3 PARTIKKELIN KINETIIKKA

3.1 Yleistä

Newtonin II lain mukaan partikkeli joutuu kiihtyvään liikkeeseen, jos siihen vaikuttaa voimasysteemi, joka ei ole tasapainosysteemi. Partikkelin kinetiikassa tutkitaan voimasysteemin aiheuttamia partikkelin liiketilan muutoksia. Tällöin tarvitaan statiikasta tietoja voimasysteemin ominaisuuksista ja kinematiikasta tietoja liikkeen geometrisista ominaisuuksista.

Kinetiikan tehtäviä ratkaistaessa on mahdollista käyttää kolmea erilaista lähestymistapaa: (a) hyödynnetään suoraan Newtonin II lakia sen alkuperäisessä muodossa, (b) sovelletaan työ ja energia periaatetta ja (c) käytetään impulssi ja liikemäärä periaatetta. Kullakin lähestymistavalla on omat hyvät puolensa eli ne soveltuvat hyvin tietyn tyyppisten tehtävien ratkaisemiseen. Toisinaan joudutaan hyödyntämään useampaakin lähestymistapaa ratkaisun löytämiseksi. Tässä luvussa esitellään näiden kolmen ratkaisumenetelmän perusominaisuudet.

3.2 Newtonin II laki

Mekaniikan peruslain 5 eli Newtonin II lain mukaan partikkeliin vaikuttavan voiman $\bar{F}$ ja partikkelin kiihtyvyyden $\bar{a}$ välinen yhteys on

$$\boxed{\bar{F} = m\bar{a}} \tag{3.1}$$

jossa m on partikkelin massa. Kaavaa (3.1) sanotaan myös dynamiikan perusyhtälöksi. Dynamiikan perusyhtälön mukaan voima antaa partikkelille kiihtyvyyden, joka on aina voiman kanssa samaan suuntaan. Syntyvän kiihtyvyyden suuruus on kääntäen verrannollinen partikkelin massaan m eli mitä suurempi massa sitä pienempi on kiihtyvyys. Yhtälön (3.1) mukaan vektoreilla $\bar{F}$ ja $m\bar{a}$ on sama suuruus ja suunta, mutta myös sama vaikutussuora.

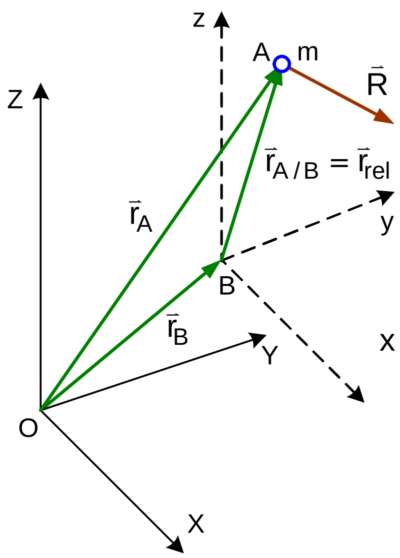
Kun partikkeliin vaikuttavat samanaikaisesti voimat $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \cdots, \bar{F}_n$, joiden resultantti on $\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i$ ja partikkelin asemavektori on $\bar{r}$, menee Newtonin II laki muotoon

$$\boxed{\bar{R} = m\bar{a} = m\ddot{\bar{r}}} \tag{3.2}$$

Kaava (3.2) voidaan esittää myös komponenttimuodossa jotakin koordinaatistoa käyttäen, jolloin tasotapauksessa saadaan kaksi ja kolmiulotteisessa tapauksessa kolme komponenttiyhtälöä. Yhtälöä (3.2) sanotaan partikkelin liikeyhtälöksi. Statiikan tehtävissä $\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \vec{0}$, jolloin puhutaan vastaavasti partikkelin tasapainoyhtälöstä.

Newtonin mekaniikassa oletetaan, että on olemassa absoluuttisessa levossa oleva koordinaatisto, jota kutsutaan inertiaalikoordinaatistoksi. Dynamiikan perusyhtälö on voimassa tässä koordinaatistossa. Absoluuttisessa levossa olevaa koordinaatistoa ei ole löydetty. Lähinnä tällainen on ”kiintotähtiin” kiinnitetty koordinaatisto, jonka suhteen kaikki muut koordinaatistot ovat liikkeessä mukaan luettuna maan pintaan kiinnitetty koordinaatisto. Se pyörii maan akselin ympäri, kiertää aurinkoa maan mukana, kiertää auringon mukana linnunradan keskustaa jne., joista liikkeistä aiheutuu kiihtyvyyksiä. Nämä kiihtyvyydet ovat niin pieniä, että Newtonin II lakia voidaan soveltaa riittävällä tarkkuudella lähellä maan pintaa tapahtuvien mekaniikan ilmiöiden tarkasteluissa. Maan kiertoliikkeestä auringon ympäri aiheutuu kiihtyvyys, jonka suuruus on $0{,}006\,\mathrm{m/s^2}$ aurinkoon nähden. Maan pyörimisestä aiheutuu sen pinnalla olevan koordinaatiston origolle keskeiskiihtyvyys, jonka suuruus päiväntasaajalla on noin $0{,}034\,\mathrm{m/s^2}$ maan keskipisteeseen nähden. Nämä ovat pieniä verrattuna esimerkiksi putoamiskiihtyvyyteen $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ tai muihin teknillisissä sovelluksissa esiintyviin kiihtyvyyksiin, joten maahan kiinnitetyn koordinaatiston pitäminen kiinteänä ei aiheuta yleensä liian suuria virheitä. Tarkempaa aurinkoon tai aurinkokunnan massakeskiöön kiinnitettyä koordinaatistoa tarvitaan kuitenkin esimerkiksi avaruuslentoihin ja planeettojen liikkeisiin liittyvissä tarkasteluissa.

