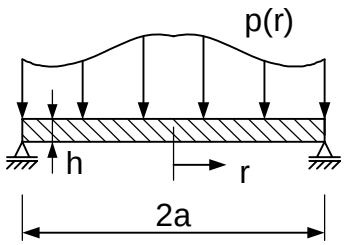
III.9. Laadi Mathcad-dokumentti, joka ratkaisee ulkoreunaltaan niveltuetun ympyrälaatan statiikan (w, M_r, M_θ, Q_r), kun dokumentissa annettava kuormitusfunktio p(r) on rotaatiosymmetrinen. Dokumentin tulee myös piirtää suureiden w, M_r, M_θ, Q_r kuvaajat ja etsiä niiden ääriarvot. Sovella dokumenttia kuormitusfunktioihin a) $p(r) = p_0$ ja b) $p(r) = p_0\left(1 - \frac{r}{a}\right)$ tapauksessa $E = 210\ \text{GPa}$, $\nu = 0{,}3$, $a = 200\ \text{mm}$, $h = 5\ \text{mm}$ ja $p_0 = 0{,}1\ \text{MPa}$.

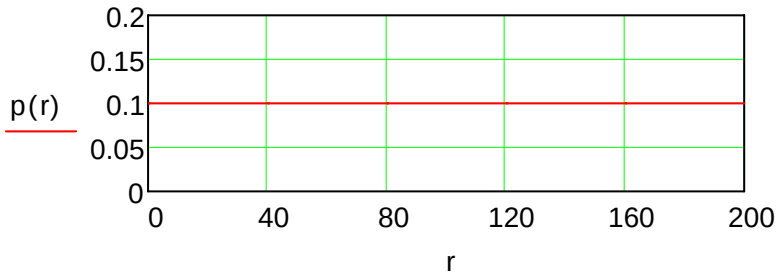


Ratkaisu: Yksiköt: N,mm

Kimmomoduuli: E := 210000 Poissonin vakio: ν := 0.3 Laatan säde: a := 200

Laatan paksuus: h := 5 $D := \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot \left(1 - \nu^2\right)}$

Kuormituksen määrittely: **a)** $p_0 := 0.1$ $p(r) := p_0$



$$w_y(r) := \int \left[\frac{1}{r} \cdot \int \left[r \cdot \int \left[\frac{1}{r} \cdot \left(\int \frac{r \cdot p(r)}{D}\, dr \right) dr \right] dr \right] dr \right] dr \ \text{float}, 10 \rightarrow 6.5\text{e-}10 \cdot r^4$$

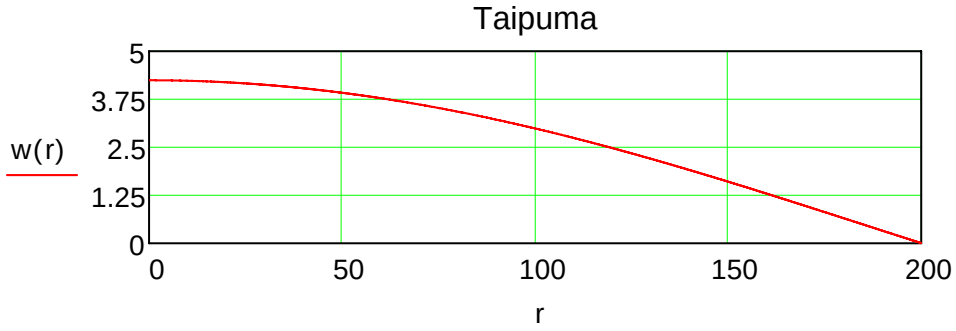
$$W(r, a_0, c_0) := a_0 + c_0 \cdot r^2 + 6.5\text{e-}10 \cdot r^4$$

$$M_r(r, a_0, c_0) := -D \cdot \left[\frac{d^2}{dr^2} W(r, a_0, c_0) + \frac{\nu}{r} \cdot \left(\frac{d}{dr} W(r, a_0, c_0) \right) \right]$$

