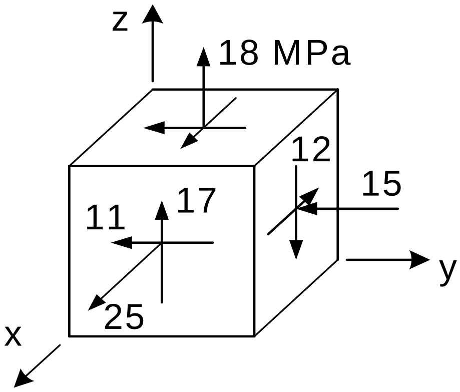

I.5.
a) Kappaleen pisteessä on oheisen jännityselementin mukainen jännitystila. Laske tätä jännitystilaa vastaavan jännitysmatriisin pääinvariantit I_1, I_2 ja I_3. Muodosta se kolmannen asteen yhtälö, josta pääjännitykset voidaan ratkaista. Ratkaise pääjännitykset Mathcadin polyroots-funktiolla. Ratkaise pääsuunnat käyttäen hyväksi Mathcadin solve-block rakennetta.

b) Ratkaise pääjännitykset Mathcadin eigenvals-funktiolla ja pääsuunnat eigenvecs-funktiolla.

Ratkaisu:

$\mathrm{ORIGIN} := 1$ $\quad \mathrm{MPa} := \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$ $\quad S := \begin{pmatrix} 25 & -11 & 17 \\ -11 & -15 & -12 \\ 17 & -12 & 18 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{MPa}$

a)

Pääinvariantit: Huom! determinanttifunktio ei toimi yksiköiden kanssa.

$I_1 := \mathrm{tr}(S)$ $\quad I_3 := \left| \dfrac{S}{\mathrm{MPa}} \right|$ $\quad I_3 := I_3 \cdot \mathrm{MPa}^3$

$$I_2 := S_{1,1} \cdot S_{2,2} + S_{1,1} \cdot S_{3,3} + S_{2,2} \cdot S_{3,3} - \left(S_{1,2}\right)^2 - \left(S_{1,3}\right)^2 - \left(S_{2,3}\right)^2$$

$I_1 = 28.000\,\mathrm{MPa}$ $\quad I_2 = -749.000\,\mathrm{MPa}^2$ $\quad I_3 = -3705.000\,\mathrm{MPa}^3$

Karakteristinen yhtälö:

$$\sigma_p^3 - I_1 \cdot \sigma_p^2 + I_2 \cdot \sigma_p - I_3 = 0$$

Pääjännitykset: Huom! polyroots-funktio ei toimi yksiköiden kanssa.

$$\sigma_{p1} := \mathrm{polyroots}\left(\begin{pmatrix} \dfrac{-I_3}{\mathrm{MPa}^3} \\ \dfrac{I_2}{\mathrm{MPa}^2} \\ \dfrac{-I_1}{\mathrm{MPa}} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \sigma_p := \sigma_{p1} \cdot \mathrm{MPa} \qquad \sigma_p = \begin{pmatrix} -19.666 \\ 4.349 \\ 43.317 \end{pmatrix} \mathrm{MPa}$$

Pääsuunnat:

1. pääsuunta: $a := 0.5$ $b := 0.5$ $c := 0.5$ (alkuarvaus)

Given $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$$\left(S_{1,1} - \sigma_{p_1}\right)\cdot a + S_{1,2}\cdot b + S_{1,3}\cdot c = 0$$

$$S_{2,1}\cdot a + \left(S_{2,2} - \sigma_{p_1}\right)\cdot b + S_{2,3}\cdot c = 0$$

$n_1 := \text{Find}(a,b,c)$ $n_1 = \begin{pmatrix} 0.145 \\ 0.960 \\ 0.240 \end{pmatrix}$

2. pääsuunta: $a := 0.5$ $b := 0.5$ $c := 0.5$ (alkuarvaus)

Given $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$$\left(S_{1,1} - \sigma_{p_2}\right)\cdot a + S_{1,2}\cdot b + S_{1,3}\cdot c = 0$$

$$S_{2,1}\cdot a + \left(S_{2,2} - \sigma_{p_2}\right)\cdot b + S_{2,3}\cdot c = 0$$

$n_2 := \text{Find}(a,b,c)$ $n_2 = \begin{pmatrix} 0.660 \\ 0.087 \\ -0.746 \end{pmatrix}$

3. pääsuunta: $a := 0.5$ $b := 0.5$ $c := 0.5$ (alkuarvaus)

Given $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$$\left(S_{1,1} - \sigma_{p_3}\right)\cdot a + S_{1,2}\cdot b + S_{1,3}\cdot c = 0$$

$$S_{2,1}\cdot a + \left(S_{2,2} - \sigma_{p_3}\right)\cdot b + S_{2,3}\cdot c = 0$$

$n_3 := \text{Find}(a,b,c)$ $n_3 = \begin{pmatrix} 0.737 \\ -0.267 \\ 0.621 \end{pmatrix}$

b)

Pääjännitykset: $\sigma_p := \text{eigenvals}(S)$ Pääsuunnat: $A := \text{eigenvecs}(S)$

$$\sigma_p = \begin{pmatrix} 43.317 \\ 4.349 \\ -19.666 \end{pmatrix} \text{MPa}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0.737 & -0.660 & 0.145 \\ -0.267 & -0.087 & 0.960 \\ 0.621 & 0.746 & 0.240 \end{pmatrix}$$

Pääjännitykset suuruusjärjestyksessä: $\sigma_I := \sigma_{p_1}$ $\sigma_{II} := \sigma_{p_2}$ $\sigma_{III} := \sigma_{p_3}$

$\sigma_I = 43.317\,\text{MPa}$ $\sigma_{II} = 4.349\,\text{MPa}$ $\sigma_{III} = -19.666\,\text{MPa}$

I pääsuunta: $n_I := A^{\langle 1 \rangle}$ II pääsuunta: $n_{II} := A^{\langle 2 \rangle}$ III pääsuunta: $n_{III} := A^{\langle 3 \rangle}$

$$n_I = \begin{pmatrix} 0.737 \\ -0.267 \\ 0.621 \end{pmatrix} \qquad n_{II} = \begin{pmatrix} -0.660 \\ -0.087 \\ 0.746 \end{pmatrix} \qquad n_{III} = \begin{pmatrix} 0.145 \\ 0.960 \\ 0.240 \end{pmatrix}$$