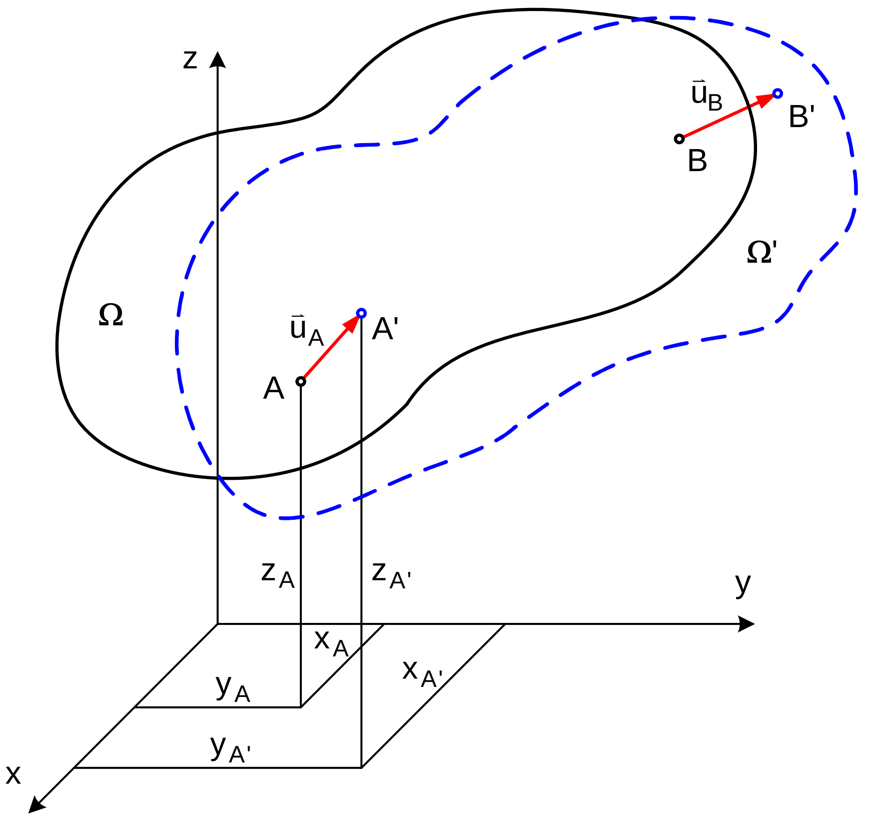
SIIRTYMÄN KÄSITE JA KOMPONENTIT



Pisteen A **siirtymävektori**:

$$\vec{u}_A = (x_{A'} - x_A)\,\vec{i} + (y_{A'} - y_A)\,\vec{j} + (z_{A'} - z_A)\,\vec{k}$$

Pisteen A **siirtymäkomponentit**:

$$u_A = x_{A'} - x_A \quad v_A = y_{A'} - y_A \quad w_A = z_{A'} - z_A$$

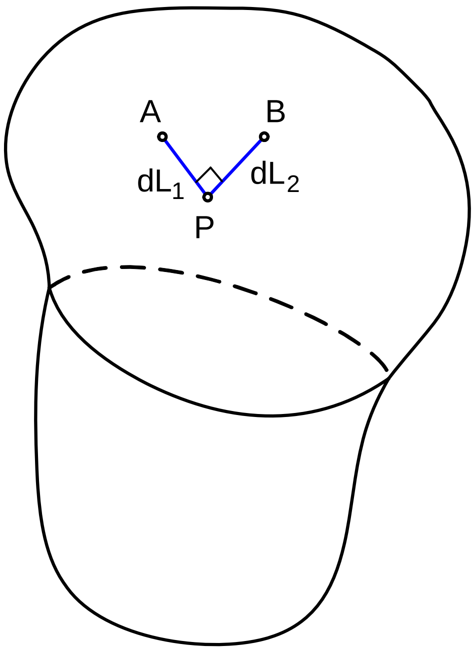
Siirtymäkenttä:

$$\vec{u}(x,y,z) = u(x,y,z)\,\vec{i} + v(x,y,z)\,\vec{j} + w(x,y,z)\,\vec{k}$$

Siirtymäkentän komponentit:

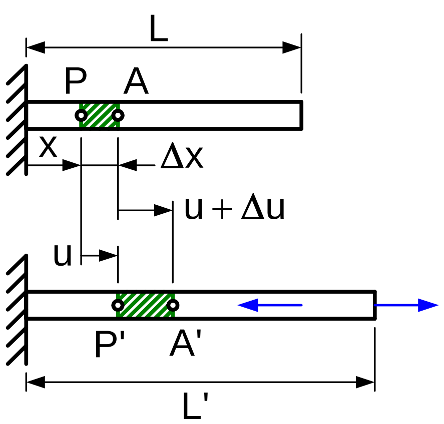
$$\boxed{u(x,y,z) \quad v(x,y,z) \quad w(x,y,z)}$$

MUODONMUUTOSTILAN KÄSITE



Pisteen P **muodonmuutostila** sisältää kaikkien pisteestä P sen lähinaapuripisteisiin piirrettyjen **viivaelementtien venymät** ja kaikkien pisteestä P alkavien **kohtisuorien viivaelementtiparien välisten suorien kulmien liukumat**.