Kohdassa 2.7 nähtiin, että dynamiikan peruslaki (3.1) on voimassa myös kiinteään koordinaatistoon nähden tasaisella nopeudella translaatiossa olevassa koordinaatistossa. Dynamiikan peruslaki ei sen sijaan ole voimassa kiihtyvässä liikkeessä olevassa koordinaatistossa. Joissakin sovelluksissa, kuten esimerkiksi robottimekaniikan tehtävissä, on helpompaa päästä ratkaisuun käyttämällä apuna kiinteän koordinaatiston suhteen liikkuvaa koordinaatistoa. Yleisessä tapauksessa liikkuvan koordinaatiston liike voi sisältää sekä translaatiota että rotaatiota. Tässä kohdassa tarkastellaan vain translaatiossa olevaa koordinaatistoa, rotaatiota tutkitaan myöhemmin jäykän kappaleen kinematiikan yhteydessä. Tavoitteena on selvittää, mihin muotoon Newtonin II laki (3.2) menee translaatioliikkeessä olevassa koordinaatistossa.



Kuva 3.1 Suhteellinen liike.

Tutkitaan kuvan 3.1 partikkelia A. Sen liikettä havaitaan xyz-koordinaatistossa, joka on translaatioliikkeessä kiinteään XYZ-koordinaatistoon nähden. Koordinaatistojen vastinakselit pysyvät siis yhdensuuntaisina liikkeen aikana. xyz-koordinaatiston origon B kiihtyvyys on $\vec{a}_B = \ddot{\vec{r}}_B$. Partikkelin A kiihtyvyys xyz-koordinaatistosta havaittuna on $\vec{a}_{rel} = \vec{a}_{A/B} = \ddot{\vec{r}}_{A/B}$, joten kaavan (2.28) perusteella partikkelin A kiihtyvyys XYZ-koordinaatistossa on

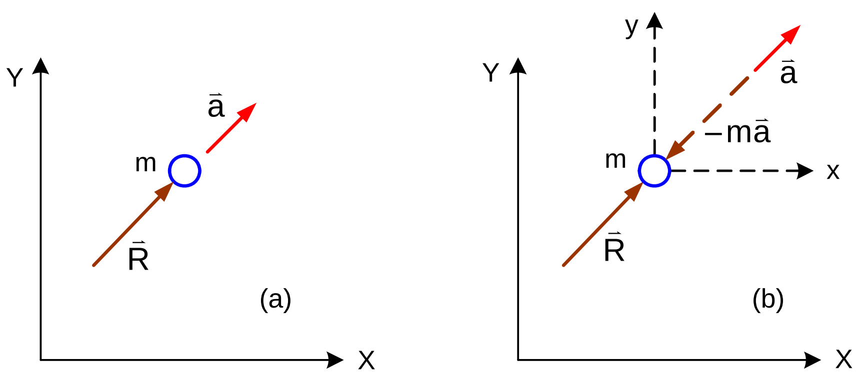
$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{rel} \tag{3.3}$$

Koska partikkeliin vaikuttavien voimien resultantti $\vec{R}$ ei riipu käytettävästä koordinaatistosta, tulee Newtonin II laista partikkelin A liikeyhtälöksi

$$\vec{R} = m\vec{a}_A = m(\vec{a}_B + \vec{a}_{rel}) \tag{3.4}$$

Newtonin II laki ei ole voimassa kiihtyvässä liikkeessä olevassa koordinaatistossa, koska $\vec{R} \neq m\vec{a}_{rel}$.

Liikkuvan koordinaatiston eräs käyttötapa johtaa ns. hitausvoimaperiaatteeseen, jota usein kutsutaan myös d'Alembertin periaatteeksi. Tarkastellaan tätä kuvassa 3.2 esitetyn tasotapauksen avulla. Kun partikkelin liikettä tutkitaan kiinteässä XY-koordinaatistossa, pätee liikeyhtälö $\vec{R} = m\vec{a}$ partikkelin absoluuttiselle kiihtyvyydelle $\vec{a}$. Jos taas liikettä tutkitaan liikkuvassa xy-koordinaatistossa, jonka origossa kyseinen partikkeli sijaitsee, näyttää partikkeli olevan levossa eli se on tasapainossa xy-koordinaatistossa. xy-koordinaatiston mukana liikkuva havaitsija tulkitsee siis, että partikkeliin vaikuttaa voima $-m\vec{a}$, joka yhdessä resultantin $\vec{R}$ kanssa pitää partikkelin tasapainossa. Tulkitsemalla näin dynamiikan tehtävä voidaan muuntaa statiikan tehtäväksi, jolloin tasapainotehtävän kaikki ratkaisumenetelmät ovat käytettävissä. Käytännössä tämä merkitsee sitä, että liikeyhtälö $\vec{R} = m\vec{a}$ kirjoitetaan muotoon $\vec{R} - m\vec{a} = \vec{0}$, missä termi $-m\vec{a}$ tulkitaan voimaksi. Termiä $-m\vec{a}$ sanotaan hitausvoimaksi ja partikkelin sanotaan olevan dynaamisessa tasapainossa. Hitausvoimaperiaate syntyi aikana, jolloin kokemukset dynamiikan ilmiöistä olivat vähäiset ja oli tärkeää kytkeä tarkastelut tunnetumpaan statiikan teoriaan. Hitausvoimaperiaatteen heikkous on, että siinä esiintyy kuvitteellinen hitausvoima eli voima, jota ei ole olemassa. Tämä aiheuttaa varsinkin vasta-alkajan kohdalla paljon sekaannusta. Toisaalta kokenut dynamiikan soveltaja hyötyy vähän hitausvoimaperiaatteesta. On suositeltavampaa totutella kirjoittamaan partikkelille liikeyhtälöt dynaamisten tasapainoyhtälöiden asemasta.



