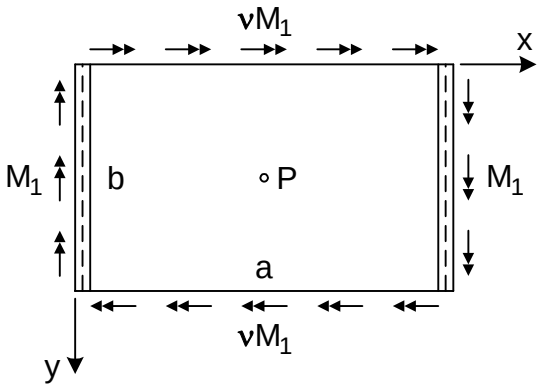
III.2. Suorakulmiolaatta on reunoilta $x=0$ ja $x=a$ niveltuettu sekä reunoilta $y=0$ ja $y=b$ vapaa. Kuormituksena ovat reunoilla vaikuttavat vakio taivutusmomentin viivatiheydet M_1 ja νM_1. Määritä vakiot $C_1,\cdots,C_6$ siten, että



$w = C_1 + C_2\,x + C_3\,y + C_4\,x^2 + C_5\,x\,y + C_6\,y^2$ on laatan taipuman lauseke. Laske laatan kaarevuudet ja kierevyys. Selvitä, miksi pinnaksi laatan keskipinta taipuu. Laske laatan maksimi taipuma ja keskikohdan yläpinnan pisteen P σ_{vert} / VVEH, kun laatan paksuus $h = 24$ mm, $a = 2$ m, $b = 1$ m, $M_1 = 1200$ N, $\nu = 0{,}3$ ja $E = 210$ GPa.

Ratkaisu:

$w = C_1 + C_2\,x + C_3\,y + C_4\,x^2 + C_5\,x\,y + C_6\,y^2 \quad \Rightarrow \quad \nabla^4 w = p/D = 0$ toteutuu.

$w_{,xx} = 2C_4 \qquad w_{,xy} = C_5 \qquad w_{,yy} = 2C_6$

$M_x = -D(w_{,xx} + \nu w_{,yy}) = -2D(C_4 + \nu C_6) \qquad M_y = -D(w_{,yy} + \nu w_{,xx}) = -2D(C_6 + \nu C_4)$

$M_{xy} = -D(1-\nu)w_{,xy} = -D(1-\nu)C_5$ Leikkausvoimat : $Q_x = Q_y = 0$

Reunaehdot: $M_x(0,y) = M_x(a,y) = M_1$ (1) $M_y(x,0) = M_y(x,b) = \nu M_1$ (2)

$M_{xy}(\text{reuna}) = 0$ (3) $w(0,y) = 0$ (4) $w(a,y) = 0$ (5)

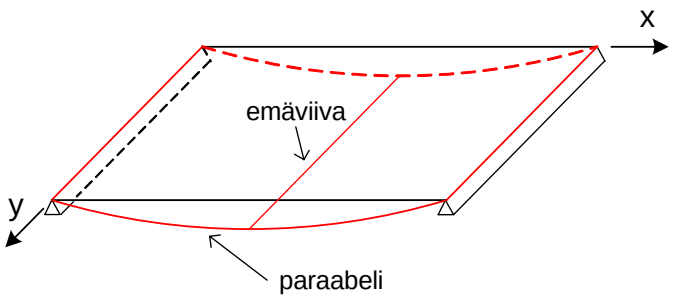
(3) $\Rightarrow$ $C_5 = 0$ (4) $\Rightarrow C_1 + C_3\,y + C_6\,y^2 = 0 \Rightarrow C_1 = C_3 = C_6 = 0$

(1) $\Rightarrow$ $-2DC_4 = M_1 \Rightarrow C_4 = -\dfrac{M_1}{2D}$ (2) $\Rightarrow$ $-2D\nu C_4 = \nu M_1$ OK.

(5) $\Rightarrow$ $C_2\,a - \dfrac{M_1}{2D}a^2 = 0 \Rightarrow C_2 = \dfrac{M_1}{2D}a \Rightarrow$

$$w(x,y) = \frac{M_1}{2D}(a\,x - x^2)$$

Kyseessä on sylinteripinta, jonka emäviivat ovat y-akselin suunnassa.



$$\kappa_x = -w_{,xx} = \frac{M_1}{D}$$

$$\kappa_y = \kappa_{xy} = 0$$

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{210 \cdot 10^3\,\mathrm{N} \cdot 24^3\,\mathrm{mm}^3}{\mathrm{mm}^2 \cdot 12 \cdot (1-0{,}3^2)} = 265846154\,\mathrm{Nmm}$$

$$w_{max} = \frac{1200\,\mathrm{N}}{2 \cdot 265846154\,\mathrm{Nmm}} (2000 \cdot 1000 - 1000^2)\,\mathrm{mm}^2 \qquad \Rightarrow$$

$$w_{max} = 2{,}26\,\mathrm{mm}$$

$$M_x = M_1 = 1200\,\mathrm{N} \qquad M_y = \nu M_1 = 0{,}3 \cdot 1200\,\mathrm{N} = 400\,\mathrm{N}$$

$$\sigma_x = -\frac{6}{h^2} M_x = -\frac{6}{24^2\,\mathrm{mm}^2} \cdot 1200\,\mathrm{N} = -12{,}50\,\mathrm{MPa} = \sigma_1$$

$$\sigma_y = -\frac{6}{h^2} M_y = -\frac{6}{24^2\,\mathrm{mm}^2} \cdot 400\,\mathrm{N} = -4{,}17\,\mathrm{MPa} = \sigma_2 \qquad \sigma_3 = 0$$

$$\sigma_{vert\,/\,VVEH} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_{vert\,/\,VVEH} = 11{,}02\ \mathrm{MPa}$$