AKSIAALINEN MUODONMUUTOSTILA



Muodonmuutoksia on vain x-suunnassa.

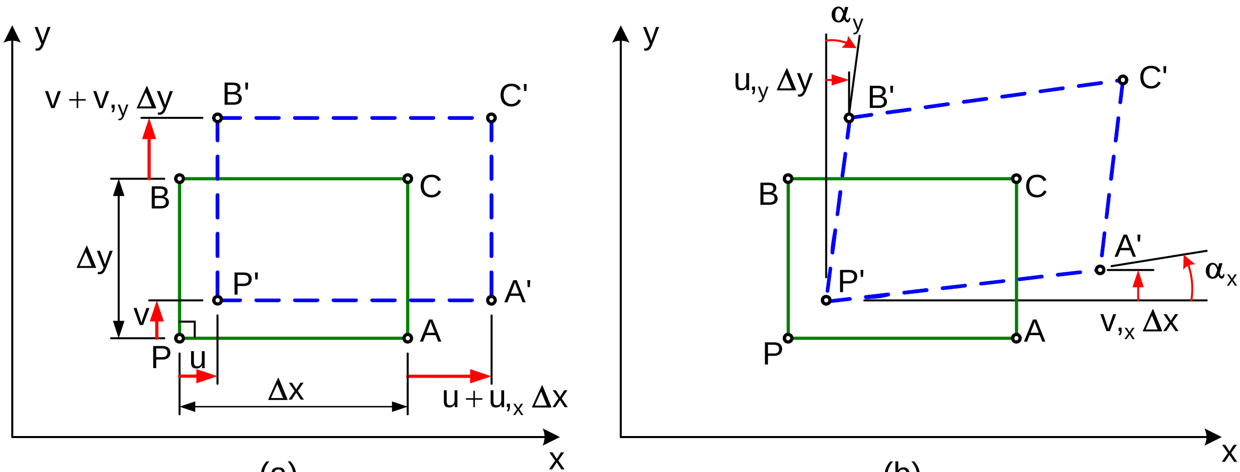
Kinemaattinen yhtälö:

$$\boxed{\varepsilon_x = u_{,x}}$$

Muodonmuutos on x-akselin suuntainen venymä ε_x.

TASOMUODONMUUTOSTILA

Muodonmuutoksia on vain xy-tasossa.



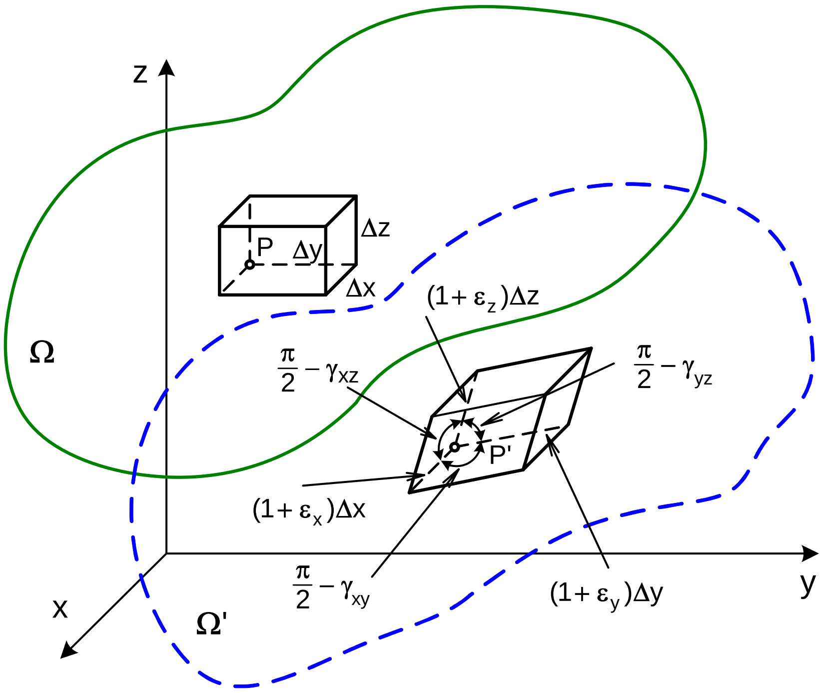
(a) (b)

Kinemaattiset yhtälöt:

$$\boxed{\varepsilon_x = u,_x \qquad \varepsilon_y = v,_y \qquad \gamma_{xy} = u,_y + v,_x}$$

Muodonmuutoskomponentit ovat x- ja y-akselin suuntaiset venymät ε_x ja ε_y sekä näiden suuntien välinen liukuma γ_{xy} .

YLEINEN MUODONMUUTOSTILA



Muodonmuutoksia on x-, y- ja z-suuntaan liittyen.