Kuva 3.2 Hitausvoimaperiaate.

Ennen vuotta 1905 Newtonin mekaniikka oli todistettu suurella tarkkuudella paikkansapitäväksi lukemattomilla käytännön kokeilla ja sitä pidettiin kappaleiden liikkeiden lopullisena selityksenä. Newtonin mekaniikan heikoksi kohdaksi osoittautui oletus avaruuden ja ajan absoluuttisuudesta. Einstein tulkitsi nämä aivan uudella tavalla vuonna 1905 ja kehitti mekaniikan teorian tältä pohjalta. Einsteinin esittämää suhteellisuusteoriaa monet pitivät aluksi virheellisenä, mutta se sai myöhemmin kokeellisia varmistuksia ja siitä tuli yleisesti hyväksytty. Suhteellisuusteorian periaatteet eroavat Newtonin mekaniikasta tietyiltä osiltaan perusteellisesti. Käytännössä Newtonin ja Einsteinin teorioiden antamat tulokset eroavat merkittävästi toisistaan vasta, kun tarkasteltavat nopeudet ovat lähellä valon tyhjiönopeutta. Tästä seuraa, että teknillisissä sovelluksissa Newtonin mekaniikka on yhä täysin käyttökelpoinen.

Kinetiikassa liikeyhtälöä (3.2) käytetään tarkasteltavan mekaanisen systeemin joidenkin tuntemattomien suureiden ratkaisemiseen. Partikkelin kinetiikan tehtävät voidaan jakaa kolmeen päätyyppiin seuraavasti.

(a) Kiihtyvyys $\bar{a}$ tunnetaan tai voidaan laskea kinematiikalla. Vastaava partikkelin vaikuttava voima ja sen komponentit saadaan sijoittamalla kiihtyvyys liikeyhtälöön.

(b) Tunnetaan partikkeliin vaikuttava voimaresultantti ja siis sen komponentit ja tehtävänä on laskea seurauksena oleva liike. Jos liikkeellä ei ole ennalta asetettuja rajoituksia, niin kyseessä on vapaa liike. Mikäli voimaresultantti on vakio, on kiihtyvyyskin vakio ja se saadaan liikeyhtälöstä. Kiihtyvyyden ollessa vakio partikkelin nopeus ja asema ratkeavat helposti kinematiikan avulla, kun alkuasema ja -nopeus tunnetaan. Jos taas voimat ovat ajan, aseman, nopeuden tai kiihtyvyyden funktioita, tulee liikeyhtälöstä differentiaaliyhtälö, joka on integroitava partikkelin kinemaattisia suureita määritettäessä. Tällaiset tehtävät ovat hankalampia varsinkin, jos voimat ovat usean muuttujan funktioita. On selvää, että kohdassa 2.2 esitettyjä analyyttisiä integrointitapauksia (a)-(d) voidaan käyttää hyväksi myös tässä.

(c) Partikkeliin vaikuttavista voimista tunnetaan vain osa eli aktiiviset voimat. Partikkelin rata on joillakin järjestelyillä etukäteen joko täysin tai osittain määrätty. Tehtävänä on ratkaista, miten partikkeli liikkuu annettujen rajoitusten puitteissa ja mitkä ovat siihen vaikuttavat ennalta tuntemattomat reaktiovoimat. Tällöin kyseessä on partikkelin sidottu liike.

Liikeyhtälön (3.2) vasemmalla puolella on partikkeliin vaikuttavien voimien summa. Käytännön sovelluksissa tämän summan kirjoittaminen sujuu parhaiten, kun partikkeliin vaikuttavat voimat esitetään vapaakappalekuvan avulla, kuten statiikan tasapainoyhtälöiden yhteydessä tehtiin. Liikeyhtälöitä kirjoitettaessa vapaakappalekuvaan merkitään myös kiihtyvyyden tunnettu tai oletettu suunta, jota voidaan hyödyntää liikeyhtälön oikeata puolta kirjoitettaessa.

3.3 Suoraviivainen liike

Suoraviivaista liikettä kannattaa käsitellä xyz-koordinaatistossa. Jos liikesuunnaksi valitaan x-akselin suunta, ovat kiihtyvyyden $\bar{a}$ komponentit y- ja z-akselin suunnissa nollia. Liikeyhtälö (3.2) voidaan tällöin esittää komponenttimuodossa

$$\boxed{R_x = m a_x \qquad R_y = 0 \qquad R_z = 0} \tag{3.5}$$

Jos liikesuuntaa ei jostain syystä voida valita koordinaattiakselin suuntaiseksi, ovat suoraviivaisen liikkeen liikeyhtälöt yleisessä komponenttimuodossa

$$\boxed{R_x = m a_x \qquad R_y = m a_y \qquad R_z = m a_z} \tag{3.6}$$

Edellä on käytetty merkintöjä $\bar{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ ja $\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}$.

