Introduzione alla programmazione in C

Appunti delle lezioni di Tecniche di programmazione

Giorgio Grisetti
Luca Iocchi
Daniele Nardi
Fabio Patrizi
Alberto Pretto

Dipartimento di Ingegneria Informatica, Automatica e Gestionale
Facoltà di Ingegneria dell'Informazione, Informatica, Statistica
Università di Roma "La Sapienza"

Edizione 2018/2019

2019

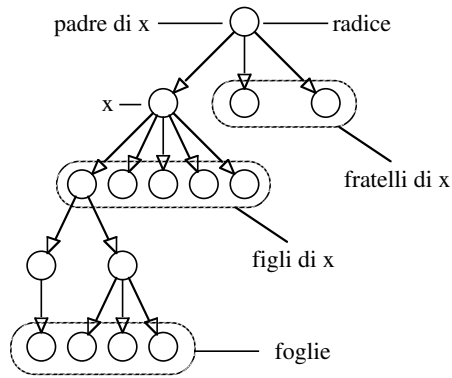
Indice

12. Alberi

12.1. Alberi

In questo capitolo viene presentata la struttura dati *albero*, che rappresenta un esempio particolarmente significativo di struttura non lineare. Infatti, prendendo a modello la definizione induttiva della struttura dati, la definizione delle funzioni che operano su alberi binari risulta immediata, mentre le implementazioni con i costrutti di ciclo richiedono un uso di strutture dati di appoggio.

L'albero è un tipo di dato non lineare utilizzato per memorizzare informazioni in modo gerarchico. Un esempio di albero è il seguente:



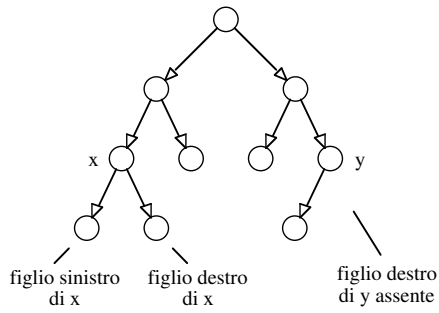
Osserviamo che un albero è costituito da **nodi** (indicati graficamente come cerchi), a cui è tipicamente associato un contenuto informativo, e **archi** (indicati graficamente come frecce), che rappresentano relazioni di discendenza diretta tra nodi. Useremo la seguente terminologia standard:

- **padre** di un nodo x: nodo che ha un collegamento in uscita verso il nodo x. In un albero ogni nodo ha al più un padre;
- **nodo radice** dell'albero: nodo che ha solo collegamenti in uscita verso altri nodi, cioè non ha nessun padre;
- **fratelli** di un nodo x: nodi che hanno lo stesso padre del nodo x;
- **figli** di un nodo x: nodi verso cui x ha collegamenti in uscita;
- **foglie** dell'albero: nodi che non hanno nessun collegamento in uscita verso altri nodi.

Diremo inoltre che la radice è a **livello** zero nell'albero e che ogni altro nodo si trova ad un livello uguale al livello del padre più uno. Ad esempio, il nodo x è a livello 1 nell'albero della figura precedente. La **profondità** di un albero è pari al massimo livello su cui si trova almeno un nodo dell'albero. Ad esempio, l'albero della figura precedente ha profondità 4.

12.2. Alberi binari

In questo capitolo tratteremo il caso particolare di alberi binari, dove ogni nodo ha al più due figli: un **figlio sinistro** ed un **figlio destro**, come mostrato in figura:



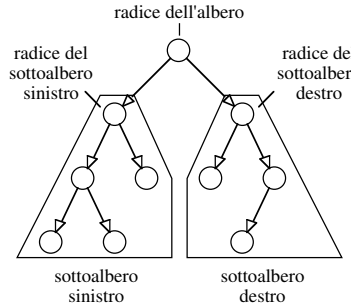
Si noti che il nodo x ha un figlio sinistro ed un figlio destro, mentre il nodo y ha solo un figlio sinistro.

12.2.1. Definizione induttiva di albero binario

Una classica definizione induttiva di albero binario è la seguente:

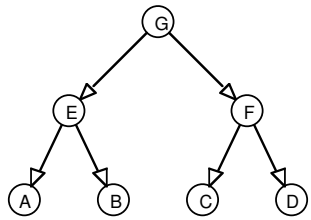
- l'albero vuoto, è un albero binario;
- se T_s e T_d sono due alberi binari, allora l'albero che ha un nodo radice e T_s e T_d come sottoalberi è un albero binario;
- nient'altro è un albero binario.

I due sottoalberi T_s e T_d di un albero binario non vuoto T vengono detti rispettivamente **sottoalbero sinistro** e **sottoalbero destro** di T.



