I.7. Kappaleen siirtymäkenttä on (yksikkönä mm)

$$u = (x^2 + 10) \cdot 10^{-2} \qquad v = (2yz) \cdot 10^{-2} \qquad w = (z^2 - xy) \cdot 10^{-2}$$

Laske pisteiden $A(2,-1,3)$ ja $B(-1,-2,2)$ siirtymäkomponentit.
Paljonko pisteiden A ja B välinen etäisyys muuttuu siirtymien johdosta? Mikä on keskimääräinen venymä pisteessä A suuntaan B?
Määritä muodonmuutoskomponenttien lausekkeet ja laske niiden arvot pisteessä A.
Kirjoita pisteen A muodonmuutostilaa vastaava muodonmuutosmatriisi ja määritä sen avulla venymä ε_n janan AB suuntaisen yksikkövektorin $\vec{n}_{AB}$ suunnassa. Vertaa tulosta aikaisemmin laskettuun venymään ε_{AB} ja selitä mistä johtuu tuloksissa oleva ero. Määritä muodonmuutosmatriisin päävenymät ja pääsuunnat.
Osoita, että edellä annettu siirtymäkenttä on mahdollinen kappaleen siirtymäkenttä, ts. se johtaa yhteensopiviin muodonmuutoskomponentteihin.

Ratkaisu:

$$u(x,y,z) := \left(\frac{x^2}{mm^2} + 10\right) \cdot 10^{-2} \cdot mm \qquad v(x,y,z) := \left(2 \cdot \frac{y}{mm} \cdot \frac{z}{mm}\right) \cdot 10^{-2} \cdot mm$$

$$w(x,y,z) := \left(\frac{z^2}{mm^2} - \frac{x}{mm} \cdot \frac{y}{mm}\right) \cdot 10^{-2} \cdot mm$$

Pisteiden A ja B siirtymäkomponentit:

A:

$x_A := 2 \cdot mm \qquad y_A := -1 \cdot mm \qquad z_A := 3 \cdot mm$

$u_A := u(x_A, y_A, z_A) \qquad v_A := v(x_A, y_A, z_A) \qquad w_A := w(x_A, y_A, z_A)$

$u_A = 0.140\, mm \qquad v_A = -0.060\, mm \qquad w_A = 0.110\, mm$

B:

$x_B := -1 \cdot mm \qquad y_B := -2 \cdot mm \qquad z_B := 2 \cdot mm$

$u_B := u(x_B, y_B, z_B) \qquad v_B := v(x_B, y_B, z_B) \qquad w_B := w(x_B, y_B, z_B)$

$u_B = 0.110\, mm \qquad v_B = -0.080\, mm \qquad w_B = 0.020\, mm$

Pisteiden A ja B uudet asemat:

A:

$x_{A1} := x_A + u_A$ $\quad y_{A1} := y_A + v_A$ $\quad z_{A1} := z_A + w_A$

$x_{A1} = 2.140\,\text{mm}$ $\quad y_{A1} = -1.060\,\text{mm}$ $\quad z_{A1} = 3.110\,\text{mm}$

B:

$x_{B1} := x_B + u_B$ $\quad y_{B1} := y_B + v_B$ $\quad z_{B1} := z_B + w_B$

$x_{B1} = -0.890\,\text{mm}$ $\quad y_{B1} = -2.080\,\text{mm}$ $\quad z_{B1} = 2.020\,\text{mm}$

Keskimääräinen venymä suuntaan AB:

$$AB := \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \qquad AB = 3.316625\,\text{mm}$$

$$A1B1 := \sqrt{(x_{B1} - x_{A1})^2 + (y_{B1} - y_{A1})^2 + (z_{B1} - z_{A1})^2} \qquad A1B1 = 3.37778\,\text{mm}$$

$$\Delta AB := A1B1 - AB \qquad \Delta AB = 0.061156\,\text{mm}$$

$$\varepsilon_{AB} := \frac{\Delta AB}{AB} \qquad \varepsilon_{AB} = 0.018439$$

Muodonmuutoskomponentit saadaan kinemaattisista yhtälöistä:

$$\varepsilon_x(x,y,z) := \frac{d}{dx}u(x,y,z) \qquad \varepsilon_x(x,y,z) \rightarrow \frac{x}{50\cdot\text{mm}}$$

$$\varepsilon_y(x,y,z) := \frac{d}{dy}v(x,y,z) \qquad \varepsilon_y(x,y,z) \rightarrow \frac{z}{50\cdot\text{mm}}$$

$$\varepsilon_z(x,y,z) := \frac{d}{dz}w(x,y,z) \qquad \varepsilon_z(x,y,z) \rightarrow \frac{z}{50\cdot\text{mm}}$$

$$\gamma_{xy}(x,y,z) := \frac{d}{dy}u(x,y,z) + \frac{d}{dx}v(x,y,z) \qquad \gamma_{xy}(x,y,z) \rightarrow 0$$

$$\gamma_{xz}(x,y,z) := \frac{d}{dz}u(x,y,z) + \frac{d}{dx}w(x,y,z) \qquad \gamma_{xz}(x,y,z) \rightarrow -\frac{y}{100\cdot\text{mm}}$$

$$\gamma_{yz}(x,y,z) := \frac{d}{dy}w(x,y,z) + \frac{d}{dz}v(x,y,z) \qquad \gamma_{yz}(x,y,z) \rightarrow \frac{y}{50\cdot\text{mm}} - \frac{x}{100\cdot\text{mm}}$$

