

1 JOHDANTO

1.1 Yleistä

Lujuuslaskentatehtävissä on tavoitteena ratkaista annetuista kuormituksista aiheutuvat rakenteen siirtymätilakenttä, muodonmuutostilakenttä ja jännitystilakenttä, kun rakenteen tuenta tunnetaan. Kenttien ratkaisemisessa tarvittavat yhtälöt tunnetaan lujuusopin teoriasta. Lineaarisen kimmoteorian perusyhtälöjärjestelmä sisältää yhtälöt, joista saadaan minkä tahansa lineaarisen lujuusopin tehtävän ratkaisu. Käytännössä yleisen yhtälöjärjestelmän analyyttinen ratkaisu onnistuu vain yksinkertaisen geometrian omaavien rakenteiden peruskuormitustapauksissa. Mutkikkaammissa tilanteissa ratkaisua ei löydetä suljetussa muodossa tavanomaisten matemaattisten funktioiden avulla, vaan joudutaan tyytymään likimääräiseen ratkaisuun. Tästä on seurannut likimääräisten numeeristen ratkaisumenetelmien voimakas kehittyminen.

Numeerisia ratkaisumenetelmiä on kehitetty varsin monenlaisia. Parhaaksi niistä on osoittautunut elementtimenetelmä ja nykyään lujuuslaskennassa käytetäänkin lähes yksinomaan sitä. Elementtimenetelmän käyttö alkoi Yhdysvalloissa lentokoneiteollisuudessa 1950-luvulla ja levisi sieltä nopeasti kone- ja rakennustekniikan alueille rakenteiden statiikan ja dynamiikan käsittelyyn. Elementtimenetelmän englanninkielinen nimi on Finite Element Method, josta tulevaa lyhennettä FEM käytetään myös muissa kielissä. Usein käytetään myös lyhennettä FEA, joka tulee sanoista Finite Element Analysis, ja tarkoittaa elementtimenetelmällä suoritettavaa laskentaa.

Elementtimenetelmän menestys perustuu tietokoneisiin, jotka tekevät mahdolliseksi suurten numerolaskumäärien käsittelyn kohtuullisessa ajassa. Menetelmä kehittyi tietokoneiden mukana nopeasti 1960- ja 1970-luvuilla, jolloin syntyi monia lineaarisen statiikan ja dynamiikan ohjelmistoja. Nämä toimivat keskustietokoneissa ja olivat hankalakäyttöisiä, sillä syöttötiedot piti antaa kokonaan manuaalisesti. 1980-luvulta lähtien on FEM-ohjelmistoihin kehitetty esi- ja jälkikäsittelyohjelmistoja, joiden ansiosta niistä on tullut melko käyttäjäystävällisiä. Ohjelmistojen käyttö tuli mahdolliseksi myös mikrotietokoneissa, kun niiden laskentakapasiteetti kehittyi riittävälle tasolle. Laskentamahdollisuuksia on laajennettu lineaarisen lujuusopin alueelta niin, että nykyisin voidaan tutkia niin geometrian kuin materiaalin epälineaarista käyttäytymistä.

Jo elementtimenetelmän kehityksen alkuvaiheessa sen havaittiin soveltuvan lujuuslaskennan lisäksi muillekin teknillisen laskennan alueille. Osoittautui, että elementtimenetelmää voidaan käyttää minkä tahansa osittaisdifferentiaaliyhtälöryhmän alkua ja reuna-arvotehtävän likimääräiseen ratkaisemiseen. Elementtimenetelmä on levinnyt teknillisen mekaniikan piiristä laajasti muille tekniikan aloille. Sitä käytetään esimerkiksi lämmönsiirron, virtausopin, maamekaniikan, kalliomekaniikan, sähkötekniikan ja akustiikan tehtävien ratkaisemisessa. Elementtimenetelmän sovellusarvon selvittyä sen matemaattisten perusteiden tutkiminen käynnistyi ja nykyisin elementtimenetelmän teorian matemaattinen tausta on tarkoin selvitetty.

Lujuusopin elementtimenetelmän perusyhtälöt voidaan johtaa kaikille rakennetyypeille lähtemällä liikkeelle lujuusopin perussuureita hallitsevista osittaisdifferentiaaliyhtälöistä tai näiden kanssa ekvivalenteista työ- ja energiaperiaatteista. Perusyhtälöt muodostetaan elementtien alueissa toteutettavan interpoloinnin avulla ja niistä saadaan tarkasteltavalle tehtävälle likiratkaisu. Kolmiulotteisille solidirakenteille ja pintarakenteille (levyt, laatat ja kuoret) interpolointiin perustuva elementtimenetelmä on ainoa mahdollinen. Ristikko- ja kehärakenteille on mahdollista käyttää myös yksinkertaisempaa suoraa elementtimenetelmää, jolloin perusyhtälöt muodostetaan sauva- ja palkkiteoriaa käyttäen. Koska interpolointia ei suorassa elementtimenetelmässä käytetä, johtaa se sovellettavan teorian puitteissa tarkkaan ratkaisuun. Tässä tarkastellaan aluksi suoraa elementtimenetelmää, mutta myöhemmin esitetään elementtimenetelmän yleinen interpolointiin perustuva teoria.

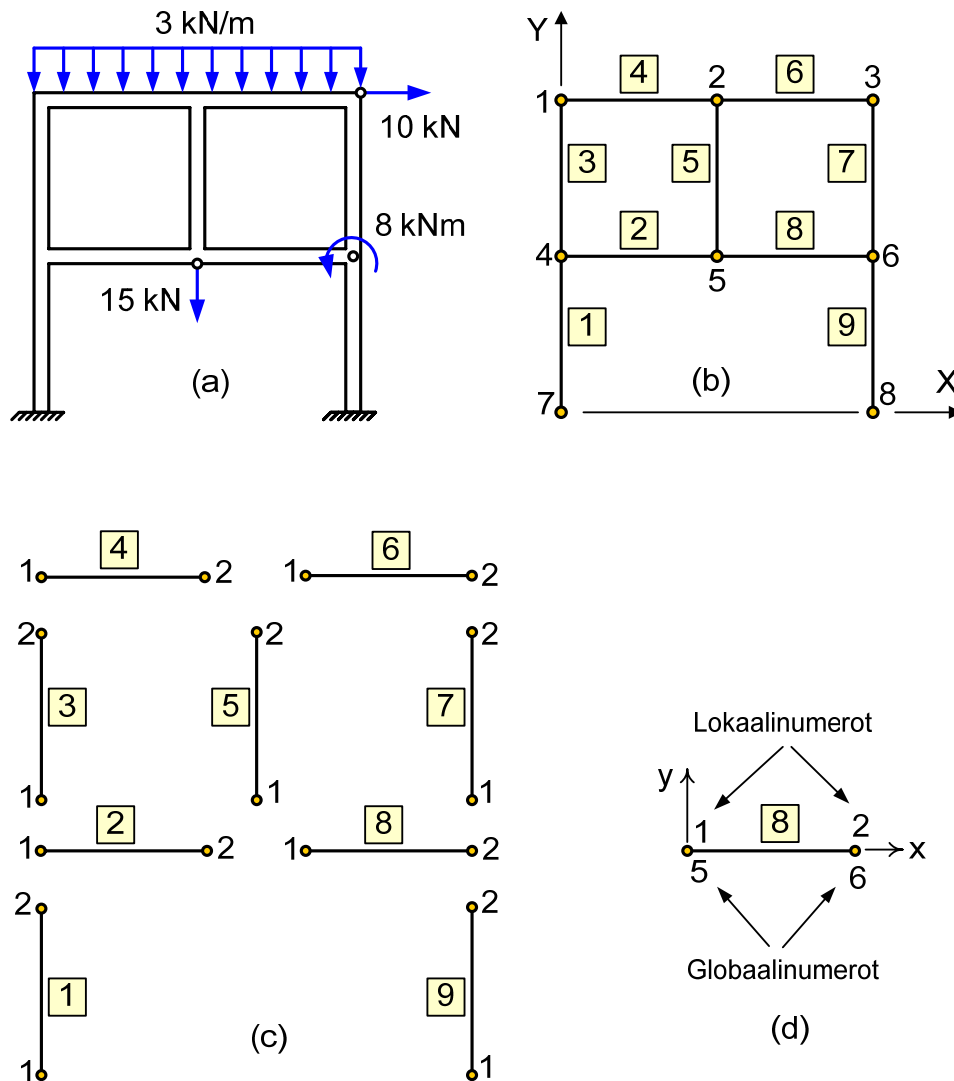
1.2 Elementtimenetelmän perusajatukset

1.2.1 Elementtiverkko

Lujuusopin perusdifferentiaaliyhtälöiden analyyttinen ratkaiseminen onnistuu vain yksinkertaisen geometrian, kuormituksen ja tuennan omaavissa perustapauksissa. Elementtimenetelmässä geometrisesti mutkikas kappale jaetaan äärellisiin osiin, jotka ovat geometrialtaan tarpeeksi yksinkertaisia. Näitä jako-osia sanotaan elementteiksi. Kolmiulotteisen kappaleen elementteinä käytetään neli-, viisi- ja kuusitahokkaita, joiden reunapinnat voivat olla tasoja tai yksinkertaisia kaarevia pintoja. Näitä sanotaan tetraedri-, kiila- ja tiiliskivielementeiksi vastaavasti. Pintarakenteiden yhteydessä käytetään neli- ja kolmisivuisia tasoelementtejä, joiden reunaviivat voivat olla suoria tai yksinkertaisia käyriä viivoja. Tasoelementtejä sanotaan nelikulmio- ja kolmioelementeiksi. Viivarakenteissa käytetään janaelementtejä, tyypillisiä janaelementtejä ovat sauva- ja palkkielementti. Lisäksi on käytössä suuri joukko harvinaisempia elementtejä erityistarkoituksiin, kuten esimerkiksi kontaktielementit, liitoselementit, särön kärjen elementit ja puoliäärettömät elementit.

Kappaleiden jako-osina käytettävien elementtien koko voi vaihdella paljon tarkasteltavan ongelman luonteesta riippuen, myös tietyn kappaleen eri osissa voi esiintyä suuria kokovaihteluja. Kappaleen elementtijaossa voidaan käyttää samanaikaisesti erityyppisiä ja muotoisia sekä erilaiset geometriset ja materiaaliominaisuudet sisältäviä elementtejä, mikä tekee elementtimenetelmästä joustavan yhdistettyjen rakenteiden käsittelyssä. Kappale kuvataan elementtijoukolla, jota sanotaan elementtiverkoksi tai laskentamalliksi. Elementtiverkko kuvaa todellista kappaletta usein vain likimääräisesti varsinkin pinta- ja solidirakenteilla, mikä aiheuttaa saataviin tuloksiin virhettä. Tämä mallinnusvirhe ei lujuuslaskennassa ole kovin merkittävä, mikäli käytetään kaarevareunaisia ja riittävän pieniä elementtejä. Vierekkäiset elementit liittyvät toisiinsa tietyissä pisteissä, joita sanotaan solmuksi. Elementtiverkko koostuu joukosta elementtejä, jotka liittyvät toisiinsa solmuissa.

