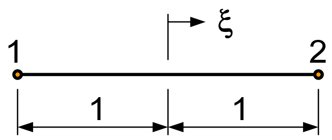
5 INTERPOLOINTI

5.1 Johdanto

Yleinen elementtimenetelmä edellyttää interpoloinnin käyttöä. Sen avulla voidaan kenttäfunktio f (esimerkiksi siirtymäkomponentti tai lämpötila) esittää elementin alueessa likimääräisesti sen solmuarvojen f_i avulla. Käytettävät interpolointifunktiot (muotofunktiot, painofunktiot) N_i ovat alhaista astelukua olevia polynomeja, tavalliset asteluvut ovat yksi, kaksi ja kolme, jolloin puhutaan vastaavasti lineaarisesta, kvadraattisesta ja kuutiollisesta interpoloinnista. Interpolointi antaa joitakin poikkeustapauksia (sauva- ja palkkielementit) lukuun ottamatta kenttäfunktion arvot likimääräisesti, joten sen käytöstä on seurauksena interpolointivirhe. Interpolointivirheen suuruuteen vaikuttavat interpoloinnin asteluku ja elementtiverkon tiheys. Mitä tiheämpää verkkoa ja mitä korkeamman asteen polynomeja käytetään, sitä tarkempia tuloksia saadaan.

5.2 Interpolointi emojanan alueessa

Tarkastellaan ensin yksiulotteista interpolointia kuvan 5.1 kaksisolmuisen emojanaelementin alueessa. Koordinaatti on ξ ja sen origo on elementin keskipisteessä. Alkusolmussa 1 on $\xi=-1$ ja loppusolmussa 2 $\xi=+1$. Lineaariset interpolointifunktiot kuvan 5.1 emojanan alueessa ovat

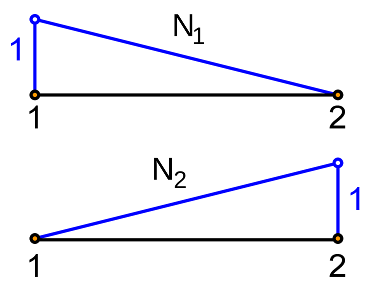


Kuva 5.1 Emojanaelementti.

$$\boxed{N_1=\frac{1}{2}(1-\xi) \qquad N_2=\frac{1}{2}(1+\xi)} \tag{5.1}$$

Kuvassa 5.2 on interpolointifunktioiden (5.1) kuvaajat ja kuva 5.3 esittää funktion f lineaarista interpolointia sen solmuarvoista f_1 ja f_2 lähtien, jolloin

$$f(\xi)\approx\tilde{f}(\xi)=N_1 f_1+N_2 f_2=\frac{1-\xi}{2}f_1+\frac{1+\xi}{2}f_2 \tag{5.2}$$



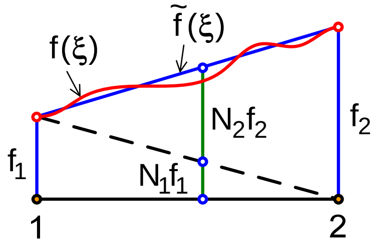
Kuva 5.2 Lineaariset interpolointifunktiot.

Kaavan (5.2) interpolointi on erityistapaus yleisestä interpolointikaavasta

$$\boxed{f(\xi)\approx\tilde{f}(\xi)=N_1 f_1+N_2 f_2+\cdots+N_k f_k=\sum_{i=1}^{k}N_i f_i} \tag{5.3}$$

jossa k on elementin solmujen lukumäärä. Kaavassa

(5.3) $N_i = N_i(\xi)$ on solmua i vastaava interpolointifunktio eli solmuarvon f_i painofunktio. Kukin interpolointifunktio saa omassa solmussaan arvon 1 ja kaikissa muissa solmuissa arvon 0. Kun solmujen koordinaatteja merkitään $\xi_i \quad i = 1, 2, \cdots, k$, on kaikille interpolointifunktioille voimassa



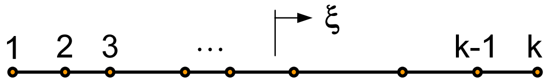
Kuva 5.3 Lineaarinen interpolointi.

$$\boxed{N_i(\xi_i) = 1 \qquad N_i(\xi_j) = 0, \text{ kun } i \neq j} \tag{5.4}$$

Vaatimus (5.4) johtuu siitä, että lausekkeen (5.3) pitää antaa tarkat funktion f arvot solmuissa. Lauseke (5.3) interpoloi tarkasti vakioarvoisen kenttäfunktion $f = f_0$ vain, jos on voimassa

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k} N_i(\xi) = 1} \tag{5.5}$$

Interpoloinnissa (5.3) emoelementin solmujen ei tarvitse olla tasajaolla, vaikka elementtimenetelmässä ne niin valitaankin. Interpolointifunktiot voidaan helposti muodostaa ominaisuuksien (5.4) avulla. Määritetään malliksi kuvan 5.4 k-solmuisen emoelementin solmun 3 interpolointifunktio. Lähdetään liikkeelle funktiosta



Kuva 5.4 k-solmuinen emojana.

$$\bar{N}_3(\xi) = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_4) \cdots (\xi - \xi_k) \tag{5.6}$$

joka toteuttaa kaavan (5.4) jälkimmäisen vaatimuksen ja saa solmussa 3 arvon

$$\bar{N}_3(\xi_3) = (\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)(\xi_3 - \xi_4) \cdots (\xi_3 - \xi_k) \tag{5.7}$$

Etsitty interpolointifunktio on näin ollen $N_3(\xi) = \bar{N}_3(\xi) / \bar{N}_3(\xi_3)$. Edellä oleva voidaan yleistää, jolloin solmun i interpolointifunktioksi tulee

$$N_i(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \cdots (\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1}) \cdots (\xi - \xi_{k-1})(\xi - \xi_k)}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2) \cdots (\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1}) \cdots (\xi_i - \xi_{k-1})(\xi_i - \xi_k)} \tag{5.8}$$