Kinemaattiset yhtälöt:

$$\varepsilon_x = u,_x \qquad \varepsilon_y = v,_y \qquad \varepsilon_z = w,_z$$
$$\gamma_{xy} = u,_y + v,_x \qquad \gamma_{xz} = u,_z + w,_x \qquad \gamma_{yz} = v,_z + w,_y$$

Muodonmuutoskomponentit ovat x-, y- ja z- suuntaiset venymät ε_x, ε_y ja ε_z sekä näiden suuntien väliset liukumat γ_{xy}, γ_{xz} ja γ_{yz} tai niiden puolikkaat ε_{xy}, ε_{xz} ja ε_{yz}.

Muodonmuutosmatriisi:

$$[V] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

YHTEENSOPIVUUSYHTÄLÖT

Yhteensopivuusyhtälöt takaavat, että 'aineeseen ei synny aukkoja' 'eikä aine mene itsensä sisään' muodonmuutoksien johdosta.

Tasomuodonmuutostila:

$$\boxed{\varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx} = \gamma_{xy,xy}}$$

Yleinen muodonmuutostila:

$$\text{A}: \quad \begin{aligned} \varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx} &= \gamma_{xy,xy} \\ \varepsilon_{y,zz} + \varepsilon_{z,yy} &= \gamma_{yz,yz} \\ \varepsilon_{z,xx} + \varepsilon_{x,zz} &= \gamma_{xz,xz} \end{aligned}$$

Tai

$$\text{B}: \quad \begin{aligned} 2\varepsilon_{x,yz} &= (-\gamma_{yz,x} + \gamma_{xz,y} + \gamma_{xy,z})_{,x} \\ 2\varepsilon_{y,xz} &= (\gamma_{yz,x} - \gamma_{xz,y} + \gamma_{xy,z})_{,y} \\ 2\varepsilon_{z,xy} &= (\gamma_{yz,x} + \gamma_{xz,y} - \gamma_{xy,z})_{,z} \end{aligned}$$

MUODONMUUTOSKOMPONENTTIEN TRANSFORMOINTI

Tasomuodonmuutostila:

$$\varepsilon_{x'} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\cos 2\theta + \varepsilon_{xy}\sin 2\theta$$

$$\varepsilon_{x'y'} = -\frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\sin 2\theta + \varepsilon_{xy}\cos 2\theta$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\cos 2\theta - \varepsilon_{xy}\sin 2\theta$$

Yleinen muodonmuutostila:

$$\varepsilon_n = \varepsilon_x a^2 + \varepsilon_y b^2 + \varepsilon_z c^2 + 2(\varepsilon_{xy} ab + \varepsilon_{yz} bc + \varepsilon_{xz} ac)$$

$$[V]' = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'} & \varepsilon_{x'y'} & \varepsilon_{x'z'} \\ \varepsilon_{x'y'} & \varepsilon_{y'} & \varepsilon_{y'z'} \\ \varepsilon_{x'z'} & \varepsilon_{y'z'} & \varepsilon_{z'} \end{bmatrix} = [Q]^T [V] [Q]$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} \cos(x,x') & \cos(x,y') & \cos(x,z') \\ \cos(y,x') & \cos(y,y') & \cos(y,z') \\ \cos(z,x') & \cos(z,y') & \cos(z,z') \end{bmatrix}$$

PÄÄVENYMÄT JA -SUUNNAT

Tasomuodonmuutostila:

Päävenymät:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2}$$

Pääsuunnat:

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\arctan\frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \quad \text{ja} \quad \theta_2 = \theta_1 + \pi/2$$

Liukuman ääriarvot:

$$\gamma_1 = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2} \quad \text{kun} \quad \theta = \theta_1 - \pi/4$$

$$\gamma_2 = -\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2} \quad \text{kun} \quad \theta = \theta_1 + \pi/4$$

Yleinen muodonmuutostila:

Pääsuunnat:

$$\begin{cases} (\varepsilon_x - \varepsilon_p)a + \varepsilon_{xy}b + \varepsilon_{xz}c = 0 \\ \varepsilon_{xy}a + (\varepsilon_y - \varepsilon_p)b + \varepsilon_{yz}c = 0 \\ \varepsilon_{xz}a + \varepsilon_{yz}b + (\varepsilon_z - \varepsilon_p)c = 0 \end{cases}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

Päävenymät:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_p & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon_p & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon_p \end{vmatrix} = 0$$

$$\varepsilon_p^3 - J_1 \varepsilon_p^2 + J_2 \varepsilon_p - J_3 = 0$$

$$J_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \qquad J_2 = \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x - \varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{xz}^2$$

$$J_3 = \det[V] = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix}$$

Liukuman ääriarvot:

$$\pm\gamma_1 = \pm\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{2} \qquad \pm\gamma_2 = \pm\frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{2} \qquad \pm\gamma_3 = \pm\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}$$

$$\gamma_{max} = \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{III}}{2}$$

SIIRTYMÄKOMPONENTTIEN REUNAEHDOT

Tasojännitystila:

$$u = \tilde{u} \qquad v = \tilde{v}$$

Yleinen jännitystila:

$$u = \tilde{u} \qquad v = \tilde{v} \qquad w = \tilde{w}$$