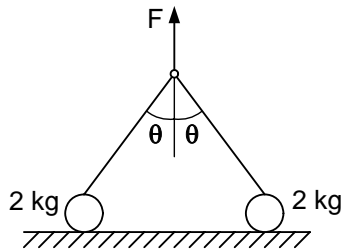
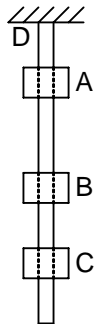


## Liite lukuun 4.

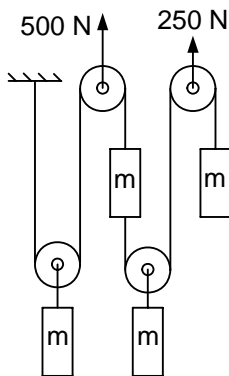
### Partikkelisysteemin kinetiikka - harjoitustehtäviä



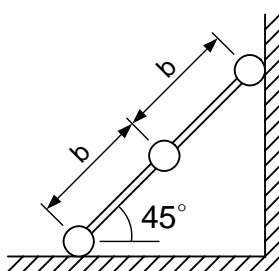
**4.1** Laske, kuinka suuri pystysuuntainen kiihtyvyys 2 kg palloilla on niiden irrotessa vaakatasolta, kun voima  $F = 60 \text{ N}$ . Vast.  $5,19 \text{ m/s}^2$



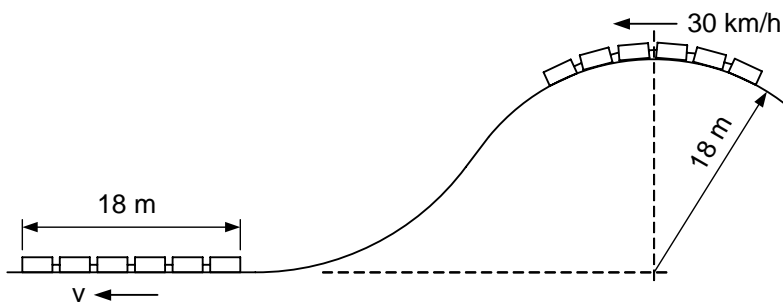
**4.2** Kolme massaa  $m_A = 10 \text{ kg}$ ,  $m_B = 15 \text{ kg}$  ja  $m_C = 8 \text{ kg}$  liikkuvat pitkin pystysuoraa johdetta, joka on kiinnitetty kattoon kohdasta D. Tarkasteluhetkellä A liikkuu alaspäin kiihtyvyydellä  $2 \text{ m/s}^2$ , C liikkuu ylöspäin kiihtyvyydellä  $1,5 \text{ m/s}^2$  ja B liikkuu ylöspäin vakionopeudella  $0,8 \text{ m/s}$ . Laske johteen rasitus T kohdassa D, kun johteen omaa painovoimaa ei oteta huomioon. Vast.  $316 \text{ N}$



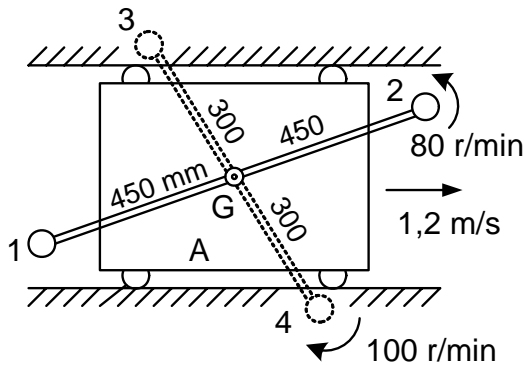
**4.3** Laske kuvan mukaisten sylintereiden muodostaman systeemin massakeskiön kiihtyvyys, joka aiheutuu voimista  $500 \text{ N}$  ja  $250 \text{ N}$ . Massa  $m = 10 \text{ kg}$  ja kitka on merkityksetön. Vaijereiden ja väkipyörien massa oletetaan nolaksi. Vast.  $15,19 \text{ m/s}^2$



**4.4** Kolme samanlaista teräspalloa on hitsattu kahteen sauvaan, jolloin ne muodostavat jäykän kokonaisuuden. Pallon massa on  $m$  ja sauvan massa merkityksetön. Systemi lähtee levosta liikkeelle kuvan mukaisesta asemasta. Määritä pallojen nopeus niiden tullessa vaakatasolle. Kitkaa ei oteta huomioon. Vast.  $\sqrt{bg\sqrt{2}}$

