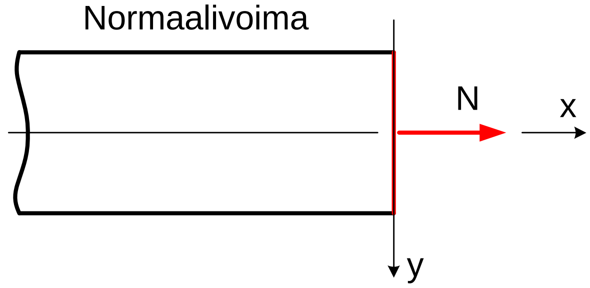
SAUVAN POIKKILEIKKAUKSEN JÄNNITYSKENTTÄ

Normaalivoima



Todellinen $\sigma-$kenttä

Tasainen $\sigma-$kenttä

KESKIMÄÄRÄINEN NORMAALIJÄNNITYS $$\boxed{\sigma = \frac{N}{A}}$$

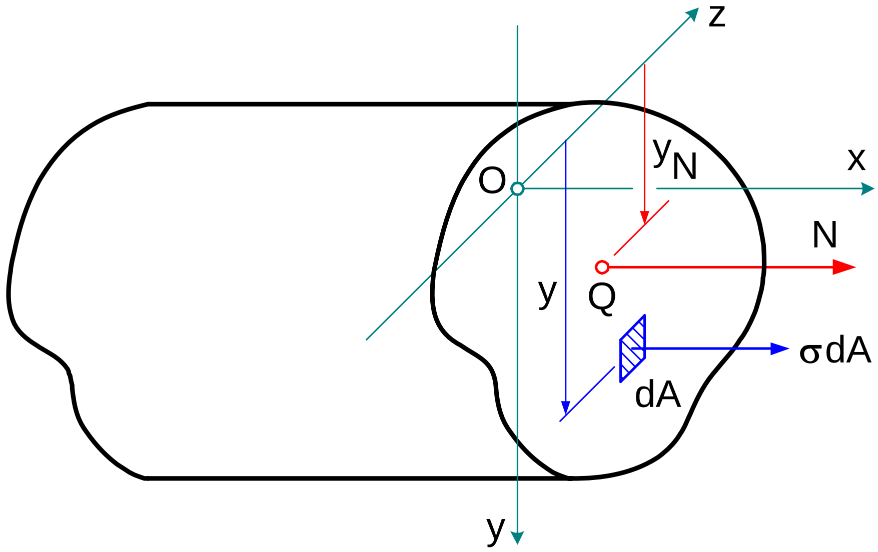
EPÄTASAINEN σ -KENTTÄ SYNTYY MM. SEURAAVISSA TAPAUKSISSA:

- **Materiaali on epähomogeeninen (sauvalla on syinen rakenne).**
- **Sauvan poikkileikkaus vaihtelee pituussuunnassa paljon.**
- **Pienelle alueelle jakaantuneen kuormituksen lähellä.**

SAUVAN POIKKILEIKKAUKSEN JÄNNITYSKENTTÄ

LAUSE: Tasaisen σ-kentän resultantti N vaikuttaa poikkileikkauksen pintakeskiössä.

TODISTUS:



x →
$$N = \int_A \sigma \, dA = \sigma \int_A dA = \sigma A$$

↑ σ – kenttä tasainen

z ↗
$$N \cdot y_N = \int_A y \cdot \sigma \, dA = \sigma \int_A y \, dA = \sigma A y_0$$

↑ ↑ PK:n y – koord.

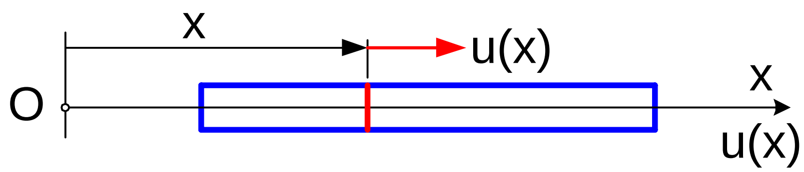
pintakeskiön määritelmä ↑

$$\Rightarrow \quad N \cdot y_N = N \cdot y_0 \quad \Rightarrow \quad y_N = y_0$$

Samoin näytetään, että $z_N = z_0$ $\quad \therefore \quad Q \equiv PK$

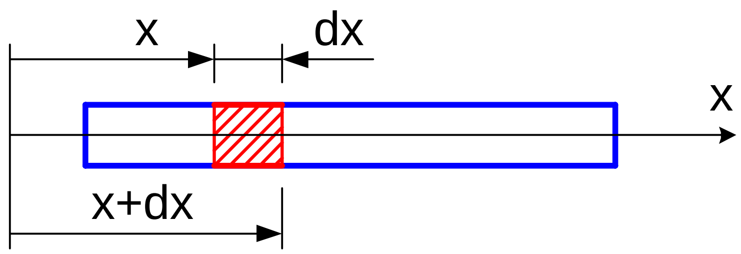
VENYMÄN JA SIIRTYMÄN YHTEYS

SIIRTYMÄFUNKTIO:

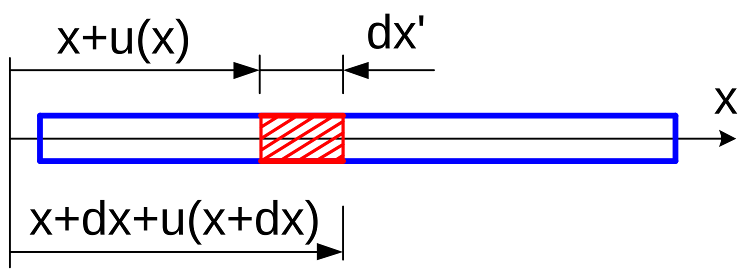


Siirtymäfunktio u(x) ilmaisee kohdassa x olevan poikkileikkauksen x-suuntaisen siirtymän.

KINEMAATTINEN YHTÄLÖ:



Alkutila



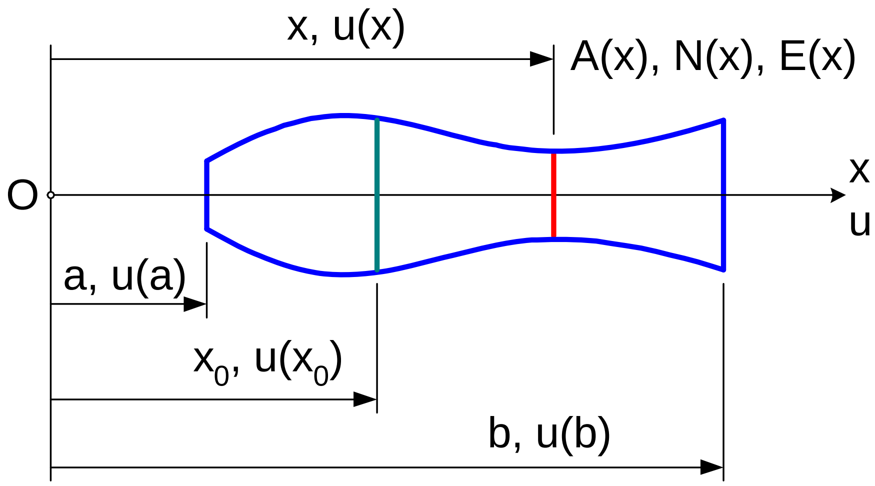
Muodonmuu-
tostila

$$\Delta(dx) = dx' - dx = [\,x + dx + u(x + dx) - x - u(x)\,] - dx$$

$$\Delta(dx) = u(x + dx) - u(x) = du \qquad \varepsilon = \frac{\Delta(dx)}{dx}$$

Kinemaattinen yhtälö: $\boxed{\varepsilon = \dfrac{du}{dx}}$

SIIRTYMÄN MÄÄRITYS



x_0 on vertailupoikkileikkaus, jonka siirtymä $u_0 = u(x_0)$ **tunnetaan**

$$du = \varepsilon\, dx \quad \Rightarrow \quad \int_{u_0}^{u(x)} du = \int_{x_0}^{x} \varepsilon\, dx \quad \Rightarrow \quad u(x) - u_o = \int_{x_0}^{x} \varepsilon\, dx$$

Hooken laki: $\sigma = E\varepsilon$

Normaalijännitys tasan jakaantunut: $\sigma = \dfrac{N}{A}$

Siirtymä:

$$\boxed{u(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{N}{EA} dx}$$

Sauvan pituuden muutos:

$$\Delta L = u(b) - u(a) = u_0 + \int_{x_0}^{b} \frac{N}{EA} dx - u_0 - \int_{x_0}^{a} \frac{N}{EA} dx = \int_{a}^{x_0} \frac{N}{EA} dx + \int_{x_0}^{b} \frac{N}{EA} dx$$

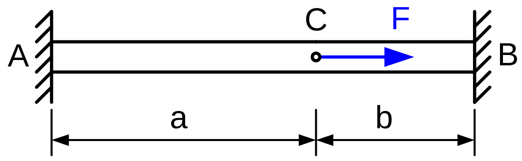
Pituuden muutos:

$$\boxed{\Delta L = \int_{a}^{b} \frac{N}{EA} dx}$$

HYPERSTAATTINEN VETO/PURISTUS

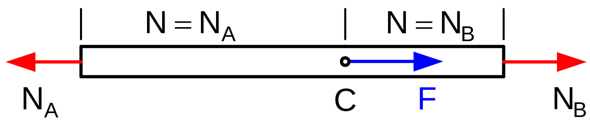
VOIMAMENETELMÄ

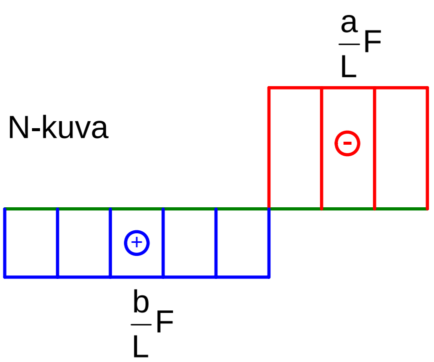
Esimerkki: Määritä oheisen molemmista päistään jäykästi kiinnitetyn sauvan normaalivoimakuva ja vaakasiirtymä pisteen C kohdalla.



