6 JÄYKÄN KAPPALEEN TASOKINETIIKKA

6.1 Yleistä

Jäykän kappaleen kinetiikassa tarkastellaan kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien ja seurauksena olevan liikkeen (translaatio ja rotaatio) välisiä yhteyksiä. Voimien käsittelyssä tarvitaan voimaoppia statiikasta ja kappaleen geometristen liikesuureiden tarkasteluun tarvitaan kinematiikan tietoja.

Tässä luvussa rajoitutaan tasoliikkeen kinetiikkaan, jolloin tarkasteltava kappaletta voidaan pitää äärettömän ohuena levynä ja liike tapahtuu levyn määräämässä tasossa, jota sanotaan kappaleen liiketasoksi. Kappaleen massakeskiö on liiketasossa ja myös kaikkien kappaleeseen vaikuttavien voimien oletetaan vaikuttavan tässä tasossa. Tasoliikkeen kinetiikan teoriaa voidaan soveltaa myös kappaleisiin, joilla on ulottuvuutta liiketasoa vastaan kohtisuorassa suunnassakin, mikäli liiketaso on kyseisen kappaleen symmetriataso. On selvää, että tasoliikkeen avulla voidaan tarkastella hyvin monia käytännön sovelluksia.

Luvussa 3 olivat esillä partikkelin liikeyhtälöt ja tasoliikkeen liikeyhtälöiksi saatiin kaksi voimayhtälöä, jotka esimerkiksi xy-koordinaatistossa ovat kaavan (3.7) mukaiset. Jäykän kappaleen tasoliikkeen tarkastelussa tarvitaan yksi lisäyhtälö, koska on tarkasteltava myös kappaleen rotaatioliikettä liiketason normaalin ympäri. Luvussa 4 johdettiin mielivaltaisen partikkelisysteemin liikeyhtälöt, jolloin saatiin mm. kaavojen (4.14) ja (4.20) mukaiset yleinen voima- ja momenttiliikeyhtälö. Jäykkä kappale on määritelmänsä mukaan partikkelisysteemi, jonka partikkelien keskinäiset etäisyydet eivät voi muuttua. Tästä seuraa, että partikkelisysteemin liikeyhtälöt pätevät myös jäykälle kappaleelle täysin yleisesti. Näitä liikeyhtälöitä voidaan kuitenkin kehittää huomattavasti käyttökelpoisempaan muotoon ottamalla jäykän kappaleen erityisominaisuudet huomioon. Tässä luvussa liikeyhtälöiden kehittely tullaan suorittamaan tasoliikkeen osalta. Myös partikkelisysteemin työlause (4.8) ja impulssilauseet (4.26) ja (4.27) ovat voimassa jäykälle kappaleelle. Nämäkin on mahdollista kehittää käytännöllisempään asuun, kuten seuraavassa tulee esille.

Vapakappalekuvan hyödyllisyys on statiikan ja partikkelin kinetiikan yhteydessä tullut selvästi esiin. Jäykän kappaleen liikeyhtälöiden kirjoittaminen helpottuu myös suuresti, kun kappaleesta piirretään kunnollinen vapaakappalekuva, josta kappaleeseen vaikuttavat ulkoiset kuormitukset ilmenevät. Vapaakappalekuvaan kannattaa merkitä myös kinemaattisten suureiden (kiihtyvyys ja kulmakiihtyvyys) tunnettu tai oletettu suunta. Vielä selvemmäksi tilanne tulee, jos liikesuureet esitetään erillisessä kappaleen kuvassa, jota tällöin sanotaan kineettiseksi kuvaksi.

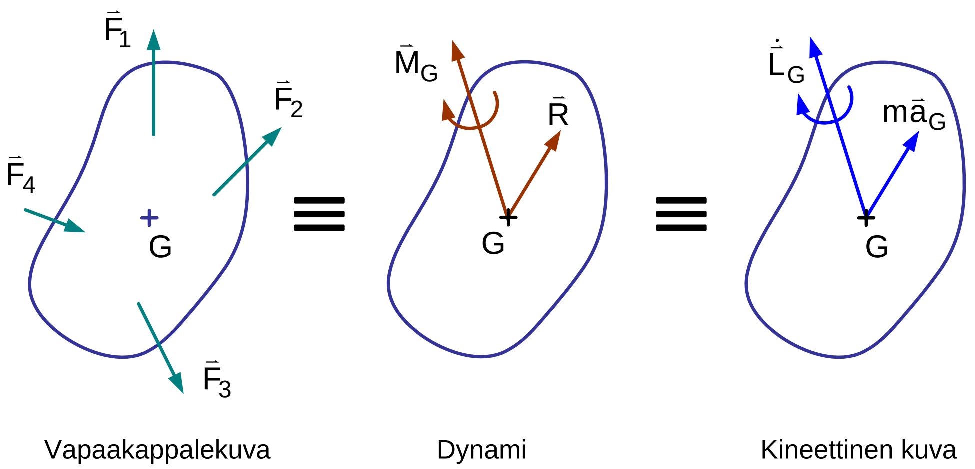
Kun partikkelisysteemin momenttiliikeyhtälön (4.17) tai (4.20) oikealla puolella olevaa liikemäärän momentin aikaderivaattaa kehitellään jäykän kappaleen tapauksessa eteenpäin, päädytään yleisessä tapauksessa hitausmatriisin käsitteeseen. Hitausmatriisi on 3x3-matriisi, jonka alkioina ovat käytettävän koordinaatiston akseleiden suhteen lasketut hitausmomentit ja hitaustulot. Tasoliikkeen tapauksessa näistä tarvitaan vain liiketason normaalin suhteen laskettu hitausmomentti. Tässä esityksessä ei puututa hitaussuureiden määritykseen integraalilaskennan avulla, koska se tulee esille matematiikan opintojaksoissa. Voidaan kuitenkin todeta, että sovelluksissa esiintyvien tavallisimpien kappaleiden hitaussuureet saadaan yleensä selville ainakin likimääräisesti ilman integrointia, kun käytetään hyväksi valmiita taulukkotapauksia ja sovelletaan yhteenlaskuperiaatetta ja Steinerin sääntöä.