12.2.2. Alberi binari completi

Un albero binario viene detto **completo** se ogni nodo che non sia una foglia ha esattamente due figli e le foglie sono tutte allo stesso livello nell'albero:



È facile verificare che un albero binario completo non vuoto di profondità k ha esattamente $2^{k+1} - 1$ nodi: infatti, vi sono esattamente 2^k foglie a livello k e $2^k - 1$ nodi che non sono foglie, e la somma di queste due quantità dà proprio $2^{k+1} - 1$.

12.3. Tipo astratto AlberoBin

Il tipo di dato astratto AlberoBin può essere definito come segue.

TipoAstratto AlberoBin(T)

Domini

AlberoBin : dominio di interesse del tipo

T : dominio dei valori associati ai nodi degli alberi binari

Funzioni

albBinVuoto() $\mapsto$ AlberoBin
pre: nessuna
post: RESULT è l'albero binario vuoto (ossia senza nodi)

creaAlbBin(T r, AlberoBin s, AlberoBin d) $\mapsto$ AlberoBin
pre: nessuna
post: RESULT è l'albero binario che ha r come radice, s come sottoalbero sinistro, e d come sottoalbero destro

estVuoto(AlberoBin a) $\mapsto$ Boolean
pre: nessuna
post: RESULT è true se a è vuoto, false altrimenti

radice(AlberoBin a) $\mapsto$ T
pre: a non è vuoto
post: RESULT è il valore associato al nodo che è radice di a

sinistro(AlberoBin a) $\mapsto$ AlberoBin
pre: a non è vuoto
post: RESULT è il sottoalbero sinistro di a

destro(AlberoBin a) $\mapsto$ AlberoBin
pre: a non è vuoto
post: RESULT è il sottoalbero destro di a

FineTipoAstratto

12.4. Rappresentazione indicizzata di alberi binari

Vi sono diversi modi per rappresentare alberi binari nei linguaggi di programmazione. Uno dei più semplici è la rappresentazione indicizzata, realizzabile mediante array.

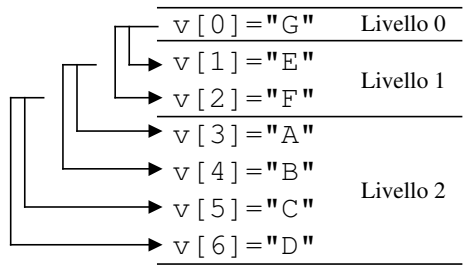
12.4.1. Rappresentazione indicizzata di alberi binari completi

La rappresentazione indicizzata mediante array è particolarmente adatta per rappresentare alberi binari completi. Dato un array v di dimensione n:

- se $n = 0$, l'array v rappresenta l'albero vuoto;

- se $n > 0$, l'array v rappresenta un albero binario completo i cui nodi corrispondono agli indici nell'intervallo $[0..n-1]$ di v. In particolare si ha che:
  - l'albero rappresentato ha n nodi;
  - il contenuto informativo del nodo i è $v[i]$;
  - la radice corrisponde all'indice 0;
  - il figlio sinistro di i ha indice $2i + 1$;
  - il figlio destro di i ha indice $2i + 2$.

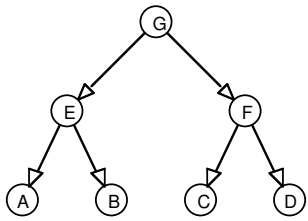
Ad esempio, l'albero binario completo mostrato nella figura precedente può essere rappresentato mediante l'array v di dimensione $n = 7$ come mostrato sotto:



Si noti che i figli del nodo 'F', che corrisponde all'indice 2, sono 'C' e 'D', e questi corrispondono agli indici $5 = 2 \cdot 2 + 1$ e $6 = 2 \cdot 2 + 2$.

Un modo pratico per costruire una rappresentazione indicizzata di un albero binario consiste nel disporre nell'array, a partire da $v[0]$, i valori dei nodi presi da sinistra verso destra su ogni livello a partire dal livello zero fino al livello massimo: questo appare evidente se si osservano le due figure precedenti.

Esempio: L'albero binario completo mostrato nella figura seguente:



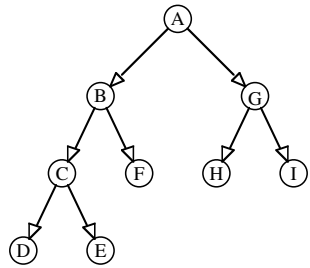
può essere rappresentato in modo indicizzato come array di caratteri:

```
char [] v = { 'G', 'E', 'F', 'A', 'B', 'C', 'D' };
```

12.4.2. Rappresentazione indicizzata di alberi binari non completi

È possibile utilizzare la rappresentazione indicizzata anche per alberi binari non completi, assumendo sia indicato esplicitamente se un nodo i è presente nell'albero. Tuttavia, in questo modo è necessario fare spazio nell'array anche per nodi non effettivamente presenti nell'albero, e questo può essere estremamente dispendioso in termini di memoria richiesta.

