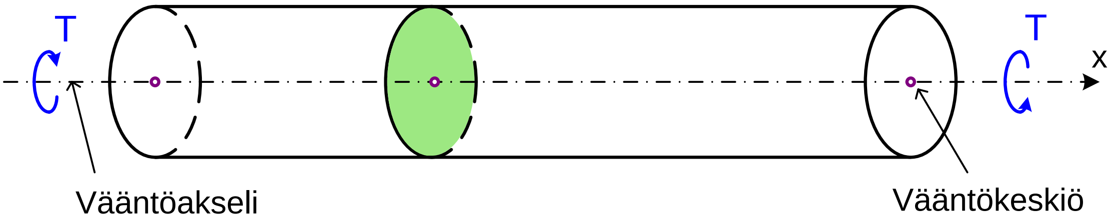
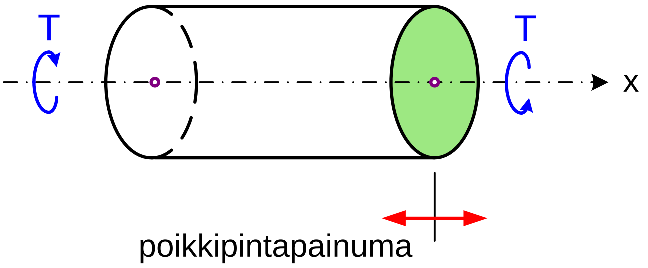
# VÄÄNTÖ, PERUSKÄSITTEITÄ




poikkipintapainuma
$\Rightarrow$ $\sigma$ normaalijännitys

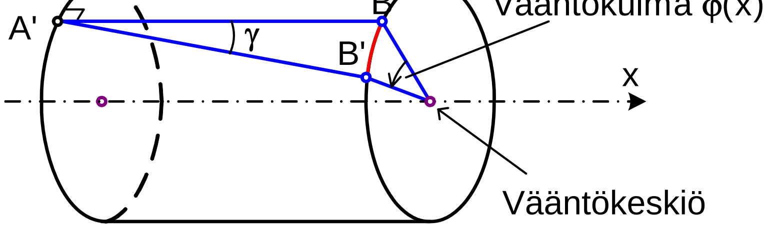
Vääntömomentti T
$\Rightarrow$ $\tau$ leikkausjännitys
$\Rightarrow$ $\varphi$ vääntökulma