6.2 Jäykän kappaleen liikeyhtälöt

Luvussa 4 saatiin mielivaltaisen partikkelisysteemin voima- ja momenttiliikeyhtälöiksi

$$\boxed{\vec{R} = m\vec{a}_G = \dot{\vec{p}} \qquad \vec{M}_G = \dot{\vec{L}}_G} \tag{6.1}$$

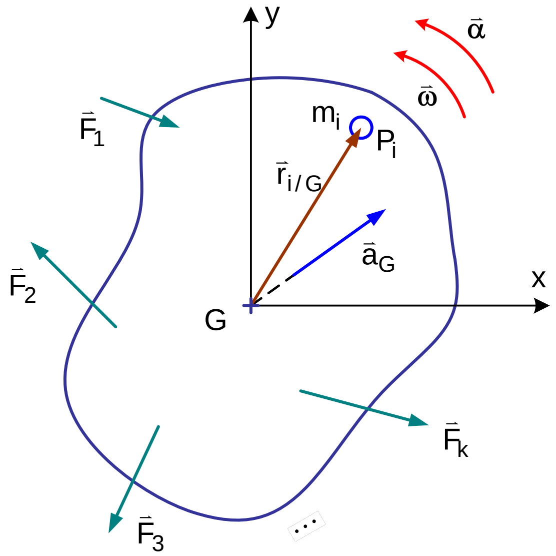
jolloin momenttipisteenä on systeemin massakeskiö. Nämä yhtälöt ovat voimassa myös jäykän kappaleen yleiselle kolmiulotteiselle liikkeelle, sillä jäykkä kappale on partikkelisysteemi, jossa partikkelien keskinäiset etäisyydet eivät voi muuttua. Kuvassa 6.1 on havainnollistettu yhtälöitä (6.1). Kuva 6.1 (a) on vapaakappalekuva, jossa on esitetty kappaleeseen vaikuttava ulkoinen voimasysteemi. Statiikassa osoitetaan, että mielivaltainen voimasysteemi voidaan koota valittuun kokoamispisteeseen dynamiksi. Kuvassa 6.1 (b) on esitetty ulkoisen voimasysteemin dynami kokoamispisteen ollessa massakeskiö G. Kuva 6.1 (c) on kappaleen kineettinen kuva, jossa on esitetty liikkeestä aiheutuvat kineettiset suureet.



Kuva 6.1 Jäykän kappaleen liikeyhtälöt.

Kaavat (6.1) merkitsevät vapaakappalekuvan ja kineettisen kuvan samanarvoisuutta. Liikeyhtälöt saadaan kuvien 6.1 (a) ja (c) avulla helposti kirjoitettua myös massakeskiöstä G poikkeavaa momenttipistettä käytettäessä, kuten myöhemmin nähdään.

Selvitetään, mihin muotoon liikeyhtälöt (6.1) menevät jäykän kappaleen tasoliikkeen tapauksessa. Kuvassa 6.2 on kappale, joka on tasoliikkeessä xy-tasossa. Massakeskiön G kiihtyvyys on $\vec{a}_G$ ja kappaleen kulmanopeus ja -kiihtyvyys ovat $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ ja $\vec{\alpha} = \alpha \vec{k}$. Koska $\vec{\omega}$ ja $\vec{\alpha}$ ovat koko liikkeen ajan kohtisuorassa liiketasoa vastaan, riittää tuntea niiden suuruudet ω ja $\alpha = \dot{\omega}$, kun lisäksi sovitaan positiiviseksi suunnaksi vastapäivään. Luvussa 4 saatiin massakeskiön G suhteen lasketulle liikemärän momentille kaava $\vec{L}_G = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{i/G} \times m_i \dot{\vec{r}}_{i/G}$, jossa n on partikkelien lukumäärä, $\vec{r}_{i/G}$ on partikkelin P_i paikkavektori ja $\dot{\vec{r}}_{i/G}$ partikkelin P_i suhteellinen nopeus massakeskiöön G nähden. Koska kyseessä on jäykkä kappale, on partikkelin P_i suhteellinen liike massakeskiöön G nähden rotaatiota, jolloin on $\dot{\vec{r}}_{i/G} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{i/G}$. Vektorin $\dot{\vec{r}}_{i/G}$ suuruus on $r_{i/G}\,\omega$ ja suunta on liiketasossa kohtisuoraan vektoria $\vec{r}_{i/G}$ vastaan. Tästä seuraa, että vektorin $\vec{r}_{i/G} \times \dot{\vec{r}}_{i/G}$ suuruus on $r_{i/G}^2\,\omega$ ja suunta vektorin $\vec{\omega}$ suuntaan eli liiketason normaalin suuntaan. Liikemäärän momentin $\vec{L}_G$ suuruudeksi tulee näin ollen



Kuva 6.2 Jäykän kappaleen tasoliike.

$$L_G = \sum_{i=1}^{n} r_{i/G}^2\, m_i\, \omega = \omega \sum_{i=1}^{n} r_{i/G}^2\, m_i = I_G\, \omega \tag{6.2}$$

jossa $I_G = \sum_{i=1}^{n} r_{i/G}^2\, m_i$ on kappaleen hitausmomentti massakeskiön G kautta kulkevan liiketason normaalin suhteen. Kaavojen (6.1) ja (6.2) perusteella voidaan kirjoittaa

$$M_G = \dot{L}_G = I_G\, \dot{\omega} = I_G\, \alpha \tag{6.3}$$

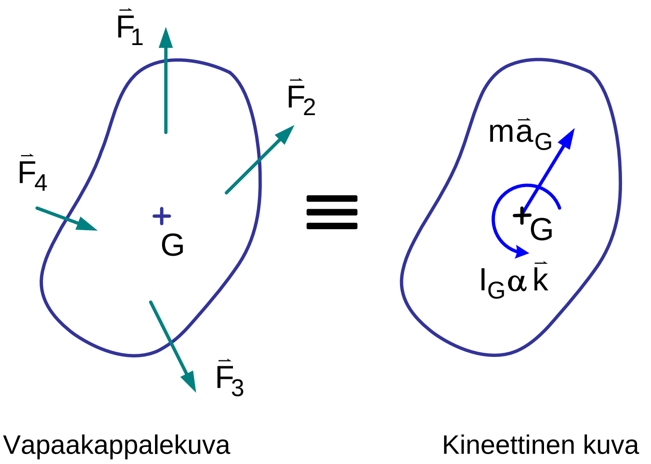
Tasoliikkeen liikeyhtälöiksi tulevat siis kaavat

