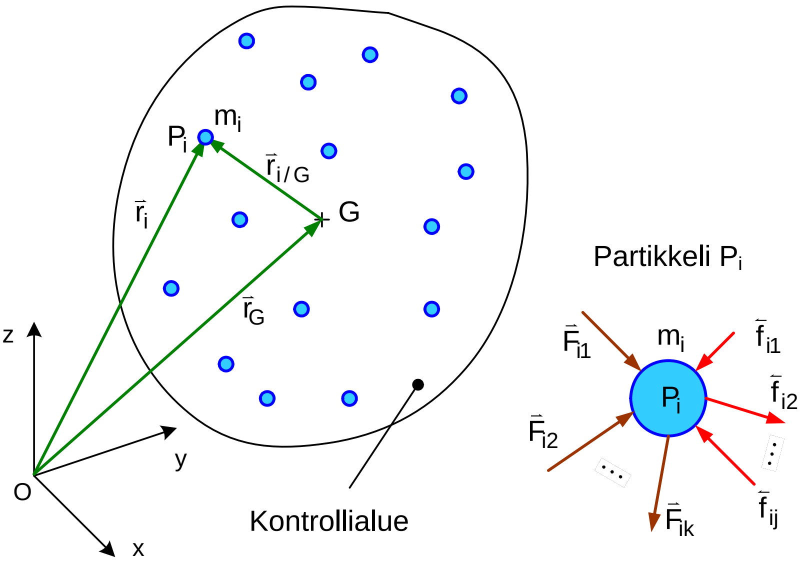
4 PARTIKKELISYSTEEMIN KINETIIKKA

4.1 Yleistä

Tässä luvussa yleistetään partikkelin kinetiikan periaatteet koskemaan useamman partikkelin systeemiä. Saatavat tulokset antavat perustan sekä jäykän kappaleen että epäjäykän partikkelisysteemin dynamiikan tarkasteluille. Jäykkää kappaletta voidaan pitää partikkelisysteeminä, jossa partikkelien keskinäiset asemat pysyvät muuttumattomina. Epäjäykkä partikkelisysteemi voi olla esimerkiksi deformoituva kiinteä kappale tai joukko tietyllä nopeudella virtaavia neste- tai kaasupartikkeleita.

4.2 Yleistetty Newtonin II laki

Newtonin II laki voidaan yleistää koskemaan kuvan 4.1 mukaista suljetun reunapinnan rajaamaa partikkelijoukkoa. Reunapinnan sisäpuolelle jäävää aluetta sanotaan kontrollialueeksi. Kontrollialue sisältää ne partikkelit, jota meneillään oleva tarkastelu koskee. Kontrollialue voi olla esimerkiksi jäykän kappaleen sisäosa tai virtauksessa tietyllä alueella olevat nestepartikkelit. Sitä käytetään kuten vapaakappalekuvaa eli sen avulla esitetään ulkoiset voimavaikutukset, jolloin esimerkiksi liikeyhtälöiden laatiminen helpottuu huomattavasti. Kuvassa 4.1 on esitetty myös tyypillinen kontrollialueen partikkeli P_i, jonka massa on m_i. Partikkeliin P_i vaikuttavat kontrollialueen ulkopuolelta voimat $\vec{F}_{i1}, \vec{F}_{i2}, \cdots, \vec{F}_{ik}$ ja sen sisäpuolelta voimat $\vec{f}_{i1}, \vec{f}_{i2}, \cdots, \vec{f}_{ij}$. Ulkoiset voimat voivat olla toisista kappaleista aiheutuvia kosketusvoimia tai kaukovoimia, kuten esimerkiksi maan vetovoima. Sisäiset voimat ovat kontrollialueen muiden partikkelien aiheuttamat reaktiovoimat. Partikkelin P_i paikkavektori kiinteän (tai vakionopeudella liikkuvan) origon O suhteen on $\vec{r}_i$.



Kuva 4.1 Kontrollialue.