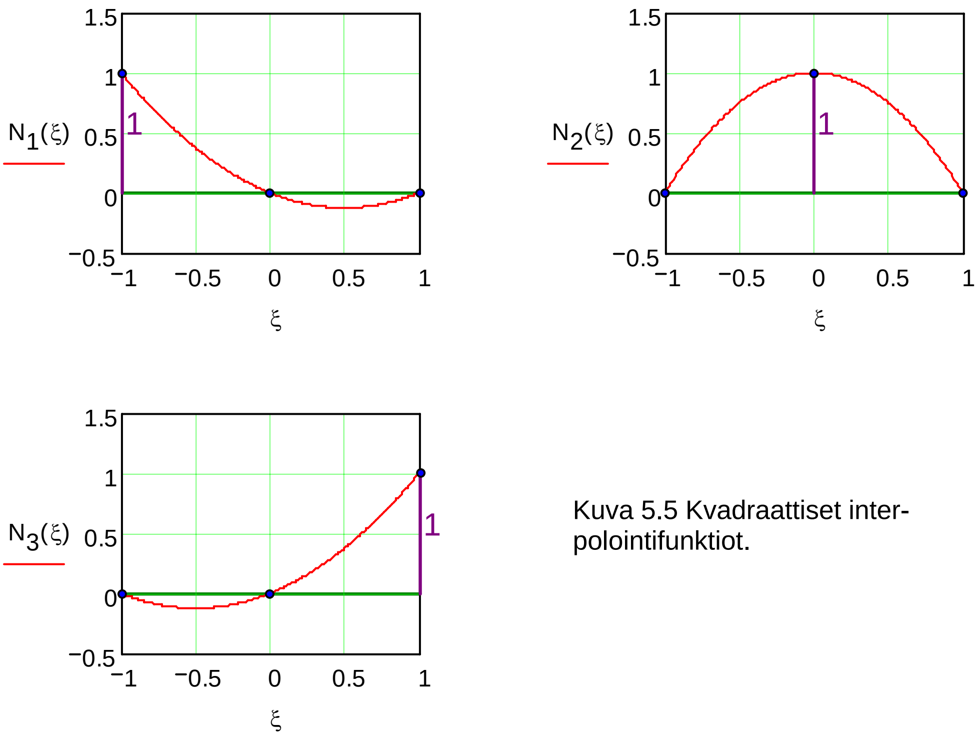
Kaavan (5.8) polynomit ovat Lagrangen interpolointipolynomit. Ne toteuttavat myös vaatimuksen (5.5). Lagrangen polynomit (5.8) ovat astetta $k-1$ ja niiden avulla voidaan interpoloida tarkasti kaikki korkeintaan astetta $k-1$ olevat polynomit.

Arvolla $k = 2$ kaavasta (5.8) saadaan lineaariset interpolointifunktiot (5.1). Kun $k = 3$ ja solmut ovat tasajaolla, ovat niiden koordinaatit $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 0$ ja $\xi_3 = +1$. Kaavasta (5.8) tulee tällöin kvadraattiset Lagrangen interpolointifunktiot

$$N_1 = \frac{(\xi-0)(\xi-1)}{(-1-0)(-1-1)} \qquad N_2 = \frac{(\xi+1)(\xi-1)}{(0+1)(0-1)} \qquad N_3 = \frac{(\xi+1)(\xi-0)}{(1+1)(1-0)} \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{N_1 = \frac{1}{2}\xi\,(\xi-1) \qquad N_2 = 1-\xi^2 \qquad N_3 = \frac{1}{2}\xi\,(\xi+1)} \tag{5.9}$$

Kvadraattisten interpolointifunktioiden (5.9) kuvaajat ovat kuvassa 5.5.

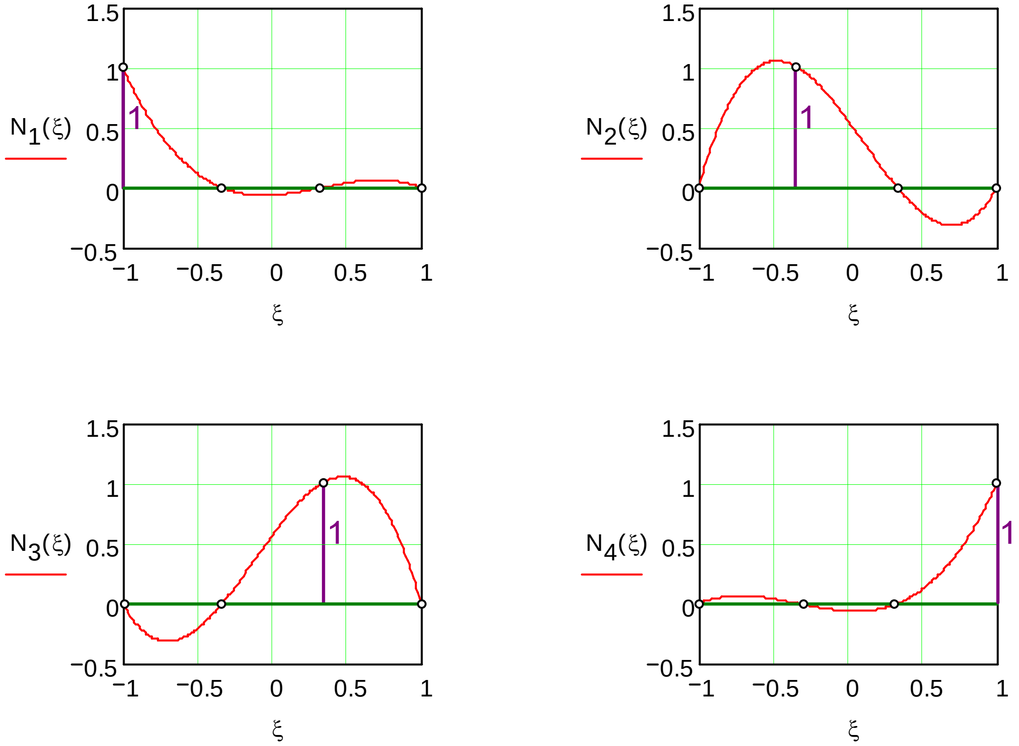


Kuva 5.5 Kvadraattiset interpolointifunktiot.