$$\boxed{\vec{R} = m\vec{a}_G \qquad M_G = I_G \alpha} \tag{6.4}$$

Kaavan (6.4) voimaliikeyhtälö sisältää kaksi komponenttiyhtälöä, jotka voidaan kirjoittaa sopivasti valitussa koordinaatistossa. Jos käytetään xy-koordinaatistoa, saavat liikeyhtälöt muodon

$$\boxed{R_x = ma_{Gx} \qquad R_y = ma_{Gy} \qquad M_G = I_G\alpha} \tag{6.5}$$

Kuvassa 6.3 on havainnollistettu tasoliikkeen liikeyhtälöitä (6.3), jotka siis merkitsevät ekvivalenttisuutta vapaakappalekuvan ja kineettisen kuvan välillä. Liikeyhtälöt saadaan helposti kirjoitettua, kun tarkasteltavasta tilanteesta laaditaan kuvan 6.3 kaltainen esitys.

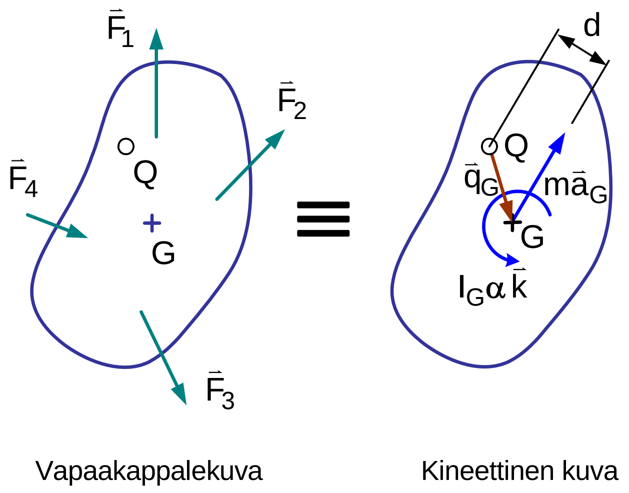


Kuva 6.3 Liikeyhtälöiden kirjoittaminen.

Jäykän kappaleen tasoliikkeen momenttiliikeyhtälö kannattaa kirjoittaa käyttäen massakeskiötä G momenttipisteenä, kuten kaavoissa (6.4) ja (6.5) on tehty, sillä tällöin yhtälö on yksinkertaisin ja hitausmomentit ovat taulukoista parhaiten saatavissa massakeskiön suhteen. Momenttiliikeyhtälö voidaan kirjoittaa myös mielivaltaisen liikkuvan tai kiinteän pisteen suhteen, kuten luvussa 4 esitettiin. Kaavan (4.25) mukaan on mielivaltaisen liikkuvan pisteen Q suhteen voimassa momenttiliikeyhtälö

$$\vec{M}_Q = \dot{\vec{L}}_G + \vec{r}_{G/Q} \times m\vec{a}_G \tag{6.6}$$

jossa $\vec{r}_{G/Q}$ on massakeskiön G paikkavektori pisteeseen Q nähden. Tasoliikkeen tapauksessa suureesta $\dot{\vec{L}}_G$ tulee termi $I_G\alpha$. Termi $\vec{r}_{G/Q} \times m\vec{a}_G$ voidaan tulkita suureen $m\vec{a}_G$ momentiksi pisteen Q suhteen, jolloin sitä vastaa tasoliikkeellä termi $ma_G d$, jossa d on momenttivarsi. Momenttiliikeyhtälö mielivaltaisen liikkuvan momenttipisteen Q suhteen on siis muotoa



Kuva 6.4 Liikeyhtälöiden kirjoittaminen.

$$\boxed{M_Q = I_G\alpha \pm ma_G d} \tag{6.7}$$

Termin $\pm ma_G d$ etumerkki valitaan suureen $m\vec{a}_G$ pyöritysuunnan perusteella. On ilmeistä, että momenttiliikeyhtälö (6.7) saadaan helposti kirjoitettua vapaakappalekuvan ja kineettisen kuvan avulla, kuten kuvasta 6.4 ilmenee.

Luvussa 4 saatiin kiinteän pisteen O suhteen lasketulle liikemärän momentille kaava $\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$, jossa n on partikkelien lukumäärä, $\vec{r}_i$ on partikkelin P_i paikkavektori pisteen O suhteen ja $\vec{v}_i$ partikkelin P_i absoluuttinen nopeus. Koska O on kiinteä, on $\vec{v}_O = \vec{0}$, joten suhteellisen nopeuden kaavasta (5.11) seuraa tulos $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$. Vektorin $\vec{v}_i$ suuruus on $r_i\,\omega$ ja suunta on liiketasossa kohtisuoraan vektoria $\vec{r}_i$ vastaan. Tästä seuraa, että vektorin $\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$ suuruus on $r_i^2\,\omega$ ja suunta vektorin $\vec{\omega}$ suuntaan eli liiketason normaalin suuntaan. Liikemäärän momentin $\vec{L}_O$ suuruudeksi tulee

$$L_O = \sum_{i=1}^{n} r_i^2\, m_i\, \omega = \omega \sum_{i=1}^{n} r_i^2\, m_i = I_O\, \omega \tag{6.8}$$

jossa $I_O = \sum_{i=1}^{n} r_i^2\, m_i$ on kappaleen hitausmomentti pisteen O kautta kulkevan liiketason normaalin suhteen. Kaavojen (4.17) ja (6.8) perusteella voidaan kirjoittaa

