III.5. Suorakulmion (sivut a ja b) muotoisen varastohuoneen lattialaatan sivut ovat niveltuetut. Lattialle on varastoitu rakeista ainetta, josta aiheutuvaa kuormitusta approksimoidaan lausekkeella $p(x,y) = p_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}$, jolloin p_0 on kuormitustiheys laatan keskikohdalla. Määritä laatan suureiden w, M_x, M_y, M_{xy}, Q_x ja Q_y lausekkeet. Laske korvikeleikkausvoima V_x laatan reunoilla $x = 0$ ja $x = a$ sekä korvikeleikkausvoima V_y laatan reunoilla $y = 0$ ja $y = b$ ja päättele näistä laatan tukireaktiot. Vertaa tukireaktioiden ja kuormituksen resultantteja ja totea niiden erosta laatan nurkkavoimien arvot.

Ratkaisu:

Kuormitus on valmiiksi 'kaksoissinisarjana' ja sarjassa on vain yksi termi, $m = 1$, $n = 1$ ja $p_{11} = p_0$. Taipuman 'kaksoissinisarjaksi' tulee vastaavasti

$$w(x,y) = \frac{p_0}{\pi^4 D\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}$$

Laattamomentit:

$$M_x = -D(w,_{xx} + \nu\, w,_{yy}) \quad \Rightarrow \quad M_x(x,y) = \frac{p_0}{\pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2}\right) \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}$$

$$M_y = -D(w,_{yy} + \nu\, w,_{xx}) \quad \Rightarrow \quad M_y(x,y) = \frac{p_0}{\pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2}\left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu)\, w,_{xy} \quad \Rightarrow \quad M_{xy}(x,y) = -\frac{p_0}{\pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \frac{1-\nu}{ab} \cos\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{b}$$

Laatan leikkausvoimat:

$$Q_x = -D(w,_{xx} + w,_{yy}),_x \quad \Rightarrow \quad Q_x(x,y) = \frac{p_0}{\pi\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)} \frac{1}{a} \cos\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}$$

$$Q_y = -D(w,_{xx} + w,_{yy}),_y \quad \Rightarrow \quad Q_y(x,y) = \frac{p_0}{\pi\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)} \frac{1}{b} \sin\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{b}$$

Laatan korvikeleikkausvoimat:

Reunoilla $x = \text{vakio}$ $V_x = Q_x + M_{xy,y} \quad \Rightarrow$

$$V_x(x,y) = \frac{p_0}{\pi\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}\frac{1}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} + \frac{p_0}{\pi\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2}\frac{1-\nu}{ab^2}\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \quad \Rightarrow$$

$$V_x(x,y) = \frac{p_0}{\pi\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2}\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{2-\nu}{b^2}\right)\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$$

Reunoilla $y = \text{vakio}$ $V_y = Q_y + M_{xy,x} \quad \Rightarrow$

$$V_y(x,y) = \frac{p_0}{\pi\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}\frac{1}{b}\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b} + \frac{p_0}{\pi\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2}\frac{1-\nu}{a^2 b}\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b} \quad \Rightarrow$$

$$V_y(x,y) = \frac{p_0}{\pi\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2}\frac{1}{b}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{2-\nu}{a^2}\right)\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}$$

Tukireaktiot reunoilla $x = \text{vakio}$ (z-akselin negatiiviseen suuntaan):

$$x = 0: \quad R_{x0}(y) = V_x(0,y) = \frac{p_0}{\pi\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2}\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{2-\nu}{b^2}\right)\sin\frac{\pi y}{b}$$

$$x = a: \quad R_{xa}(y) = -V_x(a,y) = \frac{p_0}{\pi\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2}\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{2-\nu}{b^2}\right)\sin\frac{\pi y}{b} = R_{x0}(y)$$

Tukireaktiot reunoilla $y = \text{vakio}$ (z-akselin negatiiviseen suuntaan):

$$y = 0: \quad R_{y0}(x) = V_y(x,0) = \frac{p_0}{\pi\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2}\frac{1}{b}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{2-\nu}{a^2}\right)\sin\frac{\pi x}{a}$$

$$y = b: \quad R_{yb}(x) = -V_y(x,b) = \frac{p_0}{\pi\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2}\frac{1}{b}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{2-\nu}{a^2}\right)\sin\frac{\pi x}{a} = R_{y0}(x)$$

Kuormituksen resultantti (z-akselin positiiviseen suuntaan):

$$R = \int_0^a \int_0^b p_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} dx\,dy = p_0 \Big/_0^a \left(-\frac{a}{\pi}\cos\frac{\pi x}{a}\right) \Big/_0^b \left(-\frac{b}{\pi}\cos\frac{\pi y}{b}\right) = \frac{4 p_0 ab}{\pi^2}$$

Reunoille jakaantuneiden tukireaktioiden resultantti (z-akselin negatiiviseen suuntaan):

$$T = 2 \cdot \int_0^b R_{x0}(y)\,dy + 2 \cdot \int_0^a R_{y0}(x)\,dx =$$

$$= \frac{2p_0}{\pi\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2} \cdot \left(\int_0^b \frac{1}{a}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{2-\nu}{b^2}\right)\sin\frac{\pi y}{b} dy + \int_0^a \frac{1}{b}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{2-\nu}{a^2}\right)\sin\frac{\pi x}{a} dx \right)$$

$$= \frac{2p_0}{\pi\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2} \cdot \left[\frac{b}{a\pi}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{2-\nu}{b^2}\right)\cdot 2 + \frac{a}{b\pi}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{2-\nu}{a^2}\right)\cdot 2 \right]$$

$$= \frac{4p_0 ab}{\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2} \left[\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{2-\nu}{b^2}\right) + \frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{2-\nu}{a^2}\right) \right]$$

$$= \frac{4p_0 ab}{\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2} \left[\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+2\cdot\frac{1}{a^2 b^2}\right) + 2\cdot\frac{1-\nu}{a^2 b^2} \right] = \frac{4p_0 ab}{\pi^2} + \frac{8p_0(1-\nu)}{\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2 ab}$$

Reunoille jakaantuneiden tukireaktioiden resultantin suuruus on termin $\dfrac{8p_0(1-\nu)}{\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2 ab}$ verran suurempi kuin kuormitusresultantin suuruus, joten lisäksi laatan nurkkiin vaikuttavat z-akselin positiiviseen suuntaan nurkkavoimat

$$R_{nurkka} = \frac{2p_0(1-\nu)}{\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2 ab}$$