a+b=L   E ja A vakioita

Vapakappalekuva





Ratkaisu:

Tasapaino vaakasuunnassa $\Rightarrow$

$$-N_A + F + N_B = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{N_A - N_B = F} \qquad (1)$$

Yhteensopivuusehto: Sauvan pituudenmuutos on nolla. $\Rightarrow$

$$\Delta L_{AB} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{N_A\, a}{E A} + \frac{N_B\, b}{E A} = 0} \qquad (2)$$

Yhtälöparin (1) - (2) ratkaisuksi tulee $\boxed{N_A = \frac{b}{L} F \qquad N_B = -\frac{a}{L} F}$,

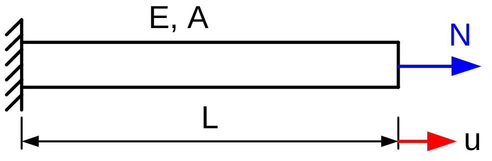
josta seuraa yllä esitetty normaalivoimakuva.

Siirtymä kohdassa C on kaavan (2) ensimmäinen termi $\Rightarrow$

$$u_C = \frac{(b/L) F a}{E A} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_C = \frac{F a b}{E A L}}$$

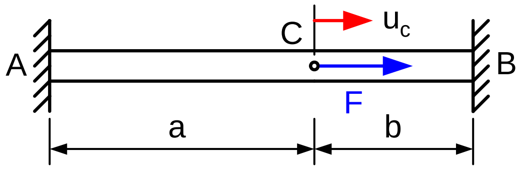
SIIRTYMÄMENETELMÄ

Veto/puristussauvan jousivakio



$$\boxed{N = k \cdot u}$$

$$\boxed{k = \frac{EA}{L}}$$



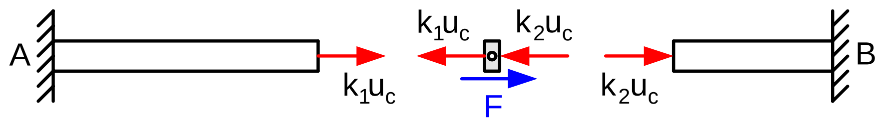
a+b=L E ja A vakioita

Esimerkki: Määritä oheisen molemmista päistään jäykästi kiinnitetyn sauvan vaakasiirtymä pisteen C kohdalla ja laske sen jälkeen osien AC ja CB normaalivoimat.

Ratkaisu:

Sauvajousielementtien jousivakiot: $k_1 = \frac{EA}{a}$ $\quad k_2 = \frac{EA}{b}$

Elementit ja solmu C:



Solmun C tasapaino: $F - k_1u_c - k_2u_c = 0 \quad \Rightarrow \quad u_c = \frac{F}{k_1 + k_2}$

$$k_1 + k_2 = EA\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{EAL}{ab} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_C = \frac{Fab}{EAL}}$$

Normaalivoimat: $\boxed{N_A = k_1 u_c = \frac{b}{L}F}$ $\quad \boxed{N_B = -k_2 u_c = -\frac{a}{L}F}$

SAUVAN LÄMPÖJÄNNITYKSET

Vapaa lämpölaajeneminen ei aiheuta jännityksiä. Lämpöjännityksiä syntyy, jos lämpölaajeneminen on kokonaan tai osittain estetty!

VAKIOSAUVA:

Lämpenemisestä aiheutuva pituudenmuutos $\Delta L_T = \alpha L \Delta T$

Normaalivoimasta aiheutuva pituudenmuutos $\Delta L_N = \dfrac{NL}{EA}$

KOKONAISPITUUDENMUUTOS: $\boxed{\Delta L = \alpha L \Delta T + \dfrac{NL}{EA}}$

Vastaava kokonaisvenymä on $\varepsilon = \dfrac{\Delta L}{L} = \alpha \Delta T + \dfrac{N}{EA} \quad \Rightarrow$

KOKONAISVENYMÄ: $\boxed{\varepsilon = \alpha \Delta T + \dfrac{\sigma}{E}}$

YLEINEN TAPAUS:

Kokonaisvenymä voi vaihdella sauvan suunnassa eli $\alpha = \alpha(x)$, $\Delta T = \Delta T(x)$, $\sigma = \sigma(x)$ ja $E = E(x)$. Pituudenmuutos lasketaan integroimalla kaavasta

$$\boxed{\Delta L = \int_0^L \left(\alpha \Delta T + \frac{\sigma}{E} \right) dx}$$