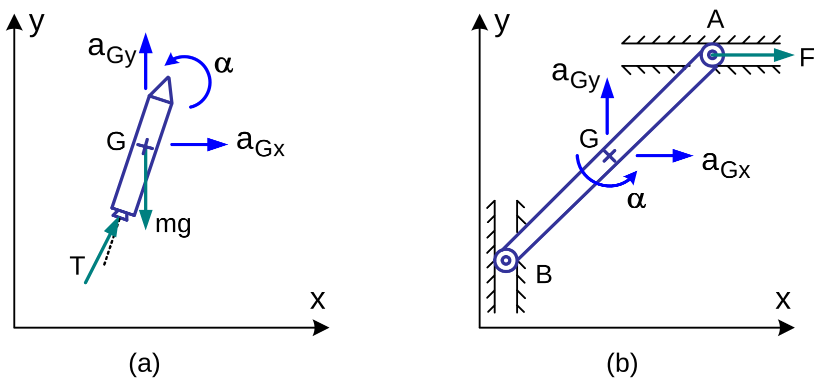
$$M_O = \dot{L}_O = I_O\, \dot{\omega} = I_O\, \alpha \tag{6.9}$$

Momenttiliikeyhtälö kiinteän momenttipisteen O suhteen on siis muotoa

$$\boxed{M_O = I_O \alpha} \tag{6.10}$$

jossa on erityisesti huomattava, että I_O on kappaleen hitausmomentti pisteen O kautta kulkevan liiketason normaalin suhteen.

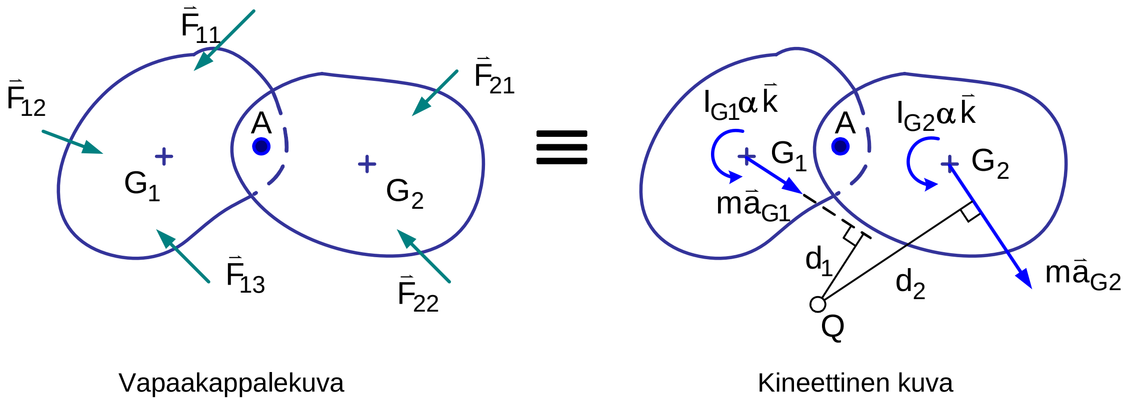
Jäykän kappaleen liike voi olla vapaata, jolloin kappaleen liike on muista kappaleista riippumatonta tai kytkettyä, jolloin muut kappaleet aiheuttavat kappaleen liikkeelle tiettyjä rajoituksia. Kuvan 6.5 (a) tapauksessa on kyseessä raketin vapaa liike xy-tasossa. Massakeskiön kiihtyvyyskomponentit a_{Gx} ja a_{Gy} sekä kulmakiihtyvyys α voidaan määrittää liikeyhtälöistä (6.5), kun ulkoiset voimat tunnetaan. Kuvan 6.5 (b) sauvan liike on sen sijaan kytkettyä liikettä, sillä vaaka- ja pystysuuntainen ohjain aiheuttavat kinemaattisten suurei-



Kuva 6.5 Vapaa ja kytketty liike.

den a_{Gx}, a_{Gy} ja α välille yhteyksiä ja lisäksi ohjainten aiheuttamat tukireaktiot ovat tuntemattomia. Kytketyn liikkeen tapauksessa ei siis pelkkien liikeyhtälöiden (6.5) kirjoittaminen johda tuntemattomien ratkaisuun, koska näitä on enemmän kuin kolme. Lisäyhtälöitä saadaan selvittämällä kinemaattisten suureiden väliset yhteydet luvussa 5 esitetyillä menetelmillä.

Edellä esitetyt liikeyhtälöt voidaan yleistää koskemaan useamman jäykän kappaleen muodostamaa kinemaattista systeemiä. Kuvassa 6.6 on esitetty esimerkkinä kaksi jäykkää kappaletta, jotka on kiinnitetty toisiinsa esimerkiksi nivelellä tai venymättömillä sauvoilla. Tällöin liitoksiin liittyvät voimat ovat systeemin sisäisiä voimia, jotka voi-



Kuva 6.6 Kappalesysteemin liikeyhtälöt.

man ja vastavoiman lain mukaan eivät vaikuta systeemin liikeyhtälöihin. Esimerkiksi vapaakappalekuvassa 6.6 (a) on esitetty kahden kappaleen systeemiin vaikuttavat ulkoiset voimat. Nivelen A tukivoimat ovat systeemin sisäisiä voimia, eivätkä näin ollen kuulu vapaakappalekuvaan. Kineettisessä kuvassa 6.6 (b) on esitetty kummankin kappaleen kineettiset suureet $m\vec{a}_G$ ja $I_G\alpha\vec{k}$. Yleisessä tapauksessa kytkettyjen kappaleiden lukumäärä on N ja voimaliikeyhtälöt ja momenttiliikeyhtälö pisteen Q suhteen ovat kuvan 6.6 perusteella

$$R_x = \sum_{k=1}^{N} m_k\, a_{G_k x} \qquad R_y = \sum_{k=1}^{N} m_k\, a_{G_k y} \qquad M_Q = \sum_{k=1}^{N}\left(I_{G_k}\alpha_k \pm m_k\, a_{G_k} d_k \right) \tag{6.11}$$

jossa kappaleen k suureet ovat: m_k massa, G_k massakeskiö, a_{G_k} massakeskiön kiihtyvyyden suuruus, $a_{G_k x}$ ja $a_{G_k y}$ massakeskiön kiihtyvyyden komponentit, I_{G_k} hitausmomentti massakeskiön G_k suhteen, α_k kulmakiihtyvyys ja d_k suureen $m_k\, a_{G_k}$ momenttivarsi pisteen Q suhteen. Termin $\pm m_k\, a_{G_k} d_k$ etumerkki valitaan suureen $m_k\, a_{G_k}$ pyörityssuunnan perusteella. Liikeyhtälöiden (6.11) avulla voidaan ratkaista kappalesysteemistä kolme tuntematonta suuretta. Jos tuntemattomia on tätä enemmän, on lisäksi kirjoitettava yksittäisten kappaleiden liikeyhtälöitä tai sovellettava esimerkiksi työ- ja energiaperiaatteita.