Kun $k=4$ ja solmut ovat tasajaolla, ovat niiden koordinaatit $\xi_1=-1$, $\xi_2=-1/3$, $\xi_3=+1/3$ ja $\xi_4=+1$. Kaavasta (5.8) tulee tässä tapauksessa seuraavat kuutiolliset Lagrangen interpolointifunktiot

$$\boxed{\begin{aligned} N_1 &= -\frac{1}{16}(3\xi+1)(3\xi-1)(\xi-1) \qquad & N_2 &= \frac{9}{16}(3\xi-1)(\xi^2-1) \\ N_3 &= -\frac{9}{16}(3\xi+1)(\xi^2-1) \qquad & N_4 &= \frac{1}{16}(3\xi+1)(3\xi-1)(\xi+1) \end{aligned}} \tag{5.10}$$

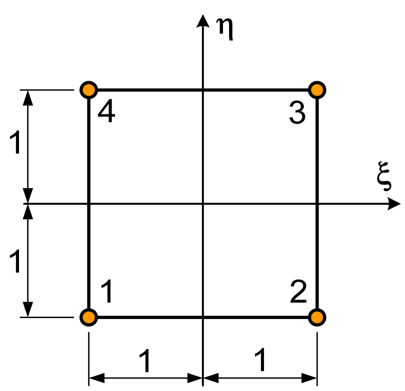
Kuutiollisten interpolointifunktioiden (5.10) kuvaajat ovat kuvassa 5.6.



Kuva 5.6 Kuutiolliset interpolointifunktiot.

5.3 Interpolointi emoneliön alueessa

Yksiulotteinen interpolointi voidaan yleistää kaksiulotteiseksi interpoloinniksi 2x2-emoneliöelementin alueessa. Tavoitteena on lausua kahden muuttujan ξ ja η funktio $f(\xi,\eta)$ likimääräisesti sen solmuarvojen ja vastaavien interpolointifunktioiden avulla. Tarkastellaan kuvan 5.7 nelisolmuista emoneliötä, jonka solmut sijaitsevat elementin nurkissa. Kenttäfunktion $f(\xi,\eta)$ interpolointi on nyt



Kuva 5.7 Nelisolmuinen emoneliö.

$$\boxed{f(\xi,\eta) \approx \tilde{f}(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta) f_i} \tag{5.11}$$

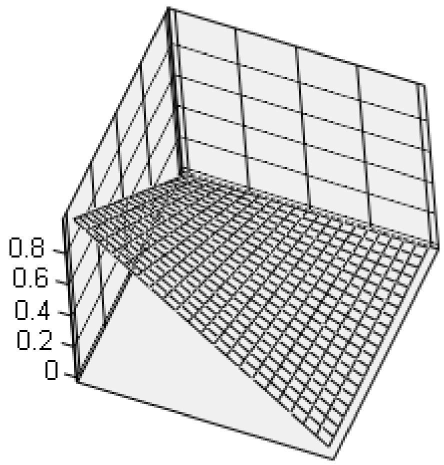
jossa funktiot $N_i(\xi,\eta)$ ovat interpolointifunktiot ja f_i solmuarvot. Määritetään solmun 1 interpolointifunktio perusominaisuuksien avulla. Polynomin

$\bar{N}_1(\xi,\eta)=(1-\xi)(1-\eta)$ arvot ovat solmuissa 2, 3 ja 4 nollia. Solmussa 1 on $\bar{N}_1(-1,-1)=4$, joten perusvaatimukset toteuttava funktio on

$$N_1(\xi,\eta)=\bar{N}_1(\xi,\eta)/\bar{N}_1(-1,-1)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)=\frac{1-\xi}{2}\cdot\frac{1-\eta}{2} \tag{5.12}$$

N_1 on ξ- ja η-suuntien lineaaristen interpolointifunktioiden tulo, ja siksi sitä kutsutaan bi-lineaariseksi interpolointifunktioksi. Funktion N_1 koordinaattiakseleiden suuntaiset tasoleikkaukset ovat suoria. N_1 ei kuitenkaan termin $\xi\eta/4$ takia esitä tasoa, vaan kyseessä on hyperboloidi. Kuvassa 5.8 on funktion N_1 kuvaaja. Muutkin kuvan 5.7 elementin interpolointifunktiot (5.13) voidaan muodostaa samalla periaatteella.

$$\boxed{\begin{aligned} N_1&=(1-\xi)(1-\eta)/4\\ N_2&=(1+\xi)(1-\eta)/4\\ N_3&=(1+\xi)(1+\eta)/4\\ N_4&=(1-\xi)(1+\eta)/4 \end{aligned}} \tag{5.13}$$



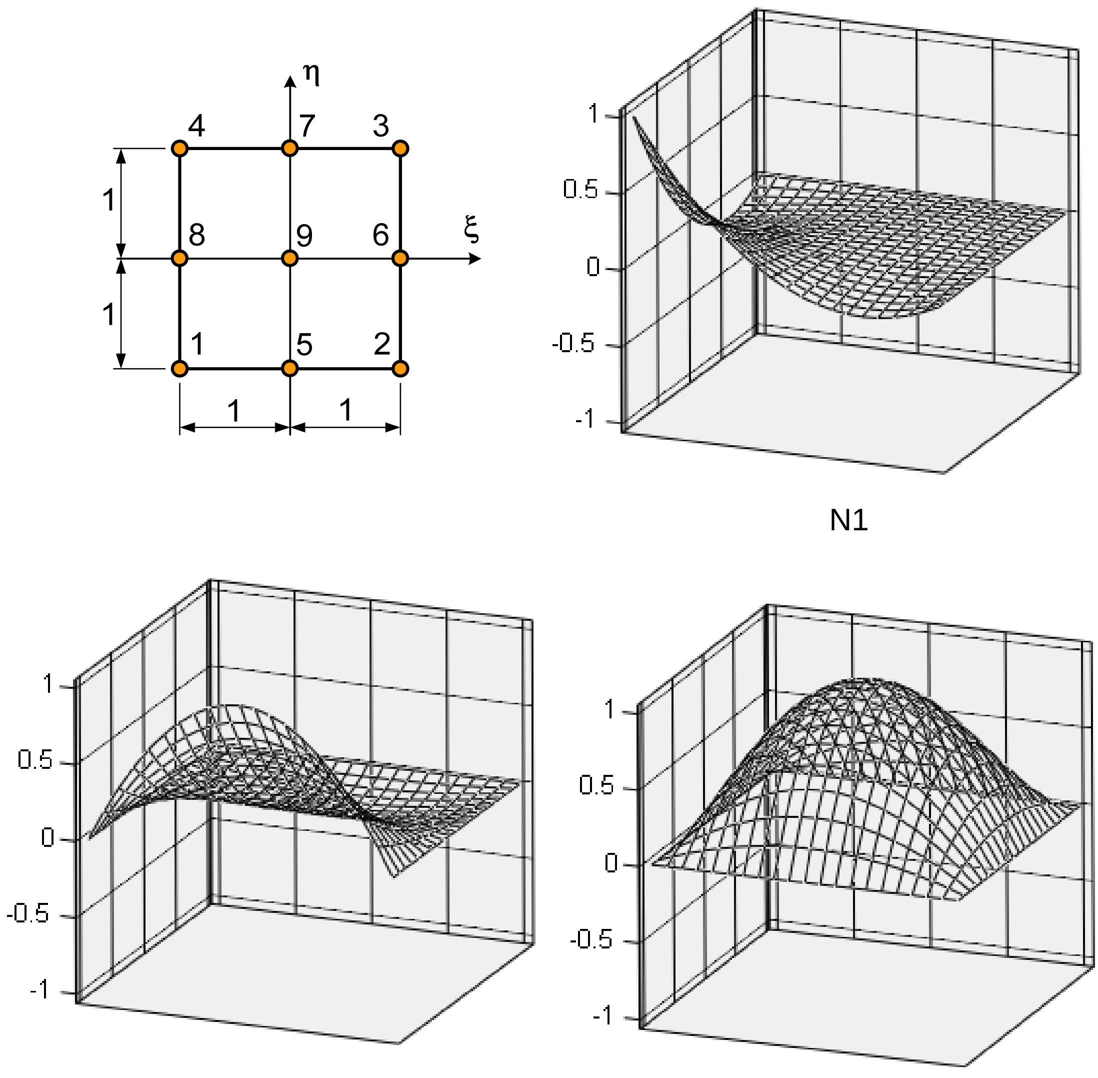
Kuva 5.8 Bi-lineaarinen interpolointifunktio N_1.