3.4 Käyräviivainen liike

Käyräviivaisen liikkeen liikeyhtälö (3.2) voidaan kirjoittaa eri koordinaatistoissa kohdissa 2.4 - 2.6 esitettyjen kaavojen avulla. Käytettävän koordinaatiston valinta riippuu käsillä olevan tehtävän luonteesta ja se vaikuttaa merkittävästi tehtävän ratkaisuun. Seuraavassa on esitetty käyräviivaisen tasoliikkeen liikeyhtälöt xy-koordinaatistossa, tn-koordinaatistossa ja napakoordinaatistossa.

xy-koordinaatisto:

$$\boxed{R_x = m a_x = m\ddot{x} \qquad R_y = m a_y = m\ddot{y}} \tag{3.7}$$

tn-koordinaatisto:

$$\boxed{R_t = m a_t = m\dot{v} \qquad R_n = m a_n = m v^2 / \rho} \tag{3.8}$$

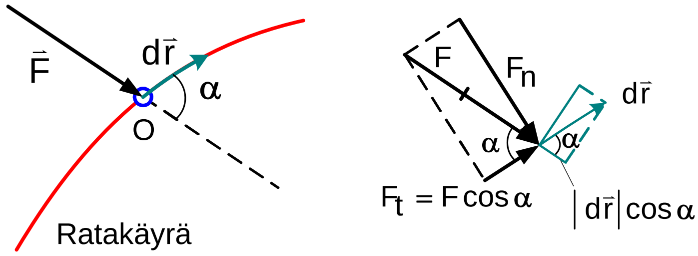
Napakoordinaatisto:

$$\boxed{R_r = m a_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \qquad R_\theta = m a_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})} \tag{3.9}$$

3.5 Partikkelin työlause

Edellä partikkelin kinetiikan tehtävän ratkaisu perustui suoraan liikeyhtälöiden ratkaisemiseen. Tällöin nopeus ja asema on laskettava integroimalla kiihtyvyyden lausekkeesta. Toisinaan halutaan laskea vain partikkelin asema tai nopeus tiettynä ajan hetkenä. Näitä tapauksia ajatellen integrointi on hyödyllistä suorittaa yleisestä liikeyhtälöstä lähtien. Tällöin saadaan yleinen tulos, jota soveltaen ratkaisu tulee lyhyemmäksi. Kun partikkeliin vaikuttavia voimaresultantti tunnetaan aseman funktiona, integroimalla liikeyhtälö aseman suhteen saadaan tulos, jota sanotaan työlauseeksi.

Kun voiman $\vec{F}$ vaikutuspiste O jostain syystä siirtyy matkan $d\vec{r}$, on voiman tekemä työ määritelmän mukaan skalaari $dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$ kuvan 3.3 mukaisesti. Pistetulon määritelmän mukaan on edelleen $dW = F\,ds\cos\alpha$, missä α on vektoreiden $\vec{F}$ ja $d\vec{r}$ välinen kulma ja $ds = |d\vec{r}|$.



Kuva 3.3 Voiman tekemä työ.

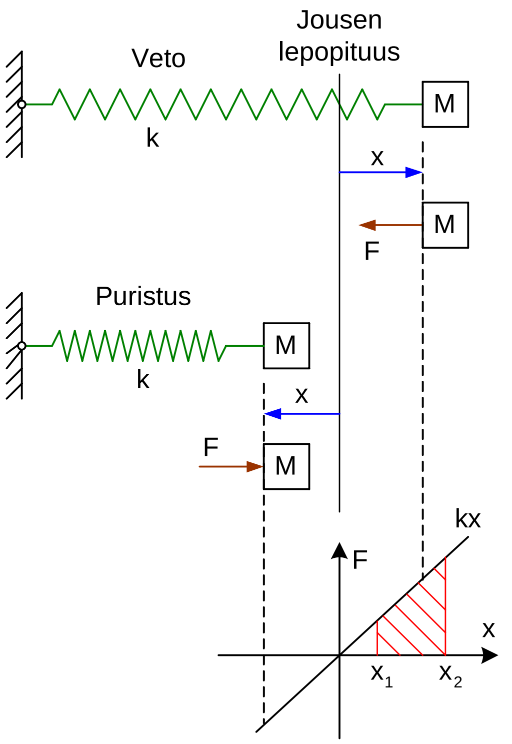
Tämä voidaan tulkita niin, että voiman tekemä työ on siirtymän $d\vec{r}$ suuruus ds kerrottuna voiman siirtymän suuntaisella komponentilla $F\cos\alpha$. Toinen mahdollisuus on tulkita, että työ on voiman $\vec{F}$ suuruus F kerrottuna siirtymän voiman suuntaisella komponentilla $ds\cos\alpha$. Näitä tulkintoja on havainnollistettu kuvassa 3.3. Huomattakoon vielä, että siirtymää $d\vec{r}$ vastaan kohtisuora voimakomponentti $\vec{F}_n = \vec{F}\sin\alpha$ ei tee työtä. Työ on positiivinen, jos komponentti $\vec{F}_t = \vec{F}\cos\alpha$ ja siirtymä $d\vec{r}$ ovat samansuuntaiset, mutta negatiivinen niiden ollessa vastakkaissuuntaiset. Kun voiman $\vec{F}$ vaikutuspiste O siirtyy pitkin partikkelin ratakäyrää asemasta $s = s_A$ asemaan $s = s_B$, on voiman tekemä työ

$$W = \int_{s_A}^{s_B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{s_A}^{s_B} (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz) = \int_{s_A}^{s_B} F_t\,ds \tag{3.10}$$

jolloin on merkitty $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$ ja $d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$. Kaavan (3.10) integraali voidaan laskea, kun voimakomponenttien riippuvuus siirtymistä tunnetaan. Jos F_t on vakio koko siirtymän matkan, on

$$W = F_t\int_{s_A}^{s_B} ds = F_t\,(s_B - s_A) = F_t\,\Delta s \tag{3.11}$$

jossa Δs on ratakäyrää pitkin kuljettu matka. Tavallisin esimerkki muuttuvan voiman tekemästä työstä on jousivoiman tekemä työ. Tarkastellaan kuvan 3.4 avulla työtä, jonka muuttuva jousivoima F tekee partikkeliin M, kun se jostain syystä liikkuu. Jousen oletetaan käyttäytyvän samalla tavalla veto- ja puristuspuolella ja noudattavan lineaarisen jousen yhtälöä $F = k\,x$. Kuvasta 3.4 nähdään, että kummassakin tapauksessa siirtymän kasvaessa partikkeliin vaikuttava voima F on vastakkaissuuntainen