**VAPAA VÄÄNTÖ** – **Poikkipintapainuma voi vapaasti syntyä. (Saint Venant v. 1850)**

**ESTETTY VÄÄNTÖ** – **Poikkipintapainuma on ainakin osittain estetty. (Vlasov v. 1940)**

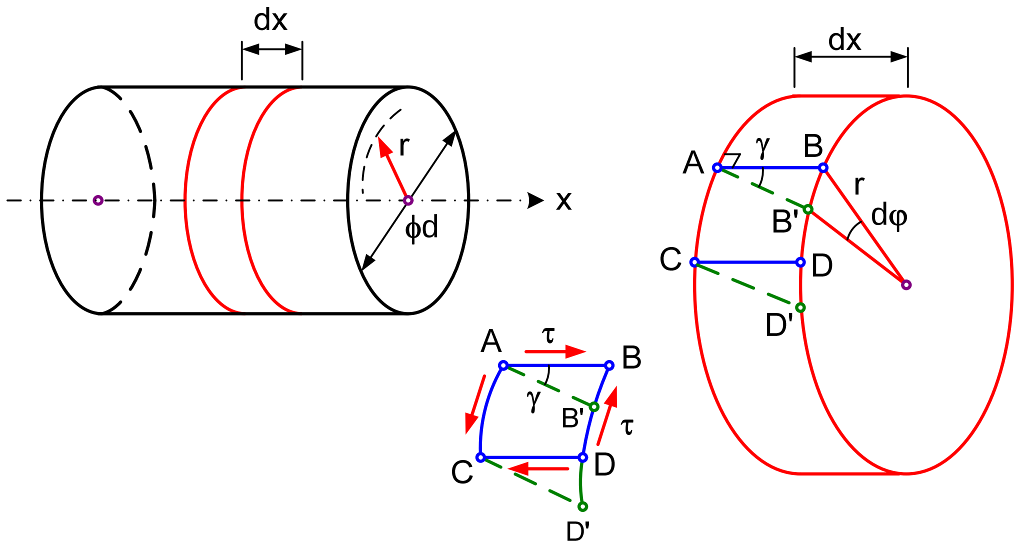
**VÄÄNTYMÄ**

$$\boxed{\theta = \frac{d\varphi}{dx}}$$



# YMPYRÄSYLINTERIN VÄÄNTÖ

- **Vääntökeskiö on poikkileikkausympyrän keskipiste.**
- **Poikkipintapainumaa ei synny lainkaan (symmetria).**



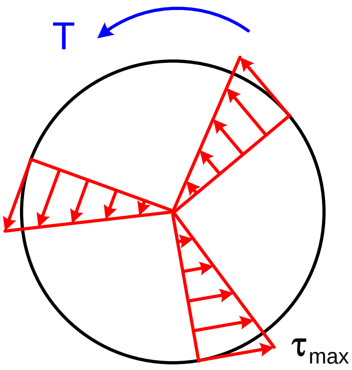

$$BB' = \gamma\, dx = r\, d\varphi \quad \Rightarrow \quad \gamma = r\frac{d\varphi}{dx} \qquad \boxed{\gamma = r\,\theta}$$

$\gamma_{max} = d\theta/2$ **poikkileikkauksen reunassa**

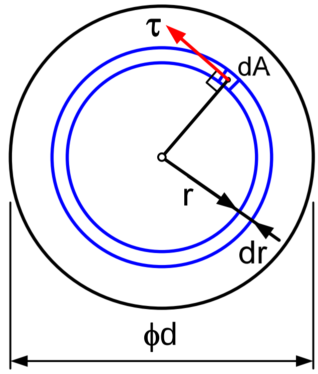
$$\tau = G\gamma \qquad \boxed{\tau = G\,r\,\theta}$$

$\tau_{max} = Gd\theta/2$ **poikkileikkauksen reunassa**

# YMPYRÄSYLINTERIN VÄÄNTÖ




$\tau$ – jakauma




**$\tau$ - kentän leikkausvoimaresultantti on nolla.**
**$\tau$ - kentän momentiksi keskipisteen (vääntökeskiö) suhteen tulee**

$$T = \iint_A r \cdot \tau \, dA = \iint_A r \cdot G r \theta \, dA = G\theta \iint_A r^2 dA = G\theta \, I_v$$

$$I_v = \iint_A r^2 \, dA = \int_0^{d/2} r^2 \, 2\pi r \, dr = 2\pi \int_0^{d/2} r^3 \, dr = 2\pi \Big/_0^{d/2} \frac{r^4}{4} = \frac{1}{2}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^4 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{I_v = \frac{\pi d^4}{32}}$$

$I_v$ **on ympyrän vääntöneliömomentti, joka on sama kuin sen polaarinen neliömomentti keskipisteen suhteen.**

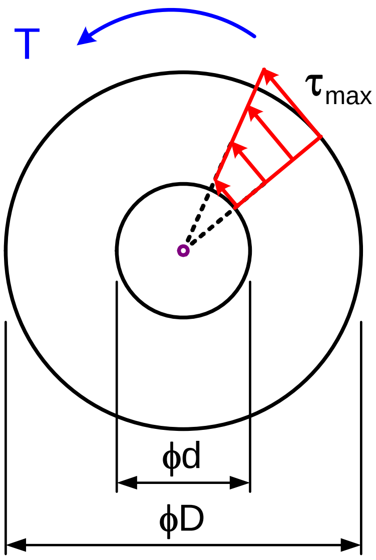
$$\Rightarrow \quad \boxed{\theta = \frac{T}{G I_v}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = \frac{T}{I_v} r}$$