Yksiulotteisen interpoloinnin yhteydessä tulivat esille interpolointifunktioiden perusominaisuudet. Kaksi- ja kolmiulotteisen interpolointifunktion on yhteensopivuuden takia oltava lisäksi nolla elementin kaikilla niillä sivuilla, jotka eivät liity funktiota vastaavaan solmuun. Bi-lineaariset interpolointifunktiot (5.13) toteuttavat tämän lisävaatimuksen, esimerkiksi N_1 on nolla sivuilla 23 ja 34, joihin solmu 1 ei liity.

Bi-lineaariset interpolointifunktiot voidaan muodostaa ξ- ja η-suuntien lineaaristen interpolointifunktioiden tuloina. Samaa ajatusta voidaan soveltaa myös korkeamman asteen interpolointiin. Tällöin tulon tekijän arvo nolla ξ- tai η-suunnan vieraissa solmuissa takaa arvon nolla koko vieraalla sivulla. Kuvan 5.9 mukaisen 9-solmuisen bikvadraattisen elementin interpolointifunktioiksi tulee tällä tulomenetelmällä

$$\boxed{\begin{array}{lll} N_1=\xi(\xi-1)\eta(\eta-1)/4 & N_2=\xi(\xi+1)\eta(\eta-1)/4 & N_3=\xi(\xi+1)\eta(\eta+1)/4\\ N_4=\xi(\xi-1)\eta(\eta+1)/4 & N_5=(1-\xi^2)\eta(\eta-1)/2 & N_6=\xi(\xi+1)(1-\eta^2)/2\\ N_7=(1-\xi^2)\eta(\eta+1)/2 & N_8=\xi(\xi-1)(1-\eta^2)/2 & N_9=(1-\xi^2)(1-\eta^2) \end{array}} \tag{5.14}$$

Funktiot (5.14) jakaantuvat kolmeen perustyyppiin. N_1, N_2, N_3 ja N_4 ovat nurkkafunktiot, N_5, N_6, N_7 ja N_8 sivufunktiot ja N_9 on sisäfunktio. Kuvassa 5.9 on esitetty kunkin perustyypin kuvaaja N_1, N_5 ja N_9.



Kuva 5.9 Bi-kvadraattinen Lagrangen elementti ja sen interpolointifunktioita.

Vastaavalla tavalla saadaan 16-solmuinen bi-kuutiollinen elementti, jolla on 4 nurkkasolmua, 8 sivusolmua ja 4 sisäsolmua sekä korkeamman interpolointiasteen elementtejä. Tulomenetelmällä luotuja elementtejä sanotaan Lagrangen perheeksi, koska tällöin kaikki interpolointifunktiot perustuvat kaavaan (5.8).

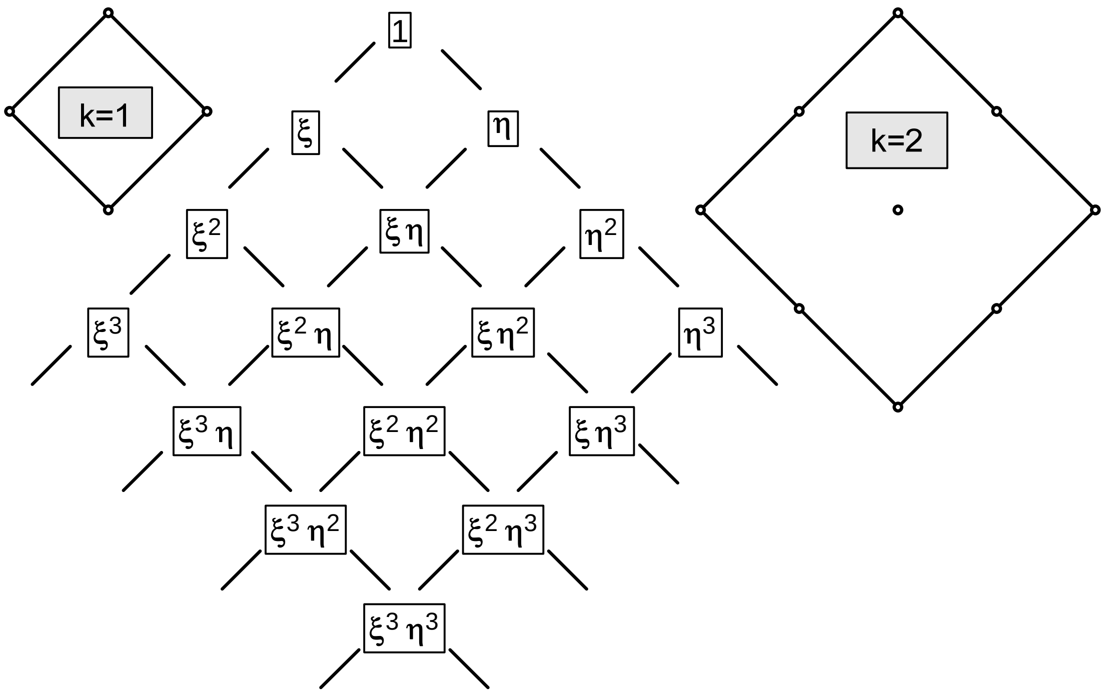
Elementin tehokkuus laskennassa riippuu siitä, kuinka korkea-asteinen täydellinen polynomi elementin interpolointifunktioilla voidaan esittää. Ensimmäisen asteen täydellinen kahden muuttujan polynomi on