Kontrollialueeseen kuuluvien partikkelien massakeskiön G paikkavektori on $\vec{r}_G$ ja se toteuttaa massakeskiön määritelmän perusteella ehdon

$$m\,\vec{r}_G = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{r}_i \tag{4.1}$$

jossa n on kontrollialueen partikkeleiden lukumäärä ja $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$. Tyypillisen partikkelin P_i liikeyhtälöksi saadaan Newtonin II lain mukaan

$$\vec{R}_i = \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \cdots + \vec{F}_{ik} + \vec{f}_{i1} + \vec{f}_{i2} + \cdots + \vec{f}_{ij} = m_i\,\ddot{\vec{r}}_i \tag{4.2}$$

jossa $\ddot{\vec{r}}_i$ on partikkelin P_i kiihtyvyys ja $\vec{R}_i$ siihen vaikuttavien voimien resultantti. Kaikille kontrollialueen partikkeleille voidaan kirjoittaa samalla tavalla liikeyhtälö. Kun kaikki nämä yhtälöt lasketaan puolittain yhteen, seuraa tulos

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \cdots + \vec{F}_{ik}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{f}_{i1} + \vec{f}_{i2} + \cdots + \vec{f}_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\ddot{\vec{r}}_i \tag{4.3}$$

Termi $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \cdots + \vec{F}_{ik}\right)$ on kontrollialueen partikkeleihin vaikuttavien ulkoisten voimien summa ja termi $\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{f}_{i1} + \vec{f}_{i2} + \cdots + \vec{f}_{ij}\right)$ systeemin sisäisten voimien summa. On selvää, että $\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{f}_{i1} + \vec{f}_{i2} + \cdots + \vec{f}_{ij}\right) = \vec{0}$, koska sisäiset voimat esiintyvät aina pareittain voiman ja vastavoiman lain mukaisesti.

Derivoimalla kaavassa (4.1) puolittain kahdesti saadaan

$$m\,\ddot{\vec{r}}_G = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\ddot{\vec{r}}_i \tag{4.4}$$

sillä massojen m ja m_i aikaderivaatat ovat nollia, kun kontrollialueeseen ei tule lisää eikä siitä poistu partikkeleita. Sijoittamalla tulos (4.4) kaavaan (4.3) seuraa

$$\vec{R} = m\,\ddot{\vec{r}}_G \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{R} = m\,\vec{a}_G} \tag{4.5}$$

jossa $\vec{a}_G$ on kontrollialueen partikkelien massakeskiön kiihtyvyys. Yhtälöä (4.5) kutsutaan yleistetyksi Newtonin II laiksi. Sen mukaan partikkelisysteemiin vaikuttavien ulkoisten voimien resultantti on yhtä suuri kuin systeemin kokonaismassa kertaa sen massakeskiön kiihtyvyys. On syytä huomata, että partikkelisysteemin massakeskiö ei välttämättä ole minkään partikkelin kohdalla eli $\vec{a}_G$ ei edusta välttämättä minkään yksittäisen partikkelin kiihtyvyyttä. Yhtälöä (4.5) sanotaan myös partikkelisysteemin massakeskiön liikelaiksi.

Yhtälö (4.5) voidaan esittää myös komponenttimuodossa kulloinkin käytettävässä koordinaatistossa, esimerkiksi karteesisessa xyz-koordinaatistossa saadaan

$$\boxed{R_x = m a_{Gx} \qquad R_y = m a_{Gy} \qquad R_z = m a_{Gz}} \tag{4.6}$$

Edellä on käytetty merkintöjä $\vec{a}_G = a_{Gx}\vec{i} + a_{Gy}\vec{j} + a_{Gz}\vec{k}$ ja $\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k}$.

Kaavaa (4.5) käytettäessä on syytä huomata, että sen mukaan vektorit $\vec{R}$ ja $m\vec{a}_G$ ovat yhtä suuret ja samansuuntaiset, mutta niiden ei edellytetä olevan samalla vaikutussuoralla. Yleensä resultantti $\vec{R}$ ei kuljekaan massakeskiön G kautta.

4.3 Partikkelisysteemin työlause

Tarkastellaan edelleen kuvan 4.1 mukaista tiettyyn kontrollialueeseen sisältyvää partikkelisysteemiä. Partikkelille P_i on voimassa työlause

$$W_i = \Delta T_i \tag{4.7}$$

jossa W_i on ulkoisten kuormitusten resultantin $\vec{R}_i$ ja sisäisten reaktiovoimien resultantin $\vec{f}_i$ partikkeliin P_i tietyllä siirtymävälillä tekemä työ sekä $\Delta T_i = \Delta\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right)$ on vastaava liike-energian muutos, jolloin $v_i = |\vec{v}_i|$. Kaikille kontrollialueen partikkeleille voidaan kirjoittaa työyhtälö (4.7). Kun ne lasketaan puolittain yhteen, saadaan partikkelisysteemin työlause

$$\boxed{W = \Delta T} \tag{4.8}$$

jossa $W = \sum_{i=1}^{n} W_i$ on systeemiin tehty kokonaistyö ja $\Delta T = \sum_{i=1}^{n} \Delta T_i$ on sen liike-energian muutos. Työtä W laskettaessa on otettava huomioon systeemin ulkoiset ja sisäiset voimat. Vaikka systeemin sisäiset voimat esiintyvätkin pareittain voimana ja vastavoimana, niiden työt eivät aina kumoa toisiaan, sillä partikkeleiden siirtymät eivät yleensä ole pareittain samat.

