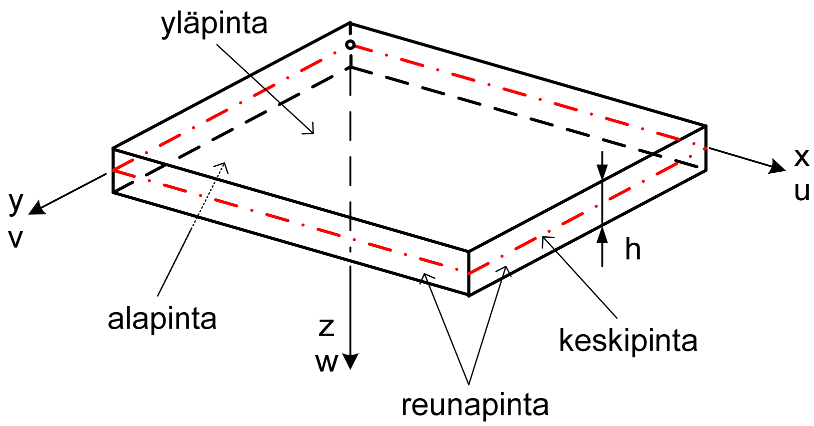
LAATAN PERUSYHTÄLÖT



Laatan normaalilla etäisyydellä z olevan pisteen **siirtymäkomponentit** saadaan kinemaattisesta mallista:

$$\boxed{u = -z\,w,_x \qquad v = -z\,w,_y \qquad w = w(x,y)}$$

Muodonmuutoskomponentit saadaan kinemaattisista yhtälöistä:

$$\varepsilon_x = u,_x = -z\,w,_{xx} = z\,\kappa_x \qquad \varepsilon_y = v,_y = -z\,w,_{yy} = z\,\kappa_y$$

$$\gamma_{xy} = u,_y + v,_x = -2z\,w,_{xy} = 2z\,\kappa_{xy} \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

Laatan keskitason suuntaiset **jännityskomponentit** saadaan materiaaliyhtälöistä:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(-w,_{xx} - \nu\,w,_{yy})\,z = \frac{E}{1-\nu^2}(\kappa_x + \nu\,\kappa_y)\,z$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(-w,_{yy} - \nu\,w,_{xx})\,z = \frac{E}{1-\nu^2}(\kappa_y + \nu\,\kappa_x)\,z$$

$$\tau_{xy} = -\frac{E}{1+\nu}w,_{xy}\,z = \frac{E}{1+\nu}\kappa_{xy}\,z$$

LAATAN PERUSYHTÄLÖT

Laattamomenttien määritelmät:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z\,\sigma_x\,dz \qquad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z\,\sigma_y\,dz \qquad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z\,\tau_{xy}\,dz$$

Laattamomentit lausuttuna taipuman w avulla:

$$M_x = -D(w,_{xx} + \nu\, w,_{yy}) = D(\kappa_x + \nu\,\kappa_y)$$

$$M_y = -D(w,_{yy} + \nu\, w,_{xx}) = D(\kappa_y + \nu\,\kappa_x) \qquad D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu)\,w,_{xy} = D(1-\nu)\,\kappa_{xy}$$

Keskipinnan suuntaiset jännitykset lausuttuna laattamomenttien avulla:

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I} z \qquad \sigma_y = \frac{M_y}{I} z \qquad \tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{I} z \qquad I = h^3/12$$

Keskipinnan suuntaisten jännitysten **ääriarvot** ylä- ja alapinnalla:

$$\sigma_x = \mp \frac{6 M_x}{h^2} \qquad \sigma_y = \mp \frac{6 M_y}{h^2} \qquad \tau_{xy} = \mp \frac{6 M_{xy}}{h^2}$$

LAATAN PERUSYHTÄLÖT

Laatan **leikkausvoimien** määritelmät:

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz}\, dz \qquad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz}\, dz$$

Laatan jännitysresultanttien tasapainoyhtälöt:

$$M_{x,x} + M_{xy,y} = Q_x \qquad M_{xy,x} + M_{y,y} = Q_y \qquad Q_{x,x} + Q_{y,y} = -p$$

