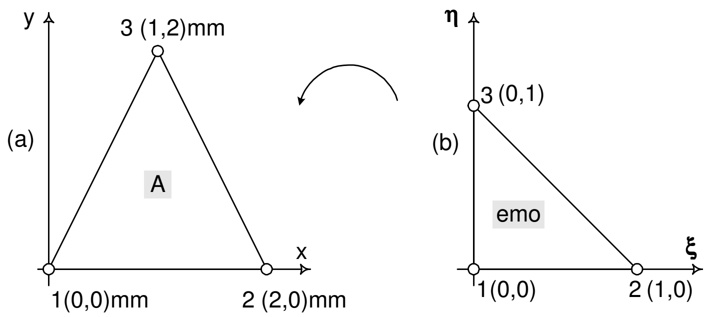
Esimerkki 6.3

Laske kuvan (a) mukaisen xy-tason kolmioelementin alueen A yli olevan pintaintegraalin (pituuden yksikkö on mm)

$$I = \iint_A \frac{2x - y + 2}{8(y+2)} dx\, dy$$

tarkka arvo ja likiarvo yhden, kolmen (kumpikin vaihtoehto) ja neljän pisteen Hammerin integroinnilla.



Ratkaisu:

Muunnetaan integrointi aluksi kuvan (b) emokolmion yli lasketuksi. Lineaarinen muunnos

$$\begin{cases} x = (1-\xi-\eta)x_1 + \xi x_2 + \eta x_3 \\ y = (1-\xi-\eta)y_1 + \xi y_2 + \eta y_3 \end{cases}$$

muuntaa emokolmion xy-tason kolmioksi, jonka kärkipisteet ovat kohdissa $1\,(x_1, y_1)$, $2\,(x_2, y_2)$ ja $3\,(x_3, y_3)$. Edellä oleva kuvaus on tässä tapauksessa

$$x = 2\xi + \eta \qquad y = 2\eta$$

Lasketaan kuvauksen Jacobin matriisi ja sen determinantti

$$[J] = \begin{bmatrix} x,_\xi & y,_\xi \\ x,_\eta & y,_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det[J] = |J| = 4 \quad \Rightarrow \quad dx\, dy = 4\, d\xi\, d\eta$$

Suoritetaan muuttujien vaihto integraaliin

$$I = \iint_A \frac{2x-y+2}{8(y+2)} dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \frac{2(2\xi+\eta) - 2\eta + 2}{8(2\eta+2)} 4\, d\xi\, d\eta = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \frac{2\xi+1}{2\eta+2} d\xi\, d\eta$$

Tarkka arvo saadaan integroimalla tavanomaisesti

$$I=\int_0^1\left(\int_0^{1-\eta}\frac{2\xi+1}{2\eta+2}d\xi\right)d\eta=\int_0^1\left(\Big/_0^{1-\eta}\frac{\xi^2+\xi}{2\eta+2}\right)d\eta=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\eta^2-3\eta+2}{\eta+1}d\eta=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\eta-4+\frac{6}{\eta+1}\right)d\eta$$

$$=\frac{1}{2}\Big/_0^1\left(\frac{\eta^2}{2}-4\eta+6\ln(\eta+1)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-4+6\ln 2\right)=3\ln 2-\frac{7}{4}\approx 0{,}3294415$$

Yhden pisteen Hammerin integrointi antaa likiarvon $I_1\approx\frac{1}{2}\cdot\frac{2/3+1}{2/3+2}=\frac{5}{16}=0{,}3125000$

Kolmen pisteen integroinneista seuraa vastaavasti

$$I_{31}\approx\frac{1}{6}\cdot\frac{1+1}{1+2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{0+1}{1+2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1+1}{0+2}=\frac{1}{3}\approx 0{,}3333333$$

$$I_{32}\approx\frac{1}{6}\cdot\frac{1/3+1}{1/3+2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{4/3+1}{1/3+2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1/3+1}{4/3+2}=\frac{23}{70}\approx 0{,}3285714$$

Neljän pisteen integroinnista saadaan tulokseksi

$$I_4\approx-\frac{27}{96}\cdot\frac{2/3+1}{2/3+2}+\frac{25}{96}\cdot\frac{2/5+1}{2/5+2}+\frac{25}{96}\cdot\frac{6/5+1}{2/5+2}+\frac{25}{96}\cdot\frac{2/5+1}{6/5+2}=\frac{505}{1536}\approx 0{,}3287760$$