Jos partikkelisysteemi sisältää joustavia osia, joihin voi varastoitua kimmoenergiaa, kuluu osa tehdystä työstä kimmoenergian muutokseen ΔV_e. Jos vielä painovoiman vaikutus otetaan huomioon potentiaalienergian muutoksen ΔV_g avulla, voidaan työlause (4.8) kirjoittaa muotoon

$$\boxed{W' = \Delta E = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e} \tag{4.9}$$

jossa ΔE on systeemin mekaanisen energian E muutos. Jos systeemiin vaikuttavien voimien $W' = 0$, on voimassa

$$\Delta E = 0 \qquad \Rightarrow \qquad E = \text{vakio} \tag{4.10}$$

mitä sanotaan mekaanisen energian säilymisen laiksi.

Johdetaan vielä systeemin liike-energialle $T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2$ kätevämpi laskukaava. Kuvan 4.1 perusteella partikkelin P_i nopeus on $\vec{v}_i = \vec{v}_G + \vec{v}_{i/G}$, missä $\vec{v}_G$ on massakeskiön G nopeus ja $\vec{v}_{i/G} = \dot{\vec{r}}_{i/G}$ on partikkelin P_i nopeus massakeskiöön G nähden. Koska $v_i^2 = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$, saadaan

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_G + \vec{v}_{i/G}\right) \cdot \left(\vec{v}_G + \vec{v}_{i/G}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_G^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_{i/G}^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_G \cdot \vec{v}_{i/G} \tag{4.11}$$

Kaavan (4.11) oikean puolen ensimmäinen termi on $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_G^2 = \frac{1}{2} v_G^2 \sum_{i=1}^{n} m_i = \frac{1}{2} m v_G^2$ ja kolmas termi $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_G \cdot \vec{v}_{i/G} = \vec{v}_G \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_{i/G} = \vec{v}_G \cdot \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_{i/G}\right) = \vec{0}$ massakeskiön määritelmän nojalla. Liike-energian lausekkeeksi tulee näin ollen

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_{i/G}^2} \tag{4.12}$$

Saatu tulos voidaan tulkita siten, että liike-energia sisältää massakeskiön G liikkeestä aiheutuvan ensimmäisen termin ja partikkelien massakeskiön suhteen tapahtuvista liikkeistä johtuvan toisen summatermin.

4.4 Partikkelisysteemin liikemäärä

Tutkitaan vielä kuvan 4.1 partikkelisysteemiä. Partikkelin P_i liikemäärä on $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$. Koko systeemin liikemäärä saadaan laskemalla yhteen kaikkien kontrollialueen partikkelien liikemäärät eli $\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$. Sijoittamalla liikemäärän lausekkeeseen nopeudelle $\vec{v}_i = \vec{v}_G + \vec{v}_{i/G}$ saadaan $\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i (\vec{v}_G + \vec{v}_{i/G}) = \vec{v}_G \sum_{i=1}^{n} m_i + \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_{i/G}$, jossa termi $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_{i/G} = \vec{0}$ massakeskiön määritelmän nojalla. Edellä olevasta seuraa partikkelisysteemin liikemäärälle kaava

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}_G} \tag{4.13}$$

Partikkelisysteemin liikemäärä on systeemin kokonaismassan ja massakeskiön nopeuden tulo. Kun kaavassa (4.13) derivoidaan puolittain ajan suhteen, saadaan $\dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{v}}_G = m\vec{a}_G$, joten kaavasta (4.5) seuraa

$$\boxed{\vec{R} = \dot{\vec{p}}} \tag{4.14}$$

Yhtälön (4.14) mukaan partikkelisysteemiin vaikuttavien ulkoisten voimien resultantti on yhtä suuri kuin sen liikemäärän muutosnopeus. Yhtäsuuruus kaavassa (4.14) tarkoittaa, että vektoreilla $\vec{R}$ ja $\dot{\vec{p}}$ on sama suuruus ja suunta, mutta ne eivät välttämättä ole samalla vaikutussuoralla. Yleensä $\vec{R}$ ei kuljekaan massakeskiön G kautta.