6.3 Translaatio

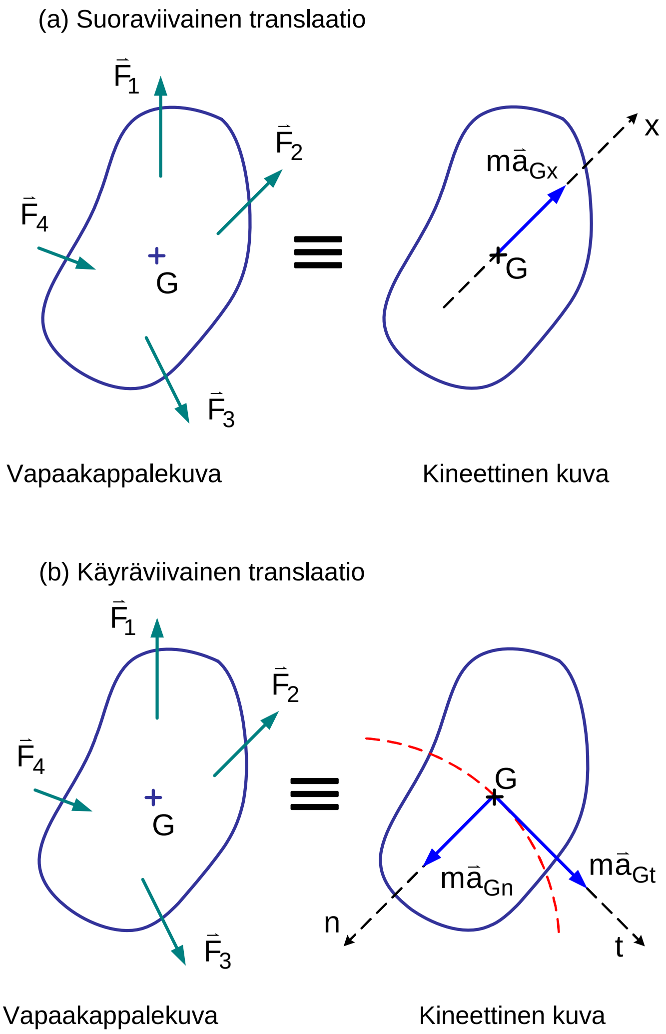
Translaatiossa kappaleen jokainen suora säilyttää suuntansa liikkeen aikana. Suoraviivaisessa translaatiossa kappaleen pisteiden liikeradat ovat yhdensuuntaisia suoria ja käyräviivaisessa translaatiossa yhdensuuntaisia käyriä. Translaatiossa olevalla kappaleella ei ole kulmaliikettä, joten kulmanopeus $\vec{\omega}$ ja kulmakiihtyvyys $\vec{\alpha}$ ovat nollia. Liikeyhtälöitä kirjoitettaessa ei näin ollen tarvita kappaleen hitausmomenttia. Kaavat (6.5) saavat tällöin muodon

$$\boxed{\begin{aligned} R_x &= m a_{Gx} \\ R_y &= m a_{Gy} \\ M_G &= 0 \end{aligned}} \qquad (6.12)$$

Suoraviivaiselle translaatiolle voidaan valita esimerkiksi x-akseli liikesuuntaan kuvan 6.7 (a) mukaisesti. Kaavan (6.12) voimaliikeyhtälöt ovat tällöin muotoa $R_x = m a_{Gx}$ ja $R_y = 0$.

Käyräviivaiselle translaatiolle on usein kätevää käyttää tn-ratakoordinaatistoa, kuvan 6.7 (b) mukaisesti. Liikeyhtälöt ovat tässä koordinaatistossa

$$\boxed{\begin{aligned} R_n &= m a_{Gn} \\ R_t &= m a_{Gt} \\ M_G &= 0 \end{aligned}} \qquad (6.13)$$

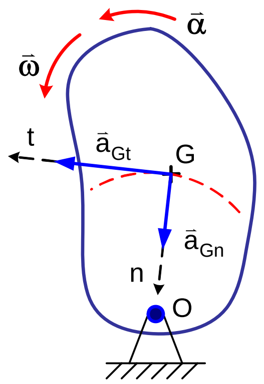


Kuva 6.7 Translaatio.

Kaavojen (6.12) ja (6.13) massakeskiön suhteen olevan momenttiliikeyhtälön sijasta voidaan käyttää mielivaltaisen momenttipisteen Q suhteen kirjoitettua yhtälöä, joksi kaavan (6.7) perusteella tulee $M_Q = \pm m a_G d$.