Esempio: L'albero binario non completo mostrato nella figura seguente:



può essere rappresentato in C in modo indicizzato come segue:

```
char[] v = { 'A', 'B', 'G', 'C', 'F', 'H', 'I', 'D',
             'E', '0', '0', '0', '0', 'L', '0' };
```

Si dove '0' viene usato per indicare che il nodo non esiste.

12.4.3. Rappresentazione indicizzata generale di alberi binari

La rappresentazione generale di un albero binario sotto forma di array richiede la dichiarazione di un tipo array di nodi dell'albero:

```
#define MaxNodiAlbero 100

typedef  ...  TipoInfoAlbero;

struct StructAlbero {
  TipoInfoAlbero info;
  bool esiste;
};

typedef struct StructAlbero TipoNodoAlbero;

typedef TipoNodoAlbero TipoAlbero[MaxNodiAlbero];
```

La scelta in questo caso è stata quella di definire staticamente la dimensione dell'array e di usare un campo booleano esiste per indicare se un elemento dell'array rappresenta un nodo dell'albero o meno.

Esempio: Il seguente frammento di codice indica come stampare i figli di un nodo i assumendo di avere un albero binario rappresentato in modo indicizzato:

```
TipoAlbero albero;
...
// i: nodo di cui stampare i figli
if (i<0 || i>=MaxNodiAlbero)
  printf("Indice errato...");
else {
  if (2*i+1 < MaxNodiAlbero && albero[2*i+1].esiste)
    printf("sinistro di %d -> %d\n", i, albero[2*i+1].
    info);
  else
    printf("%d non ha figlio sinistro\n", i);
  if (2*i+2 < MaxNodiAlbero && albero[2*i+2].esiste)
    printf("destro di %d -> %d\n", i, albero[2*i+2].
    info);
  else
    printf("%d non ha figlio destro\n", i);
}
```

Si noti che un sottoalbero per essere definito deve avere un indice all'interno del massimo consentito ed, in tal caso, il campo esiste deve essere true.

12.5. Rappresentazione collegata di alberi binari

Gli alberi binari possono essere rappresentati anche mediante la **rappresentazione collegata**. Usando questo metodo, ogni nodo viene

rappresentato mediante una struttura avente i seguenti campi:

1. informazione associata al nodo;
2. riferimento al figlio sinistro del nodo;
3. riferimento al figlio destro del nodo.

È possibile astrarre questo concetto in C definendo un tipo TipoAbero che è un puntatore ad un nodo di un albero binario:

```
struct StructAlbero {
  TipoInfoAlbero info;
  struct StructAlbero *destro, *sinistro;
};

typedef struct StructAlbero TipoNodoAlbero;

typedef TipoNodoAlbero* TipoAlbero;
```

Osserviamo che:

- il campo info memorizza il contenuto informativo del nodo. Il tipo TipoInfoAlbero verrà definito di volta in volta a seconda della natura delle informazioni che si vogliono memorizzare nei nodi dell'albero binario, analogamente a quanto visto per le strutture collegate lineari.
- i campi sinistro e destro sono riferimenti ai nodi figlio sinistro e destro del nodo, rispettivamente. Per indicare che il nodo non ha uno o entrambi i figli useremo il valore NULL. Un nodo foglia dovrà pertanto avere entrambi i campi sinistro e destro posti a NULL.

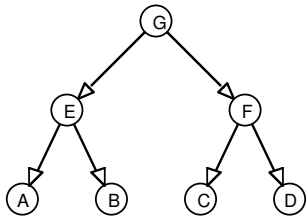
Nota: il tipo TipoNodoAlbero è simile al tipo TipoNodoSCL visto a proposito delle strutture collegate lineari. Il fatto che ogni nodo dell'albero binario contiene due puntatori indica che si ha a che fare con una **struttura collegata non lineare**.

Un albero binario nella rappresentazione collegata sarà rappresentato quindi nel seguente modo:

- L'albero binario *vuoto* viene rappresentato usando il valore NULL.

- Un albero binario *non vuoto* viene rappresentato mantenendo il riferimento al nodo radice dell'albero. Osserviamo che partendo dal riferimento alla radice dell'albero è possibile utilizzare i collegamenti ai nodi figli per raggiungere ogni altro nodo dell'albero. In base a questa assunzione, *ogni valore di tipo puntatore a TipoNodoAlbero consente di accedere a tutto il sottoalbero alla cui radice esso punta*.