Kuvassa 1.1 on tasokehä (a), sen eräs mahdollinen elementtiverkko (b), kaikki elementit (c) ja yksittäinen elementti 8 (d). Elementtiverkon kuvassa (b) on kullakin ele-

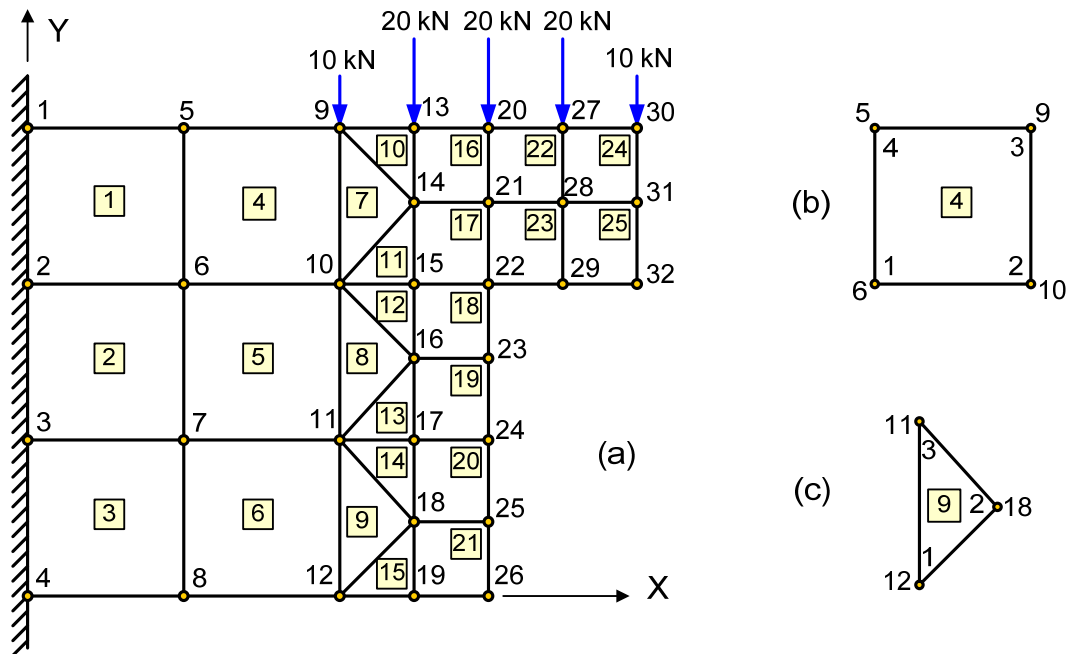


Kuva 1.1 Tasokehän elementtiverkko.

mentillä oma elementtinumero. Se on keltaisella taustalla erotukseksi solmunumeroista. Kuvassa (c) on kullakin elementillä kaksi solmua, toisella niistä (alkusolmu) on solmunumero 1 ja toisella (loppusolmu) solmunumero 2. Solmuille otetaan käyttöön kaksi numerointijärjestelmää, paikallinen eli lokaalinenumerointi ja verkko- eli globaalinenumerointi. Kuvassa (d) on elementin 8 molemmat numeroinnit. Tässä tapauksessa rakenteen elementtiverkossa on käytetty 2-solmuista tasokehän palkkielementtiä ja koko rakenne on mallinnettu tätä yhtä elementtityyppiä käyttäen.

Kuvassa 1.2 (a) on elementtiverkko, jossa levy on jaettu kolmio- ja nelikulmioelementteihin. Verkossa on 9 kolmioelementtiä ja 16 nelikulmioelementtiä, jotka ovat lineaarisia elementtejä, jolloin niiden sivut ovat suorat ja solmut sijaitsevat vain kärki-

pisteissä. Levyelementit ovat yleensä kolmi- tai nelisivuisia tasapaksuja levyn paloja. Esimerkin verkossa on pääosin käytetty nelikulmioelementtejä, mutta tiheimmän elementtiverkon saamiseksi kuormitetulle alueelle on tarvittu vyöhyke kolmioelementtejä. Kuvassa (b) on tyypillinen nelikulmioelementti ja sen lokaali- ja globaalinumerointi. Vastaavasti kuvassa (c) on tyypillinen kolmioelementti numerointineen.



Kuva 1.2 Levyrakenteen elementtiverkko.

Esimerkeistä näkyy, että elementtimenetelmässä käytetään elementtien ja solmujen numerointia, jotta systemaattinen käsittely ja ohjelmointi olisivat mahdollisia. Solmuille tarvitaan vieläpä kaksi numerointia, lokaalinumeroita tarvitaan puhuttaessa yksittäisen elementin asioista ja globaalinumeroita käsiteltäessä verkkoa kokonaisuutena.

1.2.2 Solmusuureet

Elementtiverkon solmuihin liittyvät tietyt, lujuuslaskennan kannalta kiinnostavat suu-reet, jotka jakaantuvat siirtymä- ja voimasuureisiin. Siirtymäsuureita ovat translaatio- ja rotaatiosiirtymät. Voimasuureisiin kuuluvat jännityskomponentit, kannattimen poikileikkauksen rasitukset ja pintarakenteen leikkauksen rasitustiheydet. Käytettävät solmusuureet riippuvat siis suuresti siitä, minkä tyyppisestä elementistä on kyse.

Koska elementtiverkossa on tavallisesti suuri määrä solmuja ja elementtejä, joita joudutaan käsittelemään yksittäisinä ja kokonaisuutena, tarvitaan solmusuureille looginen ja yksinkertainen merkintätekniikka. Elementtimenetelmässä on hyödyllistä käyttää matriisilaskentaa, joten solmusuureet järjestetään pystyvektoreiksi. Koska elementtimenetelmän pystyvektorit auki kirjoitettuina voivat olla hyvin tilaa vieviä, kirjoi-

tetaan ne usein rivinsuuntaisesti tilan säästämiseksi. Tällöin ne merkitään aaltosulkeisiin erotukseksi todellisista vaakavektoreista, jotka ovat hakasulkeissa. Puhuttaessa solmusta tai elementistä lokaalisti käytetään solmusuureiden symboleina pieniä kirjaimia ja vastaavasti verkkotason solmusuureiden symboleina ovat isot kirjaimet (jännityksille käytetään aina pieniä kirjaimia). Jos solmun tai elementin numero on ilmaistava solmusuureessa, se merkitään yläindeksiksi. Vielä on otettava huomioon suunta, johon solmusuureen mittausta tapahtuu. Mittaus voi tapahtua elementtiverkkoon liittyvässä globaalkoordinaatistossa tai elementtiin kiinnitetyssä lokaalikoordinaatistossa. Mikäli mittaussuunta on ilmaistava, se merkitään suureelle alaindeksiksi isolla kirjaimella globaalimittauksessa ja pienellä kirjaimella lokaalimittauksessa. Jos sekaannuksen vaaraa ei ole, jätetään solmusuureista indeksit pois.

Kirjoitetaan joitakin solmusuurevektoreita edellä olevien sopimusten mukaisesti. Tarkastellaan kuvan 1.1 (d) elementtiä 8 sen xy-lokaalikoordinaatistossa. Elementin kummallakin solmulla 1 ja 2 on kolme siirtymäsuuretta, translaatiot x- ja y-suunnissa sekä rotaatio z-suunnan ympäri. Elementin 8 solmun 2 solmusiirtymävektori on

$$\{u^2\}^8 = \{u_x^2 \quad u_y^2 \quad \phi_z^2\}^8 \quad (1.1)$$

Vastaavasti solmuihin 1 ja 2 liittyy kumpaankin kolme voimasuuretta, voimakomponentit x- ja y-suunnissa ja momenttikomponentti z-suunnan ympäri, jolloin elementin 8 solmuun 2 liittyvä solmuvoimavektori on

$$\{f^2\}^8 = \{f_x^2 \quad f_y^2 \quad m_z^2\}^8 \quad (1.2)$$

Elementin tietyn solmun solmuvoimavektori listaa kyseisestä solmusta elementtiin vaikuttavat rakenteen sisäiset voimat tämän solmun kohdalla. Elementin 8 lokaali solmusiirtymä- ja solmuvoimavektori saadaan listaamalla sen molempien solmujen vastaavat vektorit lokaalin solmunumeroinnin mukaisessa järjestyksessä

$$\{u\}^8 = \{u_x^1 \quad u_y^1 \quad \phi_z^1 \quad u_x^2 \quad u_y^2 \quad \phi_z^2\}^8 \quad (1.3)$$

$$\{f\}^8 = \{f_x^1 \quad f_y^1 \quad m_z^1 \quad f_x^2 \quad f_y^2 \quad m_z^2\}^8 \quad (1.4)$$

Jatketaan tarkastelemalla kuvan 1.1 (b) elementtiverkkoa globaalissa XY-koordinaatistossa. Verkon solmun 6 solmusiirtymävektori on

$$\{U^6\} = \{U_X^6 \quad U_Y^6 \quad \Phi_Z^6\} \quad (1.5)$$

Elementtiverkon tietyn solmun solmukuormitusvektori tarkoittaa tähän solmuun vaikuttavien ulkoisten kuormitusten vektoria. Solmun 6 solmukuormitusvektori on

$$\{F^6\} = \{F_X^6 \quad F_Y^6 \quad M_Z^6\} \quad (1.6)$$

Elementtiverkon solmusiirtymä- ja solmukuormitusvektori saadaan listaamalla jokaisen solmun vastaavat vektorit verkon solmunumeroinnin mukaisessa järjestyksessä. Kuvan 1.1 esimerkin tapauksessa nämä vektorit ovat

$$\{U\} = \{ \{U^1\} \{U^2\} \{U^3\} \{U^4\} \{U^5\} \{U^6\} \{U^7\} \{U^8\} \} \quad (1.7)$$

$$\{F\} = \{ \{F^1\} \{F^2\} \{F^3\} \{F^4\} \{F^5\} \{F^6\} \{F^7\} \{F^8\} \} \quad (1.8)$$

Edellä olevissa vektoreissa on 24 komponenttia, mikä ei ole paljon. Vaativimmissa elementtimenetelmäänalyseissa on erittäin paljon solmusuureita, jolloin elementtiverkon solmusiirtymä- ja solmukuormitusvektori ovat hyvin pitkiä listoja. Ääritapauksissa komponentteja voi olla jopa miljoonia.