$$\tau_{max} = \frac{T}{I_v} \cdot \frac{d}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_{max} = \frac{T}{W_v}}$$

$$\boxed{W_v = \frac{\pi d^3}{16}}$$

$W_v$ **on ympyrän vääntövastus.**

# YMPYRÄSYLINTERIPUTKEN VÄÄNTÖ




$$\alpha = \frac{d}{D}$$

**Ympyrärenkaan vääntöneliömomentti**

$$I_v = \iint_A r^2\,dA = \int_{d/2}^{D/2} r^2\,2\pi r\,dr = 2\pi \int_{d/2}^{D/2} r^3\,dr = 2\pi \Big/_{d/2}^{D/2} \frac{r^4}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\pi\left[\left(\frac{D}{2}\right)^4 - \left(\frac{d}{2}\right)^4\right] = \frac{\pi D^4}{32}\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_v = \frac{\pi D^4}{32}\left(1-\alpha^4\right) \qquad \alpha = \frac{d}{D}}$$

**Vääntymä**

$$\boxed{\theta = \frac{T}{G I_v}}$$

**Leikkausjännitysjakautuma**

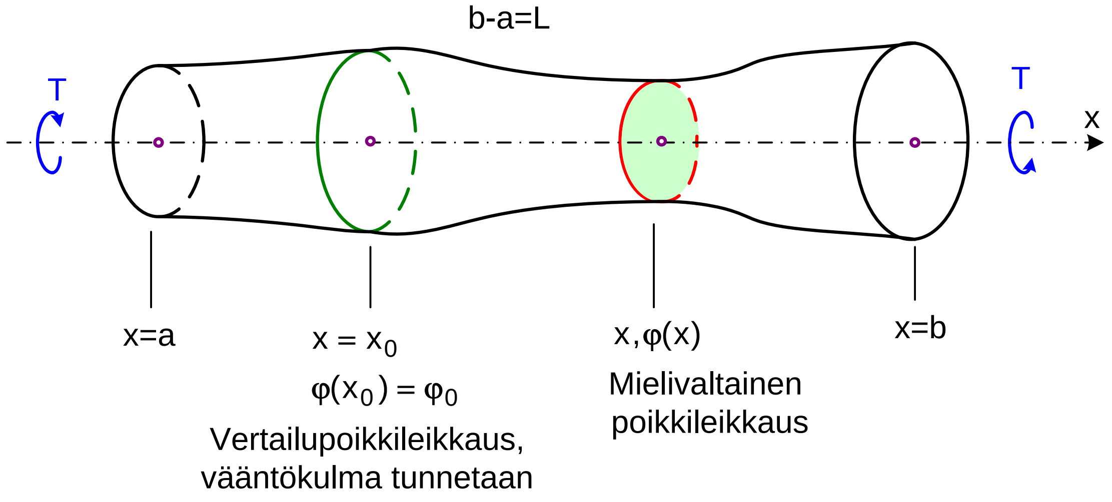
$$\boxed{\tau = \frac{T}{I_v} r}$$

$$\tau_{max} = \frac{T}{I_v} \cdot \frac{D}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_{max} = \frac{T}{W_V}}$$

**Ympyrärenkaan vääntövastus**

$$\boxed{W_v = \frac{\pi D^3}{16}\left(1-\alpha^4\right) \qquad \alpha = \frac{d}{D}}$$

# VÄÄNTÖKULMAN MÄÄRITYS




Suureet $I_v$, T ja G voivat olla koordinaatista x riippuvia.
Esimerkiksi kartiokkaalle akselille $I_v = I_v(x)$.