$$p_1(\xi,\eta) = A + B\xi + C\eta \tag{5.15}$$

Bi-lineaarisen elementin interpolointifunktiot sisältävät termit 1, ξ, η ja $\xi\eta$, joten niillä pystytään esittämään p_1 ja mukana on yksi ylimääräinen termi $\xi\eta$. Toisen asteen täydellinen kahden muuttujan polynomi on

$$p_2(\xi,\eta) = A + B\xi + C\eta + D\xi^2 + E\xi\eta + F\eta^2 \tag{5.16}$$

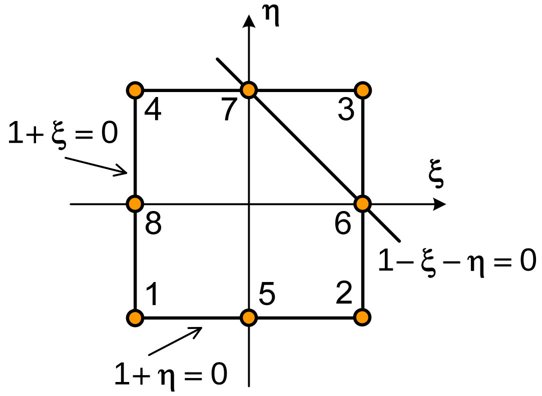
Bi-kvadraattisen elementin interpolointifunktiot sisältävät termit 1, ξ, η, ξ^2, $\xi\eta$, η^2, $\xi^2\eta$, $\xi\eta^2$ ja $\xi^2\eta^2$, joten niillä pystytään esittämään p_2 ja mukana on vielä kolme ylimääräistä termiä $\xi^2\eta$, $\xi\eta^2$ ja $\xi^2\eta^2$. Täydellisten polynomien sisältämät termit voidaan esittää kuvan 5.11 kaaviolla, jolloin tietyn asteinen täydellinen polynomi sisältää kaavion kärjestä alkaen kaikki termit astelukuaan vastaavaan vaakariviin asti. Kaaviosta nähdään myös tietyn asteisen Lagrangen interpoloinnin sisältämät termit, jotka sisältyvät vastaavan kärjestä alkavan neliön alueeseen. Tietyn asteen täydellisen polynomin interpolointiin mukaan tulevien ylimääräisten termien suhteellinen osuus kasvaa asteluvun kasvaessa ($k = 1$: $1/4$, $k = 2$: $3/9$, $k = 3$: $6/16$).



Kuva 5.10 Termien kaavio.

Lagrangen elementtiperheen heikkoutena ovat edellä mainitut ylimääräiset termit, joiden laskentatarkkuutta lisäävä vaikutus on pieni niiden aiheuttamaan työmäärään nähden. Toinen heikkous on sisäsolmujen esiintyminen, sillä ne ovat laskennassa jonkin verran kärki- ja sivusolmuja tehottomampia.

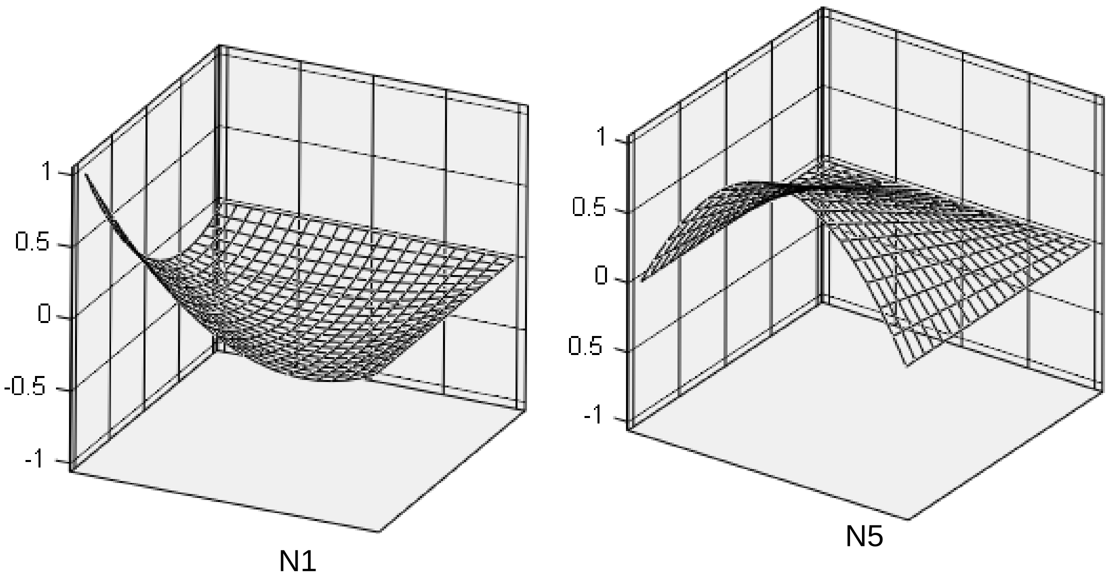
Lagrangen elementtiperheen heikkouksien lieventämiseksi on kehitetty Serendip-elementtiperhe, jolla ei ole lainkaan sisäsolmuja tai vain tietyn asteen täydellisen polynomin esittämiseen tarvittava määrä sisäsolmuja. Bi-lineaarinen emoneliö on Serendip-elementti. Tarkastellaan kuvan 5.11 kvadraattista Serendip-emoneliötä. Sen interpolointifunktiot saadaan perusominaisuuksien avulla. Johdetaan ensin solmun 3 interpolointifunktio. Sen on oltava nolla sivuilla 152 ja 481, joten funktiossa N_3 tulee olla tekijöinä näiden sivujen yhtälöiden $1+\eta=0$ ja $1+\xi=0$ vasemmat puolet. Funktion N_3 on oltava nolla solmuissa 6 ja 7. Näin on, jos funktiossa N_3 on tekijänä suoran 67 yhtälön $1-\xi-\eta=0$ vasen puoli. Funktio $\overline{N}_3=(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)$ toteuttaa kaikki nollavaatimukset. Solmussa 3 on $\overline{N}_3(1,1)=2\cdot 2\cdot(-1)=-4$, joten interpolointifunktio on $N_3=-(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)/4$. Samalla periaatteella saadaan muutkin kärkisolmujen interpolointifunktiot. Sivusolmun 6 interpolointifunktiossa N_6 on tekijöinä sivujen 152, 374 ja 481 yhtälöiden $1+\eta=0$, $1-\eta=0$ ja $1+\xi=0$ vasemmat puolet ja $N_6(1,0)=1$, joten $N_6=(1+\xi)(1+\eta)(1-\eta)/2=(1+\xi)(1-\eta^2)/2$. Muiden sivusolmujen interpolointifunktiot löytyvät samalla tavalla. Kvadraattisen Serendip-elementin interpolointifunktiot ovat