Esempio: L'albero binario completo mostrato nella figura seguente:

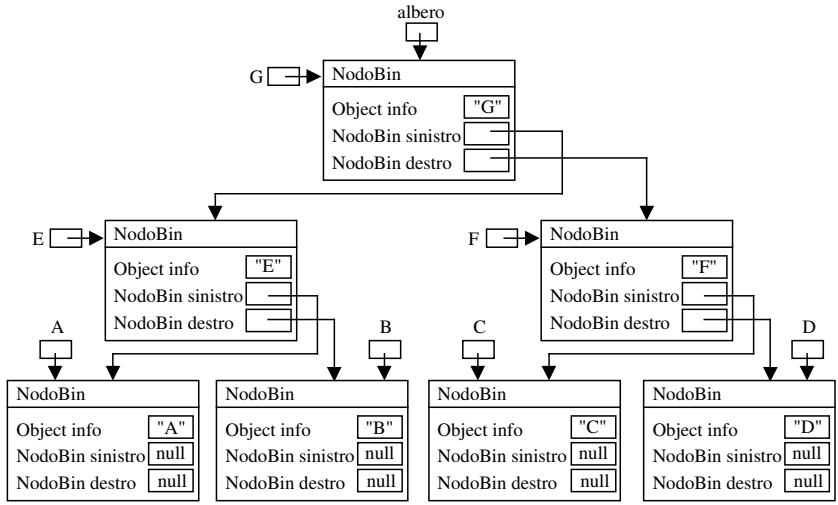


può essere rappresentato in C in modo collegato come illustrato nel seguente frammento di programma:

```
TipoNodoAlbero* nodoalb_alloc(TipoInfoAlbero e) {
  TipoNodoAlbero* r = (TipoNodoAlbero*) malloc(sizeof(
    TipoNodoAlbero));
  r->info = e; r->destro = NULL; r->sinistro = NULL;
  return r;
}

TipoAlbero A = nodoalb_alloc('A');
TipoAlbero B = nodoalb_alloc('B');
TipoAlbero C = nodoalb_alloc('C');
TipoAlbero D = nodoalb_alloc('D');
TipoAlbero E = nodoalb_alloc('E');
TipoAlbero F = nodoalb_alloc('F');
TipoAlbero G = nodoalb_alloc('G');
E->sinistro = A;    E->destro = B;
F->sinistro = C;    F->destro = D;
G->sinistro = E;    G->destro = F;
TipoAlbero albero = G;
```

Dapprima vengono creati i nodi dell'albero, e poi vengono inizializzati i campi corrispondenti ai sottoalberi, come illustrato nella seguente figura:



La variabile albero rappresenta quindi l'albero binario e contiene un riferimento alla radice dell'albero.

12.5.1. Implementazione del tipo astratto AlberoBin

Una realizzazione del tipo astratto AlberoBin usando la rappresentazione collegata è mostrata di seguito. Il tipo astratto AlberoBin viene implementato mediante la struttura C TipoAlbero, il tipo degli elementi T è definito in C con il tipo TipoInfoAlbero.

```
// l'albero vuoto e' rappresentato dal valore NULL
TipoAlbero albBinVuoto() {
  return NULL;
}

// costruttore di un albero a partire dai sottoalberi
    e info radice
TipoAlbero creaAlbBin(TipoInfoAlbero infoRadice,
    TipoAlbero sx, TipoAlbero dx) {
  TipoAlbero a = (TipoAlbero) malloc(sizeof(
    TipoNodoAlbero));
  a->info=infoRadice;
  a->sinistro=sx;
  a->destro=dx;
  return a;
}
```

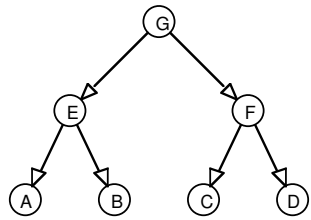
```
// predicato che verifica se l'albero e' vuoto
bool estVuoto(TipoAlbero a) {
  return (a == NULL);
}

// funzione che restituisce il contenuto della radice
TipoInfoAlbero radice(TipoAlbero a) {
  if (a==NULL) {
    printf("ERRORE accesso albero vuoto\n");
    return ERRORE_InfoAlbero;
  }
  else
    return a->info;
}

// funzione che restituisce il sottoalbero sinistro
TipoAlbero sinistro(TipoAlbero a) {
  if (a==NULL) {
    printf("ERRORE accesso albero vuoto\n");
    return NULL;
  }
  else
    return a->sinistro;
}

// funzione che restituisce il sottoalbero destro
TipoAlbero destro(TipoAlbero a) {
  if (a==NULL) {
    printf("ERRORE accesso albero vuoto\n");
    return NULL;
  }
  else
    return a->destro;
}
```