Kohdan x vääntökulma $\varphi(x)$:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GI_v} \quad \Rightarrow \quad d\varphi = \frac{T}{GI_v}dx \quad \Rightarrow \quad \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_{x_0}^{x} \frac{T}{GI_v}dx$$

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{T}{GI_v}dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi(x) = \varphi_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{T}{GI_v}dx}$$

Sauvan päiden välinen vääntökulma:

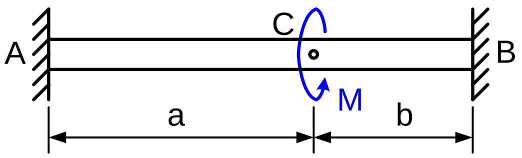
$$\Delta\varphi = \varphi(b) - \varphi(a) = \varphi_0 + \int_{x_0}^{b} \frac{T}{GI_v}dx - \varphi_0 - \int_{x_0}^{a} \frac{T}{GI_v}dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta\varphi = \int_{a}^{b} \frac{T}{GI_v}dx}$$

Kun G, T ja $I_v$ ovat vakioita, saadaan

$$\boxed{\varphi(x) = \varphi_0 + \frac{T}{GI_v}(x - x_0)} \quad \text{(lineaarinen)} \qquad \boxed{\Delta\varphi = \frac{TL}{GI_v}}$$

# HYPERSTAATTINEN VÄÄNTÖ

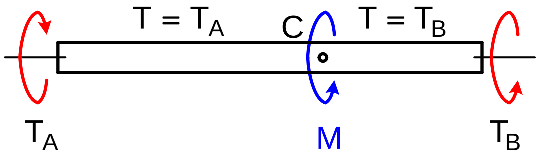
## VOIMAMENETELMÄ



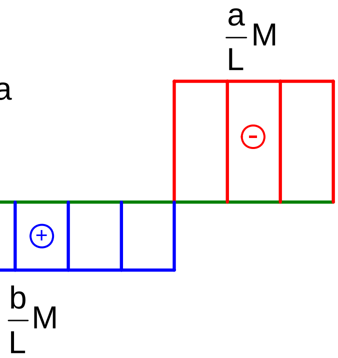

$a+b=L \quad G$ ja $I_v$ vakioita

**Esimerkki**: **Määritä molemmista päistään jäykästi kiinnitetyn vääntökannattimen vääntömomenttikuva ja vääntökulma pisteen C kohdalla.**

Vapakappalekuva




T-kuva




Ratkaisu:

Momenttitasapaino pituussuunnan ympäri $\Rightarrow$

$$-T_A + M + T_B = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{T_A - T_B = M} \qquad (1)$$

Yhteensopivuusehto: Sauvan päiden välinen vääntökulma on nolla. $\Rightarrow$

$$\Delta\varphi_{AB} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{T_A\, a}{G I_v} + \frac{T_B\, b}{G I_v} = 0} \qquad (2)$$

Yhtälöparin (1) - (2) ratkaisuksi tulee $\boxed{T_A = \frac{b}{L} M \qquad T_B = -\frac{a}{L} M}$,

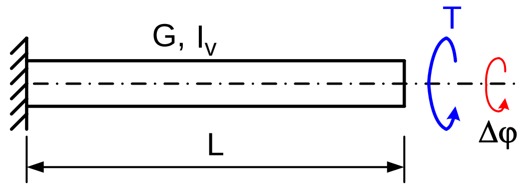
josta seuraa yllä esitetty vääntömomenttikuva.

Vääntökulma kohdassa C on kaavan (2) ensimmäinen termi $\Rightarrow$

$$\varphi_C = \frac{(b/L)Ma}{G I_v} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi_C = \frac{Mab}{G I_v L}}$$