Kuva 5.11 Kvadraattinen Serendip-elementti.

$$
\begin{aligned}
N_1 &= -(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)/4 \\
N_2 &= -(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)/4 \\
N_3 &= -(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)/4 \\
N_4 &= -(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta)/4 \\
N_5 &= (1-\xi^2)(1-\eta)/2 \\
N_6 &= (1+\xi)(1-\eta^2)/2 \\
N_7 &= (1-\xi^2)(1+\eta)/2 \\
N_8 &= (1-\xi)(1-\eta^2)/2
\end{aligned}
\qquad (5.17)
$$

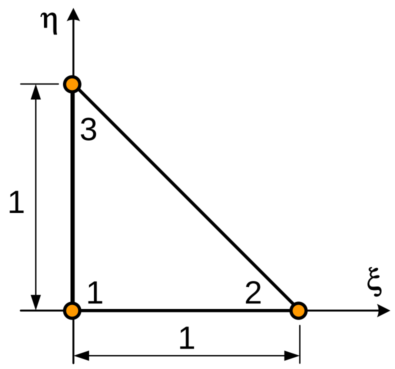
Funktiot (5.17) jakaantuvat kahteen tyyppiin, N_1, N_2, N_3 ja N_4 ovat nurkkafunktiot ja N_5, N_6, N_7 ja N_8 sivufunktiot. Kuvassa 5.12 on kummankin perustyypin kuvaaja.



Kuva 5.12 Serendip-interpolointifunktioita.

Funktiot (5.17) sisältävät termiä $\xi^2\eta^2$ lukuun ottamatta samat termit kuin bikvadraattiset Lagrangen interpolointifunktiot, ylimääräisiä termejä on yhtä vähemmän ja laskenta hieman tehokkaampaa. Korkeamman asteen Serendip-elementtien interpolointifunktioita voidaan myös johtaa edellä esitetyllä tekijämenetelmällä.

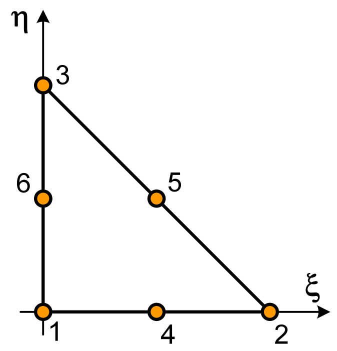
5.4 Interpolointi emokolmion alueessa



Kuva 5.13 Lineaarinen emokolmio.

Tarkastellaan kuvan 5.13 lineaarista emokolmioelementtiä, jonka solmut ovat elementin kärkipisteissä. Tämän emokolmion lineaariset interpolointifunktiot on helppo päätellä suoraan perusominaisuuksista ja ne ovat

$$\boxed{N_1 = 1-\xi-\eta \qquad N_2 = \xi \qquad N_3 = \eta} \tag{5.18}$$



Kuva 5.14 Kvadraattinen emokolmio.

Perusominaisuuksien avulla on helppo muodostaa myös korkeampiasteisien kolmioelementtien interpolointifunktioita. Kuvassa 5.14 on kvadraattinen emokolmio, jonka sivusolmut ovat sivujen keskipisteissä. Määritetään ensin kärkisolmun 1 interpolointifunktio N_1, jonka on oltava nolla sivulla 253 ja solmuissa 4 ja 6. Sivun 253 kautta kulkevan suoran yhtälö on $1-\xi-\eta=0$ ja solmujen 4 ja 6 kautta kulkevan suoran yhtälö $0{,}5-\xi-\eta=0$, joten nollavaatimukset toteuttaa on $\overline{N}_1=(1-\xi-\eta)(0{,}5-\xi-\eta)$. Funktion $\overline{N}_1$ arvo solmussa 1 on 1/2, joten solmun 1 interpolointifunktioksi tulee $N_1=(1-\xi-\eta)(1-2\xi-2\eta)$. Määritetään vielä sivusolmun 4 interpolointifunktio. Sivujen 253 ja 163 kautta kulkevien suorien yhtälöiden $1-\xi-\eta=0$ ja $\xi=0$ vasempien puolien tulo $\overline{N}_4=(1-\xi-\eta)\xi$ on nolla vierailla sivuilla ja saa solmussa 4 arvon 1/4, joten solmun 4 interpolointifunktio on $N_4=4\xi(1-\xi-\eta)$. Vastaavalla tavalla voidaan johtaa myös muiden solmujen interpolointifunktiot ja tulokseksi saadaan

