Esimerkki 5.2

Tarkastellaan emoneliön alueessa määritellyn funktion $f(\xi,\eta)=\frac{\xi\eta+2}{\xi^2+\eta^2+1}$ interpolointia.

Laske kohdassa $\xi=\frac{1}{2}$ ja $\eta=\frac{1}{2}$ funktion tarkka arvo ja likiarvot käyttäen

a) bilineaarista Lagrangen interpolointia,
b) bikvadraattista Lagrangen interpolointia ja
c) kvadraattista Serendip-interpolointia.

Ratkaisu: Tarkka arvo $f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{3}{2}=1{,}5$

a) Bilineaarinen:

$f(-1,-1)=1$ $N_1(1/2,1/2)=1/16$
$f(+1,-1)=1/3$ $N_2(1/2,1/2)=3/16$
$f(+1,+1)=1$ $N_3(1/2,1/2)=9/16$
$f(-1,+1)=1/3$ $N_4(1/2,1/2)=3/16$

$$\Rightarrow\quad f(1/2,1/2)\approx\frac{1}{16}(1\cdot1+3\cdot\frac{1}{3}+9\cdot1+3\cdot\frac{1}{3})=\frac{3}{4}=0{,}75$$

b) Bikvadraattinen:

$f(-1,-1)=1$ $N_1(1/2,1/2)=1/64$
$f(+1,-1)=1/3$ $N_2(1/2,1/2)=-3/64$
$f(+1,+1)=1$ $N_3(1/2,1/2)=9/64$
$f(-1,+1)=1/3$ $N_4(1/2,1/2)=-3/64$
$f(0,-1)=1$ $N_5(1/2,1/2)=-6/64$
$f(1,0)=1$ $N_6(1/2,1/2)=18/64$
$f(0,1)=1$ $N_7(1/2,1/2)=18/64$
$f(-1,0)=1$ $N_8(1/2,1/2)=-6/64$
$f(0,0)=2$ $N_9(1/2,1/2)=36/64$

$$\Rightarrow f(1/2,1/2)\approx\frac{1}{64}(1\cdot1-3\cdot\frac{1}{3}+9\cdot1-3\cdot\frac{1}{3}-6\cdot1+18\cdot1+18\cdot1-6\cdot1+36\cdot2)=\frac{13}{8}=1{,}625$$

c) Kvadraattinen Serendip:

$f(-1,-1)=1$ $N_1(1/2,1/2)=-4/32$
$f(+1,-1)=1/3$ $N_2(1/2,1/2)=-6/32$
$f(+1,+1)=1$ $N_3(1/2,1/2)=0$
$f(-1,+1)=1/3$ $N_4(1/2,1/2)=-6/32$
$f(0,-1)=1$ $N_5(1/2,1/2)=6/32$
$f(1,0)=1$ $N_6(1/2,1/2)=18/32$
$f(0,1)=1$ $N_7(1/2,1/2)=18/32$
$f(-1,0)=1$ $N_8(1/2,1/2)=6/32$

$$\Rightarrow f(1/2,1/2)\approx\frac{1}{32}(-4\cdot1-6\cdot\frac{1}{3}+0\cdot1-6\cdot\frac{1}{3}+6\cdot1+18\cdot1+18\cdot1+6\cdot1)=\frac{5}{4}=1{,}25$$