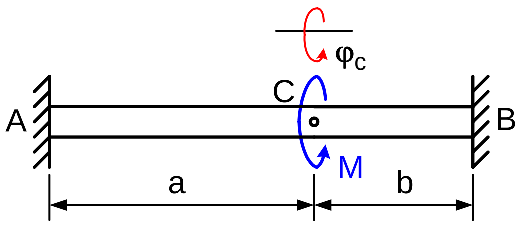
# SIIRTYMÄMENETELMÄ

## Vääntösauvan jousivakio




$$\boxed{T = k_v \cdot \Delta\varphi}$$

$$\boxed{k_v = \frac{GI_v}{L}}$$



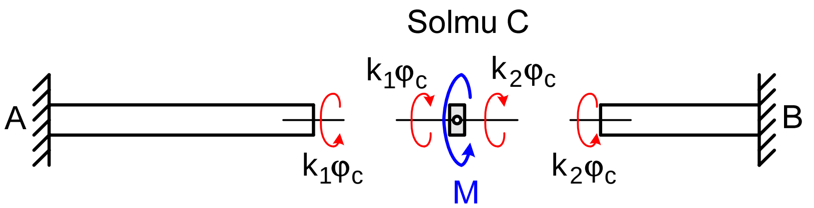

a+b=L    G ja $I_v$ vakioita

**Esimerkki**: **Määritä oheisen molemmista päistään jäykästi kiinnitetyn vääntökannattimen vääntökulma pisteen C kohdalla ja laske sen jälkeen osien AC ja CB vääntömomentit.**

Ratkaisu:

Vääntöjousielementtien jousivakiot: $k_1 = \dfrac{GI_v}{a}$ $\quad k_2 = \dfrac{GI_v}{b}$

Elementit ja solmu C:




Solmun C tasapaino: $M - k_1\varphi_c - k_2\varphi_c = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_C = \dfrac{M}{k_1 + k_2}$

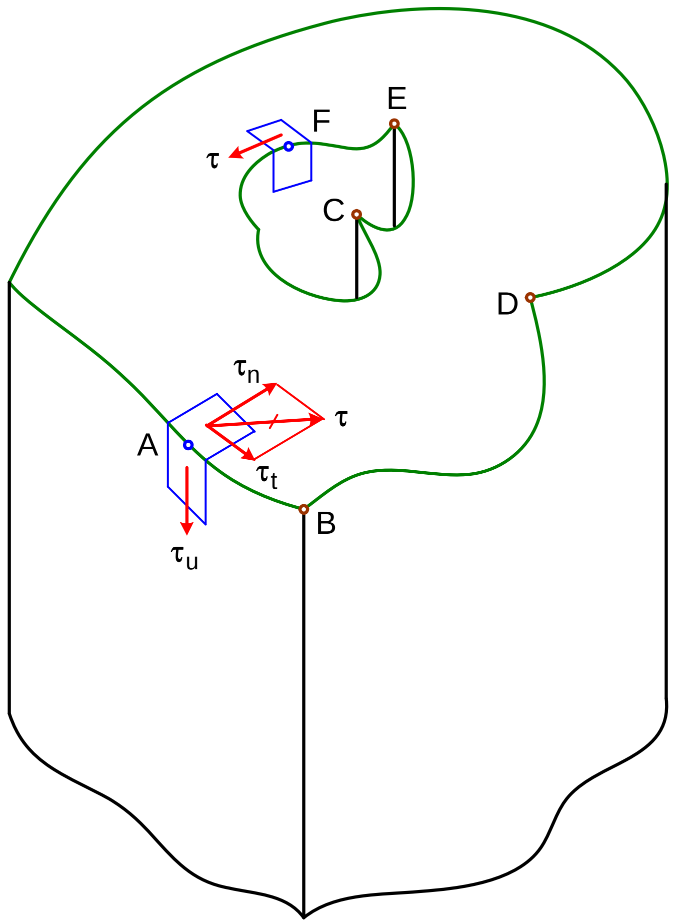
$$k_1 + k_2 = GI_v\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{GI_v L}{ab} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi_C = \frac{Mab}{GI_v L}}$$

Vääntömomentit: $\boxed{T_A = k_1\varphi_c = \dfrac{b}{L}M}$ $\quad \boxed{T_B = -k_2\varphi_c = -\dfrac{a}{L}M}$

# VÄÄNTÖJÄNNITYSKENTÄN YLEISIÄ OMINAISUUKSIA

**LAUSE: Jos vääntösauvan pitkittäinen pintakuormitus $\tau_u = 0$, on vääntöjännitys $\tau$ poikkileikkauksen reunaviivan pisteissä sen tangentin suuntainen eli $\tau = \tau_t$.**