Vektori $\{U\}$ sisältää elementtiverkon kaikkien solmujen siirtymät, joten siitä voidaan poimia kunkin elementin e solmusiirtymävektori $\{u\}^e$. Vektori $\{F\}$ sen sijaan sisältää solmuihin kohdistuvat ulkoiset kuormitukset ja tukireaktiot, joten siitä ei saada elementin e solmuvoimavektoria $\{f\}^e$.

Tarkastellaan vielä kuvan 1.2 levyelementtiverkkoa XY-globaalkoordinaatistossa. Levyelementin solmuilla on kaksi siirtymäsuuretta eli translaatiot koordinaatiston akselien suunnissa. Voimasuureita ovat jännitykset solmupisteiden kohdilla. Koska levyssä on tasojännitystila, tarvitaan kussakin solmussa kolme jännityssuuretta, jotka ovat normaalijännitykset koordinaattiakselien suunnissa ja näiden suuntien välinen leikkausjännitys. Elementin 4 solmusiirtymävektori globaalkoordinaatistossa on

$$\{U\}^4 = \{ U_X^6 \ U_Y^6 \ U_X^{10} \ U_Y^{10} \ U_X^9 \ U_Y^9 \ U_X^5 \ U_Y^5 \}^4 \quad (1.9)$$

ja vastaava jännitysten vektori on

$$\{\sigma\}^4 = \{ \sigma_X^6 \ \sigma_Y^6 \ \tau_{XY}^6 \ \sigma_X^{10} \ \sigma_Y^{10} \ \tau_{XY}^{10} \ \sigma_X^9 \ \sigma_Y^9 \ \tau_{XY}^9 \ \sigma_X^5 \ \sigma_Y^5 \ \tau_{XY}^5 \}^4 \quad (1.10)$$

Kuvan 1.2 elementtiverkon solmusiirtymävektori $\{U\}$ ja solmukuormitusvektori $\{F\}$ sisältävät 64 komponenttia. $\{F\}$ ei sisällä jännityksiä, vaan solmuihin kohdistuvien ulkoisten kuormitusten komponentit X- ja Y-suunnissa.

1.2.3 Ekvivalenttiset solmukuormitukset

Edellä ajateltiin alustavasti ulkoisten kuormitusten vaikuttavan vain elementtiverkon solmuihin pistevoina ja -momentteina. Rakenteeseen voi näiden lisäksi kohdistua elementin alueella olevia kuormituksia eli elementtikuormituksia, kuten esimerkiksi palkkielementillä tasainen kuormitus tai levyelementillä reunapaine. Ne voidaan ottaa huomioon ekvivalenttisten solmukuormitusten avulla. Tämä tarkoittaa sitä, että ele-

menttikuormitukset muunnetaan tietyn samanarvoisuusperiaatteen avulla solmuihin vaikuttaviksi pistekuormituksiksi. Sauva- ja palkkirakenteilla periaatteena on, että ekvivalenttiset solmukuormitukset ja elementtikuormitukset aiheuttavat rakenteelle samat solmusiirtymät. Kaikkiin tapauksiin soveltuva yleisempi periaate saadaan tarkastelemalla elementtikuormituksen tekemää mekaanista työtä.

Käytännössä elementtikuormitusten huomioonottaminen ekvivalenttisina solmukuormituksina merkitsee sitä, että solmukuormitusvektorin $\{F\}$ tiettyihin alkioihin lisätään ekvivalenttisten solmukuormitusten mukaiset termit. Ekvivalenttisilla solmukuormituksilla täydennettyä solmukuormitusvektoria sanotaan elementtiverkon kokonaiskuormitusvektoriksi ja sitä merkitään symbolilla $\{R\}$. Edellä kuvailtua kokonaiskuormitusvektorin muodostamistapaa kutsutaan sijoittelusummaukseksi ja sitä merkitään

$$\{R\} = \{F\} + \sum_{e=1}^M \{r\}^e \quad (1.11)$$

jossa M on elementtien lukumäärä ja $\{r\}^e$ elementin e ekvivalenttinen solmukuormitusvektori. Sijoittelusummauksen tarkempi merkitys selviää myöhemmin.

1.2.4 Solmusuureiden ratkaiseminen

Elementtimenetelmässä ratkaistaan ensimmäiseksi solmusuureet. Tämän jälkeen lasketaan elementtien alueilla tuntemattomat suureet niiden tunnetuista solmuarvoista lähtien. Viivarakenteilla tämä voidaan tehdä tarkasti, mutta yleisempien rakenteiden tapauksessa joudutaan tyytymään likiratkaisuun interpolointia käyttäen.

Solmusuureiden ratkaiseminen on elementtimenetelmässä keskeinen tehtävä. Tarjolla on useita ratkaisumenetelmiä, jotka eroavat toisistaan lähinnä siinä, missä järjestyksessä solmusuureet ratkaistaan. Tehokkaimmaksi ratkaisutavaksi on osoittautunut siirtymämenetelmä, jossa solmusiirtymät ratkaistaan ensin.

Siirtymämenetelmässä saadaan elementin solmusiirtymävektorin ja solmuvoimavektorin välille muotoa

$$[k]^e \{u\}^e = \{f\}^e \quad (1.12)$$

oleva lineaarinen yhteys, jossa $[k]^e$ on elementin jäykkyysmatriisi. Se muodostetaan elementin geometrysten ja materiaaliominaisuuksien perusteella. $[k]^e$ saadaan viivarakenteilla lujuusopin perusteorian avulla sekä yleisesti energiaperiaatetta ja interpolointia käyttäen. Yhtälöä (1.12) sanotaan elementin perusyhtälöksi. Sitä ei voi yleensä kääntää niin, että solmusiirtymät ratkaistaisiin, sillä elementin jäykkyysmatriisi on

melkein aina singulaarinen. Elementin perusyhtälöä käytetään solmuvoimavektorin ratkaisemiseen, kun solmusiirtymävektori tunnetaan.

Siirtymämenetelmässä myös elementtiverkon solmusiirtymävektorin ja kokonaiskuormitusvektorin välille saadaan muotoa

$$[K] \{U\} = \{R\} \quad (1.13)$$

oleva lineaarinen yhtälöryhmä, missä $[K]$ on elementtiverkon jäykkyyssmatriisi eli kokonaisjäykkyyssmatriisi. Se riippuu elementtiverkon geometrisista ja materiaaliominaisuuksista. Elementtiverkon koostuminen elementeistä merkitsee, että kokonaisjäykkyyssmatriisi koostuu tietyllä tavalla elementtien jäykkyyssmatriiseista. $[K]$ voidaan muodostaa elementtien jäykkyyssmatriiseista tietyllä matriisien yhteenlaskulla, jota kutsutaan sijoittelusummaukseksi ja merkitään

$$[K] = \sum_{e=1}^M [k]^e \quad (1.14)$$

jossa M on elementtien määrä. Sijoittelusummauksen sisältö selviää myöhemmin.

Yhtälöä (1.14) sanotaan elementtiverkon perusyhtälöksi. Siinä ovat tuntemattomina vapaat solmusiirtymät, jotka yhdessä tunnettujen tukisiirtymien kanssa muodostavat vektorin $\{U\}$ ja tukireaktiot, jotka tunnettujen ulkoisten solmu- ja elementtikuormitusten kanssa muodostavat kokonaiskuormitusvektorin $\{R\}$. Ryhmässä (1.13) on tuntemattomia saman verran kuin yhtälöitä, joten tuntemattomat voidaan ratkaista siitä, mikäli laskentamalliin ei sisälly jäykän kappaleen liikemahdollisuutta. Tuntemattomia on yhtälössä (1.13) yhtäsuuruusmerkin molemmien puolin. Tästä seuraa, että ryhmää (1.13) ei voi ratkaista kääntämällä matriisi $[K]$, vaan siihen on käytettävä muita menetelmiä. Käytännön sovelluksissa elementtiverkon perusyhtälö sisältää niin paljon yhtälöitä, että sen ratkaiseminen vaatii ehdottomasti tietokoneen käyttöä.

Kun elementtiverkon solmusiirtymävektori $\{U\}$ on ratkaistu perusyhtälöstä (1.13), voidaan siitä poimia kunkin elementin e solmusiirtymävektori $\{u\}^e$. Näistä voidaan laskea elementin perusyhtälöllä (1.12) elementtien solmuvoimavektorit $\{f\}^e$, jotka ilmaisevat elementteihin kohdistuvat sisäiset voimasuureet solmujen kohdilla.

1.2.5 Ratkaisu elementin alueessa

Kun solmusuureet on ratkaistu edellä kuvatulla tavalla, on ratkaisu saatava ulotetuksi myös solmujen ulkopuolelle elementtien alueeseen. Tämä onnistuu viivarakenteilla tarkasti lujuusopin perusteoriaa käyttäen. Esimerkiksi palkkielementin rasiuskuvat voidaan määrittää, kun tunnetaan elementtikuormitukset ja rasiusten arvot elementin

päissä. Samoin palkkielementin taipumaviiva voidaan laskea, kun tunnetaan elementtikuormitukset sekä taipumat ja kiertymät elementin päissä. Pinta- ja solidirakenteilla tarkkaa ratkaisua elementin alueessa ei saada solmusuureisiin nojautuen, vaan on tyydyttävä likimääräiseen ratkaisuun. Likiratkaisu perustuu siirtymien ennalta valittavaan interpolointiin solmuarvoista lähtien. Interpoloinnissa käytetään yksinkertaisia polynomeja interpolointifunktioina, jolloin tiettyyn solmusiirtymään liittyvä funktio kertoo, kuinka suuri paino sillä on elementin eri kohtien siirtymiä määritettäessä. Interpolointia käytettäessä elementin jäykkyyismatriisin ja ekvivalenttisten solmukuormitusten lausekkeet perustuvat siirtymien interpoloituihin lausekkeisiin ja ovat likimääräisiä. Elementtimenetelmällä saatavan ratkaisun tarkkuus riippuu valitusta interpoloinnista, joten siihen on elementtimenetelmässä pakko kiinnittää melkoisesti huomiota. Tässä esityksessä interpolointia käsitellään pinta- ja solidirakenteiden yhteydessä.