4.5 Partikkelisysteemin liikemäärän momentti

Tutkitaan seuraavaksi kuvan 4.1 partikkelisysteemin liikemäärän momenttia. Liikemäärän momenttiin liittyy aina piste, jonka suhteen se on laskettu. Kysymykseen voi tulla kuvan 4.2 mukaisesti kiinteän pisteen O, massakeskiön G (yleensä liikkuva piste) tai mielivaltaisen liikkuvan pisteen Q suhteen laskettu liikemäärän momentti. Seuraavassa tarkastellaan kutakin tapausta erikseen.

(a) Liikemäärän momentti kiinteän pisteen O suhteen.

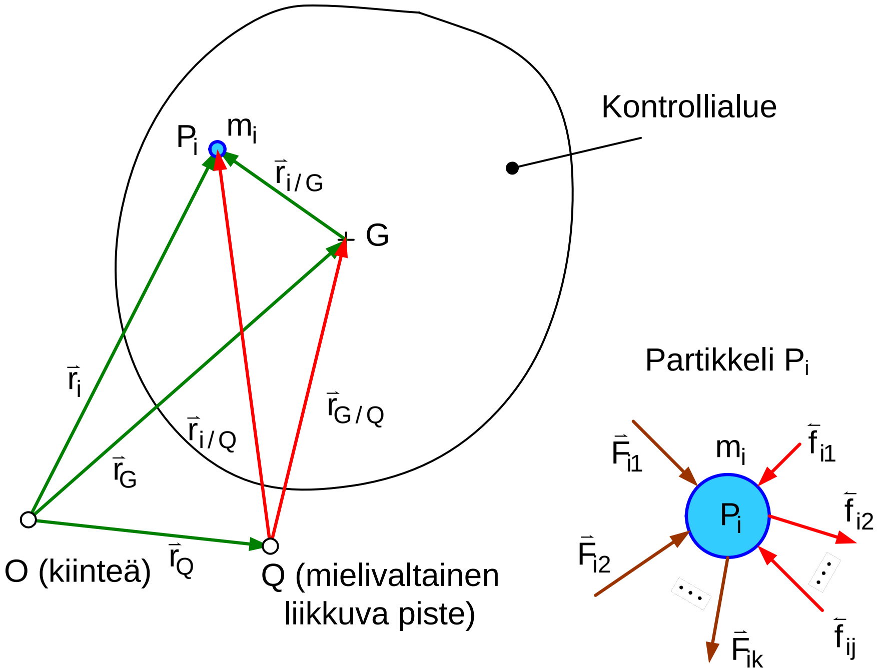
Partikkelin P_i liikemäärän momentti pisteen O suhteen on määritelmän mukaan $\vec{L}_{Oi} = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$. Koko systeemin liikemäärän momentti pisteen O suhteen saadaan laskemalla partikkelien liikemäärän momentit yhteen eli

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_{Oi} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \tag{4.15}$$

Derivoimalla kaavassa (4.15) puolittain ajan suhteen saadaan

$$\dot{\vec{L}}_O = \sum_{i=1}^{n} \dot{\vec{r}}_i \times m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{v}}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i \tag{4.16}$$

sillä $\dot{\vec{r}}_i \times m_i \vec{v}_i = \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i = \vec{0}$ ja $\dot{\vec{v}}_i = \vec{a}_i$. Kaavan (4.16) oikean puolen summalauseke



Kuva 4.2 Partikkelisysteemin liikemäärän momentti.

menee Newtonin II lain avulla muotoon $\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{R}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{Oi} = \vec{M}_O$, joten se on systeemiin vaikuttavien ulkoisten voimien momenttien summa pisteen O suhteen, sillä sisäisten voimien momentit kumoavat pareittain toisensa. Edellä olevasta seuraa

$$\boxed{\vec{M}_O = \dot{\vec{L}}_O} \tag{4.17}$$

jonka mukaan ulkoisten voimien momenttien summa kiinteän pisteen suhteen on yhtä suuri kuin tämän pisteen suhteen lasketun liikemäärän momentin muutosnopeus.