Given $W(a, a_0, c_0) = 0$ $M_r(a, a_0, c_0) = 0$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ c_0 \end{pmatrix} := \text{Find}(a_0, c_0)\ \text{float}, 10 \rightarrow \begin{pmatrix} 4.24 \\ -0.000132 \end{pmatrix}$$

$w(r) := W(r, a_0, c_0)$



$w(0) = 4.240$ $w(a) = 0.000$

Alkuarvaus: $r_1 := \frac{a}{2}$

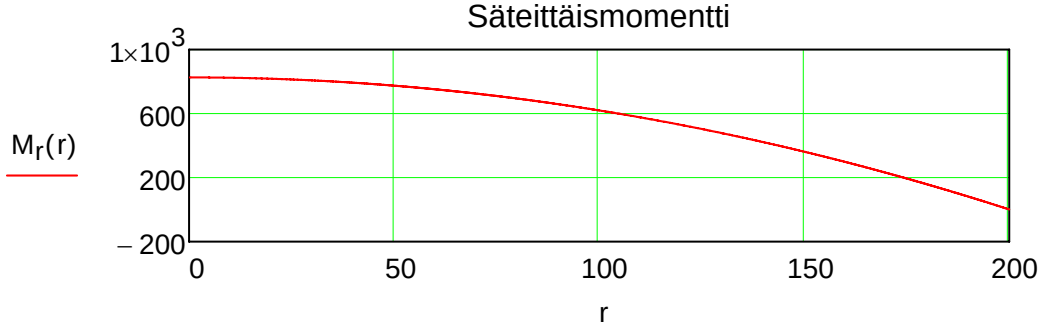
Given $0 \le r_1 \le a$ $p := \text{Maximize}(w, r_1)$

Given $0 \le r_1 \le a$ $q := \text{Minimize}(w, r_1)$

Maksimitaipuma: $p = 0.000$ $w(p) = 4.240$

Minimitaipuma: $q = 200.000$ $w(q) = 0.000$

$$M_r(r) := -D \cdot \left[\frac{d^2}{dr^2} w(r) + \frac{\nu}{r} \cdot \left(\frac{d}{dr} w(r) \right) \right]$$



$\lim_{r \to 0^+} M_r(r)$ float, 10 $\rightarrow 825.0$ $M_r(a) = 0.000$

Alkuarvaus: $r_1 := \frac{a}{2}$

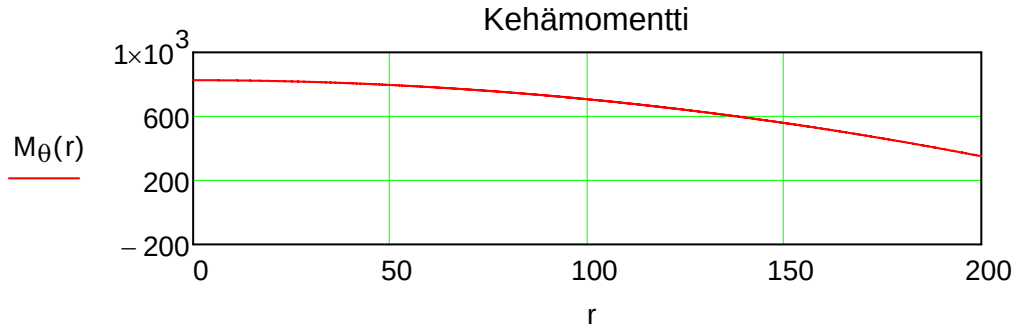
Given $0 \le r_1 \le a$ $p := \text{Maximize}(M_r, r_1)$

Given $0 \le r_1 \le a$ $q := \text{Minimize}(M_r, r_1)$

Säteittäismomentin maksimiarvo: $p = 0.050$ $M_r(p) = 825.000$

Säteittäismomentin minimiarvo: $q = 200.000$ $M_r(q) = 0.000$

$$M_\theta(r) := -D \cdot \left[\nu \cdot \frac{d^2}{dr^2} w(r) + \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{d}{dr} w(r) \right) \right]$$