1.3 Laskentamallit

1.3.1 Elementtityypit

Kaupallisissa FEM-ohjelmistoissa on laaja valikoima elementtityyppejä, jotka kukin perustuvat vastaavaan lujuusopin teoriaan. Tavallisesti FEM-ohjelmiston elementtikirjasto sisältää kymmeniä elementtityyppejä eivätkä yli sadan tyypin kirjastotkaan ole harvinaisia. Toisaalta voidaan todeta, että suurin osa laskennasta tapahtuu vakiintuneita peruselementtityyppejä käyttäen, joita on noin parikymmentä. Muut elementit on suunniteltu erityistilanteisiin, joita esiintyy vain tietyn sovellusalueen puitteissa. Samassa laskentamallissa voidaan käyttää yleensä lähes rajoituksetta erityyppisiä elementtejä, mikä mahdollistaa mutkikkaidenkin yhdistettyjen rakenteiden analysoinnin ja tekee elementtimenetelmästä joustavan työkalun.

Lujuusopin teorian eräs jaottelu tapahtuu rakennetyypeittäin, joten on luonnollista ryhmitellä elementtityypit samalla tavoin. Tällä perusteella saadaan seuraava elementtityyppien ryhmittely.

1. Sauvaelementit soveltuvat ristikkorakenteiden analysointiin. Tavallisimmat elementit ovat tasoristikon ja avaruusristikon sauvaelementti, jotka ovat kaksisolmuisia ja tasapaksuja elementtejä.
2. Palkkielementit soveltuvat suorien ja käyrien palkkien ja kehärakenteiden tarkasteluun. Tavallisimmat elementit ovat tasokehän ja avaruuskehän palkkielementti. Ne ovat kaksisolmuisia ja tasapaksuja elementtejä, jotka tarvittaessa pystyvät ottamaan huomioon leikkausvoiman vaikutuksen. Muita elementtejä ovat arinan elementti ja laatan- ja kuoren jäykistepalkin elementti.

3. 2D-solidielementit on tarkoitettu tasojännitystilan, tasomuodonmuutostilan ja pyörähdysymmetrisen solidirakenteiden käsittelyyn. Yleisimmät elementit ovat kolmisivuinen ja nelisivuinen taselementti ja vastaavat rengaselementit pyörähdysymmetriselle solidille. Elementin reunat voivat olla suorat, jolloin elementti on lineaarinen. Kaarevareunaisista elementeistä tavallisin muoto on kvadraattinen, jolloin elementin reunat ovat paraabelin kaaria.
4. Laattaelementit ovat taivutuksen ja leikkauksen alaisten tasopintarakenteiden käsittelyyn suunniteltuja elementtejä. Ne ovat kolmi- ja nelisivuisia laatan keskitason elementtejä. Elementin paksuus on yleensä vakio. Käytettävissä on sekä ohuen että paksun laatan elementtejä, joista jälkimmäiset ottavat huomioon leikkausvoimien vaikutuksen laatan taipumaan. Muista laattaelementeistä mainittakoon kerroslaatan elementit, joissa voi paksuussuunnassa olla useita eri materiaalia olevia kerroksia.
5. Kuorielementit soveltuvat kaarevien pintarakenteiden tarkasteluun. Tavallisin käytetään kolmi- ja nelisivuisia tasapaksuja kuoren keskipinnan elementtejä, jotka voivat olla tasomaisia tai kaksoiskaarevia pintoja. Elementit ovat yleensä vakiopaksuisia. Käytettävissä on sekä ohuen että paksun kuoren elementtejä, joista jälkimmäiset ottavat huomioon leikkausvoimien vaikutuksen kuoren siirtymiin. Pyörähdysymmetrisen kuoren mallinnukseen on käytettävissä rengaselementtejä, joissa renkaan poikkileikkaus on viiva. Tavallisimmat viivan muodot ovat suora ja paraabelin kaari.
6. 3D-solidielementtejä käytetään kolmiulotteisten kappaleiden mallinnukseen. Ne ovat neli-, viisi- ja kuusitahokkaita, joita sanotaan tetraedri-, kiila- ja tiilikivielementeiksi. Elementin reunapinnat voivat olla tasoja, jolloin elementti on lineaarinen tai toisen asteen pintoja, jolloin se on kvadraattinen.
7. Eritiselementit ryhmään kuuluvat erityissovelluksiin suunnitellut elementit. Ne ovat hyödyllisiä omalla alueellaan, jossa tavallisilla peruselementeillä ei mallinnusta pystytä suorittamaan riittävän tarkasti tai tehokkaasti. Ohjelmistojen erityiselementtivalikoimat vaihtelevat, joten mitään yksikäsitteistä luetteloa näistä elementeistä ei voi antaa. Usein mukana olevia elementtejä ovat kosketuselementit, särön kärjen elementit ja puoliäärettömät solidielementit.

Minkä tahansa elementtityypin menestyksellinen käyttö edellyttää paitsi taustalla olevan lujuusopin teorian tuntemista, niin myös elementtimenetelmän teorian tuntemista. Jokainen elementtityyppi sisältää oletuksia ja rajoituksia, joiden tunteminen on välttämätöntä, jotta laskenta onnistuisi ja tulokset osattaisiin tulkita oikein. Ohjelmistoissa on helppo ottaa käyttöön yhä uusia elementtityyppejä perehtymättä niiden teoriaan. Näin ei kuitenkaan tulisi missään tapauksessa tehdä, vaan aina on ensin syytä tutustua elementin teoriaan esimerkiksi ohjelmiston manuaaleista.

1.3.2 Mallin valinta

FEM-laskentamallit voidaan jakaa keskiviiva-, keskipinta- ja solidimalleihin. Keskiviiva- eli 1D-malleja käytetään sauva- ja palkkirakenteilla ja rakenteen geometrinen malli on tällöin poikkileikkauksen pintakeskiön kohdalla kulkeva viiva ja lisäksi määritellään tarvittavat poikkileikkauksen pintasuureet. Keskipinta- eli 2D-malleja käytetään levy-, laatta- ja kuorirakenteilla ja geometrinen malli on tässä tapauksessa rakenteen keskipinta ja lisäksi määritellään ainespaksuudet. Solidi- eli 3D-malleja käytetään sellaisille kolmiulotteisille kappaleille, joiden geometria ei salli yksinkertaisempaa 1D- tai 2D-mallinnusta. Yhdistettyjen mallien käyttö on myös mahdollista, jolloin rakenteen eri osissa käytetään erityyppistä geometrian mallinnusta.

Laskentamallin valintaan ja käytettäviin elementtityyppeihin on kiinnitettävä tarpeeksi huomiota jo laskennan alkuvaiheessa. Riittävän tarkkoja tuloksia antava laskentamalli edellyttää sopivan tyyppisten elementtien käyttöä, oikeata verkon tiheyttä rakenteen eri osissa ja tarpeeksi säännöllisen geometrian omaavien elementtien käyttöä. Kappaleen geometrian luonnissa FEM-ohjelmiston esikäsittelijällä ei siis ole kysymys vain kappaleen piirtämisestä, vaan luodulla geometrialla on pystyttävä toteuttamaan laskennan kannalta tehokas elementtiverkko.

Periaatteessa voitaisiin ajatella, että kaikki lujuusanalyysit tehdään 3D-malleja käyttäen rakenteen tarkan geometrian pohjalta. Laajat 3D-mallit ovat kuitenkin raskaita ratkaista varsinkin mikrotietokoneilla ja niistä saatavat tulostiedostot vaativat erittäin paljon tallennustilaa. Monesti lujuuslaskenta voidaan tehdä huomattavasti helpommin ja riittävällä tarkkuudella yksinkertaisemmilla 1D- ja 2D-malleilla. Tarkan geometrian käyttö 3D-mallinnuksessa ei myöskään ole yleensä lujuuslaskennassa tarkoituksenmukaista, vaan sopivasti geometriaa yksinkertaistamalla saadaan riittävän tarkka likiratkaisu. Elementtimenetelmän laskentamallien tulee siis olla sellaisia, että laskenta voidaan suorittaa käytettävissä olevien tietokoneressurssien ja ajan puitteissa.

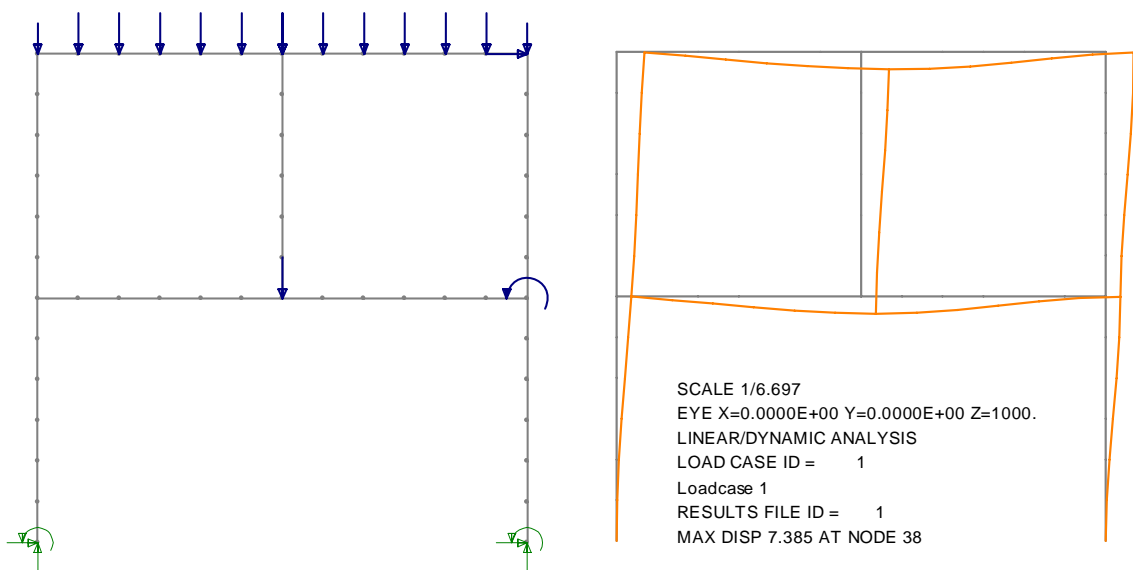
FEM-ohjelmistoihin pystytään yleensä tuomaan CAD-ohjelmistoista geometriatietoja, josta suurissa laskentamalleissa voi olla huomattavaa hyötyä. CAD-ohjelmistosta saatu geometria ei kuitenkaan välttämättä toteuta tehokkaan elementtiverkon vaatimuksia tai se voi olla lujuuslaskennan kannalta epäoleellisissa kohdissa liian yksityiskohtainen. Tällöin geometriaa on ennen laskentaa muokattava ja osa hyödystä menetetään. Lisäksi on huomattava, että lujuuslaskentamallissa tarvitaan geometrian lisäksi paljon muitakin tietoja, kuten esimerkiksi elementtiverkot ja niissä käytettävät elementtityypit, elementtien materiaaliominaisuudet, tuennat, kuormitukset, keskiviivaelementtien poikkipintatiedot ja keskipintaelementtien paksuudet.