(b) Liikemäärän momentti massakeskiön G suhteen.

Systeemin i liikemäärän momentiksi massakeskiön suhteen tulee laskemalla yhteen partikkelien liikemäärän momentit

$$\vec{L}_G = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_{Gi} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{i/G} \times m_i \vec{v}_i \tag{4.18}$$

Kun kaavassa (4.18) derivoidaan puolittain ajan suhteen, seuraa

$$\dot{\bar{L}}_G = \sum_{i=1}^{n} \dot{\bar{r}}_{i/G} \times m_i \bar{v}_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_{i/G} \times m_i \dot{\bar{v}}_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_{i/G} \times m_i \bar{a}_i \tag{4.19}$$

sillä $\sum_{i=1}^{n} \dot{\bar{r}}_{i/G} \times m_i \bar{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \dot{\bar{r}}_{i/G} \times m_i (\bar{v}_G + \dot{\bar{r}}_{i/G}) = -\bar{v}_G \times \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}_{i/G} + \sum_{i=1}^{n} \dot{\bar{r}}_{i/G} \times m_i \dot{\bar{r}}_{i/G} = \bar{0}$.

Kaavan (4.19) oikealla puolella oleva summalauseke menee Newtonin II lain avulla muotoon $\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_{i/G} \times m_i \bar{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_{i/G} \times \bar{R}_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_{Gi} = \bar{M}_G$ joten se on systeemiin vaikuttavien ulkoisten voimien momenttien summa massakeskiön G suhteen, sillä sisäisten voimien momentit kumoavat pareittain toisensa. Edellä olevasta seuraa lopputulos

$$\boxed{\bar{M}_G = \dot{\bar{L}}_G} \tag{4.20}$$

jonka mukaan ulkoisten voimien momenttien summa massakeskiön suhteen on yhtä suuri kuin massakeskiön suhteen lasketun liikemäärän momentin muutosnopeus.

Laskettaessa edellä kaavoissa (4.15) ja (4.18) liikemäärän momenttia käytettiin tietenkin partikkelin absoluuttista nopeutta $\bar{v}_i$. Osoitetaan vielä, että tulos on sama massakeskiön suhteen lasketulle liikemäärän momentille, vaikka käytetään partikkelille suhteellista nopeutta pisteen Q suhteen ($\bar{v}_{i/Q}$), jolloin Q voi olla myös massakeskiö. Liikemäärän momentin määritelmästä ja kuvasta 4.2 seuraa

$$\begin{aligned} \bar{L}_{G/Q} &= \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_{i/G} \times m_i \bar{v}_{i/Q} = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_{i/G} \times m_i (\bar{v}_i - \bar{v}_Q) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_{i/G} \times m_i \bar{v}_i + \bar{v}_Q \times \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}_{i/G} = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_{i/G} \times m_i \bar{v}_i = \bar{L}_G \end{aligned} \tag{4.21}$$

Huomattakoon erityisesti, että tulos (4.21) pätee vain massakeskiön G suhteen. Laskettaessa liikemäärän momenttia muiden pisteiden suhteen on käytettävä partikkelien absoluuttisia nopeuksia.

(c) Liikemäärän momentti mielivaltaisen liikkuvan pisteen Q suhteen.

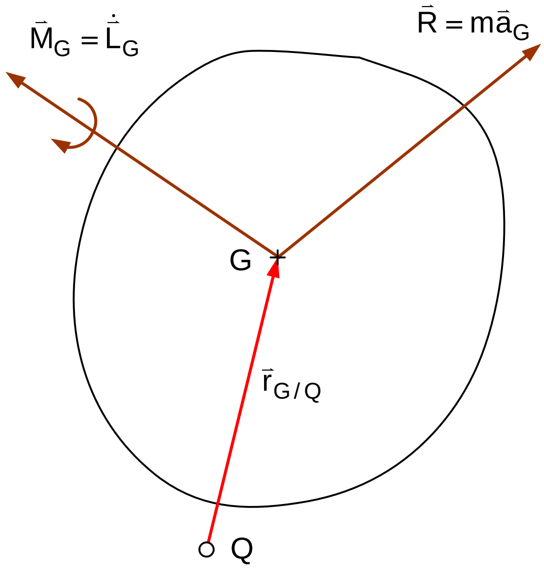
Systeemin absoluuttiseksi liikemäärän momentiksi tulee laskemalla yhteen partikkelien liikemäärän momentit

$$\bar{L}_Q = \sum_{i=1}^{n} \bar{L}_{Qi} = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_{i/Q} \times m_i \bar{v}_i \tag{4.22}$$