6.4 Rotaatio

Rotaatio on kappaleen pyörimisliikettä kiinteän rotaatioakselin O ympäri, jolloin kappaleen pisteiden liikeradat ovat O-keskisiä ympyröitä. Massakeskiön G kiihtyvyyskomponentit voidaan parhaiten esittää tn-ratakoordinaatistossa kuvan 6.8 mukaisesti,



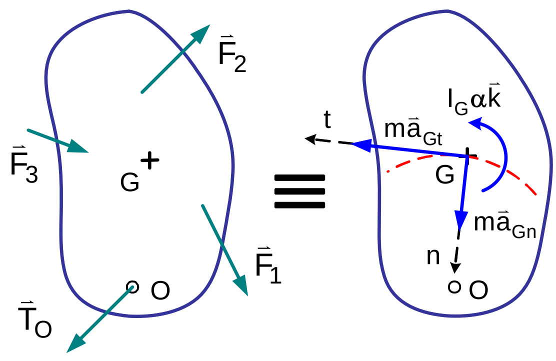
Kuva 6.8 Rotaatio.

jolloin $a_{Gn} = r_{G/O}\,\omega^2$ ja $a_{Gt} = r_{G/O}\,\alpha$, missä $r_{G/O} = OG$. Kuvassa 6.9 on vastaavasti vapaakappalekuva ja kineettinen kuva, jossa on käytetty kiihtyvyyden a_G komponentteja a_{Gn} ja a_{Gt}. Tästä seuraavat liikeyhtälöt

$$\boxed{R_n = mr_{G/O}\,\omega^2 \qquad R_t = mr_{G/O}\,\alpha \qquad M_G = I_G\alpha} \tag{6.14}$$

On selvää, että kaavan (6.14) momenttiliikeyhtälössä tulee ottaa huomioon myös rotaatioakselin kohdalla kappaleeseen kohdistuvan tukivoiman aiheuttama momentti. Koska tämä tukivoima on tuntematon, on usein kätevämpää kirjoittaa momenttiliikeyhtälö rotaatiokeskuksen O suhteen. Koska O on kiinteä piste, pätee tässä kaava (6.10)

$$\boxed{M_O = I_O\alpha} \tag{6.15}$$



Vapaakappalekuva Kineettinen kuva

Kuva 6.9 Rotaatio.

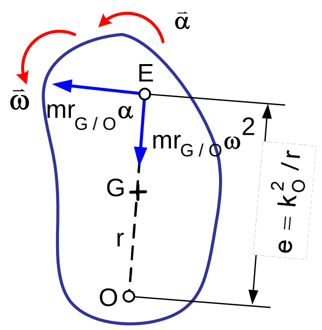
Jos kappaleen rotaatiokeskus O on samalla sen massakeskiö G, on $\vec{a}_G = \vec{0}$ ja voimaliikeyhtälöksi tulee $\vec{R} = \vec{0}$. Tästä seuraa, että kappaleeseen vaikuttavan voimasysteemin dynamissa vain momentti on nollasta poikkeava ja tämän momentin suuruus on $I_G\alpha$.

Suureiden ma_{Gt} ja $I_G\alpha$ systeemi kineettisessä kuvassa 6.9 voidaan korvata pelkällä suureella ma_{Gt}, kun sovelletaan yhdensuuntaissiirtoa. Valitaan suureelle ma_{Gt} uusi vaikutuspiste E siten, että

$$mr_{G/O}\,\alpha \cdot e = I_G\,\alpha + mr_{G/O}\,\alpha \cdot r_{G/O}$$

jossa $e = OE$ kuvan 6.10 mukaisesti. Käyttämällä Steinerin sääntöä saadaan

$$mr_{G/O}\,\alpha \cdot e = (I_G + mr_{G/O}^2)\alpha = I_O\,\alpha$$

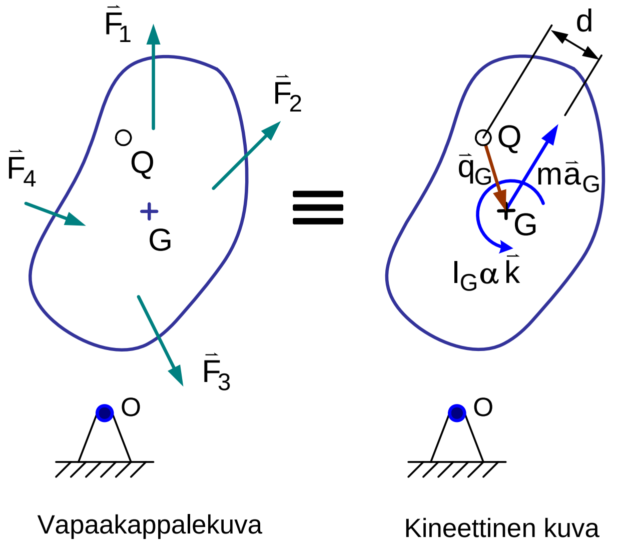


Kuva 6.10 Heilahduskeskiö.

joten $e = I_O/(mr_{G/O}) = k_O^2/r_{G/O}$, missä k_O on kappaleen hitaussäde pisteen O suhteen. Pistettä E sanotaan kappaleen heilahduskeskiöksi. On ilmeistä, että kappaleeseen vaikuttavan voimasysteemin resultantti kulkee heilahduskeskiön kautta eli heilahduskeskiön suhteen on voimassa $M_E = 0$.

6.5 Yleinen tasoliike

Yleinen tasoliike sisältää translaatiota ja rotaatiota. Liikeyhtälöt johdettiin kohdassa 6.2, mutta kootaan tässä vielä tulokset. Liikeyhtälöt kirjoitetaan kuvan 6.11 vapaakappalekuvan ja kineettisen kuvan avulla. Voimaliikeyhtälöksi tulee



Kuva 6.11 Liikeyhtälöt.

$$\boxed{\vec{R} = m\vec{a}_G} \tag{6.16}$$

joka sisältää kaksi komponenttiyhtälöä. Voimaliikeyhtälön komponenttiyhtälöt kirjoitetaan siinä koordinaatistossa, jossa massakeskiön kiihtyvyyden $\vec{a}_G$ komponentit hallitaan parhaiten. Momenttiliikeyhtälö on yksinkertaisin kirjoittaa käyttäen massakeskiötä G momenttipisteenä eli

$$\boxed{M_G = I_G \alpha} \tag{6.17}$$

Jos momenttipisteeksi valitaan jokin massakeskiöstä poikkeava liikkuva piste Q, on momenttiliikeyhtälö