Nykyisin CAD-ohjelmistoihin on saatavissa myös lujuusanalyysin tekeviä lisämoduuleita, jolloin geometrian siirtoa erilliseen FEM-ohjelmistoon ei tarvita. Tavallisin on lisämoduuli, joka tekee rakenteen lineaarisen staattisen analyysin ja ratkaisee ominaistajuudet ja -muodot. Elementtimenetelmällä voidaan tehdä monia muunkin tyyppisiä analyysejä ja myös materiaalista tai geometrisista syistä johtuvan epälineaarisen käyttäytymisen tutkiminen on mahdollista.

1.3.3 FEM-laskennan tulokset

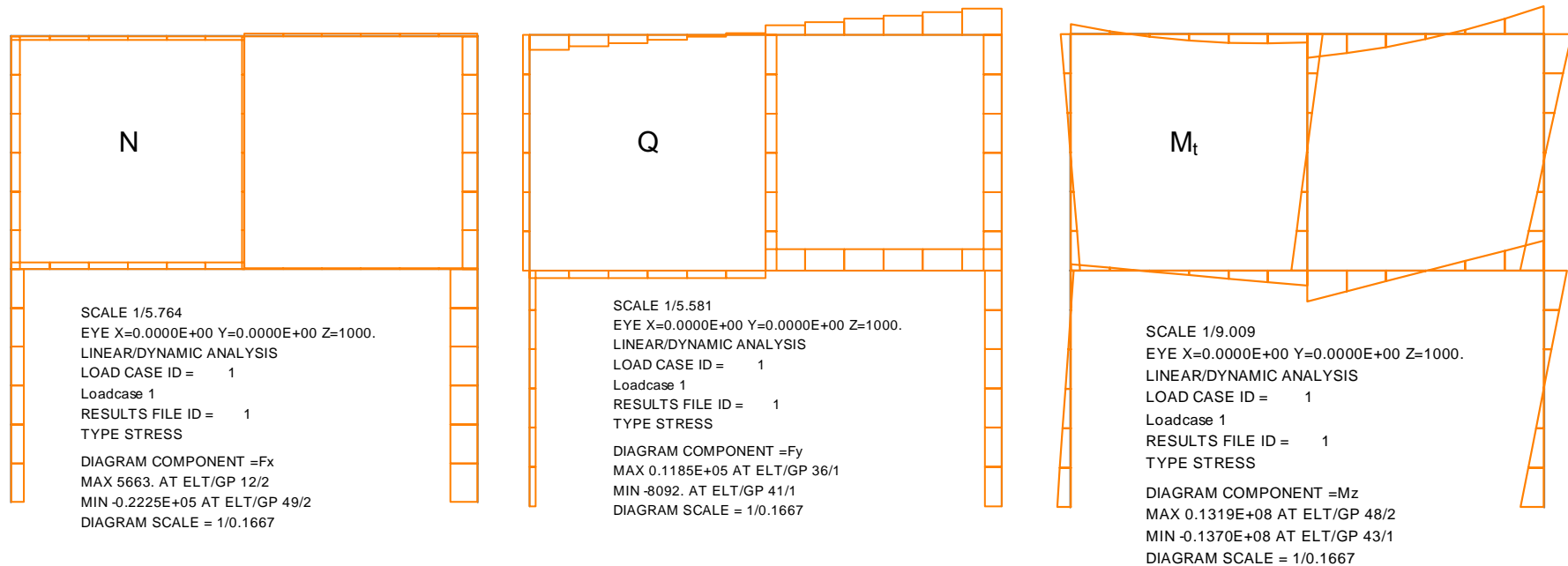
Laskentamallin luonnin ja varsinaisen laskennan lisäksi FEM-analyysi sisältää myös tulosten tarkastelun ja arvioinnin. Koska FEM-ohjelmisto antaa hyvin suuren määrän numeerista tulostietoa, tarvitaan tulosten tarkasteluun jälkikäsittelyohjelma, joka muuntaa tulokset havainnolliseen graafiseen asuun. Ohjelmistoista saatavat graafiset esitykset ovat varsin vakiintuneita, koska niissä on esitettävä samat lujuusopillisesti kiinnostavat asiat. Seuraavissa kuvissa on muutamia esimerkkejä tavallisten rakennetyyppien ratkaisemiseen käytetyistä elementtiverkoista ja samalla on esitelty tuloksia, joita tyypillinen FEM-ohjelmisto antaa kutakin tyyppiä olevasta rakenteesta.

Kuvassa 1.3 on eräs kuvan 1.1 (a) tasokehän elementtiverkko, kuormitus ja tuenta. Jokainen osapalkki on jaettu kuuteen elementtiin. Elementtiverkossa on 54 elementtiä, 53 solmua ja 159 vapausastetta, joista 6 on tuettuja ja loput 153 vapaita. Elementtiverkon jäykkyyismatriisi on 159×159 -matriisi. Tasokehän elementtimenetelmä-ratkaisussa päästään taivutusteorian mukaiseen tarkkaan ratkaisuun sijoittamalla solmut vain nurkkiin ja tukipisteisiin, mutta tässä on käytetty enemmän solmuja, jotta ohjelmasta saatava taipumakuva olisi havainnollisempi. Tasokehän palkkielementit ovat viivaelementtejä ja palkkeja kuvaavat viivat kulkevat poikkileikkauksen pintakeskiön kohdalla tai ovat yhdensuuntaisia pintakeskiöviivojen kanssa.



Kuva 1.3 Tasokehän kuormitus ja tuenta. Taipumakuva.

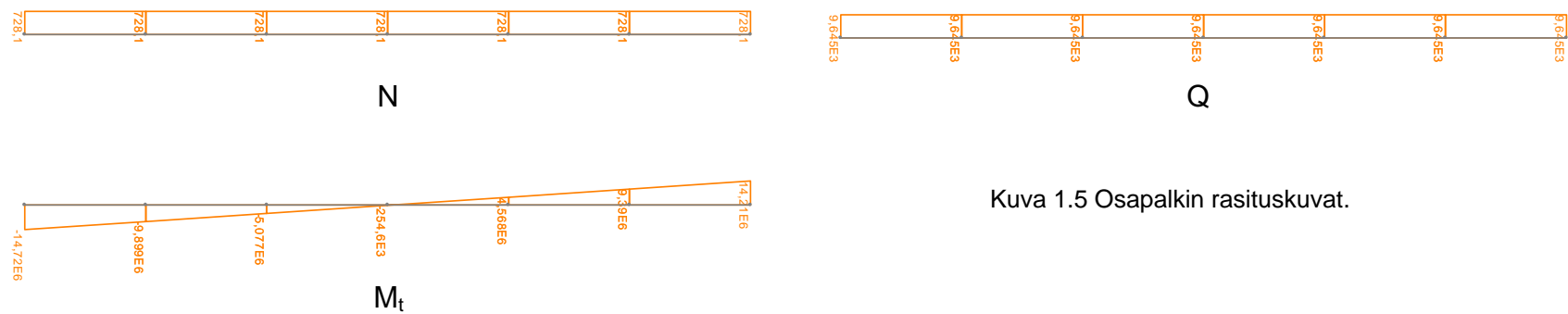
Ristikko ja palkkirakenteilla tärkeimmät laskennasta saatavat tulokset ovat solmujen siirtymät ja elementtien rasituskuvat. Jännityksiä ei yleensä ohjelmasta saada joitakin standardipoikkileikkauksia lukuun ottamatta, vaan ne on laskettava rasituksista manuaalisesti. Kuvassa 1.3 on kehän taipumakuva ja kuvassa 1.4 sen rasituskuvat. Kuvissa ei ole näkyvissä suureiden numeroarvoja niiden maksimiarvoja lukuun ottamatta, jotka annettu kuvaselitteissä (yksiköt ovat N ja mm).



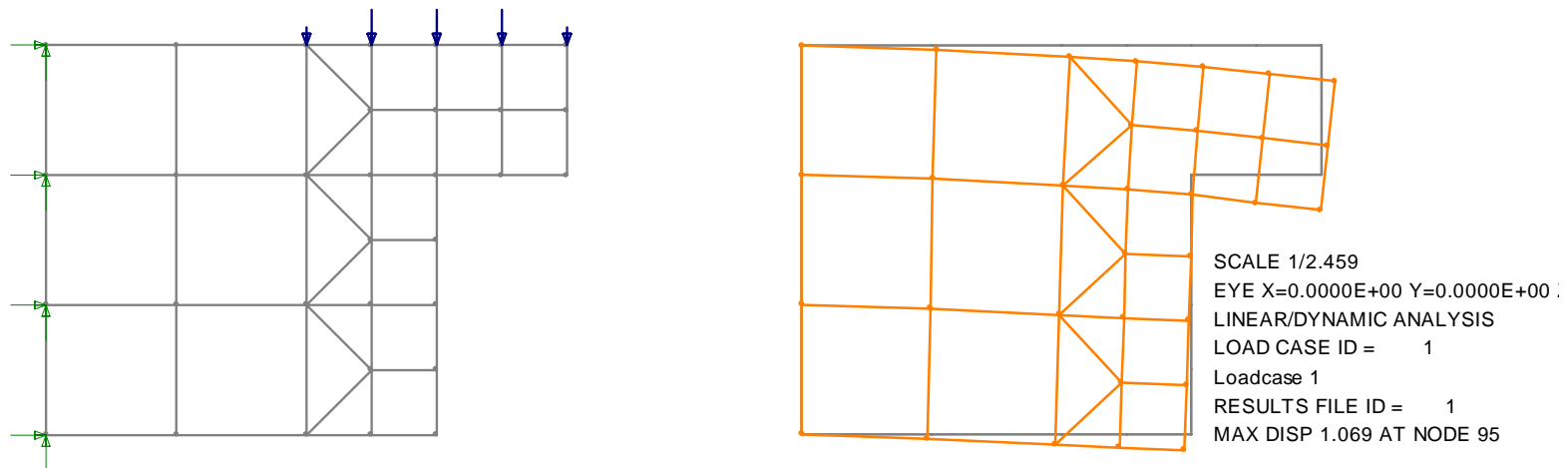
Kuva 1.4 Rasituskuvat.

Kuvassa 1.5 on vielä erikseen esitetty oikeanpuoleisen alemman vaakapalkin rasituskuvat numeroarvoineen.