Kuva 3.4 Jousivoiman tekemä työ.

siirtymälle x eli partikkeliin M tehty työ on negatiivinen. Kun jousen siirtymä kasvaa arvosta x_1 arvoon x_2, on partikkeliin M tehdyn työn lauseke

$$W_{1-2} = -\int_{x_1}^{x_2} F\,dx \quad \Rightarrow$$
$$W_{1-2} = -\int_{x_1}^{x_2} k\,x\,dx = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2) \tag{3.12}$$

Jos jousen siirtymä pienenee arvosta x_2 arvoon x_1, ovat F ja x samansuuntaiset ja partikkeliin M tehty työ on positiivinen. Työn itseisarvo on molemmissa tilanteissa $F-x$ kuvaan viivoitetun pinnan ala. Jousen yhtälö $F = k\,x$ pätee tarkasti ottaen vain staattisessa tilanteessa, jolloin jousella ei ole kiihtyvyyttä. Jousen dynaamisen käyttäytymisen tarkka käsittely on melko hankalaa, eikä siihen tässä ryhdytä. Jos jousen massa on pieni systeemin muihin massoihin verrattuna, ei staattisen jousiyhtälön käyttö aiheuta suurta virhettä.

Koneen tehokkuutta kuvaa nopeus, jolla se kykenee tekemään työtä tai luovuttamaan energiaa. Koneen teho P on sen tekemä työ aikayksikköä kohti. Jos voima $\vec{F}$ tekee työn dW, on sen kehittämä teho

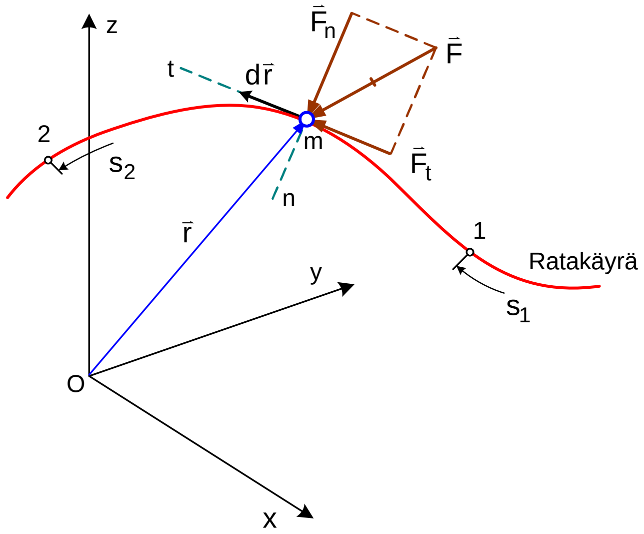
$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{F}\cdot d\vec{r}) = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} \tag{3.13}$$

Teho on skalaarisuure. Koneen hyötysuhde η on

$$\eta = \frac{P_u}{P_s} \tag{3.14}$$

missä P_u on koneesta saatu teho ja P_s koneeseen tuotu teho. On selvää, että energiahäviöiden takia on aina $\eta < 1$.

Tarkastellaan pitkin mielivaltaista ratakäyrää liikkuvaa partikkelia (massa m) ja siihen vaikuttavaa voimaa $\vec{F}$ kuvan 3.5 mukaisesti. Partikkelin paikkavektori on $\vec{r}$ ja se muuttuu ajassa dt määrän $d\vec{r}$. Voiman $\vec{F}$ tekemä työ tämän siirtymän aikana on $dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$. Partikkelin liikkuessa asemasta s_1 asemaan s_2 tekee voima $\vec{F}$ työn



Kuva 3.5 Työlause.

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_{s_1}^{s_2} F_t \, ds \qquad (3.15)$$

Kun otetaan huomioon Newtonin II laki $\bar{F} = m\bar{a}$, saadaan

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_{s_1}^{s_2} m\bar{a} \cdot d\bar{r} \qquad (3.16)$$

Kaavassa (3.16) on $\bar{a} \cdot d\bar{r} = a_t \, ds$, jossa a_t on kiihtyvyyden tangentiaalinen komponentti ja ds vektorin $d\bar{r}$ pituus. Energiadifferentiaaliyhtälön (2.3) mukaan on voimassa $a_t \, ds = v \, dv$, josta seuraa

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_{v_1}^{v_2} m v \, dv = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) \qquad (3.17)$$

Kaavassa (3.17) v_1 ja v_2 ovat partikkelin nopeudet kohdissa s_1 ja s_2.

