

#### 5.4.3 *Equivalenza tra MTM e MT*

Si è accennato sopra al fatto che le macchine di Turing multinastro hanno lo stesso potere computazionale delle macchine a un solo nastro. In questa sezione viene presentata la traccia della dimostrazione di come una macchina di Turing multinastro possa venir simulata tramite una macchina di Turing ad un solo nastro.

Nella simulazione si fa riferimento a macchine di Turing multitraccia. Tali dispositivi sono macchine di Turing ad un nastro aventi il nastro stesso suddiviso in *tracce*: queste ultime possono essere immaginate disposte sul nastro come

le piste di un registratore multipista (vedi Figura 5.10). Così, se la macchina ha  $m$  tracce, la testina con una singola operazione può accedere, per leggere e/o scrivere, agli  $m$  caratteri disposti sulle tracce in corrispondenza della testina stessa.

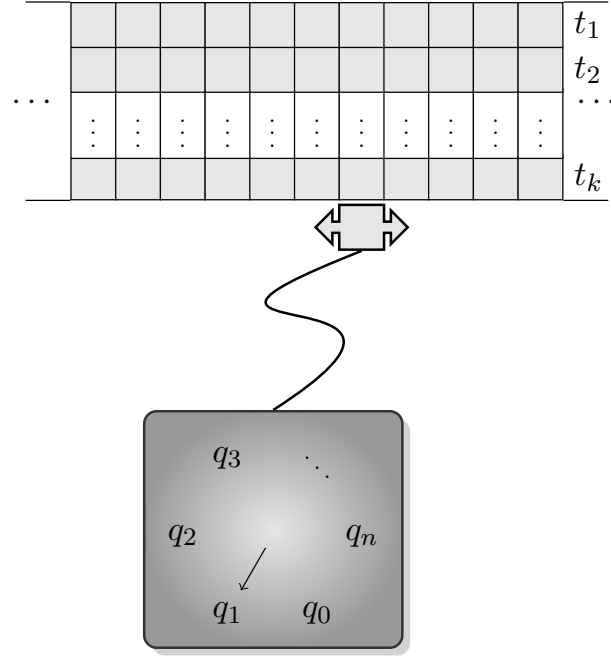


FIGURA 5.10 Macchina di Turing multitraccia.

È molto semplice modificare una macchina di Turing in modo che simuli una macchina con nastro ad  $m$  tracce. Se assumiamo, per generalità, che sulle tracce si usino rispettivamente gli alfabeti  $\bar{\Gamma}_1, \bar{\Gamma}_2, \dots, \bar{\Gamma}_m$ , basta adottare per la macchina un alfabeto  $\bar{\Gamma}$  tale che  $|\bar{\Gamma}| = |\bar{\Gamma}_1 \times \dots \times \bar{\Gamma}_m|$ , definendo una funzione iniettiva dall'insieme  $\bar{\Gamma}_1 \times \dots \times \bar{\Gamma}_m$  all'insieme  $\bar{\Gamma}$ : tale funzione assumerà in particolare il simbolo  $\mathfrak{b}$  di  $\bar{\Gamma}$  alla  $m$ -pla  $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}, \dots, \mathfrak{b})$ . Una notazione utile per indicare gli elementi di  $\bar{\Gamma}$  che corrispondono a elementi di  $\bar{\Gamma}_1 \times \dots \times \bar{\Gamma}_m$ , e che sarà usata più avanti nel volume, è la seguente:

$$\begin{bmatrix} a_{i_1} \\ a_{i_2} \\ \vdots \\ a_{i_m} \end{bmatrix}$$

dove  $a_{i_j} \in \bar{\Gamma}_j$ .

Passiamo ora a dimostrare il seguente teorema.