Kuvassa 1.6 on esitetty kuvan 1.2 (a) levyrakenteen elementtiverkko, kuormitus ja tuenta. Elementtiverkossa on käytetty lineaarisia tasojännitystilän neli- ja kolmisivuisia elementtejä ja siinä on 25 elementtiä, 32 solmua ja 64 vapausastetta, joista 8 on tuettuja. Verkko on harva ja sen avulla saatavat tulokset eivät ole kovin tarkkoja. Kuvassa 1.6 on myös levyn siirtymäkuva, jossa siirtymiä on havainnollisuussyistä suuresti liioiteltu. Levyn suurin solmuisiirtymäresultantti on 1,069 mm, joka on alle tuhannesosa levyn korkeudesta. Kuvassa 1.7 on jännitysten tasa-arvokäyrästäjä, SX on vaakasuuntainen ja SY pystysuuntainen normaalijännitys, SXY on leikkausjännitys ja SE on VVEH-vertailujännitys.

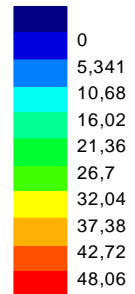


Kuva 1.5 Osapalkin rasiuskuvat.

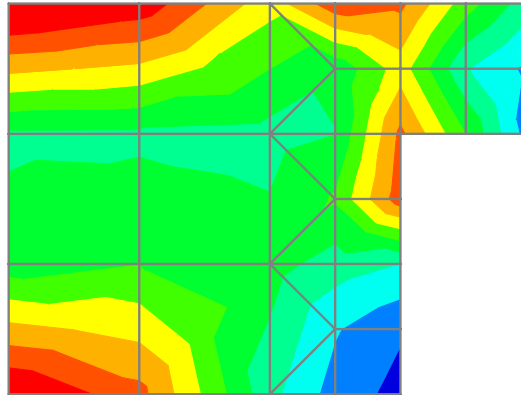


Kuva 1.6 Levyrakenteen elementtiverkko, tuenta ja kuormitus. Siirtymäkuva.

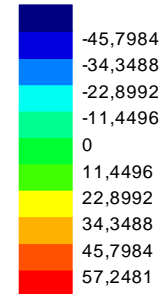
LOAD CASE = 1
Loadcase 1
RESULTS FILE = 1
STRESS
CONTOURS OF SE



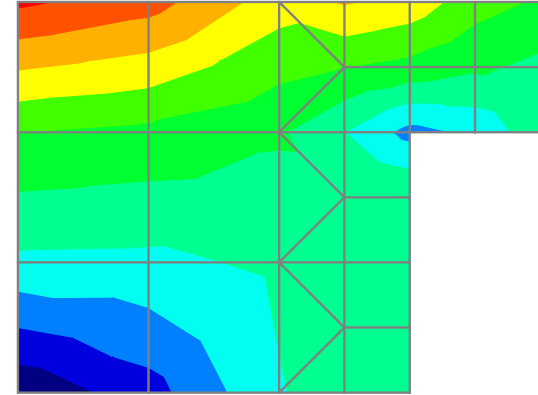
Max 56.91 at Node 16
Min 3.508 at Node 79



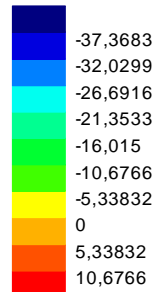
LOAD CASE = 1
Loadcase 1
RESULTS FILE = 1
STRESS
CONTOURS OF SX



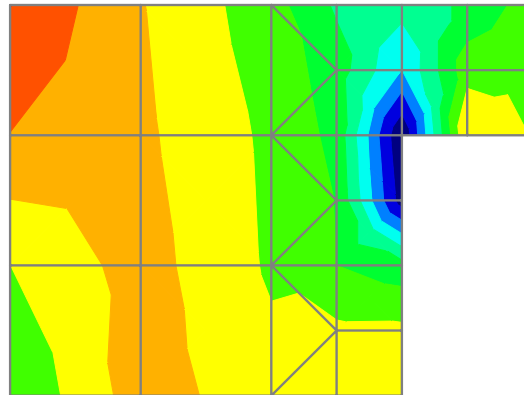
Max 59.51 at Node 16
Min -54.98 at Node 1



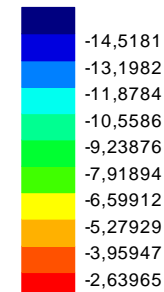
LOAD CASE = 1
Loadcase 1
RESULTS FILE = 1
STRESS
CONTOURS OF SY



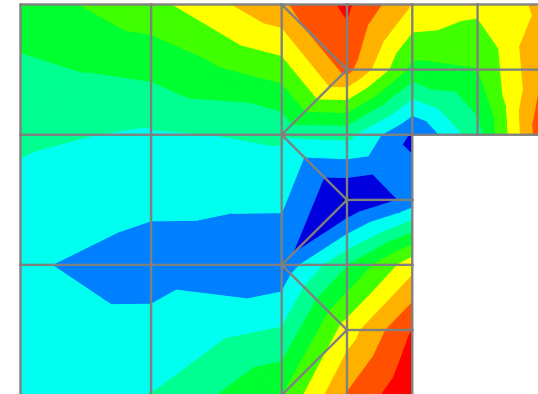
Max 10.78 at Node 16
Min -42.61 at Node 72



LOAD CASE = 1
Loadcase 1
RESULTS FILE = 1
STRESS
CONTOURS OF SXY

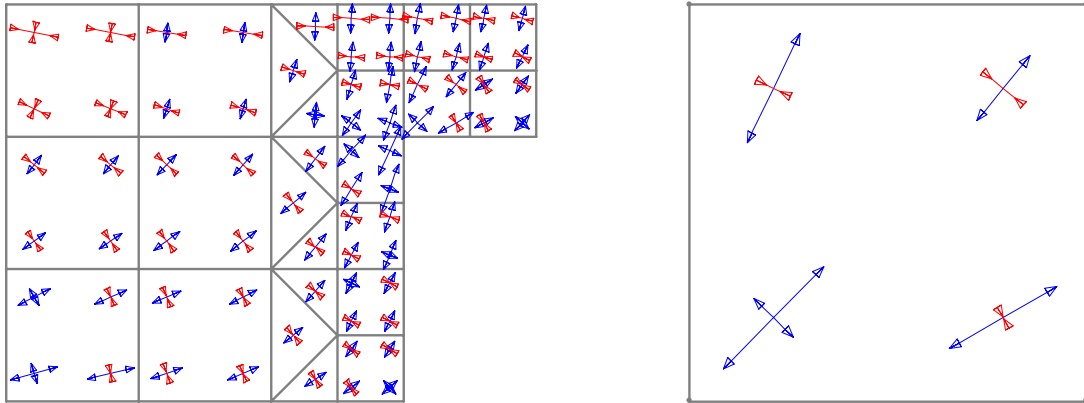


Max -1.544 at Node 79
Min -14.74 at Node 42



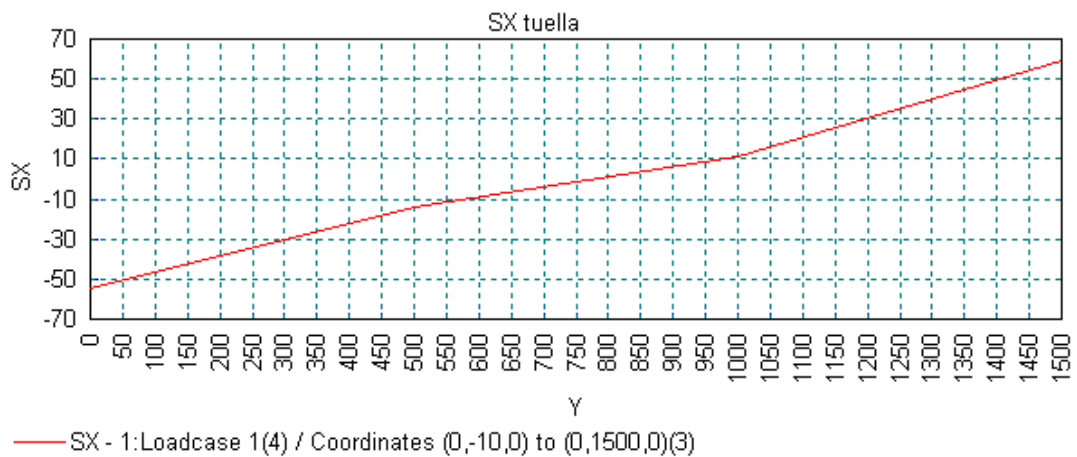
Kuva 1.7 Jännitysten tasa-arvokäyrästöjä.

Kuvassa 1.8 on koko levyn ja sen erään elementin Gaussin pisteiden pääjännityksiä kuvaava vektorikaavio, jossa nuolen pituus ilmaisee pääjännityksen suuruuden, nuolen asento sen suunnan ja väri etumerkin.



