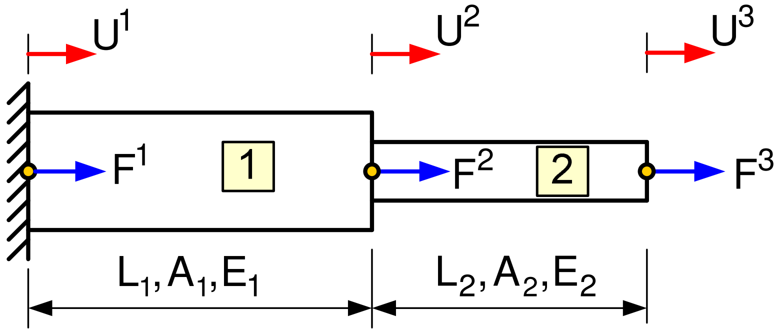
Esimerkki 4.1

Sovelletaan potentiaalienergian minimin periaatetta kuvan vasemmasta päästään jäykästi tuettuun aksiaaliseen rakenteeseen.



Sauvaelementin kimmoenergia: $U = \frac{1}{2} k (\Delta L)^2 \quad k = \frac{EA}{L}$.

Solmuvoiman F^i tekemä työ: $W^i = F^i U^i$

$$k_1 = \frac{E_1 A_1}{L_1} \qquad k_2 = \frac{E_2 A_2}{L_2} \qquad \Delta L_1 = U^2 - U^1 \qquad \Delta L_2 = U^3 - U^2$$

Rakenteen potentiaalienergia on

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2} k_1 (U^2 - U^1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (U^3 - U^2)^2 - F^1 U^1 - F^2 U^2 - F^3 U^3$$

Minimiehdot

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U^1} = -k_1 (U^2 - U^1) - F^1 = 0 \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial U^2} = k_1 (U^2 - U^1) - k_2 (U^3 - U^2) - F^2 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U^3} = k_2 (U^3 - U^2) - F^3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 U^1 - k_1 U^2 = F^1 \\ -k_1 U^1 + (k_1 + k_2) U^2 - k_2 U^3 = F^2 \\ -k_2 U^2 + k_2 U^3 = F^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^1 \\ U^2 \\ U^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^1 \\ F^2 \\ F^3 \end{bmatrix}$$

Tulos on elementtiverkon perusyhtälö.