Esempio: L'albero binario:



può essere costruito come mostrato nel seguente programma:

```
TipoAlbero A = creaAlbBin('A', albBinVuoto(),
    albBinVuoto());
TipoAlbero B = creaAlbBin('B', albBinVuoto(),
    albBinVuoto());
TipoAlbero C = creaAlbBin('C', albBinVuoto(),
    albBinVuoto());
TipoAlbero D = creaAlbBin('D', albBinVuoto(),
    albBinVuoto());
TipoAlbero E = creaAlbBin('E', A, B);
TipoAlbero F = creaAlbBin('F', C, D);
TipoAlbero G = creaAlbBin('G', E, F);
```

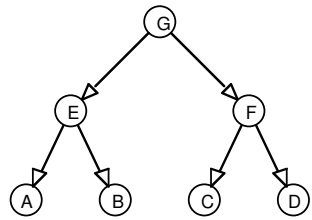
12.6. Rappresentazione parentetica di alberi binari

Un'altra possibile rappresentazione di un albero binario è la **rappresentazione parentetica**, basata su stringhe di caratteri. Assumiamo che $f(T)$ sia la stringa che denota l'albero binario T;

1. l'albero vuoto è rappresentato dalla stringa `"( )"`, cioè $f(\text{albero vuoto})$=`"( )"`;
2. un albero binario con radice x e sottoalberi sinistro e destro T_1 e T_2 è rappresentato dalla stringa `"( "` + x + $f(T_1)$ + $f(T_2)$ + `" )"`.

Esempio: L'albero mostrato nella seguente figura può essere rappresentato mediante la stringa:

```
"( G ( E ( A ( ) ( ) ) ( B ( ) ( ) ) ) "  +
    "( F ( C ( ) ( ) ) ( D ( ) ( ) ) ) )".
```



12.7. Visita in profondità di alberi binari

Diversamente dal caso delle strutture lineari, dove è possibile visitare tutti gli elementi in sequenza nell'ordine in cui sono rappresentati, nel

caso di alberi binari vi sono molti modi diversi di esplorare i nodi. In particolare, vedremo alcuni algoritmi di visita che consentono di esplorare i nodi di un albero binario. Gli scopi di una visita possono essere molteplici: verificare la presenza di un dato elemento in un albero, calcolare proprietà globali di un albero, come profondità o numero totale di nodi, ecc.

La **visita in profondità** di un albero T può essere realizzata ricorsivamente come il seguente pseudo codice mostra:

```
if T non è vuoto {
   analizza il nodo radice di T
   visita il sottoalbero sinistro di T
   visita il sottoalbero destro di T
}
```

L'operazione di "analisi" di un nodo può essere semplicemente la stampa dell'informazione associata al nodo, ma può essere qualunque elaborazione di quell'informazione.

12.7.1. Proprietà della visita in profondità

L'algoritmo di visita in profondità visto precedentemente ha le seguenti proprietà fondamentali:

- termina in un numero finito di passi: infatti ogni chiamata ricorsiva viene applicata su un sottoalbero che è strettamente più piccolo dell'albero corrente;

- visita tutti i nodi di T: per ipotesi induttiva, l'algoritmo visita tutti i nodi dei sottoalberi sinistro e destro di T, se non sono vuoti. Poiché la radice di T viene anch'essa visitata, allora tutti i nodi di T vengono visitati;

- richiede un numero totale di passi proporzionale ad n, dove n è il numero di nodi di T: infatti ogni nodo viene considerato al più una volta durante la visita (e questo avviene quando il nodo è la radice del sottoalbero corrente) e l'algoritmo effettua un numero costante di passi per passare da un nodo all'altro.

12.7.2. Tipi diversi di visite in profondità: in preordine, simmetrica, in postordine

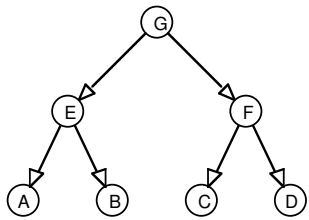
Le tre operazioni della visita in profondità:

- visita della radice;
- chiamata ricorsiva sul sottoalbero sinistro;
- chiamata ricorsiva sul sottoalbero destro;

possono essere realizzate in qualunque ordine. In particolare, consideriamo tre particolari ordini che danno luogo a tre diverse versioni di visita in profondità:

- **visita in preordine**: radice, sottoalbero sinistro, sottoalbero destro;
- **visita simmetrica**: sottoalbero sinistro, radice, sottoalbero destro;
- **visita in postordine**: sottoalbero sinistro, sottoalbero destro, radice.