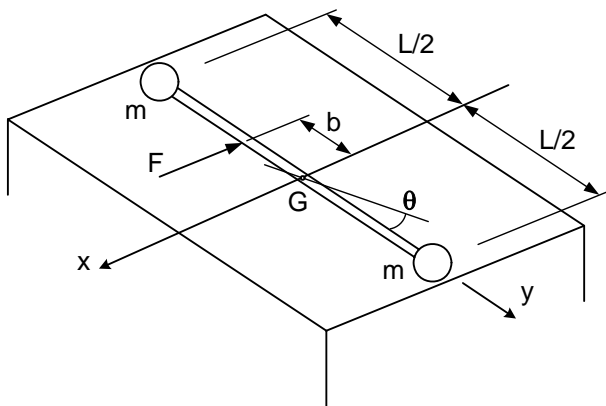


**4.5** Määritä kuvan tilanteessa nopeus  $v$  vaunujen ollessa vaakatasolla, kun niiden nopeus ympyräradan korkeimmassa kohdassa on 30 km/h. Kitkaa ei oteta huomioon. Kaikilla kuudella vaunulla on sama massa. Vast. 72,7 km/h



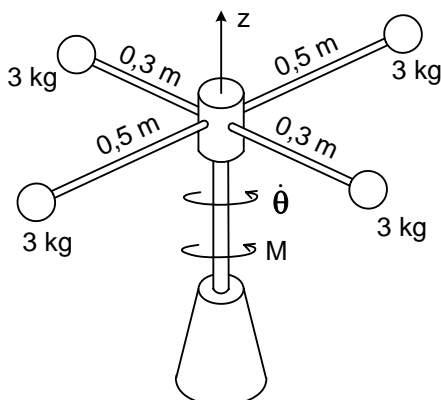
**4.6** Vaunun A massa on 16 kg ja se liikkuu vaakasuuntaan nopeudella 1,2 m/s. Vaunuun on kiinnitetty massattomilla sauvoilla neljä palloa, joiden kunkin massa on 1,6 kg. Etualalla olevien pallojen 1 ja 2 systeemi pyörii vastapäivään pyörimisnopeudella 80 r/min ja taka-alalla olevien pallojen 3 ja 4 systeemi myötäpäivään pyörimisnopeudella 100 r/min. Määritä

koko systeemin liike-energia, liikemäärä ja liikemäärän momentti massakeskiön G suhteen. Vast. 54,7 J 26,9 kg·m/s 2,42 kg·m<sup>2</sup>/s



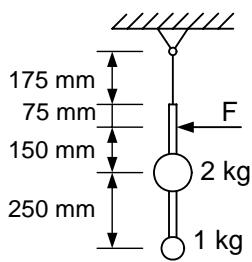
**4.7** Kahden teräspallon ja sauvan muodostama systeemi on aluksi levossa kitkattomalla vaakatasolla. Pallojen massa on  $m$ , sauvan pituus on  $L$  ja massa merkityksetön. Systeemiin vaikuttaa äkillisesti voima  $F$  kuvan mukaisesti. Määritä systeemin massakeskiön saama kiihtyvyys sekä nopeus  $\dot{\theta}$ , jolla sauvan kulmanopeus  $\dot{\theta}$  muuttuu välittömästi voiman vaikutuksen alettua.

Vast.  $F/(2m)$   $2Fb/(mL^2)$



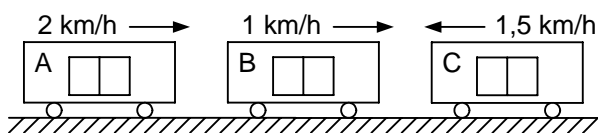
**4.8** Kuvan mukainen pallojen ja massattomien varsien systeemi pyörii  $z$ -akselin ympäri myötäpäivään kulmanopeudella  $\dot{\theta} = 20$  rad/s. Laske kuinka kauan vastapäiväisen vakiomomentin  $M = 30$  Nm pitää vaikuttaa, jotta kulmanopeudeksi tulisi  $\dot{\theta} = 20$  rad/s vastapäivään.

Vast. 2,72 s



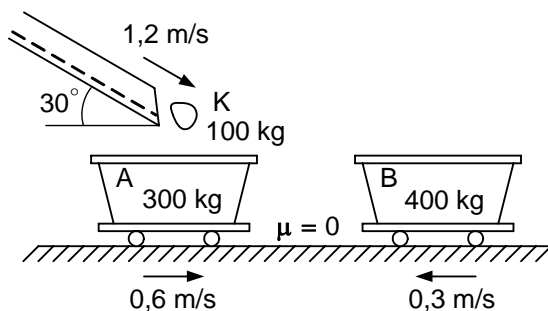
**4.9** Kaksi palloa on kiinnitetty massattomaan ja jäykkään sauvaan, joka on ripustettu vaijerilla tukeen kuvan mukaisesti. Systeemi on aluksi levossa, kunnes voima  $F = 60 \text{ N}$  vaikuttaa äkillisesti. Laske systeemin massakeskiön saama kiihtyvyys  $a_G$  ja nopeus  $\dot{\theta}$ , jolla sauvan kulmanopeus  $\dot{\theta}$  muuttuu. Vast.  $20 \text{ m/s}^2$   $336 \text{ rad/s}^2$