Laattamomenttien tasapainoyhtälö:

$$M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} = -p$$

Laatan leikkausvoimat lausuttuna taipuman w avulla:

$$Q_x = -D(w_{,xx} + w_{,yy})_{,x} = -D(\nabla^2 w)_{,x}$$
$$Q_y = -D(w_{,xx} + w_{,yy})_{,y} = -D(\nabla^2 w)_{,y}$$

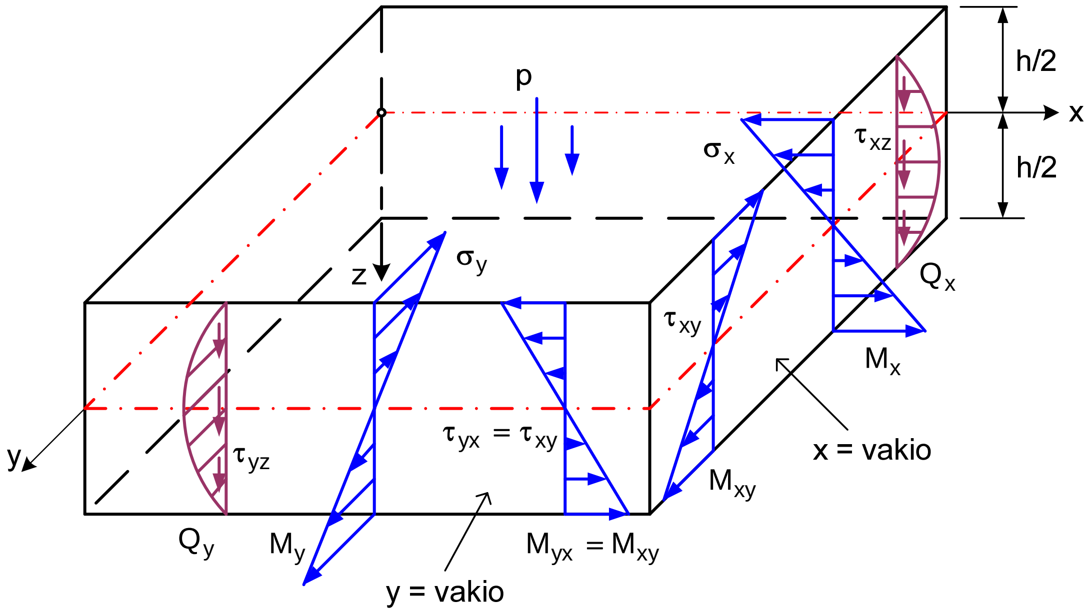
Poikittaiset leikkausjännitykset lausuttuna laatan leikkausvoimien avulla:

$$\tau_{xz} = \frac{Q_x}{2I}[(h/2)^2 - z^2] = \frac{3Q_x}{2h}\left[1 - \left(\frac{z}{h/2}\right)^2\right]$$
$$\tau_{yz} = \frac{Q_y}{2I}[(h/2)^2 - z^2] = \frac{3Q_y}{2h}\left[1 - \left(\frac{z}{h/2}\right)^2\right]$$

Poikittaisten leikkausjännitysten **ääriarvot** keskipinnan kohdalla:

$$\tau_{xz} = \frac{3Q_x}{2h} \qquad \tau_{yz} = \frac{3Q_y}{2h}$$

LAATAN PERUSYHTÄLÖT



Laatan **perusdifferentiaaliyhtälö**:

$$\boxed{w_{,xxxx} + 2\,w_{,xxyy} + w_{,yyyy} = p(x,y)/D}$$

$$\boxed{\nabla^4 w = p(x,y)/D}$$

Kun laatan **kuormitus** p(x,y) ja **tuenta** on annettu, voidaan taipuma w ratkaista perusdifferentiaaliyhtälöstä (ainakin likimääräisesti). Muut laatan suureet saadaan sen jälkeen laskettua edellä olevista yhtälöistä.