

IV.3. Nestesäiliö on tehty sylinteri- ja pallokuoresta kuvan osoittamalla tavalla. Säiliössä on nestettä (tiheys ρ) korkeudelle h_0 asti. Määritä pohjaosan kalvojännityksien lausekkeet meridiaanikulman ϕ funktiona. Onko kalvoratkaisu tarkasti voimassa sylinteri- ja pallokuoren liitoskohdassa? Sovella tuloksia lukuarvoihin $\alpha = 45^\circ$, $a = 3 \text{ m}$, $h = 5 \text{ mm}$, $h_0 = 5 \text{ m}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Piirrä pohjaosan kalvovoimien ja VVEHin mukaisen vertailujännityksen kuvaajat kulman ϕ funktiona ja etsi vertailujännityksen maksimikohta ja -arvo.

Ratkaisu:

$$r_\phi = r_\theta = a \quad p_r = -\rho g [h_0 + a(1 - \cos \phi)] \quad p_\phi = 0$$

$$N_\phi = \frac{-\rho g a}{\sin^2 \phi} \int_0^\phi [h_0 + a(1 - \cos \phi)] \cos \phi \sin \phi d\phi \Rightarrow$$

$$N_\phi = \frac{-\rho g a}{\sin^2 \phi} \int_0^\phi [(h_0 + a) \cos \phi \sin \phi - a \cos^2 \phi \sin \phi] d\phi \Rightarrow$$

$$N_\phi = \frac{-\rho g a}{\sin^2 \phi} \left(\frac{h_0 + a}{2} \sin^2 \phi + \frac{a}{3} \cos^3 \phi \right) = \frac{-\rho g a}{\sin^2 \phi} \left(\frac{h_0 + a}{2} \sin^2 \phi + \frac{a}{3} \cos^3 \phi - \frac{a}{3} \right) \Rightarrow$$

$$N_\phi = \frac{-\rho g a^2}{6} \left[3 \cdot \left(\frac{h_0}{a} + 1 \right) + 2 \cdot \frac{\cos^3 \phi - 1}{1 - \cos^2 \phi} \right] = \frac{-\rho g a^2}{6} \left[3 \cdot \left(\frac{h_0}{a} + 1 \right) - 2 \cdot \frac{1 + \cos \phi + \cos^2 \phi}{1 + \cos \phi} \right]$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_\phi = \frac{N_\phi}{h} = \frac{-\rho g a^2}{6h} \left(3 \frac{h_0}{a} + 1 - \frac{2 \cos^2 \phi}{1 + \cos \phi} \right)$$

$$N_\theta = a p_r - \frac{a}{a} \cdot N_\phi = \frac{\rho g a^2}{6} \left(-\frac{6h_0}{a} - 6 + 6 \cos \phi + 3 \frac{h_0}{a} + 1 - \frac{2 \cos^2 \phi}{1 + \cos \phi} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_\theta = \frac{N_\theta}{h} = \frac{-\rho g a^2}{6h} \left(3 \frac{h_0}{a} + 5 - 6 \cos \phi + \frac{2 \cos^2 \phi}{1 + \cos \phi} \right)$$

Liitoskohdassa sylinterin meridiaanivoima $N_x \neq N_\phi(\alpha)$, \Rightarrow ei yhteensopivuutta
 \Rightarrow liitoskohtaan syntyy taivutusta sisältävä vyöhyke.

Lähtötiedot: $\text{MPa} := \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ $\rho := 1000 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ $g := 9.81 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ $\alpha := 45 \cdot \text{deg}$

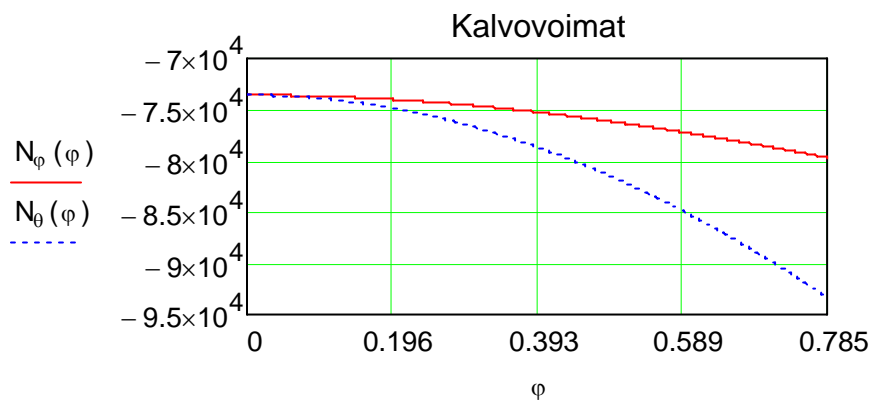
$a := 3 \cdot \text{m}$ $h_0 := 5 \cdot \text{m}$ $h := 5 \cdot \text{mm}$

$$N_{\varphi}(\varphi) := \frac{-\rho \cdot g \cdot a^2}{6} \cdot \left(\frac{3 \cdot h_0}{a} + 1 - \frac{2 \cdot \cos(\varphi)^2}{1 + \cos(\varphi)} \right)$$

$$\sigma_{\varphi}(\varphi) := \frac{N_{\varphi}(\varphi)}{h}$$

$$N_{\theta}(\varphi) := \frac{-\rho \cdot g \cdot a^2}{6} \cdot \left(\frac{3 \cdot h_0}{a} + 5 - 6 \cdot \cos(\varphi) + \frac{2 \cdot \cos(\varphi)^2}{1 + \cos(\varphi)} \right)$$

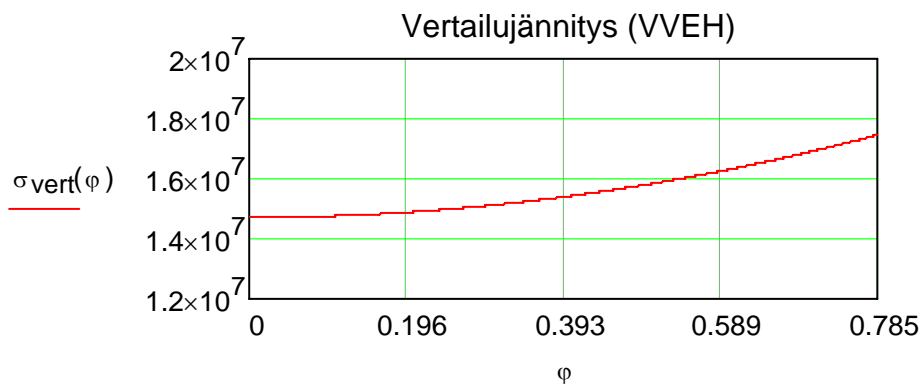
$$\sigma_{\theta}(\varphi) := \frac{N_{\theta}(\varphi)}{h}$$



$$N_{\varphi}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -79670.153 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$N_{\theta}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -93339.390 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\sigma_{\text{vert}}(\varphi) := \sqrt{\sigma_{\varphi}(\varphi)^2 + \sigma_{\theta}(\varphi)^2 - \sigma_{\varphi}(\varphi) \cdot \sigma_{\theta}(\varphi)}$$



Alkuarvaus: $\varphi := \frac{\alpha}{2}$

Given $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ $p := \text{Maximize}(\sigma_{\text{vert}}, \varphi)$ $p = 0.785$

$\sigma_{\text{vert}}(p) = 17.462 \text{ MPa}$