**Lause seuraa leikkausjännitysten parittaisesta yhtäsuuruudesta.**




$$\tau_u = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\tau_n = 0 \quad \Rightarrow$$

**Reunalla**

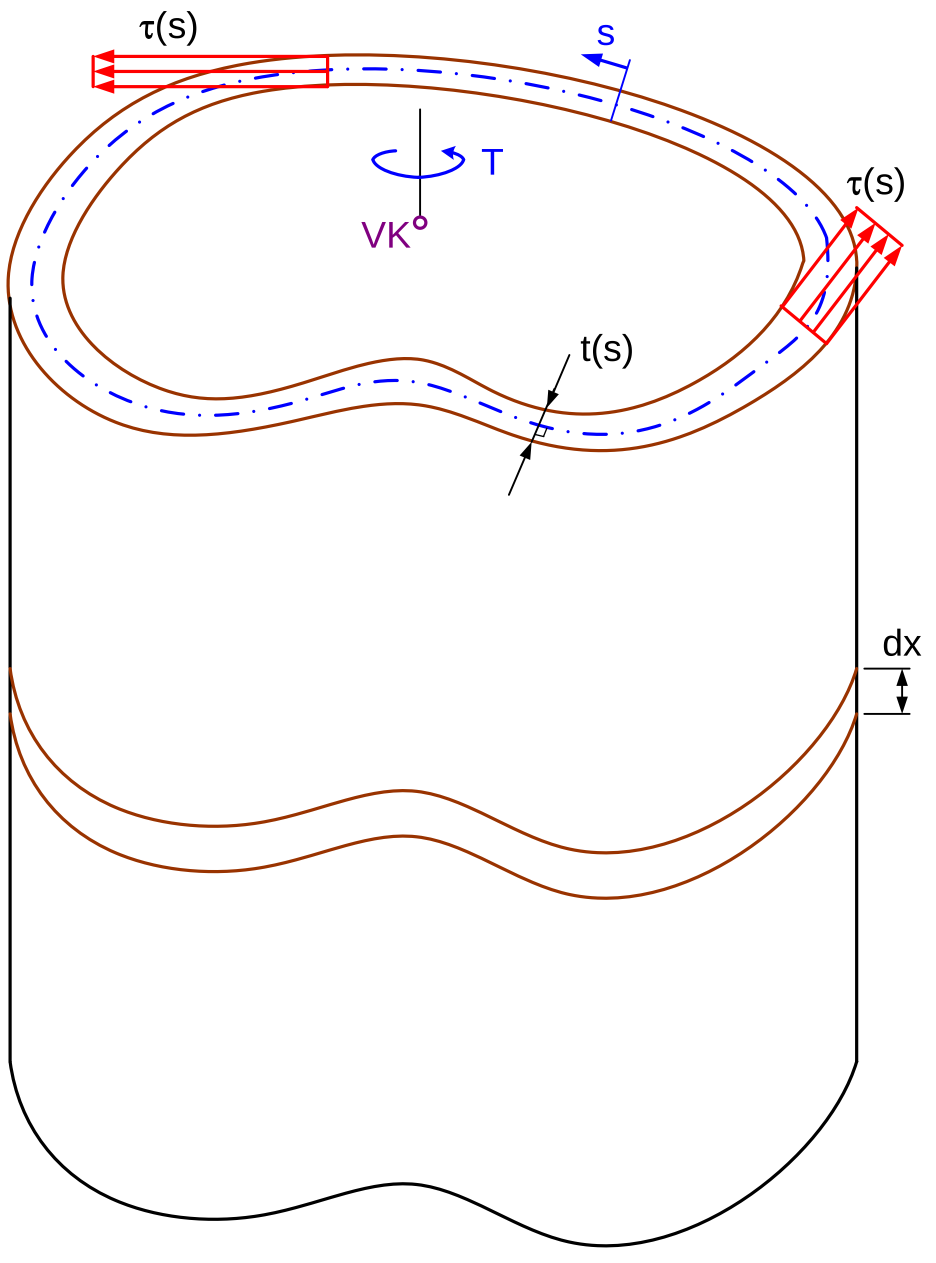
$$\boxed{\tau = \tau_t}$$

**SEURAUS: Materiaalista poispäin suunnatussa kärjessä on $\tau = 0$ (kuvassa kärjet B ja C). Materiaaliin päin suunnatussa kärjessä on $\tau = \infty$ (kuvassa kärjet D ja E).**