Partikkelin liike-energia T määritellään kaavalla

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m v^2} \qquad (3.18)$$

Liike-energia T on yhtä suuri kuin työ, joka on tehtävä, jotta partikkeli saataisiin levosta liikkumaan nopeudella v. Liike-energia on skalaari ja aina positiivinen nopeuden suunnasta riippumatta. Tulos (3.17) voidaan kirjoittaa liike-energian avulla muotoon

$$\boxed{W_{1-2} = \Delta T = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)} \qquad (3.19)$$

jota sanotaan partikkelin työlauseeksi. Työlauseen mukaan partikkeliin vaikuttavien voimien kokonaistyö tietyllä aikavälillä ilmenee partikkelin liike-energian muutoksena. Työlauseen vaihtoehtoinen esitysmuoto on

$$\boxed{T_1 + W_{1-2} = T_2} \qquad (3.20)$$

jossa T_1 on liike-energia aikavälin alussa ja T_2 lopussa. Työlausetta käytettäessä ei kiihtyvyyttä tarvitse laskea ollenkaan, sillä se antaa suoraan nopeuden muutoksen voimien tekemän työn avulla. Työlauseessa esiintyvät vain voimat, jotka tekevät työtä aiheuttaen näin nopeuden muutoksia.

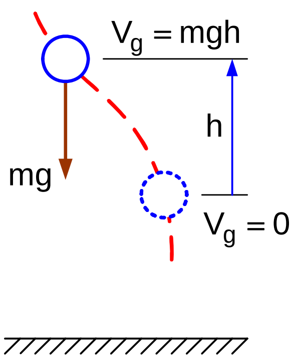
Paitsi partikkelille työlause (3.19) on voimassa myös usean partikkelin systeemille, jossa partikkelit on yhdistetty toisiinsa kitkattomilla ja jäykillä kytkennöillä. Tällöin systeemin sisäisten voimien työ on voiman ja vastavoiman periaatteen nojalla nolla ja työlauseeseen tulee vain systeemin kannalta ulkoisten voimien työ. Liike-energian muutos ΔT on tällöin systeemin kaikkien partikkeleiden liike-energian muutosten summa. Työlauseella voidaan näin ollen käsitellä edellä kuvattua partikkelisysteemiä kokonaisuutena hajottamatta sitä osiin.

3.6 Potentiaalienergia

Työlauseessa (3.19) on työtermissä W_{1-2} mukana kaikkien partikkeliin tai jäykkään partikkelisysteemiin vaikuttavien ulkoisten voimien tekemät työt. Painovoiman ja jousen voiman tekemä työ voidaan ottaa jonkin verran helpommin huomioon potentiaalienergian avulla, jolloin työlause menee hieman toiseen asuun.

Tarkastellaan ensin painovoiman vaikutusta. Jos kyseessä on lähellä maan pintaa tapahtuva liike, on partikkelin painovoima mg lähes vakio. Kun partikkeli siirtyy tasolta $h=h_1$ tasolle $h=h_2$, on painovoiman tekemä työ

$$W_g = -mg(h_2 - h_1) = -mg\Delta h \tag{3.21}$$



Kuva 3.6 Potentiaalienergia.

Gravitaatiopotentiaalienergia määritellään kaavalla

$$V_g = mgh \tag{3.22}$$

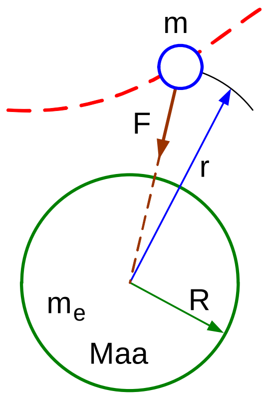
ja se on työ, joka partikkeliin on tehtävä, jotta se nousisi matkan h vertailutason yläpuolelle. Vertailutasossa $V_g = 0$. Kuvassa 3.6 on havainnollistettu potentiaalienergiaa. Kun partikkeli siirtyy tasolta $h=h_1$ tasolle $h=h_2$, on potentiaalienergian muutos

$$\Delta V_g = mg(h_2 - h_1) = mg\Delta h \tag{3.23}$$

joten painovoiman tekemä työ on potentiaalienergian muutoksen vastaluku.

Kun tarkastellaan suuria korkeuden muutoksia maan vetovoimakentässä, on painovoima Newtonin IV lain mukainen $F = \gamma m m_e / r^2 = mgR^2 / r^2$, joka ei ole vakio. Kun partikkelin etäisyys muuttuu arvosta r_1 arvoon r_2, tekee painovoima työn

$$W_g = -\int_{r_1}^{r_2} mgR^2 \frac{dr}{r^2} = mgR^2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \tag{3.24}$$



Kuva 3.5 Potentiaalienergia.

Gravitaatiopotentiaalienergia määritellään kaavalla

$$V_g = -mgR^2 / r \tag{3.25}$$

jolloin $V_g = 0$, kun $r = \infty$. Kun partikkeli siirtyy etäisyydeltä $r = r_1$ etäisyydelle $r = r_2$, on potentiaalienergian muutos

$$\Delta V_g = -mgR^2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \tag{3.26}$$

joka on jälleen painovoiman tekemän työn vastaluku. Potentiaalienergia riippuu vain partikkelin asemasta h tai r, mutta ei tiestä, jota pitkin kyseiseen asemaan on tultu.

Tutkitaan sitten lineaarisen jousen voiman partikkeliin tekemää työtä. Jousen pituuden muuttamiseksi tehty työ varastoituu jousen potentiaalienergiaksi V_e, jota sanotaan myös kimmoenergiaksi. Jousen kimmoenergia on määritelmän mukaan

$$V_e = \frac{1}{2} k x^2 \tag{3.27}$$

Jousen pituuden muutoksen muuttuessa arvosta x_1 arvoon x_2 on sen kimmoenergian muutos

$$\Delta V_e = \frac{1}{2} k (x_2^2 - x_1^2) \tag{3.28}$$

Kaavoista (3.12) ja (3.28) näkyy, että jousivoiman partikkeliin tekemä työ on kimmoenergian muutoksen vastaluku.