**4.10** Partikkelien A, B ja C massat ovat  $m_A = 2 \text{ kg}$ ,  $m_B = 3 \text{ kg}$  ja  $m_C = 4 \text{ kg}$ . Tietyllä ajan hetkellä niiden paikkavektorit ovat  $\vec{r}_A = (2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k})\text{m}$ ,  $\vec{r}_B = (2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})\text{m}$  ja  $\vec{r}_C = (\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k})\text{m}$ . Nopeusvektorit ovat samanaikaisesti  $\vec{v}_A = (3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k})\text{m/s}$ ,  $\vec{v}_B = (2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k})\text{m/s}$  ja  $\vec{v}_C = (-2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k})\text{m/s}$ . Laske kyseisen partikkelisysteemin liikemäärän momentti origon O suhteen. Vast.  $(-5\vec{i} - 4\vec{j} - 16\vec{k})\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$

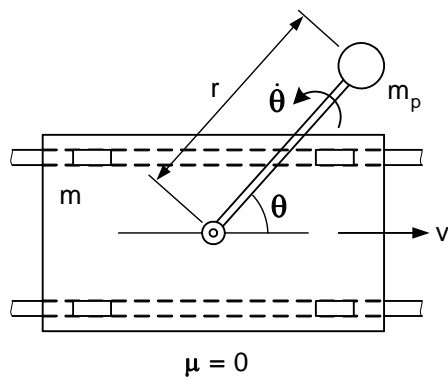


**4.11** Kolme rautatievaunua liikkuu vaakasuuntaisia kiskoja pitkin kuvan mukaisilla nopeuksilla. Kun vaunut törmäävät toisiinsa, ne kytkeytyvät yhteen, minkä jälkeen ne liikkuvat yhteisellä nopeudella  $v$ . Vaunujen massat ovat  $m_A = 65 \cdot 10^3 \text{ kg}$ ,  $m_B = 50 \cdot 10^3 \text{ kg}$  ja  $m_C = 75 \cdot 10^3 \text{ kg}$ . Määritä nopeus  $v$  ja laske montako prosenttia on energiahäviö törmäyksessä. Vast.  $0,355 \text{ km/h}$   $95,0 \%$

**4.12** Kuvan tilanteessa mies ja nainen lähtevät kulkemaan toisiaan kohti alustan päistä. Miehen massa on  $m_1$ , naisen massa on  $m_2$  ja alustan massa  $m_0$ . Alusta on aluksi levossa kohdassa  $s = 0$  ja se liikkuu kitkattomasti. Laske miehen ja naisen kohtaamishetkeä vastaava alustan siirtymän  $s$  lauseke miehen alustaan nähden kulkeman matkan  $x_1$  funktiona. Alustan pituus on  $l$ . Vast.  $\frac{(m_1 + m_2)x_1 - m_2 l}{m_0 + m_1 + m_2}$

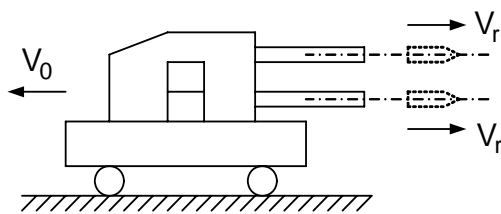


**4.13** Kuvassa on annettu vaunujen A ja B sekä kivenlohkareen K massat ja alkunopeudet. Laske systeemin yhteinen loppunopeus  $v$ , kun a) K putoaa ennen vaunujen törmäystä ja b) K putoaa vaunujen törmäyksen jälkeen. Vast.  $0,205 \text{ m/s}$



**4.14** Kuvan systeemi liikkuu kitkattomasti vaakatasossa olevia johteita pitkin (kuva on esitetty tason normaalin suunnasta katsottuna) nopeudella  $v$ . Kun  $\theta = 0^\circ$ , nopeus  $v = 0,6 \text{ m/s}$ . Massattomaan varteen kiinnitetty pallo pyörii kiinnitysnivelen ympäri kitkattomasti kulmanopeudella  $\dot{\theta} = 4 \text{ rad/s}$ . Alustan massa on  $m = 20 \text{ kg}$ , pallon massa  $m_p = 5 \text{ kg}$  ja varren pituus  $r = 0,4 \text{ m}$ . Määritä nopeus  $v$  kulman  $\theta$  funktiona ja laske  $v_{\max}$ .

Vast.  $0,92 \text{ m/s}$



**4.15** Kaksi  $10 \text{ kg}$  ammusta laukaistaan alustalta, jonka massa on  $1000 \text{ kg}$ . Alusta liikkuu ennen laukaisua nopeudella  $v_0 = 1,2 \text{ m/s}$  laukaisusuuntaan nähden vastakkaiseen suuntaan. Ammukset lähtevät nopeudella  $v_r = 1200 \text{ m/s}$  putken suhteen. Laske alustan nopeus  $v'$  laukaisun jälkeen, kun ammukset lähtevät a) yhtäaikaa ja b) peräkkäin. Pyörien massaa eikä kitkaa oteta huomioon.

Vast. a)  $24,7 \text{ m/s}$  b)  $24,8 \text{ m/s}$