# OHUTSEINÄISEN YKSIONTELOISEN PUTKEN VÄÄNTÖ

**OLETUKSET:**

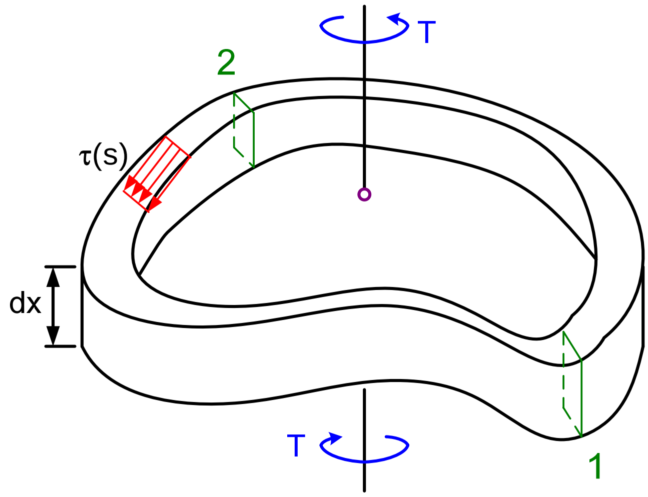
- **Yksionteloinen kotelopoikkileikkaus.**
- **Seinämän paksuus t(s) pieni poikkileikkauksen dimensioihin verrattuna.**
- $\tau(s)$ **seinämän keskiviivan suuntainen.**
- $\tau(s)$ **seinämän paksuuden suunnassa vakio.**