**Teorema 5.1** *Data una macchina di Turing  $\mathcal{M} = \langle \Gamma, \mathfrak{b}, Q, q_0, F, \delta^{(k)} \rangle$  a  $k$  nastri, esiste una macchina a un nastro che simula  $t$  passi di  $\mathcal{M}$  in  $O(t^2)$  transizioni usando un alfabeto di dimensione  $O((2|\Gamma|)^k)$ .*

**Dimostrazione.** La dimostrazione è costruttiva e consiste nel definire una macchina di Turing  $\mathcal{M}' = \langle \Gamma', \flat, Q', q'_0, F', \delta' \rangle$  che simula  $\mathcal{M}$ .

$\mathcal{M}'$  è una macchina a un solo nastro diviso in  $2k$  tracce: di queste  $k$  sono destinate a contenere i caratteri presenti nei  $k$  nastri di  $\mathcal{M}$  e le rimanenti a marcare con il carattere “↓” le posizioni delle  $k$  testine sui  $k$  nastri di  $\mathcal{M}$ . La situazione è esemplificata in Figura 5.11.

---

|     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |            |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|------------|
| ... |   |   |   |   | ↓ |   |   |   |   | ... | $t_1$      |
| ... | ♭ | ♭ | ♭ | a | b | b | a | ♭ | ♭ | ... | $t_2$      |
| ... |   |   |   |   | ↓ |   |   |   |   | ... | $t_3$      |
| ... | ♭ | ♭ | ♭ | b | a | b | c | b | ♭ | ... | $t_4$      |
| ... |   |   | ↓ |   |   |   |   |   |   | ... | $t_5$      |
| ... | ♭ | d | e | d | d | e | ♭ | ♭ | ♭ | ... | $t_6$      |
|     | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |     |            |
| ... |   |   |   |   |   | ↓ |   |   |   | ... | $t_{2k-1}$ |
| ... | f | f | g | h | g | ♭ | ♭ | ♭ | ♭ | ... | $t_{2k}$   |

---

FIGURA 5.11 Nastro della macchina di Turing multitraccia che simula una macchina di Turing multinastro a  $k$  nastri.

---

È chiaro che questo nastro multitraccia consente di rappresentare il contenuto di ciascun nastro di  $\mathcal{M}$  (nelle tracce di posizione pari) e la posizione di ciascuna delle sue testine (nelle tracce di posizione dispari). La struttura di una singola cella del nastro di  $\mathcal{M}'$ , con le  $2k$  tracce messe in evidenza, è illustrata in Figura 5.12.

Come osservato sopra, è allora sufficiente adottare un alfabeto di nastro  $\Gamma'$  di cardinalità opportuna e fissare una corrispondenza iniettiva dalle  $2k$ -ple di caratteri di una cella sul nastro multitraccia agli elementi di  $\Gamma'$  per ottenere una macchina di Turing con nastro rappresentante le  $2k$  tracce desiderate.

La situazione del nastro di  $\mathcal{M}'$  all'inizio della computazione è rappresentata in Figura 5.13.

La funzione di transizione della  $\mathcal{M}$  ha elementi

$$\delta^{(k)}(q_i, a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) = (q_j, a_{j_1}, \dots, a_{j_k}, z_{j_1}, \dots, z_{j_k})$$

con  $z_{j_1}, \dots, z_{j_k} \in \{d, s, i\}$ . La corrispondente  $\delta'$  deve, in corrispondenza di ogni elemento della  $\delta^{(k)}$ , individuare lo stato corrente e la posizione del marcatore per ogni traccia per poi effettuare la transizione, cioè scrivere caratteri, spostare marcatori in base alla  $\delta^{(k)}$  e passare ad un altro stato interno.

---

|     |   |            |
|-----|---|------------|
|     | $c_{i_1} \in \{\downarrow\}$                      | $t_1$      |
| --- | $a_{i_1} \in \Gamma_1 \cup \{\mathfrak{b}\}$      | $t_2$      |
|     | $c_{i_2} \in \{\downarrow\}$                      | $t_3$      |
| --- | $a_{i_2} \in \Gamma_2 \cup \{\mathfrak{b}, Z_0\}$ | $t_4$      |
|     | $c_{i_3} \in \{\downarrow\}$                      | $t_5$      |
| --- | $a_{i_3} \in \Gamma_3 \cup \{\mathfrak{b}, Z_0\}$ | $t_6$      |
|     | $\vdots$  |            |
|     | $c_{i_k} \in \{\downarrow\}$                      | $t_{2k-1}$ |
| --- | $a_{i_k} \in \Gamma_k \cup \{\mathfrak{b}, Z_0\}$ | $t_{2k}$   |

---

FIGURA 5.12 Struttura della singola cella di nastro di  $\mathcal{M}'$ .