$\lim_{r \to 0^+} M_\theta(r)$ float, 10 $\to 825.0$ $M_\theta(a) = 350.000$

Alkuarvaus: $r_1 := \frac{a}{2}$

Given $0 \le r_1 \le a$ $p := \text{Maximize}(M_\theta, r_1)$

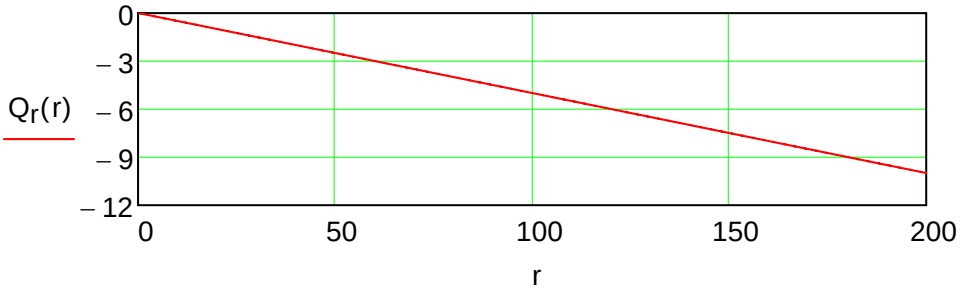
Given $0 \le r_1 \le a$ $q := \text{Minimize}(M_\theta, r_1)$

Kehämomentin maksimiiarvo: $p = 0.106$ $M_\theta(p) = 825.000$

Kehämomentin minimiarvo: $q = 200.000$ $M_\theta(q) = 350.000$

$$Q_r(r) := -D \cdot \frac{d}{dr} \left[\frac{d^2}{dr^2} w(r) + \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{d}{dr} w(r) \right) \right]$$

Säteittäinen leikkausvoima



$\lim_{r \to 0^+} Q_r(r) \text{ float},10 \rightarrow -\infty$ $\qquad Q_r(a) = -10.000$

Mathcad ei laske raja-arvoa oikein!

Alkuarvaus: $r_1 := \frac{a}{2}$

Given $\quad 0 \le r_1 \le a \quad p := \text{Maximize}(Q_r, r_1)$

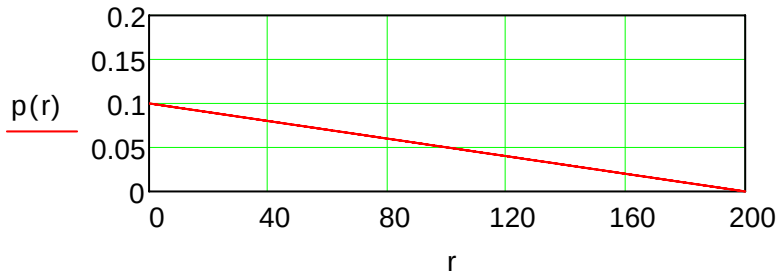
Given $\quad 0 \le r_1 \le a \quad q := \text{Minimize}(Q_r, r_1)$

Mathcad ei löydä maksimikohtaa!

Säteittäisen leikkausvoiman maksimiarvo: $p =$ $\qquad Q_r(p) =$

Säteittäisen leikkausvoiman minimiarvo: $q = 200.000$ $\qquad Q_r(q) = -10.000$

Kuormituksen määrittely: **b)** $p_0 := 0.1 \qquad p(r) := p_0 \cdot \left(1 - \frac{r}{a}\right)$



$$w_y(r) := \int \left[\frac{1}{r} \cdot \left[\int r \cdot \left[\int \left[\frac{1}{r} \cdot \left(\int \frac{r \cdot p(r)}{D} dr \right) \right] dr \right] dr \right] \right] dr$$