Esempio: Consideriamo l'albero seguente:



Se l'operazione di visita è la stampa dell'informazione del nodo, si hanno i seguenti tre risultati applicando i diversi tipi di visita:

- visita in preordine: G E A B F C D
- visita simmetrica: A E B G C F D
- visita in postordine: A B E C D F G

Si noti che la radice G è la prima ad essere visitata nel caso di visita in preordine, è visitata a metà della visita nel caso di visita simmetrica, ed è visitata per ultima nel caso di visita in postordine.

12.8. Realizzazione della visita in profondità

Mostriamo ora come realizzare in C le operazioni di visita in profondità di un albero binario.

12.8.1. Rappresentazione tramite array

Consideriamo prima il caso della visita in preordine con la rappresentazione tramite array.

La visita inizia con la chiamata ad una funzione ausiliaria che ha come parametro ulteriore l'indice del nodo da visitare.

```
/* visita in preordine di un albero binario
   rappresentato con array */

void VisitaPreordine(TipoAlbero a)
{
  /* visita a partire dalla radice */
  VisitaIndicePre(a, 0);
}
```

La funzione ausiliaria è ricorsiva e l'ordine di esecuzione delle operazioni corrisponde a quello della visita in preordine.

```
/* visita in preordine */
void VisitaIndicePre(TipoAlbero a, int i) {
  if (i>=0 && i<MaxNodiAlbero && a[i].esiste) {
    /* albero non vuoto */
    Analizza(a[i].info);  // analizza la radice
    VisitaIndicePre(a, i * 2 + 1 ); // visita sinistro
    VisitaIndicePre(a, i * 2 + 2 ); // visita destro
  }
}
```

12.8.2. Rappresentazione tramite puntatori

Consideriamo ora la visita in profondità in postordine nella rappresentazione tramite struttura collegata:

```
void VisitaPostordine(TipoAlbero a) {
  if (a != NULL) {
    /* albero non vuoto */
    VisitaPostordine(a->sinistro); // visita sinistro
    VisitaPostordine(a->destro);   // visita destro
    Analizza(a->info);   // analizza la radice
  }
}
```

Nota: Semplicemente spostando la posizione dell'operazione di analisi si ottengono le tre varianti preordine, simmetrica, postordine.

12.9. Applicazioni delle visite

Mostriamo ora come adattare l'algoritmo di visita in profondità per realizzare alcune operazioni di interesse generale su alberi binari.

12.9.1. Calcolo della profondità di un albero

Si vuole definire una funzione che restituisce la profondità dell'albero passato come parametro:

```
/* calcola la profondita' di un albero binario */
int Profondita(TipoAlbero albero)
{
  int s, d;
  if (albero == NULL)
    return -1;   // l'albero vuoto ha profondita' -1
  else {
    // calcola la profondita' dei sottoalberi
    s = Profondita(albero->sinistro);
    d = Profondita(albero->destro);
    // l'albero complessivo ha profondita' max(s,d) +
    1
    return (Massimo(s, d) + 1);
  }
}
```

Il metodo verifica dapprima se l'albero (o sottoalbero) passato come parametro è vuoto, nel qual caso restituisce come profondità -1. Questo è il passo base della ricorsione. Altrimenti, vengono calcolate ricorsivamente la profondità del sottoalbero sinistro e destro, e viene restituito il massimo di queste due quantità più uno.

```
/* determina il massimo fra due interi */
int Massimo(int a, int b) {
  if (a > b)
    return a;
  else
    return b;
}
```

12.9.2. Verifica della presenza di un elemento nell'albero

Una operazione di grande rilevanza applicativa è la ricerca di un dato valore in un albero binario. Si vuole definire una funzione che, dato un valore, restituisce true se il valore è presente nell'albero su cui è invocato, e false altrimenti. Nel caso in cui il valore venga trovato, la funzione deve restituire anche il puntatore al nodo corrispondente.

```
bool RicercaAlbero(TipoAlbero A, TipoInfoAlbero elem,
    TipoAlbero *posiz) {
  bool trovato = false; *posiz=NULL;
  if (A == NULL)
    trovato = false;
  else if (elem == A->info) { // elemento trovato
    *posiz = A;  trovato = true;
  }
  else {
    /* cerca nel sottoalbero sinistro */
    trovato = RicercaAlbero(A->sinistro, elem, posiz);
    if (!trovato)
      /* cerca nel sottoalbero destro */
      trovato = RicercaAlbero(A->destro, elem, posiz);
  }
  return trovato;
}
```

La funzione RicercaAlbero verifica dapprima il caso base in cui l'albero è vuoto, nel qual caso la risposta è false. Se invece l'albero non è vuoto, il valore è presente se e solo se è verificato almeno uno dei tre casi seguenti ed assegna il valore true alla variabile trovato, che altrimenti rimane con il valore false:

1. il valore è contenuto nella radice correntemente visitata (ovvero, elem == A->info esegue trovato=true);
2. il valore è contenuto nel sottoalbero sinistro della radice (ovvero, RicercaAlbero(A->sinistro, elem, posiz) restituisce true);

3. il valore è contenuto nel sottoalbero destro della radice (ovvero RicercaAlbero(A->destro, elem, posiz) restituisce true).