---

Passiamo ora a valutare i costi della simulazione in termini di tempo (numero di transizioni) e in termini di cardinalità dell'alfabeto della macchina  $\mathcal{M}'$ .

Ad ogni passo di  $\mathcal{M}$ , la macchina di Turing  $\mathcal{M}'$  deve eseguire una sequenza di passi che consiste nel percorrere la porzione di nastro compresa tra i due marcatori più lontani. Dal momento che ad ogni passo ogni marcatore si sposta al più di una casella, per cui i marcatori si possono allontanare reciprocamente al più di due caselle, dopo  $t$  passi di  $\mathcal{M}$  i marcatori si possono essere allontanati al più di  $2t$  caselle, spostandosi a destra o a sinistra: quindi se  $\mathcal{M}$  esegue  $t$  passi,  $\mathcal{M}'$  ne esegue al più  $2 \sum_{i=1}^t i = (t^2 + t) = O(t^2)$ .

Per quanto riguarda invece il costo della simulazione in termini del numero di caratteri, abbiamo, osservando che  $|\bar{\Gamma}_1| = |\Gamma_1| + 1$  e che  $|\bar{\Gamma}_i| = |\Gamma_i| + 2$  per  $2 \leq i \leq k$ , e moltiplicando le cardinalità degli alfabeti in gioco (vedi Figura 5.12)

$$|\bar{\Gamma}'| = 2^k (|\Gamma_1| + 1) \prod_{i=2}^k (|\Gamma_i| + 2) = O((2 \max_{1 \leq i \leq k} |\Gamma_i|)^k) \quad (5.1)$$

Si noti che in caso di macchina di Turing multinastro con nastro di output monodirezionale e a sola scrittura, come anche in altre varianti di macchine di Turing multinastro (più nastri a sola lettura e/o scrittura, più nastri monodirezionali, ecc.), l'Equazione 5.1 rimane asintoticamente valida, subendo variazioni solo nelle costanti.  $\square$

Come conseguenza del teorema precedente, possiamo asserire che, data una macchina di Turing a più nastri che riconosce o accetta un linguaggio  $L$  (o, operando come trasduttore, calcola una funzione  $f$ ), esiste una macchina di Turing a un nastro che consegue lo stesso risultato computazionale, cioè riconosce o accetta lo stesso linguaggio  $L$  (ovvero calcola la stessa funzione  $f$ ).

---

|     |   |   |       |   |   |   |   |   |   |     |            |
|-----|---|---|-------|---|---|---|---|---|---|-----|------------|
| ... |   |   | ↓     |   |   |   |   |   |   | ... | $t_1$      |
| ... |   |   | a     | b | b | b | a |   |   | ... | $t_2$      |
| ... |   |   | ↓     |   |   |   |   |   |   | ... | $t_3$      |
| ... |   |   | $Z_0$ |   |   |   |   |   |   | ... | $t_4$      |
| ... |   |   | ↓     |   |   |   |   |   |   | ... | $t_5$      |
| ... |   |   | $Z_0$ |   |   |   |   |   |   | ... | $t_6$      |
|     | ⋮ | ⋮ | ⋮     | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |     |            |
| ... |   |   | ↓     |   |   |   |   |   |   | ... | $t_{2k-1}$ |
| ... |   |   | $Z_0$ |   |   |   |   |   |   | ... | $t_{2k}$   |

---

FIGURA 5.13 Situazione iniziale sul nastro della  $\hat{\mathcal{M}}$  per l'input  $x = abbba$ .

---