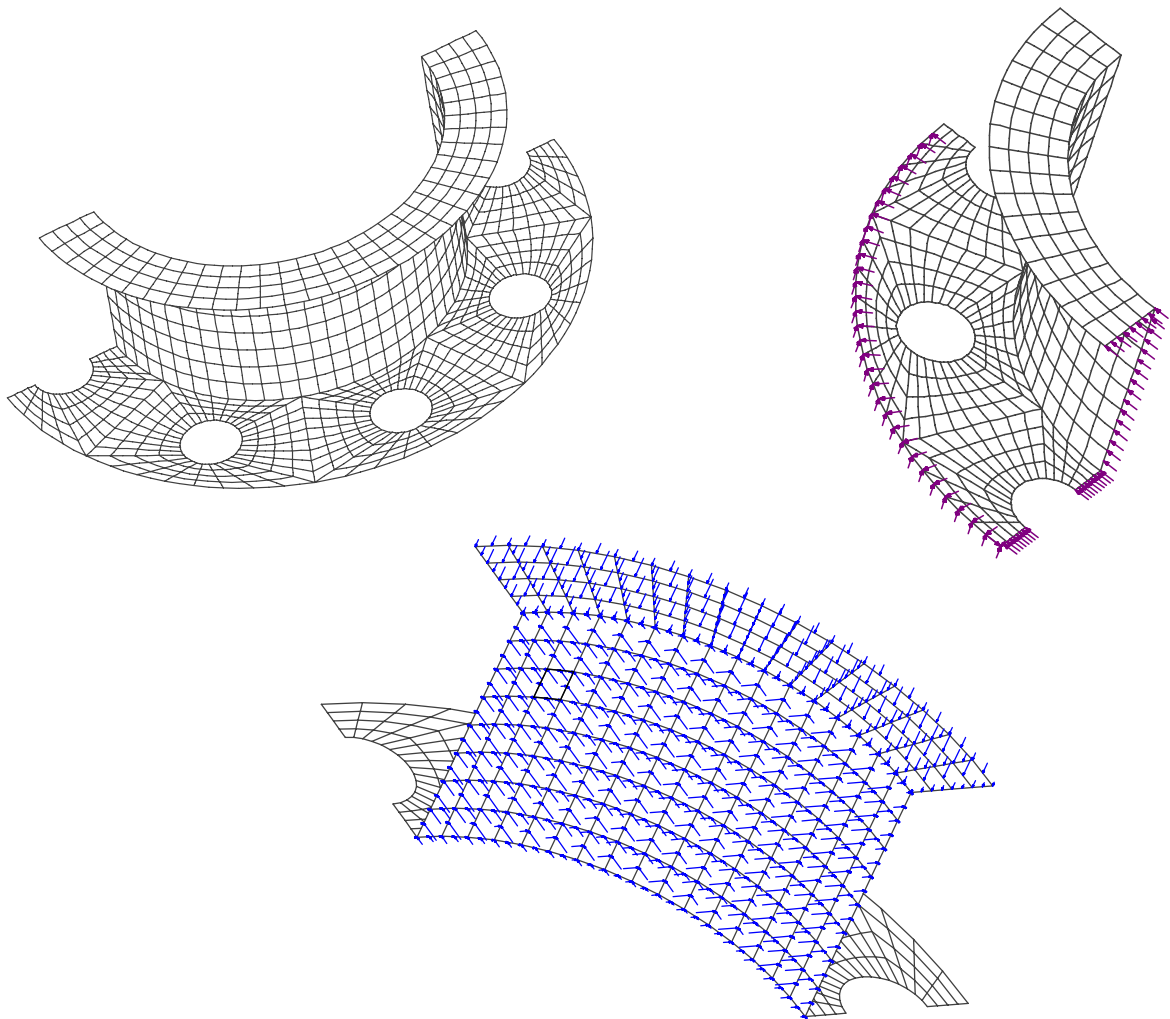
Kuva 1.8 Pääjännitysvektorit.

Kuvassa 1.9 on esitetty käyränä vaakasuuntaisen normaalijännityksen vaihtelu tukireunalla pystysuunnan koordinaatin Y funktiona. Käyrästä näky, että jännityksen vaihtelu on lähellä suoraviivaista palkin taivutusteorian mukaista vaihtelua.



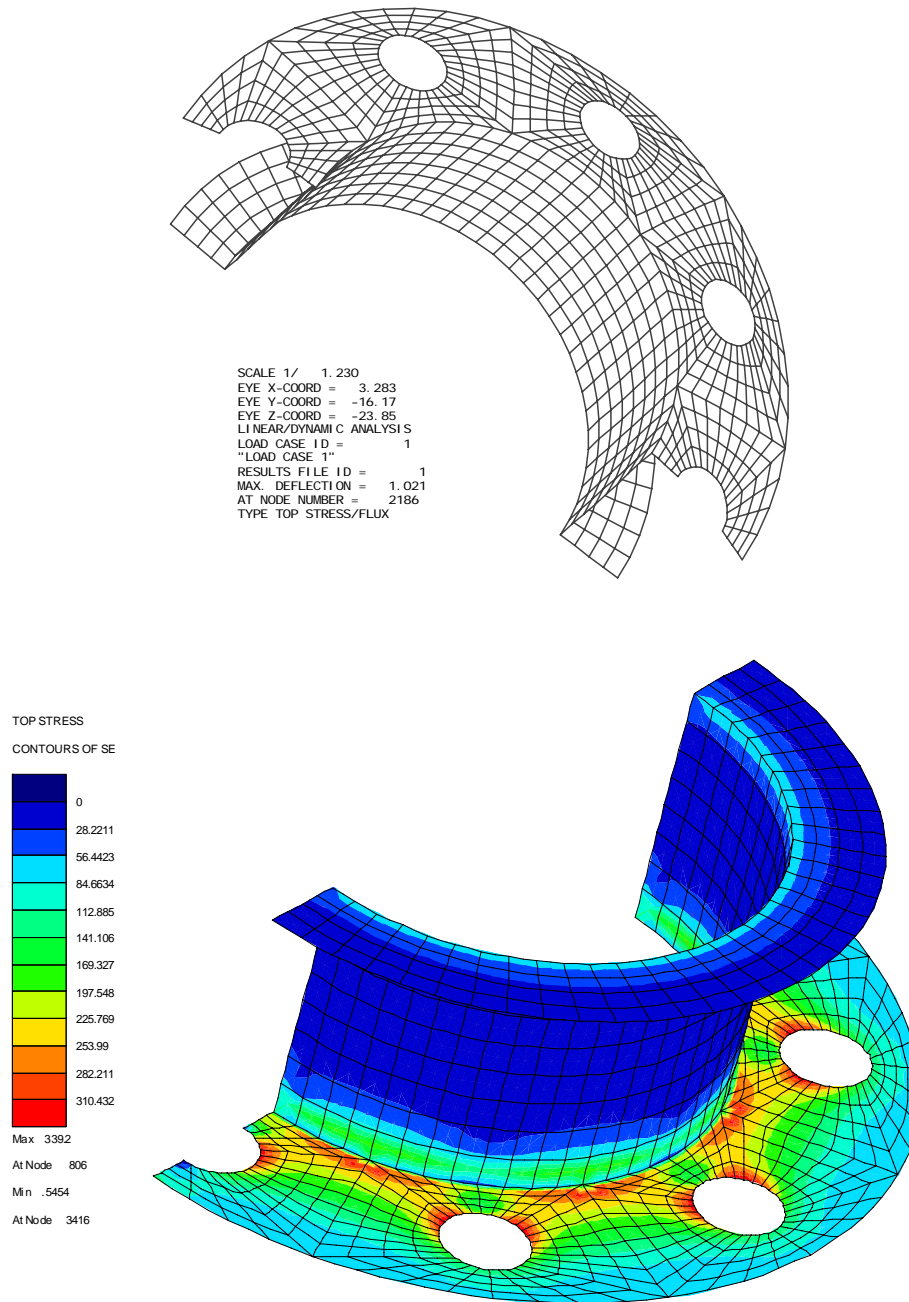
Kuva 1.9 Normaalijännityksen SX vaihtelu tuella.

Kuvassa 1.10 on kuorirakenteen elementtiverkko. Tuenta ja kuormitus on esitetty rakenteen puolikkaan kuvissa solmuihin kohdistuvina nuolina. Tuentanuoli tarkoittaa, että vastaavan suuntainen solmusiirtymä on estetty ja kuormitusnuoli esittää tavallista tai ekvivalenttista solmukuormitusta. Verkossa on käytetty kaksoiskaarevia ohuen kuoren elementtejä, jotka ovat nelisivuisia ja kahdeksansolmuisia keskipinnan elementtejä. Elementtien lukumäärä on 896 ja solmujen 2921, joista tukisolmuja on 147. Elementtiverkon vapausasteiden lukumäärä on noin 11200.



Kuva 1.10 Kuorirakenteen elementtiverkko, tuenta ja kuormitus.

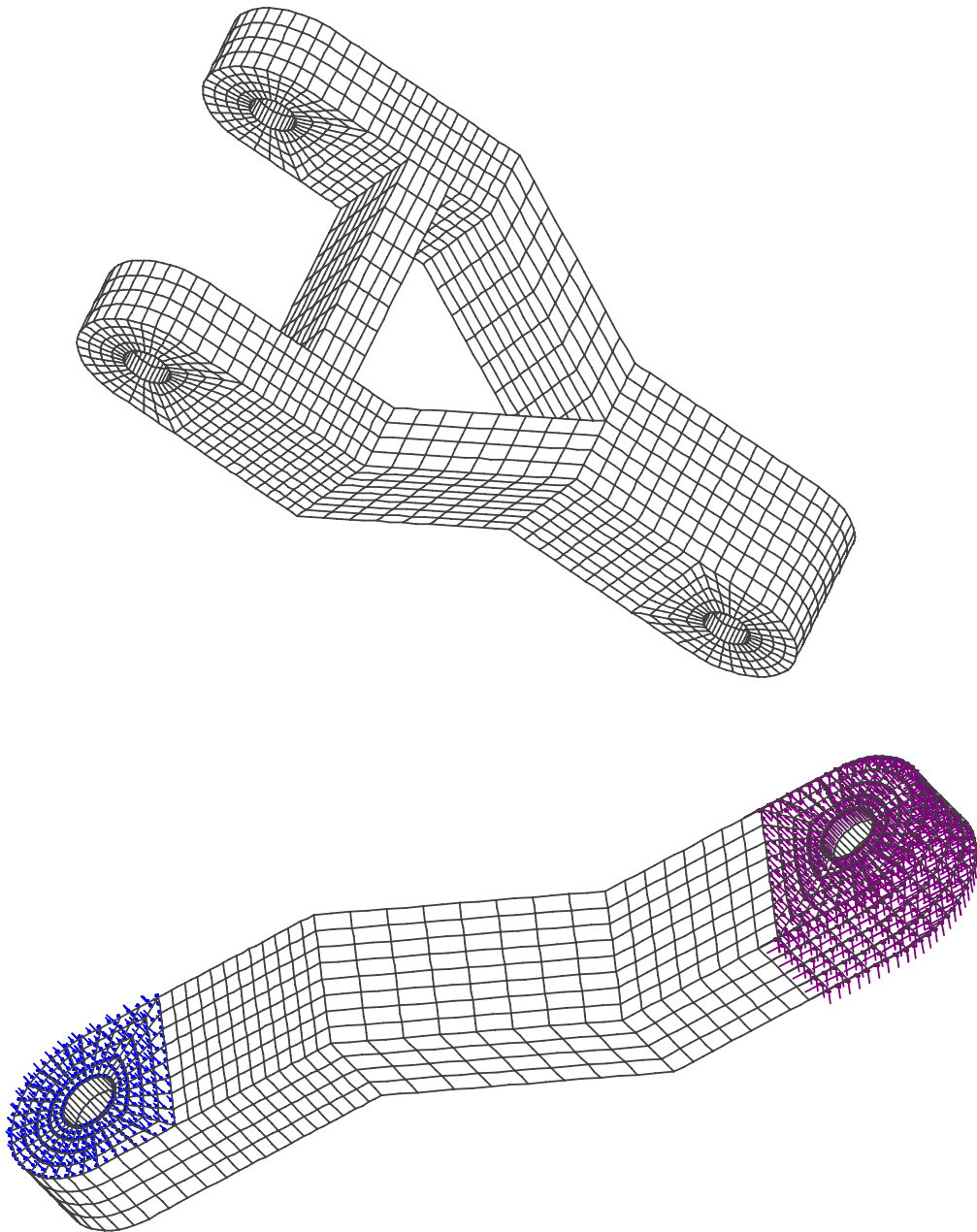
Pintarakenteiden FEM-analyysin tuloksena saadaan solmusiirtymät ja voimasuureista normaalivoima-, leikkausvoima-, vääntömomentti- ja taivutusmomenttitiheydet, joista saadaan laskettua jännityskomponentit kuoren keski- ja reunapinnoilla sekä näistä vielä pääjännitykset ja vertailujännitykset eri hypoteesien mukaisesti. Kuvassa 1.11 on rakenteen siirtymäkuva, jossa siirtymiä on havainnollisuuden vuoksi suuresti liioiteltu. Kuvaselitteessä on suurimmaksi siirtymäresultantiksi annettu 1,021 mm, mikä on hyvin pieni verrattuna kuoren mittoihin. Kuvassa 1.11 on myös kuoren toisen reunapinnan VVEH-vertailujännityksen tasa-arvokäyrästä.