Nota: La funzione RicercaAlbero potrebbe dover visitare *tutti* i nodi prima di stabilire con certezza se un valore dato è presente o meno nell'albero. Il costo computazionale è quindi $O(n)$. Vedremo più avanti che usando alberi con determinate proprietà (alberi binari di ricerca) è possibile usare un metodo diverso e molto più efficiente per ricercare un valore.

Nota: Se il tipo delle informazioni memorizzate nel nodo dell'albero non è un tipo primitivo occorre definire una opportuna funzione che verifica l'uguaglianza di due elementi del tipo delle informazioni contenute nell'albero.

12.10. Costruzione di un albero binario da rappresentazione parentetica

Vediamo ora un modo conveniente per costruire un albero binario data una sua rappresentazione parentetica. In particolare, vediamo come progettare una funzione LeggiAlbero che fornisca questa funzionalità.

```
TipoAlbero LeggiAlbero(char *nome_file) {
  TipoAlbero result;
  FILE *file_albero;
  file_albero = fopen(nome_file, "r");
  result = LeggiSottoAlbero(file_albero);
  fclose(file_albero);
  return result;
}
```

La funzione ha come parametro in ingresso una stringa che rappresenta il nome del file che contiene l'albero e, oltre a gestire le operazioni di apertura e chiusura chiama la funzione ausiliaria LeggiSottoAlbero, che restituisce un puntatore al sottoalbero letto.

```
TipoAlbero LeggiSottoAlbero(FILE *file_albero) {
  char c;
  TipoInfoAlbero i;
  TipoAlbero r;
  c = LeggiParentesi(file_albero);   /* legge la
    parentesi aperta */
  c = fgetc(file_albero);   /* carattere successivo */
  if (c == ')')
    return NULL;   /* se legge () allora l'albero e'
    vuoto */
  else {
    fscanf(file_albero, "%c", &i);   /* altrimenti
    legge la radice */
    r = (TipoAlbero) malloc(sizeof(TipoNodoAlbero));
    r->info = i;
    /* legge i sottoalberi */
    r->sinistro = LeggiSottoAlbero(file_albero);
    r->destro = LeggiSottoAlbero(file_albero);
    c = LeggiParentesi(file_albero);   /* legge la
    parentesi chiusa */
    return r;
  }
}
```

Si noti che:

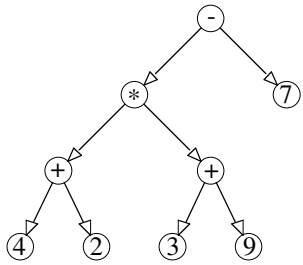
- quando l'albero è vuoto, il carattere che segue la parentesi aperta '(' deve necessariamente essere la parentesi chiusa ')' (senza spazi);
- al contrario quando il nodo non è l'albero vuoto, l'informazione di tipo carattere da associare al nodo deve essere preceduta da uno spazio ' '.
- Se le informazioni sono di tipo int, o altro tipo primitivo numerico il tipo della variabile usata per leggere l'informazione ed il formato della istruzione fscanf devono essere aggiornate coerentemente;
- se le informazioni sono di altro tipo, in particolare di tipo non primitivo per leggere l'informazione associata diventa necessario progettare una specifica funzione.

12.11. Rappresentazione di espressioni aritmetiche mediante alberi binari

Una espressione aritmetica può essere rappresentata mediante un albero binario in cui:

- i nodi non foglie rappresentano operazioni (es. +, -, *, /);
- le foglie rappresentano valori numerici (es. 2, 7, ecc.)