Kun painovoiman ja jousen voiman tekemät työt otetaan huomioon potentiaalienergian ja kimmoenergian avulla, voidaan työlause (3.19) kirjoittaa muotoon

$$W'_{1-2} + (-\Delta V_g) + (-\Delta V_e) = \Delta T \tag{3.29}$$

jossa W'_{1-2} sisältää muiden ulkoisten voimien työt. Tulos (3.29) menee muotoon

$$\boxed{W'_{1-2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e} \tag{3.30}$$

Työlause on muodossa (3.30) helppokäyttöisempi, koska ΔV_g ja ΔV_e voidaan laskea pelkästään systeemin alku- ja lopputilojen avulla, kun taas vastaavien töiden laskemisessa joudutaan ottamaan huomioon partikkelin liikerata.

Työlause (3.30) voidaan vielä kirjoittaa muotoon

$$W'_{1-2} = \Delta(T + V_g + V_e) = \Delta E \tag{3.31}$$

jossa $E = T + V_g + V_e$ on partikkelin ja siihen liittyvien jousien mekaaninen energia. Jos painovoima, jousivoima ja työtä tekemättömät tukivoimat ovat systeemin ainoat voimat, on työ $W'_{1-2} = 0$. Tällöin on voimassa

$$\Delta E = 0 \qquad \Rightarrow \qquad E = \text{vakio} \tag{3.32}$$

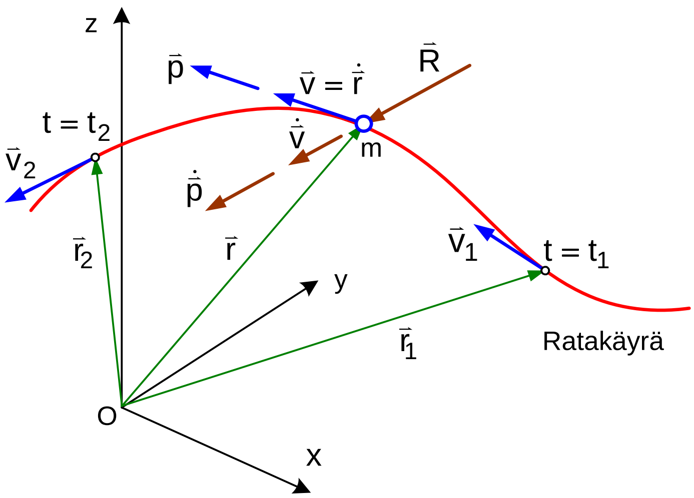
jota sanotaan mekaanisen energian säilymisen laiksi.

3.7 Partikkelin impulssilauseet

Kun partikkelin liikeyhtälö ja siitä saatava momenttiliikeyhtälö integroidaan ajan suhteen, saadaan impulssilauseet. Impulssilauseita voidaan käyttää hyväksi erityisesti tehtävissä, joissa voimat tunnetaan ajan funktiona.

3.7.1 Voiman impulssilause

Tarkastellaan partikkelin liikettä kuvan 3.6 avulla. Partikkelin paikkavektori on $\vec{r}$ ja nopeusvektori $\vec{v}$ on ratakäyrän tangentin suuntaan. Partikkeliin vaikuttavien voimien resultantti $\vec{R}$ on samaan suuntaan kuin kiihtyvyys $\vec{a}$. Kun massa m on vakio, liikeyhtälö (3.2) menee muotoon



Kuva 3.6 Impulssilause.

$$\vec{R} = m\dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{R} = \dot{\vec{p}}} \tag{3.33}$$

Suuretta $\vec{p} = m\vec{v}$ sanotaan partikkelin liikemääräksi. Yhtälön (3.33) mukaan partikkeliin vaikuttavien voimien resultantti on yhtä suuri kuin sen liikemäärän muutosnopeus.

Tulos (3.33) voidaan laittaa muotoon $\vec{R}\,dt = d\vec{p}$ ja integroida ajan suhteen hetkestä t_1 hetkeen t_2, jolloin seuraa

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{R}\,dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \tag{3.34}$$

jossa $\vec{p}_2 = m\vec{v}_2$ on liikemäärä hetkellä t_2 ja $\vec{p}_1 = m\vec{v}_1$ liikemäärä hetkellä t_1. Yhtälön (3.34) vasemmalla puolella olevaa suuretta

$$\vec{I}_R = \int_{t_1}^{t_2} \vec{R}\,dt \tag{3.35}$$

sanotaan partikkeliin vaikuttavan voimaresultantin $\vec{R}$ impulssiksi aikavälillä $[t_1, t_2]$. Jos resultantti $\vec{R}$ on vakio aikavälillä $[t_1, t_2]$, tulee impulssin lausekkeeksi

$$\vec{I}_R = \vec{R}(t_2 - t_1) = \vec{R}\,\Delta t \tag{3.36}$$

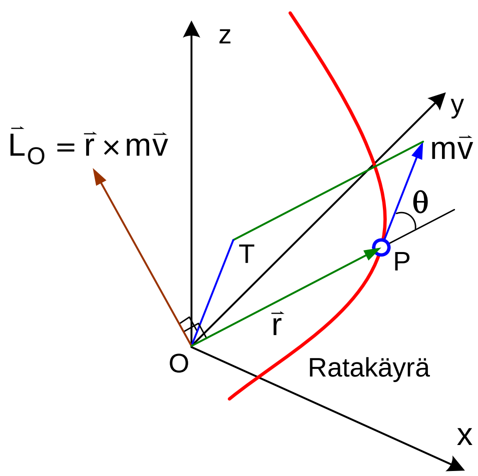
Tulosta (3.34) sanotaan voiman impulssilauseeksi. Sen mukaan partikkeliin vaikuttavan voimaresultantin impulssi tietyllä aikavälillä on yhtä suuri kuin partikkelin liikemäärän muutos tällä aikavälillä.

