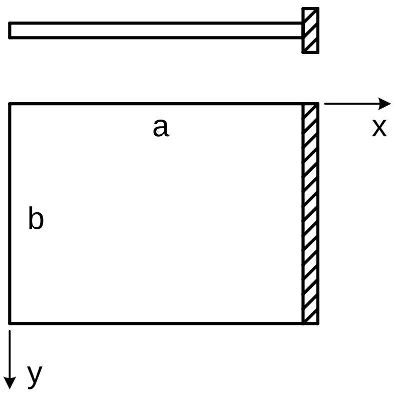
SUOREKULMIOLAATTA

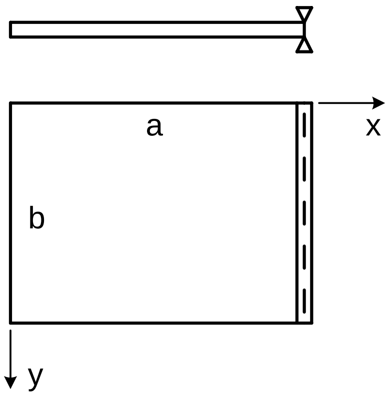
REUNAEHDOT

1. Jäykkä tuenta $x = a$



$$w(a,y) = 0 \qquad w_{,x}(a,y) = 0$$

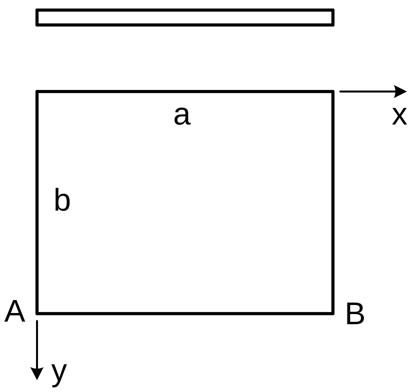
2. Niveltuenta $x = a$



$$w(a,y) = 0 \qquad M_x(a,y) = 0$$

$$w(a,y) = 0 \qquad w_{,xx}(a,y) = 0$$

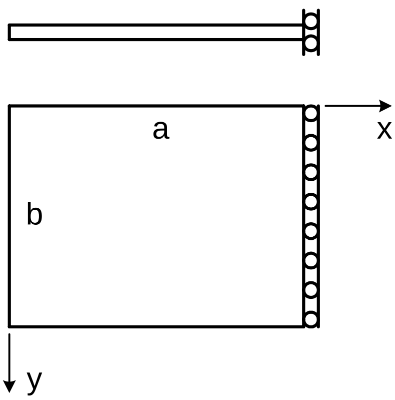
3. Vapaa reuna $x = a$



$$M_x(a,y) = 0$$
$$V_x(a,y) = Q_x(a,y) + M_{xy,y}(a,y) = 0$$

$$w_{,xx}(a,y) + \nu w_{,yy}(a,y) = 0$$
$$w_{,xxx}(a,y) + (2-\nu) w_{,xyy}(a,y) = 0$$

4. Luistituenta $x = a$

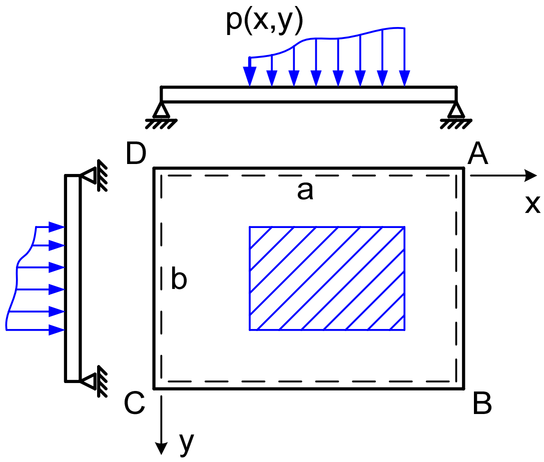


$$w_{,x}(a,y) = 0$$
$$V_x(a,y) = Q_x(a,y) + M_{xy,y}(a,y) = 0$$

$$w_{,x}(a,y) = 0 \qquad w_{,xxx}(a,y) = 0$$

SUORAKULMIOLAATTA

NIVELTUETUN LAATAN NAVIERIN RATKAISU



Kuormitusfunktio $p(x,y)$ esitetään **Fourier-kaksoissinisarjana** muodossa

$$p(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} p_{mn}\sin(\alpha_m x)\,\sin(\beta_n y) \quad \alpha_m = m\pi/a \quad \beta_n = n\pi/b$$

jossa **kuormituksen Fourier-kertoimet** p_{mn} saadaan kaavasta

$$p_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b p(x,y)\sin(\alpha_m x)\,\sin(\beta_n y)\,dx\,dy$$

Taipuman $w(x,y)$ **Fourier-kaksoissinisarja** on muotoa

$$w(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}\sin(\alpha_m x)\,\sin(\beta_n y) \quad \alpha_m = m\pi/a \quad \beta_n = n\pi/b$$

jossa **taipuman Fourier-kertoimet** w_{mn} saadaan kuormituksen Fourier-kertoimista p_{mn} kaavalla

$$w_{mn}=\frac{p_{mn}}{D(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2}=\frac{p_{mn}}{D\pi^4\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2}$$