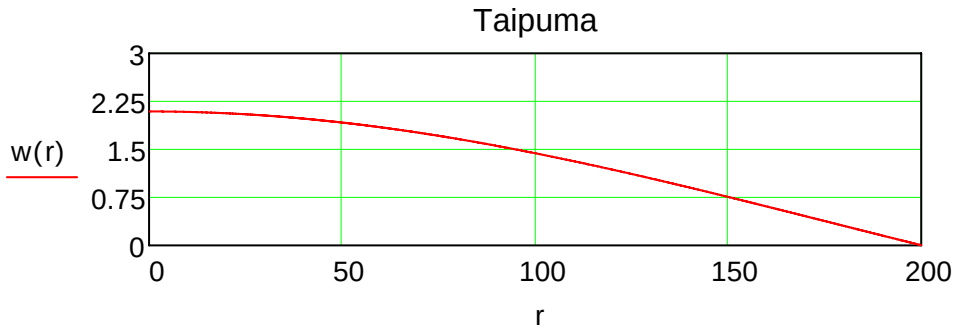
$w_y(r) \text{ float},10 \rightarrow 6.5\text{e-}10 \cdot r^4 + -9.244444444\text{e-}13 \cdot r^5$

$$W(r, a_0, c_0) := a_0 + c_0 \cdot r^2 + \left(6.5e\text{-}10 \cdot r^4 + -9.244444444e\text{-}13 \cdot r^5\right)$$

$$M_r(r, a_0, c_0) := -D \cdot \left[\frac{d^2}{dr^2} W(r, a_0, c_0) + \frac{\nu}{r} \cdot \left(\frac{d}{dr} W(r, a_0, c_0) \right) \right]$$

Given $W(a, a_0, c_0) = 0$ $M_r(a, a_0, c_0) = 0$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ c_0 \end{pmatrix} := \text{Find}(a_0, c_0) \text{ float}, 10 \rightarrow \begin{pmatrix} 2.0896 \\ -0.00007084444445 \end{pmatrix} \qquad w(r) := W(r, a_0, c_0)$$



$w(0) = 2.090$ $w(a) = -0.000$

Alkuarvaus: $r_1 := \frac{a}{2}$

Given $0 \le r_1 \le a$ $p := \text{Maximize}(w, r_1)$

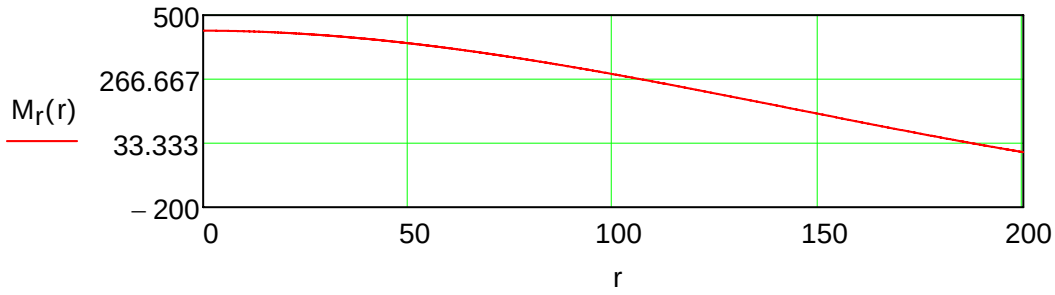
Given $0 \le r_1 \le a$ $q := \text{Minimize}(w, r_1)$

Maksimitaipuma: $p = 0.000$ $w(p) = 2.090$

Minimitaipuma: $q = 200.000$ $w(q) = -0.000$

$$M_r(r) := -D \cdot \left[\frac{d^2}{dr^2} w(r) + \frac{\nu}{r} \cdot \left(\frac{d}{dr} w(r) \right) \right]$$

Säteittäismomentti



$\lim_{r \to 0^+} M_r(r)$ float, 10 $\rightarrow$ 442.7777778 $\quad M_r(a) = 0.000$