$$\boxed{M_Q = I_G \alpha \pm m a_G d} \tag{6.18}$$

Momenttiliikeyhtälö voidaan kirjoittaa myös kiinteän pisteen O suhteen eli

$$\boxed{M_O = I_O \alpha} \tag{6.19}$$

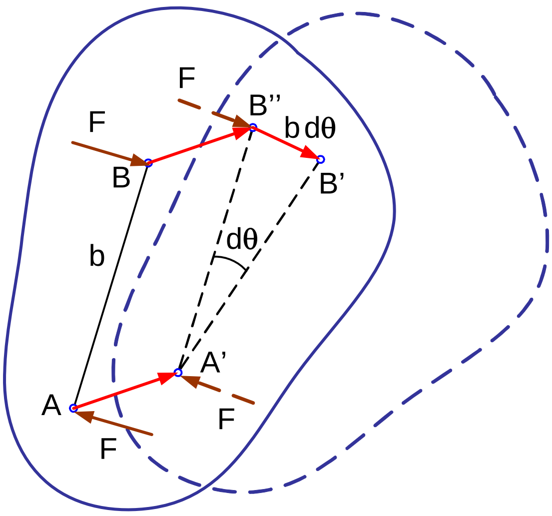
Momenttiliikeyhtälön eri muotoja käytettäessä on syytä olla perillä, minkä akselin suhteen laskettua hitausmomenttia kulloinkin tarvitaan.

Tasoliiketehtävän ratkaisun kulku riippuu siitä, onko kyseessä vapaa vai kytketty liike. Jos liike on vapaata, saadaan massakeskiön kiihtyvyyskomponentit ja kulmakiihtyvyys ratkaistua suoraan liikeyhtälöistä, minkä jälkeen on kinematiikan avulla mahdollista ratkaista kappaleen muiden pisteiden liikesuureet. Jos taas kyseessä on kytketty liike, on liikesuureiden väliset kinemaattiset yhteydet selvitettävä ennen kuin liikeyhtälöt voidaan ratkaista, sillä muuten liikeyhtälöihin tulee liian monta tuntematonta. Kappaleen tasoliikkeestä voidaan jäykän kappaleen oletuksilla ratkaista korkeintaan viisi suuretta, koska käytettävissä on enintään viisi riippumatonta yhtälöä, nimittäin kolme liikeyhtälöä ja suhteellisen kiihtyvyyden kaavaan (5.16) sisältyvät kaksi komponenttiyhtälöä.

6.6 Jäykän kappaleen työlause

Partikkelin kinetiikassa todettiin, että työlause sopii erityisesti tapauksiin, joissa voimat tunnetaan vaikutuspisteidensä siirtymien funktiona ja halutaan laskea asema tai nopeus tietyllä hetkellä. Partikkelisysteemiä tarkasteltaessa nähtiin työlauseen olevan voimassa sillekin ja johdettiin lisäksi työlauseessa tarvittava liike-energian kaava (4.12). Jäykkä kappale on partikkelisysteemin erityistapaus, joten työlause on voimassa myös jäykälle kappaleelle. Kaavoja voidaan kuitenkin kehitellä käyttökelpoisempaan muotoon, kun otetaan huomioon jäykän kappaleen erityisominaisuudet.

Voiman tekemää työtä koskevat tulokset johdettiin kohdassa 3.5 ja ne pätevät myös jäykkään kappaleeseen vaikuttavalle voimalle. Voimaparin tekemä työ voidaan määrittää laskemalla yhteen kummankin voiman yksinään tekemä työ. Toinen mahdollisuus on hyödyntää voimaparin momenttia. Kuvassa 6.12 on esitetty voimapari, jonka voimien vaikutuspisteet ovat alkuhetkellä A ja B sekä loppuhetkellä A’ ja B’, jolloin jana AB on kääntynyt kulman $d\theta$. Voimaparin momentti on $M = Fb$ myötäpäivään. Liikkeen voidaan tulkita koostuvan kahdesta osaliikkeestä siten, että ensin tapahtuu pisteen A mukainen translaatio asemaan A’B’’ ja sitten rotaatio $d\theta$ pisteen A’ ympäri asemaan A’B’. Translaatio-osalla tehty työ on nolla ja rotaatio-osalla tehtävä työ on $dW = F \cdot b\,d\theta = M\,d\theta$. Työ on negatiivinen, jos voimaparin pyörityssuunta on vastakkainen rotaatiosuunnalle. Äärellisen rotaation aikana voimaparin tekemä työ saadaan integroimalla



Kuva 6.12 Voimaparin tekemä työ.

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\,d\theta \tag{6.20}$$

Tavallisin on tapaus, jossa momentti M on vakio liikkeen aikana. Integrointi voidaan tällöin suorittaa, jolloin päädytään tulokseen

$$W = M(\theta_2 - \theta_1) = M\Delta\theta \tag{6.21}$$

Kaavan (4.12) mukaan partikkelisysteemin liike-energian lauseke on

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_{i/G}^2 \tag{6.22}$$

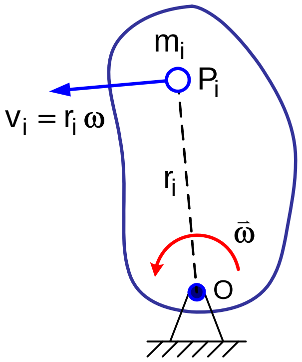
Jäykällä kappaleella suhteellinen liike massakeskiön suhteen on rotaatiota, joten suhteellisen nopeuden suuruus $v_{i/G} = \omega\, r_{i/G}$. Tästä seuraa tulos

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i\, v_{i/G}^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i\, r_{i/G}^2 = \frac{1}{2} I_G\, \omega^2 \tag{6.23}$$

jonka perusteella jäykän kappaleen liike-energialle saadaan kaava

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m\, v_G^2 + \frac{1}{2} I_G\, \omega^2} \tag{6.24}$$

Translaatioliikkeessä on $\omega = 0$ ja vain liike-energian ensimmäinen termi on tarpeen. Kiinteän pisteen O ympäri rotaatiossa olevan kappaleen liike-energia voidaan tietenkin laskea yleiskaavasta (6.24), mutta sille voidaan johtaa vaihtoehtoinen kaava kuvan 6.13 avulla. Liike-energian määritelmän mukaan on



Kuva 6.13 Rotaatio.