Kuva 1.11 Siirtymäkuva ja vertailujännityksen tasa-arvokäyrästä.

Kuorielementtiverkko on raskas käsitellä suuresta vapausastemäärästä johtuen, mutta se usein ainoa vaihtoehto rakenteen realistiseen mallintamiseen. Kuorielementit ovat eräs käytetyimmistä elementtityypeistä, koska monissa rakenteissa esiintyy kaarevia ohutseinäisiä osia. Kaksoiskaarevan kuorielementin lisäksi ohjelmistoissa on tasomaisia kuorielementtejä, joita esimerkin rakenteessa olisi voitu käyttää laippaosissa tekemättä geometrasta mallinnusvirhettä. Tasomaiset kuorielementit kuluttavat selvästi vähemmän laskentaresursseja kuin kaarevat elementit, joten alustavissa laskennoissa kannattaa suosia niitä. Lopullinen aikaa vievä laskenta voidaan tehdä tarkemmilla kaarevilla elementeillä, kun mallin tiedetään toimivan muilta osin.

Kun tarkasteltavalla rakenteella tai sen osalla ei ole mitään eri ulottuvuuksiin liittyviä geometrisia erityispiirteitä, on elementtiverkossa käytettävä 3D-solidielementtejä näitä osia mallinnettaessa. Kuvassa 1.12 on elementtiverkko, jossa on pelkästään 3D-

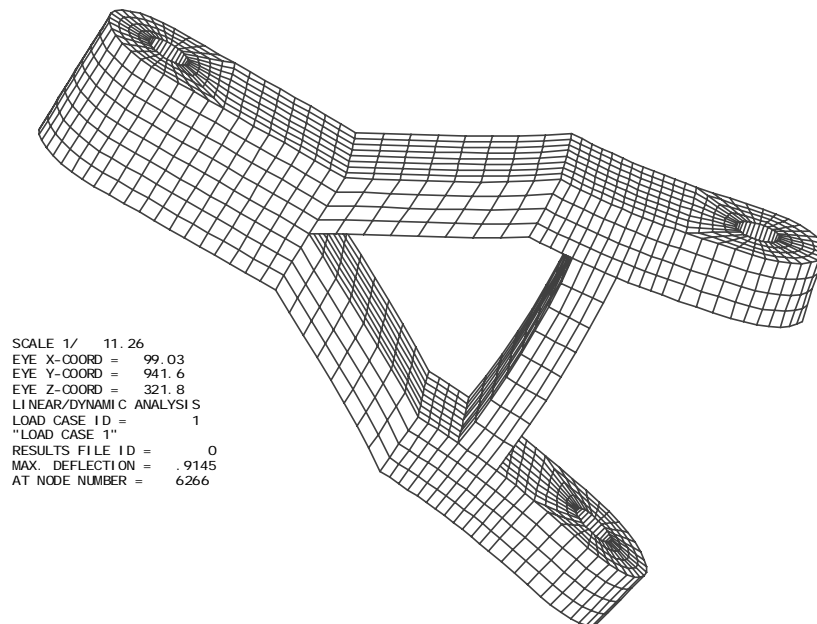


Kuva 1.12 Solidirakenteen elementtiverkko ja tuenta.

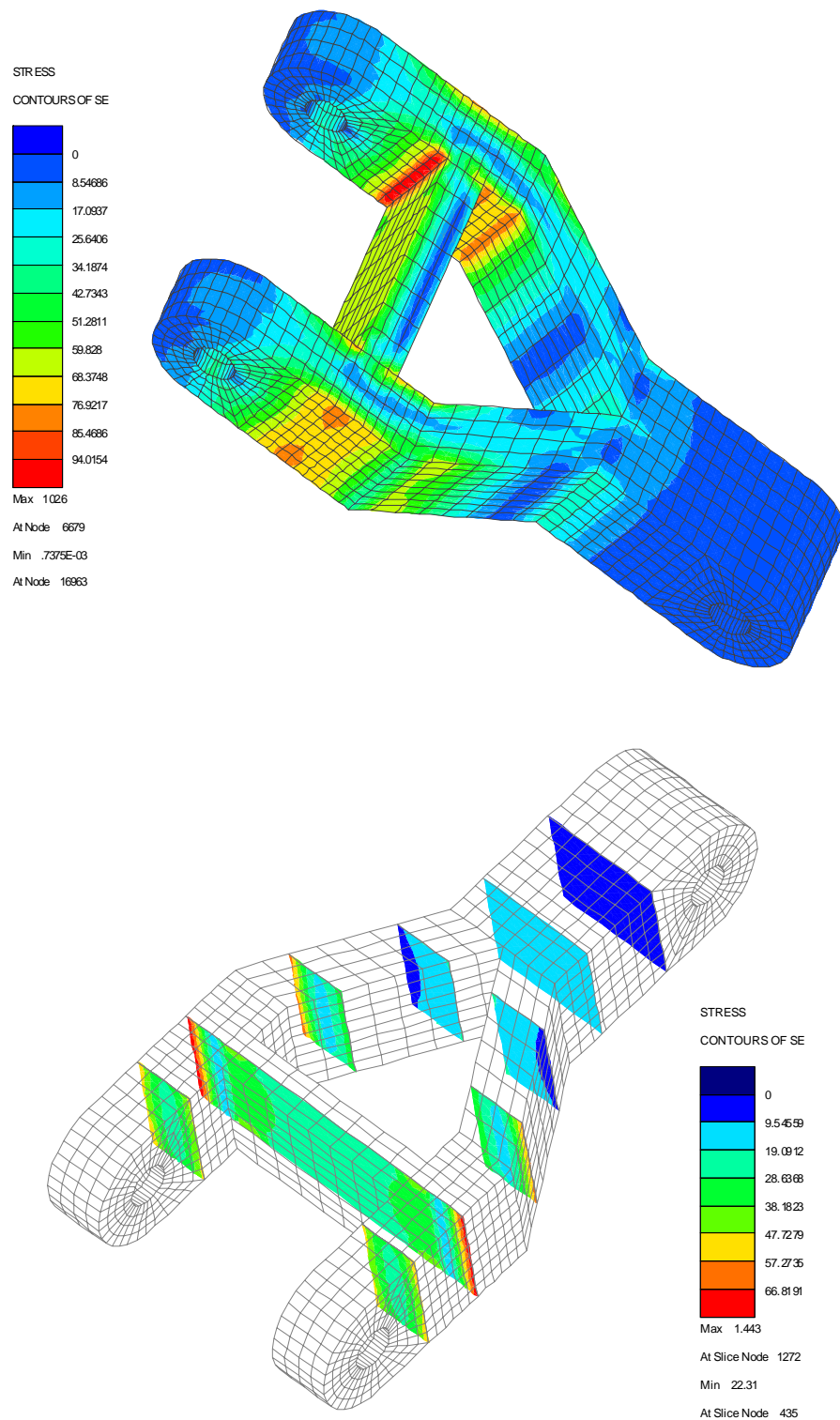
solidielementtejä. Laskennassa tutkittu symmetrinen tuenta- ja kuormitustilanne on esitetty kuvassa 1.12 olevassa osakuvassa. Elementtityyppi on kvadraattinen tiilikivielementti, jossa on 20 solmua ja kullakin solmulla on kolme translaatiovapausastetta. Elementtien lukumäärä on 4096 ja solmujen 21125, joista 1439 solmussa on tuetuja vapausasteita. Elementtiverkon vapausasteiden lukumäärä on noin 60000, joka on melko suuri tutkittavan rakenteen verraten yksinkertaista geometriaa ajatellen.

Suuri verkon vapausasteiden lukumäärä johtuu valitusta kvadraattisesta elementtityypistä, joka on varsinkin 3D-laskennassa raskaskäyttöinen. FEM-ohjelmistoissa on käytettävissä myös vähemmän resursseja kuluttavia lineaarisia 3D-solidielementtejä, joita laskennan alkuvaiheessa kannattaa suosia. On kuitenkin otettava huomioon, että lineaariset elementit antavat samalla verkon tiheydellä kvadraattisia elementtejä huomattavasti epätarkempia tuloksia ja niiden avulla kaarevien reunapintojen realistinen mallinnus vaatii melko tiheän elementtijaon.

Kuvissa 1.13 ja 1.14 on esitetty muutamia graafisia tulosteita, joita elementtimenetelmäohjelmisto tyypillisesti antaa 3D-solidirakenteesta. Solmusiirtymien avulla voidaan laatia kuvan 1.13 rakenteen siirtymäkuva, jossa kuormituksen aiheuttamat geometriset muutokset näkyvät suuresti liioiteltuina. Kuvaselitteestä ilmenee suurimman siirtymäresultantin arvoksi 0,9145 mm, mikä on kappaleen mittoihin verrattuna hyvin pieni arvo. Voimasuureina 3D-solidirakenteen elementtimenetelmässä ovat yleisen kolmiulotteisen jännitystilän kuusi jännityskomponenttia. Jännityskomponenteista saadaan edelleen laskettua muun muassa pääjännitykset, pääsuunnat ja eri hypoteesien mukaiset vertailujännitykset. Kuvassa 1.14 on esimerkkinä graafisesta jännitystulostuksesta kappaleen ulkopinnan ja eräiden leikkauksien VVEH-vertailujännityksen tasa-arvokäyrästäjä.



Kuva 1.13 Siirtymäkuva.



Kuva 1.14 Kappaleen pinnan ja sen eräiden leikkausten vertailujännityksen tasa-arvokäyrästöt.