Esempio: L'espressione aritmetica $(4 + 2) \cdot (3 + 9) - 7$ può essere rappresentata mediante l'albero binario:



L'albero, a sua volta, può essere rappresentato in modo parentetico come:

```
( -
    ( *
        ( +
            ( 4 ( ) ( ) )
            ( 2 ( ) ( ) )
        )
        ( +
            ( 3 ( ) ( ) )
            ( 9 ( ) ( ) )
        )
    )
    ( 7 ( ) ( ) )
)
```

Sebbene la corrispondenza tra la struttura dell'espressione e quella dell'albero binario sia immediata, la definizione della struttura dati da utilizzare per memorizzare le informazioni nel nodo richiede qualche accorgimento dato che alcuni nodi contengono degli operandi numerici ed altri contengono invece l'indicazione dell'operatore da applicare. Si possono sviluppare diverse alternative (ad esempio utilizzare una struttura con due campi, char ed int usando un carattere convenzionale per il campo char, quando il nodo è una foglia e contiene una informazione di tipo numerico. Lo pseudo-codice di una funzione valutaEspressione che, data una espressione rappresentata come albero binario, ne restituisce il valore calcolato può essere definito come:

```
int valutaEspressione(TipoAlbero a) {
  // caso albero vuoto: errore
  if (a==NULL) Errore albero vuoto;
  // caso nodo foglia: restituisce valore
  if (a->sinistro==NULL && a->destro==NULL)
     return  valore numerico;
  else { // caso nodo non foglia: calcola ricorsivamente
         // le sottoespressioni destra e sinistra
    int sin = valutaEspressione(a->sinistro);
    int des = valutaEspressione(a->destro);
    // applica operazione
    if (nodo-addizione) return sin + des;
    else ... analogamente per gli altri casi
    else Operazione non valida
  }
}
```

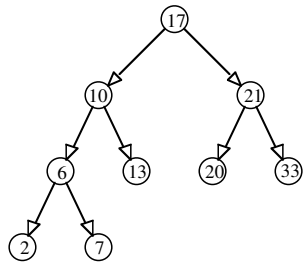
12.12. Alberi binari di ricerca

Concludiamo la trattazione sugli alberi binari discutendo un sottoinsieme degli alberi binari: gli **alberi binari di ricerca**. Gli alberi binari di ricerca sono strutture dati che consentono di cercare informazioni in modo molto efficiente. In un albero binario di ricerca, il dominio delle informazioni associabili ai nodi deve essere un insieme su cui è definita una relazione di ordine totale.

Un albero binario di ricerca può essere:

- un albero vuoto, oppure
- un albero binario non vuoto tale che:
  - il valore di ogni nodo nel sottoalbero sinistro è minore o uguale al valore della radice rispetto alla relazione d'ordine;
  - il valore di ogni nodo nel sottoalbero destro è maggiore o uguale al valore della radice rispetto alla relazione d'ordine;
  - i sottoalberi sinistro e destro sono a loro volta alberi binari di ricerca.

Esempio: L'albero mostrato nella figura seguente è un albero binario di ricerca dove il dominio delle informazioni associate ai nodi è l'insieme dei numeri interi.



12.12.1. Verifica della presenza di un elemento in un albero binario di ricerca

Mostriamo ora una variante della funzione vista precedentemente che sfrutta le proprietà peculiari degli alberi binari di ricerca per verificare la presenza di un elemento nell'albero in modo molto efficiente. Assumiamo che i nodi dell'albero contengano numeri interi come nell'esempio precedente.

```
bool presenteAlberoRicerca(TipoAlbero a,
    TipoInfoAlbero elem) {
  if (a==NULL)
    return false;
  else
    if (a->info == elem) // elemento nella radice
      return true;
    else if (a->info > elem) // l'elemento puo' essere
                             // solo nel sottoalbero sin
      return presenteAlberoRicerca(a->sinistro, elem);
    else // l'elemento puo' essere solo nel
    sottoalbero des
      return presenteAlberoRicerca(a->destro, elem);
}
```

Se l'albero è vuoto, il metodo restituisce subito false. Altrimenti, l'elemento elem viene confrontato con la radice (a->info == elem):

- se il confronto ha successo, l'elemento cercato è nella radice (return true);
- se il valore nella radice dell'albero è maggiore di quello cercato, allora elem precede strettamente `radice()`, e quindi può solo

essere presente nel sottoalbero sinistro
(return presenteAlberoRicerca(a->sinistro, elem));

- se il valore nella radice dell'albero è minore di quello cercato, allora elem segue strettamente `radice()`, e quindi può solo essere presente nel sottoalbero destro
(return presenteAlberoRicerca(a->destro, elem)).

Nota: La funzione presenteAlberoRicerca effettua al più una chiamata ricorsiva, e non due come nella versione su alberi binari generali. In questo modo, scartando ad ogni chiamata ricorsiva un intero sottoalbero, il metodo esplorerà al massimo tanti nodi quanto è la profondità dell'albero, e non tutti i nodi dell'albero. Se il metodo viene applicato ad un albero binario di ricerca completo con n nodi, esso richiede un numero di passi proporzionale alla profondità dell'albero, che è $\log_2 n$. Questo metodo è pertanto sostanzialmente più efficiente ($(O(log(n))$), rispetto al procedimento generale che ha costo $O(n)$.