\sigma_b^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

- En estimator av den teoretiska samplingvariansen $\sigma_b^2$ är

$$s_b^2 = \frac{s_e^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

- Se AJÅ för en motsvarande formel för att skatta samplingvariansen för $a$.
- Hälsobudgetdata

$$s_b^2 = \frac{4.467}{52.861} = 0.085 \qquad s_b \approx \sqrt{0.085} \approx 0.291$$

# Approximativt konfidensintervall för b

- Approximativt 95% konfidensintervall för $b$ för stora stickprov ($n \geq 30$)

$$[b - 1.96 \cdot s_b, b + 1.96 \cdot s_b]$$

- Hälsobudgetdata

$$[1.038 - 1.96 \cdot 0.291, 1.038 + 1.96 \cdot 0.291] = [0.468, 1.608]$$

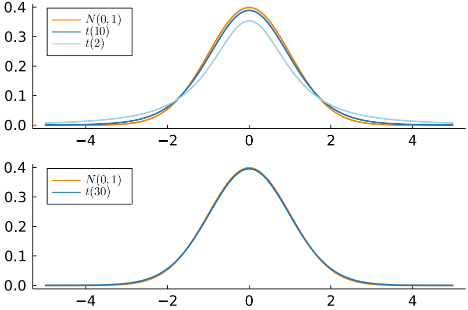
- I 95% av alla stickprov från populationen täcker intervallet $[0.468, 1.608]$ den sanna lutningen $\beta$.

# Exakt konfidensintervall för b - student $t$

- För **små $n$** är normalapproximationen inte tillräckligt bra.
- Estimatorn $b$ följer en **$t$-fördelning** med $n-2$ **frihetsgrader**.

$$\frac{b-\beta}{s_b} \sim t(n-2)$$

- För $n \to \infty$ blir $t$-fördelningen alltmer lik normalfördelningen.
- $t$-fördelningen konvergerar mot normalfördelningen när $n \to \infty$.

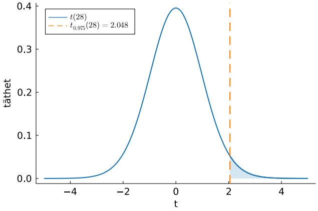


# Exakt konfidensintervall för b - student $t$

- **Exakt 95% konfidensintervall för $b$**

$$\left[b - t_{0.975}(n-2) \cdot s_b, b + t_{0.975}(n-2) \cdot s_b\right]$$

- $t$-fördelningen med $n-2$ frihetsgrader har 0.975 (97.5%) sannolikhetsmassa till vänster om värdet $t_{0.975}(n-2)$.




- Hälsobudgetdata: $n = 28$, och $t_{0.975}(28) = 2.0484$ från tabell.

- Exakt 95% konfidensintervall för $b$

$$[1.038 - 2.0484 \cdot 0.291, 1.038 + 2.0484 \cdot 0.291] = [0.442, 1.634]$$

# Hypotesttest för $\beta$

- **Hypotestest för lutningen** i regressionen

$$H_0: \beta = 0$$
$$H_1: \beta \neq 0$$

- **Teststatistiska**

$$t = \left| \frac{b - 0}{s_b} \right|$$

- Vi förkastar nollhypotesten på signifikansnivån $\alpha = 0.05$ om

$$t > t_{0.975}(n-2)$$

- **P-värde** = sannolikheten att observera $t$ eller något ännu mer extremt givet att $H_0$ är sann.
- Under $H_0$ har vi $t \sim t(n-2)$.

# Hypotesttest för $\beta$ - hälsobudgetdata

- $n = 28$, och $t_{0.975}(28) = 2.0484$ från tabell.

$$t_{\text{obs}} = \left| \frac{1.038 - 0}{0.291} \right| = 3.567$$

  Eftersom $t_{\text{obs}} = 3.567 > t_{0.975}(28) = 2.0484$ så förkastar vi nollhypotesen på 5% signifikansnivå.

- Vi förkastar nollhypotesen att hälsobudgetens storlek inte är korrelerad med livslängd.

- Testets $p$-värde

$$p = 0.0013237$$

  vilket visar att vi t o m skulle ha förkastat på 1% nivån.

# Hypotesttest för $\beta$ - hälsobudgetdata

Hälsobudget - regression

The REG Procedure
Model: MODEL1
Dependent Variable: lifespan

| | |
|---|---|
| Number of Observations Read | 30 |
| Number of Observations Used | 30 |

Analysis of Variance

| Source | DF | Sum of Squares | Mean Square | F Value | Pr > F |
|---|---|---|---|---|---|
| Model | 1 | 56.90723 | 56.90723 | 12.74 | 0.0013 |
| Error | 28 | 125.08244 | 4.46723 | | |
| Corrected Total | 29 | 181.98967 | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Root MSE | 2.11358 | R-Square | 0.3127 |
| Dependent Mean | 79.13667 | Adj R-Sq | 0.2881 |
| Coeff Var | 2.67080 | | |

Parameter Estimates

| Variable | DF | Parameter Estimate | Standard Error | t Value | Pr > \|t\| |
|---|---|---|---|---|---|
| Intercept | 1 | 76.03502 | 0.95084 | 79.97 | <.0001 |
| spending | 1 | 1.03757 | 0.29071 | 3.57 | 0.0013 |

# Konfidensintervall för regressionslinjen

- **Regressionslinjen i populationen** är

$$\mu_{y|x} = \alpha + \beta x$$

som skattas med minsta kvadratmetoden genom formeln

$$\hat{\mu}_{y|x} = a + bx$$

- **Standardavvikelsen för skattningen av regressionslinjen** vid ett givet $x$-värde $x = x_0$ är

$$\sigma_{\hat{\mu}_{y|x_0}} = \sigma_\varepsilon \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}$$

- Denna teoretiska standardavvikelsen kan skattas med

$$s_{\hat{\mu}_{y|x_0}} = s_e \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}$$

# Prediktionsintervall

- Antag att vi gjort en prognos vid punkten $x = x_0$.
- Prognosen är

$$\hat{y}(x_0) = \hat{\mu}_{y|x_0} = a + bx_0$$

- **Prognosintervall** för $\hat{y}(x_0)$ - **två källor av osäkerhet**:
  - De **okända parametrarna** $\alpha$ och $\beta$, dvs osäkerhet om $\mu_{y|x}$.
  - **Variationen i de enskilda $y$-värdena kring regressionlinjen** $\mu_{y|x}$. Alla observationer "träffas av ett $\varepsilon$" som har varians $\sigma_\varepsilon^2$.
- Prognosvariansen:

$$\sigma^2_{\hat{y}(x_0)} = \sigma^2_{\hat{\mu}_{y|x_0}} + \sigma^2_\varepsilon$$

- 95%-igt prognosintervall för en enskild obseration vid $x = x_0$

$$\hat{y}(x_0) \pm t(n-2) \cdot s_e \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}$$

# Prediktionsintervall