Alkuarvaus: $r_1 := \frac{a}{2}$

Given $\quad 0 \le r_1 \le a \quad p := \text{Maximize}(M_r, r_1)$

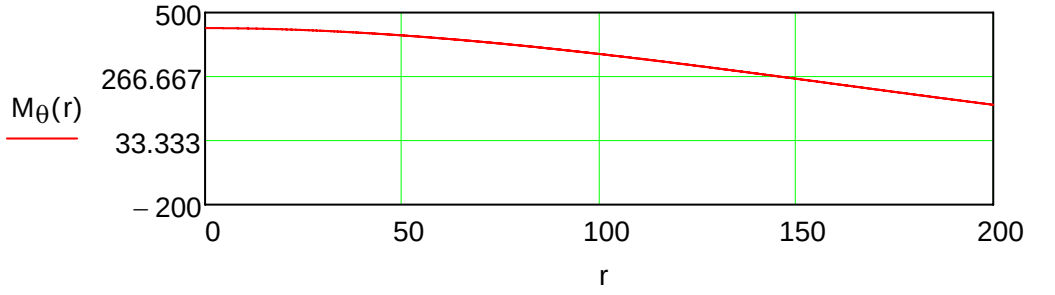
Given $\quad 0 \le r_1 \le a \quad q := \text{Minimize}(M_r, r_1)$

Säteittäismomentin maksimiarvo: $\quad p = 0.077 \quad M_r(p) = 442.778$

Säteittäismomentin minimiarvo: $\quad q = 200.000 \quad M_r(q) = 0.000$

$$M_\theta(r) := -D \cdot \left[\nu \cdot \frac{d^2}{dr^2} w(r) + \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{d}{dr} w(r) \right) \right]$$

Kehämomentti



$\lim_{r \to 0^+} M_\theta(r)$ float, 10 $\rightarrow$ 442.7777778 $\quad M_\theta(a) = 163.333$

Alkuarvaus: $r_1 := \frac{a}{2}$

Given $0 \le r_1 \le a$ $p := \text{Maximize}(M_\theta, r_1)$

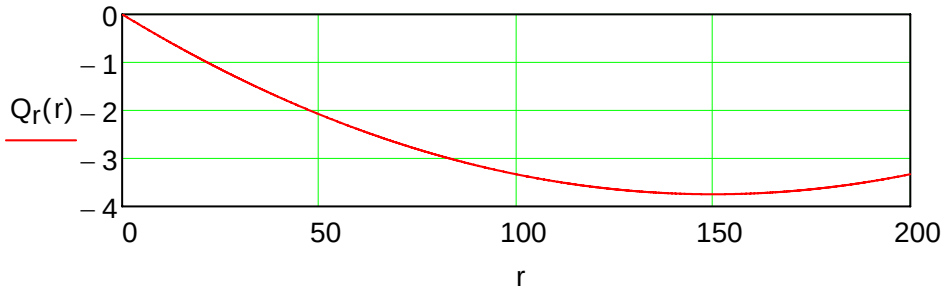
Given $0 \le r_1 \le a$ $q := \text{Minimize}(M_\theta, r_1)$

Kehämomentin maksimiarvo: $p = 0.071$ $M_\theta(p) = 442.778$

Kehämomentin minimiarvo: $q = 200.000$ $M_\theta(q) = 163.333$

$$Q_r(r) := -D \cdot \frac{d}{dr}\left[\frac{d^2}{dr^2}w(r) + \frac{1}{r}\cdot\left(\frac{d}{dr}w(r)\right)\right]$$

Säteittäinen leikkausvoima



$\lim_{r \to 0^+} Q_r(r)$ float, 10 $\to \infty$ $Q_r(a) = -3.333$

Mathcad ei laske raja-arvoa oikein!

Alkuarvaus: $r_1 := \frac{a}{2}$

Given $0 \le r_1 \le a$ $p := \text{Maximize}(Q_r, r_1)$

Given $0 \le r_1 \le a$ $q := \text{Minimize}(Q_r, r_1)$

Mathcad ei löydä maksimikohtaa!

Säteittäisen leikkausvoiman maksimiarvo: $p =$ $Q_r(p) =$

Säteittäisen leikkausvoiman minimiarvo: $q = 150.000$ $Q_r(q) = -3.750$