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i\, v_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i\, r_i^2 = \frac{1}{2} I_O\, \omega^2 \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} I_O\, \omega^2} \tag{6.25}$$

Kaavaa (6.25) käytettäessä on taas huomattava, että siinä hitausmomentti on akselin O suhteen. Kaavan (6.25) johto on voimassa myös, jos O on yleisen tasoliikkeen nopeusnapa.

Jäykän kappaleen työlausetta sovellettaessa voidaan hyödyntää gravitaatiopotentiaalienergian ja kimmoenergian käsitteitä samalla tavalla kuin partikkelin työlauseen yhteydessä tuli esille. Voidaan siis käyttää jompaakumpaa työlauseen esitysmuotoa

$$\boxed{W = \Delta T \qquad \text{tai} \qquad W' = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e} \tag{6.26}$$

Työlause soveltuu myös useamman jäykän kappaleen muodostamalle systeemille, jolloin W' tarkoittaa systeemissä vaikuttavien voimien kokonaistyötä ja energiamuutokset systeemin osien yhteenlaskettuja energiamuutoksia.

6.7 Jäykän kappaleen impulssilauseet

Partikkelin kinetiikassa tuli esille, että impulssilauseet soveltuvat parhaiten tilanteisiin, joissa ulkoiset voimat tunnetaan ajan funktiona. Luvussa 4 impulssilauseet yleistettiin koskeman mielivaltaista partikkelisysteemiä. Tästä seuraa, että impulssilauseet pätevät myös jäykälle kappaleelle. Tutkitaan seuraavassa, mihin muotoon impulssilauseet menevät jäykän kappaleen tasoliikkeen tapauksessa. Kaavojen (4.13) ja (4.26) perusteella voiman impulssilauseeksi tulee

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{R}\,dt = m(\vec{v}_{G2} - \vec{v}_{G1})} \tag{6.27}$$

Kaavojen (4.27) ja (6.2) perusteella tulee momentin impulssilauseeksi

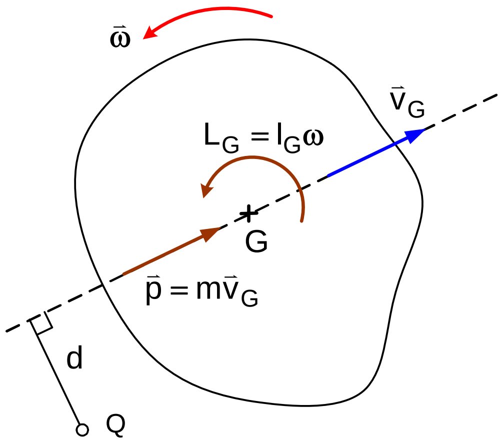
$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} M_G\,dt = I_G\,(\omega_2 - \omega_1)} \tag{6.28}$$

jolloin momenttipisteenä on käytetty massakeskiötä. Kuvan 6.14 avulla nähdään, miten momentin impulssilause kirjoitetaan mielivaltaisen liikkuvan tai kiinteän momenttipisteen Q suhteen. On ilmeistä, että liikemäärän momentti pisteen Q suhteen on

$$\boxed{L_Q = I_G\,\omega \pm m v_G\,d} \tag{6.29}$$

jossa viimeisen termin merkki valitaan liikemäärän $m v_G$ pyörityssuunnan perusteella. Momentin impulssilause pisteen Q suhteen on siis muotoa

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} M_Q\,dt = L_{Q2} - L_{Q1}} \tag{6.30}$$



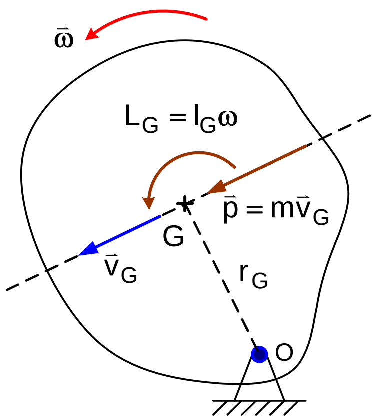
Kuva 6.14 Momentin impulssilause.

Jos kappale on rotaatiossa kiinteän pisteen O ympäri kuvan 6.15 mukaisesti, on $v_G = r_G\,\omega$ ja $d = r_G$. Kaavasta (6.29) seuraa

$$L_O = I_G\,\omega + m r_G^2\omega = (I_G + m r_G^2)\,\omega = I_O\,\omega$$

Momentin impulssilause rotaatiokeskuksen O suhteen menee näin ollen muotoon

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} M_O\,dt = I_O\,(\omega_2 - \omega_1)} \tag{6.31}$$



Kuva 6.15 Momentin impulssilause.

Impulssilauseet soveltuvat myös useamman jäykän kappaleen muodostamalle systeemille. Tällöin kaavoissa esiintyvissä voima- ja momenttisummissa ovat systeemin kannalta ulkoisten voimien vaikutukset ja liikemäärät ja liikemäärän momentit tarkoittavat systeemin kappaleiden yhteenlaskettuja suureita vastaavasti. Kappalesysteemin momentin impulssilause kirjoitetaan sopivasti valitun momenttipisteen Q suhteen.

Jos jäykkään kappaleeseen vaikuttavan voimasysteemin resultantin impulssi on nolla aikavälillä $[t_1 , t_2]$, seuraa voiman impulssilauseesta

$$\Delta\vec{p} = m(\vec{v}_{G2} - \vec{v}_{G1}) = \vec{0} \tag{6.32}$$

eli liikemäärä säilyy tarkasteluvälillä.

Jos jäykkään kappaleeseen vaikuttavan voimasysteemin momentin impulssi on nolla aikavälillä $[t_1 , t_2]$, seuraa momentin impulssilauseesta (6.28) tai (6.31)

$$\Delta L_G = I_G(\omega_2 - \omega_1) = 0 \qquad \text{tai} \qquad \Delta L_O = I_O(\omega_2 - \omega_1) = 0 \tag{6.33}$$

eli liikemäärän momentti säilyy tarkasteluvälillä. Liikemäärän ja liikemäärän momentin säilymisen lait eivät ole mitenkään toisistaan riippuvia, toinen niistä voi säilyä, vaikka toinen ei säilykään.