Kun kaavaan (4.22) sijoitetaan paikkavektorille lauseke $\vec{r}_{i/Q} = \vec{r}_{G/Q} + \vec{r}_{i/G}$, saadaan

$$\vec{L}_Q = \vec{r}_{G/Q} \times \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{i/G} \times m_i \vec{v}_i \tag{4.23}$$

Kaavan (4.13) mukaan $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \vec{p} = m\vec{v}_G$, joten kaavasta (4.23) saadaan liikemäärän momentin siirtosääntö



Kuva 4.3 Dynami.

$$\boxed{\vec{L}_Q = \vec{L}_G + \vec{r}_{G/Q} \times m\vec{v}_G} \tag{4.24}$$

Statiikassa osoitetaan, että kontrollialueeseen vaikuttava ulkoisten voimien systeemi voidaan koota massakeskiöön dynamiksi $(\vec{R}, \vec{M}_G)$. Kaavojen (4.5) ja (4.20) mukaan on $\vec{R} = m\vec{a}_G$ ja $\vec{M}_G = \dot{\vec{L}}_G$ kuvan 4.3 mukaisesti. On selvää, että $\vec{M}_Q = \vec{M}_G + \vec{r}_{G/Q} \times \vec{R}$, josta saadaan

$$\boxed{\vec{M}_Q = \dot{\vec{L}}_G + \vec{r}_{G/Q} \times m\vec{a}_G} \tag{4.25}$$

Kaava (4.25) vastaa kaavoja (4.17) ja (4.20), mutta on niitä mutkikkaampi. Partikkelisysteemin momenttiliikeyhtälö on siis yksinkertaisimmillaan massakeskiön G tai kiinteän pisteen O suhteen. Kaavan (4.25) oikean puolen toinen termi on nolla vain, jos (a) $\vec{a}_G = \vec{0}$, jolloin G on kiinteä tai liikkuu vakionopeudella, (b) $\vec{r}_{G/Q} = \vec{0}$, jolloin Q on massakeskiö ja (c) sattumalta $\vec{r}_{G/Q} \parallel \vec{a}_G$.

4.6 Partikkelisysteemin impulssilauseet

Kun kaava (4.14) kirjoitetaan muotoon $\vec{R}\,dt = d\vec{p}$ ja integroidaan puolittain ajan suhteen hetkestä t_1 hetkeen t_2, saadaan tulos

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{R}\,dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1} \tag{4.26}$$

jossa $\vec{p}_2 = m\vec{v}_{G2}$ on systeemin liikemäärä hetkellä t_2 ja $\vec{p}_1 = m\vec{v}_{G1}$ liikemäärä hetkellä t_1. Kaava (4.26) on partikkelisysteemin voiman impulssilause.

Kun kaava (4.20) kirjoitetaan muotoon $\vec{M}_G\,dt = d\vec{L}_G$ ja integroidaan puolittain ajan suhteen hetkestä t_1 hetkeen t_2, saadaan tulos

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_G\,dt = \vec{L}_{G2} - \vec{L}_{G1}} \tag{4.27}$$

missä $\vec{L}_{G2}$ on systeemin liikemäärän momentti massakeskiön suhteen hetkellä t_2 ja $\vec{L}_{G1}$ hetkellä t_1. Kaava (4.27) on partikkelisysteemin momentin impulssilause. Samankaltainen tulos voidaan johtaa myös kiinteätä pistettä O käyttäen.

Jos tietyllä aikavälillä resultantin $\vec{R}$ impulssi on nolla, seuraa kaavasta (4.26), että partikkelisysteemin liikemäärä säilyy eli

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta\vec{p} = \vec{0} \tag{4.28}$$

Jos vastaavasti momentin $\vec{M}_G$ impulssi on nolla, seuraa kaavasta (4.27), että partikkelisysteemin liikemäärän momentti massakeskiön G suhteen säilyy eli

$$\vec{L}_{G2} - \vec{L}_{G1} = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta\vec{L}_G = \vec{0} \tag{4.29}$$

Säilyminen voi tietysti koskea myös liikemäärän momenttia $\vec{L}_O$. Liikemärän ja liikemäärän momentin säilymisen välillä ei ole yleistä yhteyttä, toinen voi säilyä, vaikka toinen ei säilykään.