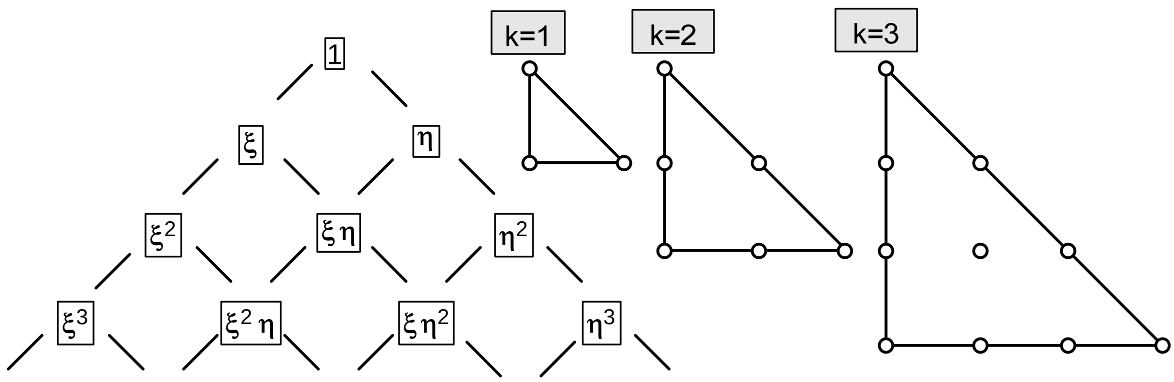
$$\boxed{\begin{array}{lll} N_1=(1-\xi-\eta)(1-2\xi-2\eta) & N_2=\xi(2\xi-1) & N_3=\eta(2\eta-1) \\ N_4=4\xi(1-\xi-\eta) & N_5=4\xi\eta & N_6=4\eta(1-\xi-\eta) \end{array}} \tag{5.19}$$

Kaavoista (5.18) ja (5.19) näkyvät interpolointifunktioiden sisältämät termit:

Lineaarinen interpolointi: 1, ξ, η

Kvadraattinen interpolointi: 1, ξ, η, ξ^2, $\xi\eta$, η^2

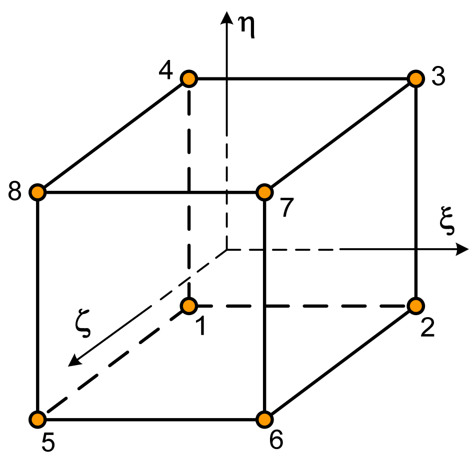
Tietyn asteiset interpolointifunktiot pystyvät esittämään astelukunsa mukaisen täydellisen muuttujien ξ ja η polynomin tarkasti ilman ylimääräisiä termejä. Tässä suhteessa kolmioelementit ovat tehokkaampia kuin nelikulmioelementit. Kuvassa (5.15) on kolmen alimman asteen interpolointifunktioihin sisältyvien termien kaavio.



Kuva 5.15 Termien kaavio.

5.5 Interpolointi emokuution alueessa

Kolmiulotteisessa interpoloinnissa muuttujien ξ, η ja ζ funktio $f(\xi,\eta,\zeta)$ lausutaan likimääräisesti solmuarvojen ja niitä vastaavien interpolointifunktioiden avulla. Interpolointi voidaan tehdä 2x2x2-emokuution alueessa. Tarkastellaan ensin kuvan 5.16 8-solmuista emokuutiota, jonka solmut ovat elementin kärkipisteissä. $\xi\eta\zeta$-koordinaatiston origo on kuution keskipisteessä. Kenttäfunktion interpolointi on muotoa



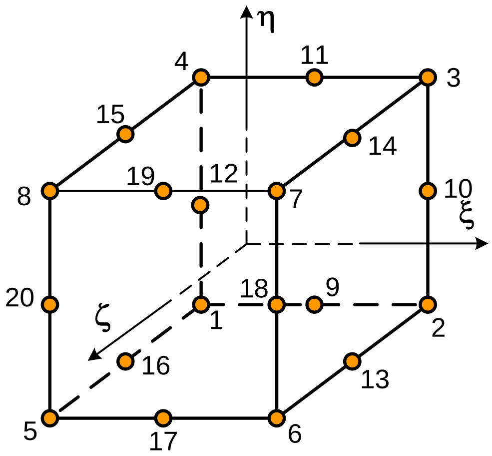
Kuva 5.16 Tri-lineaarinen emokuutio.

$$f(\xi,\eta,\zeta) \approx \tilde{f}(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta,\zeta) f_i \tag{5.20}$$

jossa $N_i(\xi,\eta,\zeta)$ ovat interpolointifunktiot ja f_i solmuarvot. Interpolointifunktiot (5.21) voidaan johtaa perusominaisuuksien avulla. Ne saadaan myös tulomenetelmällä ξ-, η- ja ζ-suuntien lineaaristen Lagrangen interpolointifunktioiden avulla ja siksi niitä sanotaan tri-lineaarisiksi interpolointifunktioiksi.

$$\begin{aligned}
N_1 &= (1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)/8 & N_5 &= (1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)/8 \\
N_2 &= (1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)/8 & N_6 &= (1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)/8 \\
N_3 &= (1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)/8 & N_7 &= (1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)/8 \\
N_4 &= (1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)/8 & N_8 &= (1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)/8
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Tulomenetelmällä voidaan muodostaa myös korkeamman interpolointiasteen Lagrangen kuutioelementtejä, kuten esimerkiksi tri-kvadraattinen ja tri-kuutiollinen elementti. Näihin tulee kärkisolmujen lisäksi särmä-, pinta- ja sisäsolmuja. Tri-kvadraattisessa Lagrangen emokuutiossa on 27 solmua, joista kärkisolmuja on 8, särmäsolmuja 12, pintasolmuja 6 ja sisäsolmuja 1. Lagrangen kuutioperheellä on samat heikkoudet kuin neliöperheellä.



Kuva 5.17 Kvadraattinen Serendip-emokuutio.

