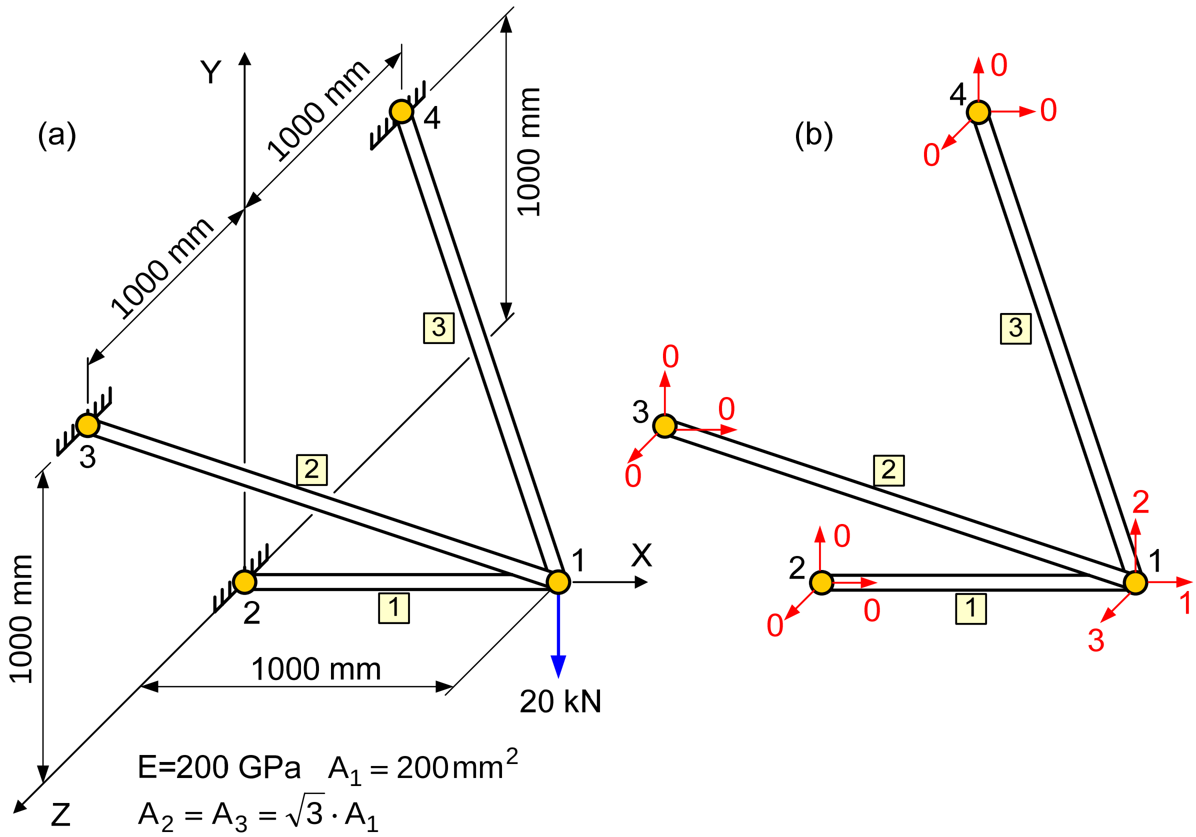
Esimerkki 2.6

Tarkastellaan kuvan 1 avaruusristikkoa, jota kuormittaa yksi pistevoima. Ristikon elementtiverkossa on kolme elementtiä ja neljä solmua, joista solmut 2,3 ja 4 ovat tukisolmuja. Vapausasteiden lukumäärä on 12 ja tuntemattomia solmusiirtymiä on kolme ja tuntemattomia tukireaktioita yhdeksän. Käytetään siirtymäratkaisussa vain vapaita solmusiirtymiä kohdassa 2.1.3 esitetyllä tavalla, jolloin sijoittelusummauksen jälkeen päästään suoraan kolmen siirtymätuntemattoman yhtälöryhmään. Kuvassa (b) on käytettävä vapausasteiden numerointi, jossa tuettujen vapausasteiden numero on 0, koska vastaavia elementtien jäykkyysmatriisin alkioita ei sijoittelusummauksessa käytetä. Käytetään yksikköjä kN ja mm, jotka merkitään vain tuloksiin.



Kuva 1. Avaruusristikko ja sen elementtiverkko.