Jos voimaresultantin impulssi $\vec{I}_R = \vec{0}$ aikavälillä $[t_1, t_2]$, seuraa kaavasta (3.32)

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta\vec{p} = \vec{0} \tag{3.37}$$

jolloin partikkelin liikemäärä säilyy tällä aikavälillä. On myös mahdollista, että liikemäärä säilyy vain jossakin koordinaattisuunnassa.

3.7.2 Momentin impulssilause

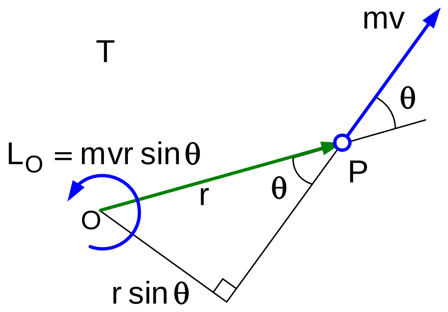


Kuva 3.7 Liikemäärän momentti.

Kuvassa 3.7 on esitetty partikkeli P, joka liikkuu pitkin mielivaltaista ratakäyrää. Partikkelin paikkavektori kiinteän pisteen O suhteen on $\vec{r}$, nopeusvektori $\vec{v}$ ja liikemäärä $\vec{p} = m\vec{v}$. Partikkelin liikemäärän momentti $\vec{L}_O$ pisteen O suhteen on määritelmän mukaan

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{3.38}$$

$\vec{L}_O$ on vektori, joka on kohtisuorassa vektoreiden $\vec{r}$ ja $\vec{v}$ määräämää tasoa T vastaan kuvan 3.7 mukaisesti. Ristitulon määritelmän



Kuva 3.8 Liikemäärän momentti.

mukaan vektorin $\vec{L}_O$ pituus on $L_O = mrv\sin\theta$, jota on havainnollistettu kuvassa 3.8 tarkastelemalla tilannetta tasossa T. Liikemäärän momentin suuruus voidaan kirjoittaa muotoon $L_O = mvd$, jossa mv on liikemäärän suuruus ja $d = r\sin\theta$ sen momenttivarsi. Tasodynamiikan tehtävissä liikemärän momentin suuruus ja suunta voidaan näin ollen ratkaista samalla periaatteella kuin statiikassa voiman momentin suuruus ja suunta.

Partikkeliin vaikuttavien voimien resultantin $\vec{R}$ momentti $\vec{M}_O$ pisteen O suhteen on määritelmän mukaan

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times m\dot{\vec{v}} \tag{3.39}$$

jossa on käytetty hyväksi Newtonin II lakia. Derivoidaan kaava (3.38) puolittain ajan suhteen, jolloin seuraa tulos

$$\dot{\vec{L}}_O = \dot{\vec{r}} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\dot{\vec{v}} = \vec{r} \times m\dot{\vec{v}} \tag{3.40}$$

sillä $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ ja $\vec{v} \times m\vec{v} = \vec{0}$. Kaavoista (3.39) ja (3.40) näkyy tulos

$$\boxed{\vec{M}_O = \dot{\vec{L}}_O} \tag{3.41}$$

jonka mukaan partikkeliin vaikuttavan voimaresultantin momentti kiinteän pisteen O suhteen on yhtä suuri kuin sen pisteen O suhteen lasketun liikemäärän momentin muutosnopeus.

Kaava (3.41) voidaan laittaa muotoon $\vec{M}_O\,dt = d\vec{L}_O$ ja integroida ajan suhteen hetkestä t_1 hetkeen t_2, jolloin seuraa tulos

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_O\,dt = \vec{L}_{O2} - \vec{L}_{O1}} \tag{3.42}$$

jossa $\vec{L}_{O2} = \vec{r}_2 \times m\vec{v}_2$ on liikemäärän momentti hetkellä t_2 ja $\vec{L}_{O1} = \vec{r}_1 \times m\vec{v}_1$ liikemäärän momentti hetkellä t_1. Yhtälön (3.42) vasemmalla puolella olevaa suuretta

$$\vec{I}_{MO} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_O \, dt \tag{3.43}$$

sanotaan momentin impulssiksi aikavälillä $[t_1, t_2]$. Jos momentti $\vec{M}_O$ on vakio aikavälillä $[t_1, t_2]$, tulee momentin impulssin lausekkeeksi

$$\vec{I}_{MO} = \vec{M}_O \, (t_2 - t_1) = \vec{M}_O \, \Delta t \tag{3.44}$$

Tulosta (3.42) sanotaan momentin impulssilauseeksi. Sen mukaan momentin impulssi tietyllä aikavälillä on yhtä suuri kuin partikkelin liikemäärän momentin muutos tällä aikavälillä.

Jos momentin impulssi $\vec{I}_{MO} = \vec{0}$ aikavälillä $[t_1, t_2]$, seuraa kaavasta (3.42) tulos

$$\vec{L}_{O2} - \vec{L}_{O1} = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta \vec{L}_O = \vec{0} \tag{3.45}$$

jolloin partikkelin liikemäärän momentti säilyy tällä aikavälillä. Liikemäärän momentti voi myös säilyä ainoastaan jonkin yksittäisen akselin suhteen. Liikemäärän ja sen momentin säilymisen välillä ei ole mitään yleistä yhteyttä, toinen niistä voi säilyä, vaikka toinen ei säilykään.