LAATAN PERUSYHTÄLÖT NAPAKOORDINAATISTOSSA

Perusdifferentiaaliyhtälö

$$\nabla^4 w = \left[(\ ),_{rr} + \frac{1}{r}(\ ),_r + \frac{1}{r^2}(\ ),_{\theta\theta} \right]\left(w,_{rr} + \frac{1}{r} w,_r + \frac{1}{r^2} w,_{\theta\theta} \right) = p(r,\theta)/D$$

Momenttitiheydet

$$M_r = D(\kappa_r + \nu\kappa_\theta) = -D\left[w,_{rr} + \nu\left(\frac{1}{r} w,_r + \frac{1}{r^2} w,_{\theta\theta} \right)\right]$$

$$M_\theta = D(\nu\kappa_r + \kappa_\theta) = -D\left[\nu w,_{rr} + \left(\frac{1}{r} w,_r + \frac{1}{r^2} w,_{\theta\theta} \right)\right] \qquad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$M_{r\theta} = D(1-\nu)\kappa_{r\theta} = -D(1-\nu)\left(\frac{1}{r} w,_\theta \right),_r$$

Keskipinnan suuntaiset jännitykset

$$\sigma_r = \frac{M_r}{I} z \qquad \sigma_\theta = \frac{M_\theta}{I} z \qquad \tau_{r\theta} = \frac{M_{r\theta}}{I} z \qquad I = h^3/12$$

Keskipinnan suuntaisten jännitysten ääriarvot ylä- ja alapinnalla

$$\sigma_r = \mp \frac{6M_r}{h^2} \qquad \sigma_\theta = \mp \frac{6M_\theta}{h^2} \qquad \tau_{r\theta} = \mp \frac{6M_{r\theta}}{h^2}$$

LAATAN PERUSYHTÄLÖT NAPAKOORDINAATISTOSSA

Leikkausvoimatiheydet

$$Q_r = -D(\nabla^2 w)_{,r} \qquad Q_\theta = -D(\nabla^2 w)_{,\theta}$$

Jännitysresultanttien tasapainoehdot

$$\begin{aligned}
&(rM_r)_{,r} + M_{r\theta,\theta} - M_\theta = rQ_r \\
&M_{\theta,\theta} + (rM_{r\theta})_{,r} + M_{r\theta} = rQ_\theta \\
&(rQ_r)_{,r} + Q_{\theta,\theta} = -rp(r,\theta)
\end{aligned}$$

$$(rM_r)_{,rr} + \frac{2}{r}(rM_{r\theta})_{,r\theta} - M_{\theta,r} + \frac{1}{r}M_{\theta,\theta\theta} = -rp(r,\theta)$$

Poikittaiset leikkausjännitykset

$$\tau_{rz} = \frac{3Q_r}{2h}\left[1-\left(\frac{z}{h/2}\right)^2\right] \qquad \tau_{\theta z} = \frac{3Q_\theta}{2h}\left[1-\left(\frac{z}{h/2}\right)^2\right]$$

Poikittaisten leikkausjännitysten ääriarvot keskipinnalla

$$\tau_{rz} = \frac{3Q_r}{2h} \qquad \tau_{\theta z} = \frac{3Q_\theta}{2h}$$

Korvikeleikkausvoimatiheydet

$$V_r = Q_r + \frac{1}{r}M_{r\theta,\theta} = -D\left[(\nabla^2 w)_{,r} + (1-\nu)\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}w_{,\theta}\right)_{,r\theta}\right]$$

$$V_\theta = Q_\theta + M_{r\theta,r} = -D\left[\frac{1}{r}(\nabla^2 w)_{,\theta} + (1-\nu)\left(\frac{1}{r}w_{,\theta}\right)_{,rr}\right]$$

YMPYRÄ- JA RENGASLAATTA

REUNAEHDOT

Reunan $r = a$ kulmasta θ riippumattomat reunaehdot ovat

Jäykkä kiinnitys $\boxed{w(a) = 0 \quad \text{ja} \quad w_{,r}(a) = 0}$

Nivelkiinnitys $\boxed{w(a) = 0 \quad \text{ja} \quad M_r(a) = 0}$

Vapaa reuna $\boxed{M_r(a) = 0 \quad \text{ja} \quad V_r(a) = 0}$

Luistikiinnitys $\boxed{w_{,r}(a) = 0 \quad \text{ja} \quad V_r(a) = 0}$

Reunaehdot esitetään taipuman avulla perusyhtälöitä käyttäen.

ROTAATIOSYMMETRINEN RATKAISU

Perusdifferentiaaliyhtälö

$$\nabla^4 w = \frac{1}{r}\left\{ r\left[\frac{1}{r}\left(r\, w_{,r}\right)_{,r} \right]_{,r} \right\}_{,r} = p(r)/D$$

Perusdifferentiaaliyhtälön **yleinen ratkaisu**

$$w(r) = a_0 + b_0 \ln r + c_0 r^2 + d_0 r^2 \ln r + \int \left\{ \frac{1}{r} \int \left[r \int \left(\frac{1}{r} \int \frac{r\,p}{D} dr \right) dr \right] dr \right\} dr$$

Vakiot a_0, b_0, c_0 ja d_0 saadaan laatan reunaehdoista.

Jännitysresultantit

$$M_r = -D\left(w_{,rr} + \frac{\nu}{r} w_{,r} \right) \qquad M_\theta = -D\left(\nu\, w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} \right) \qquad M_{r\theta} = 0$$

$$Q_r = -D\left(w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} \right)_{,r} \qquad Q_\theta = 0 \qquad V_r = Q_r \qquad V_\theta = 0$$