Kuutiolle on kehitetty myös Serendip-elementtiperhe. Tri-lineaarinen emokuutio on myös Serendip-elementti. Tarkastellaan kuvan 5.17 kvadraattista Serendip-emokuutiota. Johdetaan kärkisolmun 7 interpolointifunktion lauseke. Sen on oltava nolla pinnoilla 1234, 1485 ja 1562, joten funktion N_7 tulee sisältää tekijöinään näiden pintojen yhtälöiden $1+\zeta=0$, $1+\eta=0$ ja $1+\xi=0$ vasemmat puolet. Funktion N_7 on oltava nolla solmuissa 14, 18 ja 19, mikä toteutuu, jos tekijänä on lisäksi näiden solmujen kautta kulkevan tason yhtälön $\xi+\eta+\zeta-2=0$ vasen puoli. Funktio $\overline{N}_7=(1+\xi)(1+\eta)(1+\xi)(\xi+\eta+\zeta-2)$ toteuttaa näin kaikki nollavaatimukset. Koska solmussa 7 on $\overline{N}_7(1,1,1)=2\cdot2\cdot2\cdot1=8$, saadaan funktiolle N_7 kaavan (5.22) lauseke. Kaavassa (5.22) on esitetty kaikki muutkin kvadraattisen Serendip-emokuution interpolointifunktiot.

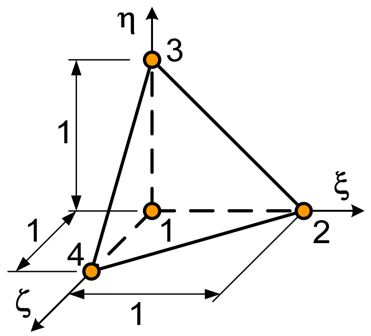
$$
\begin{aligned}
&N_1=(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(-\xi-\eta-\zeta-2)/8\\
&N_2=(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(+\xi-\eta-\zeta-2)/8\\
&N_3=(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)(+\xi+\eta-\zeta-2)/8\\
&N_4=(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)(-\xi+\eta-\zeta-2)/8\\
&N_5=(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)(-\xi-\eta+\zeta-2)/8\\
&N_6=(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)(+\xi-\eta+\zeta-2)/8\\
&N_7=(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)(+\xi+\eta+\zeta-2)/8\\
&N_8=(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)(-\xi+\eta+\zeta-2)/8\\
&N_9=(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta)/4 \qquad N_{10}=(1+\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta)/4\\
&N_{11}=(1-\xi^2)(1+\eta)(1-\zeta)/4 \qquad N_{12}=(1-\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta)/4\\
&N_{13}=(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta^2)/4 \qquad N_{14}=(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta^2)/4\\
&N_{15}=(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta^2)/4 \qquad N_{16}=(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta^2)/4\\
&N_{17}=(1-\xi^2)(1-\eta)(1+\zeta)/4 \qquad N_{18}=(1+\xi)(1-\eta^2)(1+\zeta)/4\\
&N_{19}=(1+\xi)(1-\eta^2)(1+\zeta)/4 \qquad N_{20}=(1-\xi)(1-\eta^2)(1+\zeta)/4
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

5.6 Interpolointi emotetraedrin alueessa

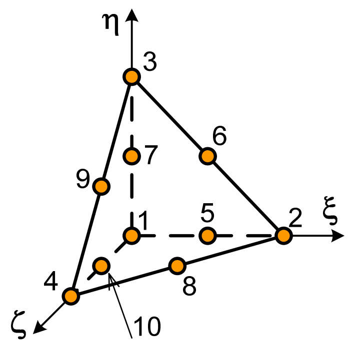
Kolmiulotteiseen interpolointiin voidaan käyttää kuvan 5.18 lineaarista emotetraedria, jonka solmut ovat elementin kärkipisteissä. Sen interpolointifunktiot saadaan perusominaisuuksista ja ne ovat

$$N_1 = 1-\xi-\eta-\zeta \qquad N_2 = \xi \qquad N_3 = \eta \qquad N_4 = \zeta \tag{5.23}$$

Perusominaisuuksien avulla saadaan myös korkeampiasteisten tetraedrielementtien interpolointifunktioita. Kuvassa 5.19 on kvadraattinen emotetraedri, jonka särmäsolmut ovat särmien keskipisteissä. Määritetään kärkisolmun 1 interpolointifunktio N_1, jonka on oltava nolla pinnalla 234 ja solmuissa 5, 7 ja 10. Pinnan 234 kautta kulkevan tason yhtälö on $1-\xi-\eta-\zeta=0$ ja solmujen 5, 7 ja 10 kautta kulkevan tason yhtälö $1/2-\xi-\eta-\zeta=0$, joten kaikki nollavaatimukset toteuttava funktio on $\overline{N}_1=(1-\xi-\eta-\zeta)(1/2-\xi-\eta-\zeta)$. $\overline{N}_1$ saa solmussa 1 arvon 1/2, joten solmun 1 interpolointifunktio on $N_1=(1-\xi-\eta-\zeta)(1-2\xi-2\eta-2\zeta)$. Määritetään vielä särmäsolmun 5 interpolointifunktio. Pintojen 234 ja 134 kautta kulkevien tasojen yhtälöiden $1-\xi-\eta-\zeta=0$ ja $\xi=0$ vasempien puolien tulo $(1-\xi-\eta-\zeta)\xi$ on nolla kaikissa vieraissa solmuissa ja saa solmussa 5 arvon 1/4, joten solmun 5 interpolointifunktioksi tulee $N_5=4\xi(1-\xi-\eta-\zeta)$. Vastaavalla tavalla voidaan määrittää muiden solmujen interpolointifunktiot ja tulokseksi saadaan



Kuva 5.18 Lineaarinen emotetraedri.



Kuva 5.19 Kvadraattinen emotetraedri.

$$\begin{aligned}
&N_1 = (1-\xi-\eta-\zeta)(1-2\xi-2\eta-2\zeta) \\
&N_2 = \xi(2\xi-1) \qquad N_3 = \eta(2\eta-1) \\
&N_4 = \zeta(2\zeta-1) \qquad N_5 = 4\xi(1-\xi-\eta-\zeta) \\
&N_6 = 4\xi\eta \qquad N_7 = 4\eta(1-\xi-\eta-\zeta) \\
&N_8 = 4\xi\zeta \qquad N_9 = 4\eta\zeta \\
&N_{10} = 4\zeta(1-\xi-\eta-\zeta)
\end{aligned} \tag{5.24}$$