Muodonmuutoskomponentit pisteessä A: $\mu := 10^{-6}$

$\varepsilon_{xA} := \varepsilon_x(x_A, y_A, z_A)$ $\varepsilon_{yA} := \varepsilon_y(x_A, y_A, z_A)$ $\varepsilon_{zA} := \varepsilon_z(x_A, y_A, z_A)$

$\gamma_{xyA} := \gamma_{xy}(x_A, y_A, z_A)$ $\gamma_{xzA} := \gamma_{xz}(x_A, y_A, z_A)$ $\gamma_{yzA} := \gamma_{yz}(x_A, y_A, z_A)$

$\varepsilon_{xA} = 40000.000\,\mu$ $\varepsilon_{yA} = 60000.000\,\mu$ $\varepsilon_{zA} = 60000.000\,\mu$

$\gamma_{xyA} = 0.000\,\mu$ $\gamma_{xzA} = 10000.000\,\mu$ $\gamma_{yzA} = -40000.000\,\mu$

ORIGIN := 1

Muodonmuutosmatriisi pisteessä A:

$$V := \begin{pmatrix} \varepsilon_{xA} & \frac{\gamma_{xyA}}{2} & \frac{\gamma_{xzA}}{2} \\ \frac{\gamma_{xyA}}{2} & \varepsilon_{yA} & \frac{\gamma_{yzA}}{2} \\ \frac{\gamma_{xzA}}{2} & \frac{\gamma_{yzA}}{2} & \varepsilon_{zA} \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 40000.000 & 0.000 & 5000.000 \\ 0.000 & 60000.000 & -20000.000 \\ 5000.000 & -20000.000 & 60000.000 \end{pmatrix} \mu$$

Yksikkövektori janan AB suuntaan: $n := \frac{1}{AB} \cdot \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ $n = \begin{pmatrix} -0.905 \\ -0.302 \\ -0.302 \end{pmatrix}$

$e_n := V \cdot n$ $\varepsilon_n := e_n \cdot n$ $\varepsilon_n = 0.042727$

Edellä saatu ε_{AB} on <u>janan AB keskimääräinen venymä</u>, mutta ε_n on <u>venymä pisteessä A suuntaan B</u>.

Päävenymät: $\varepsilon_p := \text{eigenvals}(V)$ $\varepsilon_p = \begin{pmatrix} 0.08031248 \\ 0.03631849 \\ 0.04336903 \end{pmatrix}$

$\varepsilon_1 := \varepsilon_{p_1}$ $\varepsilon_2 := \varepsilon_{p_2}$ $\varepsilon_3 := \varepsilon_{p_3}$

$\varepsilon_1 = 80312.481\,\mu$ $\varepsilon_2 = 36318.491\,\mu$ $\varepsilon_3 = 43369.028\,\mu$

Pääsuunnat: $A := \text{eigenvecs}(V)$ $A = \begin{pmatrix} -0.088 & -0.720 & -0.688 \\ 0.699 & 0.448 & -0.558 \\ -0.710 & 0.530 & -0.464 \end{pmatrix}$

$n_1 := A^{\langle 1 \rangle}$ $n_2 := A^{\langle 2 \rangle}$ $n_3 := A^{\langle 3 \rangle}$

$n_1 = \begin{pmatrix} -0.088 \\ 0.699 \\ -0.710 \end{pmatrix}$ $n_2 = \begin{pmatrix} -0.720 \\ 0.448 \\ 0.530 \end{pmatrix}$ $n_3 = \begin{pmatrix} -0.688 \\ -0.558 \\ -0.464 \end{pmatrix}$

Yhteensopivuusyhtälöt toteutuvat.

$$\frac{d^2}{dy^2}\varepsilon_x(x,y,z) + \frac{d^2}{dx^2}\varepsilon_y(x,y,z) - \frac{d}{dx}\frac{d}{dy}\gamma_{xy}(x,y,z) \rightarrow 0$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\varepsilon_y(x,y,z) + \frac{d^2}{dy^2}\varepsilon_z(x,y,z) - \frac{d}{dy}\frac{d}{dz}\gamma_{yz}(x,y,z) \rightarrow 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\varepsilon_z(x,y,z) + \frac{d^2}{dz^2}\varepsilon_x(x,y,z) - \frac{d}{dx}\frac{d}{dz}\gamma_{xz}(x,y,z) \rightarrow 0$$