Elementtien pituudet, jousivakiot ja suuntakosinit ovat

$$L_1 = 1000 \qquad L_2 = 1000\sqrt{3} \qquad L_3 = 1000\sqrt{3}$$

$$k_1 = \frac{200 \cdot 200}{1000} = 40 \qquad k_2 = \frac{200 \cdot 200\sqrt{3}}{1000\sqrt{3}} = 40 \qquad k_3 = \frac{200 \cdot 200\sqrt{3}}{1000\sqrt{3}} = 40$$

$$\cos\alpha_{X1} = 1 \qquad \cos\alpha_{Y1} = 0 \qquad \cos\alpha_{Z1} = 0$$

$$\cos\alpha_{X2} = 1/\sqrt{3} \qquad \cos\alpha_{Y2} = -1/\sqrt{3} \qquad \cos\alpha_{Z2} = -1/\sqrt{3}$$

$$\cos\alpha_{X3} = 1/\sqrt{3} \qquad \cos\alpha_{Y3} = -1/\sqrt{3} \qquad \cos\alpha_{Z3} = 1/\sqrt{3}$$

Kirjoitetaan elementtien jäykkyysmatriisit kaavan (2.54) mukaisesti ja varustetaan ne osoitenumeroilla sijoittelusummausta varten.

$$[k]^1 = 40 \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} & \end{array} \qquad [k]^2 = \frac{40}{3} \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} & \end{array}$$

$$[k]^3 = \frac{40}{3} \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} & \end{array}$$

Sijoittelusummaamalla elementtien jäykkyysmatriisit ja ottamalla huomioon kuormitus saadaan vapaille solmusiirtymille yhtälöryhmä

$$\begin{array}{ccc} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \dfrac{40}{3} & \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ & & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \end{array} \begin{bmatrix} U_X^1 \\ U_Y^1 \\ U_Z^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -20 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow$$

$$U_X^1 = -0{,}5\,\text{mm} \qquad U_Y^1 = -1{,}25\,\text{mm} \qquad U_Z^1 = 0$$

Tukireaktiot voidaan poimia tukiin päättyvien elementtien solmuvoimavektoreista, jotka saadaan elementin perusyhtälöstä $\{f\} = [k]\{u\}$.

$$\begin{bmatrix} f_X^1 \\ f_Y^1 \\ f_Z^1 \\ f_X^2 \\ f_Y^2 \\ f_Z^2 \end{bmatrix}^1 = 40\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} = 10\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\text{kN}$$

$$\begin{bmatrix} f_X^1 \\ f_Y^1 \\ f_Z^1 \\ f_X^2 \\ f_Y^2 \\ f_Z^2 \end{bmatrix}^2 = \frac{40}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{10}{3}\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ -10 \\ -10 \end{bmatrix}\text{kN}$$

$$\begin{bmatrix} f_X^1 \\ f_Y^1 \\ f_Z^1 \\ f_X^2 \\ f_Y^2 \\ f_Z^2 \end{bmatrix}^3 = \frac{40}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{10}{3}\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 10 \\ -10 \\ 10 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix}\text{kN}$$

joista näkyvät tukireaktiot

$$F_X^2 = 20\,\text{kN} \quad F_Y^2 = 0 \quad F_Z^2 = 0 \quad F_X^3 = -10\,\text{kN} \quad F_Y^3 = 10\,\text{kN} \quad F_Z^3 = 10\,\text{kN}$$
$$F_X^4 = -10\,\text{kN} \quad F_Y^4 = 10\,\text{kN} \quad F_Z^4 = -10\,\text{kN}$$

Elementtien normaalivoimat voidaan laskea kaavasta (2.56), jolloin normaalivoimille ja vastaaville jännityksille tulee arvot

$$N^1 = 40\cdot[1\cdot(-0{,}5-0)+0\cdot(-1{,}25-0)+0\cdot(0-0)] = -20\,\text{kN}$$

$$N^2 = 40\cdot[\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot(-0{,}5-0)+\frac{-1}{\sqrt{3}}\cdot(-1{,}25-0)+\frac{-1}{\sqrt{3}}\cdot(0-0)] = \frac{30}{\sqrt{3}}\text{kN}$$

$$N^3 = 40\cdot[\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot(-0{,}5-0)+\frac{-1}{\sqrt{3}}\cdot(-1{,}25-0)+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot(0-0)] = \frac{30}{\sqrt{3}}\text{kN}$$

$$\sigma^1 = -20\cdot 10^3\,\text{N}/200\,\text{mm}^2 = -100\,\text{MPa}$$
$$\sigma^2 = \sigma^3 = (30/\sqrt{3})\cdot 10^3\,\text{N}/(200\sqrt{3})\,\text{mm}^2 = 50\,\text{MPa}$$