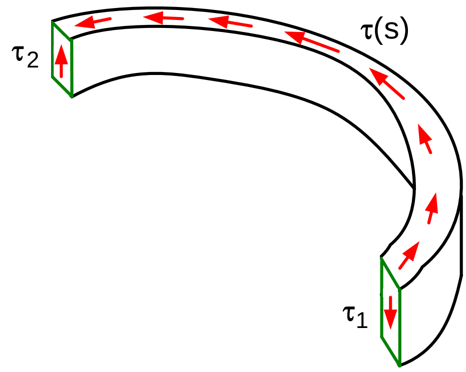


# OHUTSEINÄISEN YKSIONTELOISEN PUTKEN VÄÄNTÖ

**LAUSE:** Ohutseinäisen putken leikkausvuo $\boxed{\tau\, t = \text{vakio}}$.

**TODISTUS:**



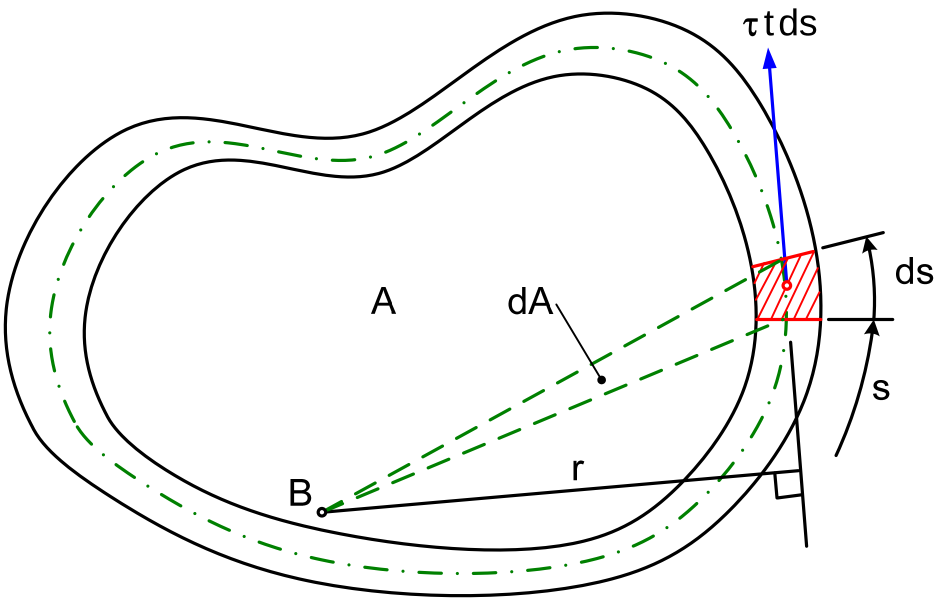

Voimatasapaino vääntöakselin suunnassa:

$$\uparrow \quad \tau_2\, t_2\, dx - \tau_1\, t_1\, dx = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tau_2\, t_2 = \tau_1\, t_1 = \tau(s)\, t(s) = \text{vakio}$$

**SEURAUS**: Ohutseinäisen putken $\boxed{\tau = \tau_{max}\text{, kun } t = t_{min}}$.

# OHUTSEINÄISEN YKSIONTELOISEN PUTKEN VÄÄNTÖ




A on **keskiviivan rajoittama ala**.

$\tau -$ kentän momentti mielivaltaisen pisteen B suhteen on

$$M_B = \int_s r \cdot \tau\, t\, ds = \tau\, t \int_s r\, ds = \tau\, t \int_s 2\, dA = 2\, \tau\, t\, A$$

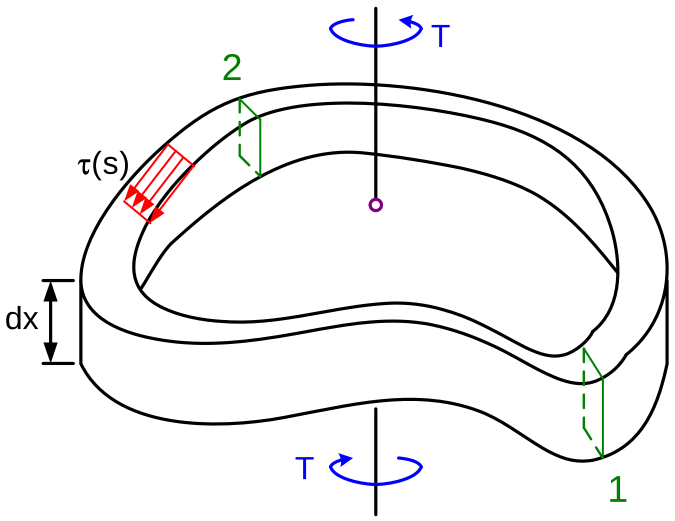
joka on **riippumaton momenttipisteestä**. On siis voimassa

$$T = 2\tau t A \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = \frac{T}{2At}}$$

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{T}{W_v}} \qquad \boxed{W_v = 2A\, t_{min}}$$

(Bredtin 1. kaava)

# OHUTSEINÄISEN YKSIONTELOISEN PUTKEN VÄÄNTÖ




Palan **kimmoenergia**:

$$\tau = \frac{T}{2At}$$

$$U_0 = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{T^2}{8GA^2t^2}$$

$$dU = dx \int_s U_0\, t\, ds$$

$$= \frac{T^2\, dx}{8A^2G} \int_s \frac{ds}{t(s)}$$

**Vääntömomentin** palaan tekemä **työ:**

$$dW = \frac{1}{2} T\, d\varphi = \frac{1}{2} T\, \theta\, dx$$

**Ehto:** $dU = dW \quad \Rightarrow$

$$\theta = \frac{T}{4GA^2} \int_s \frac{ds}{t(s)}$$

$$\boxed{\theta = \frac{T}{GI_v}} \qquad \boxed{I_v = \frac{4A^2}{\int_s \frac{ds}{t(s)}}}$$

(Bredtin 2. kaava)

Yleensä t on **alueittain vakio**, jolloin saadaan

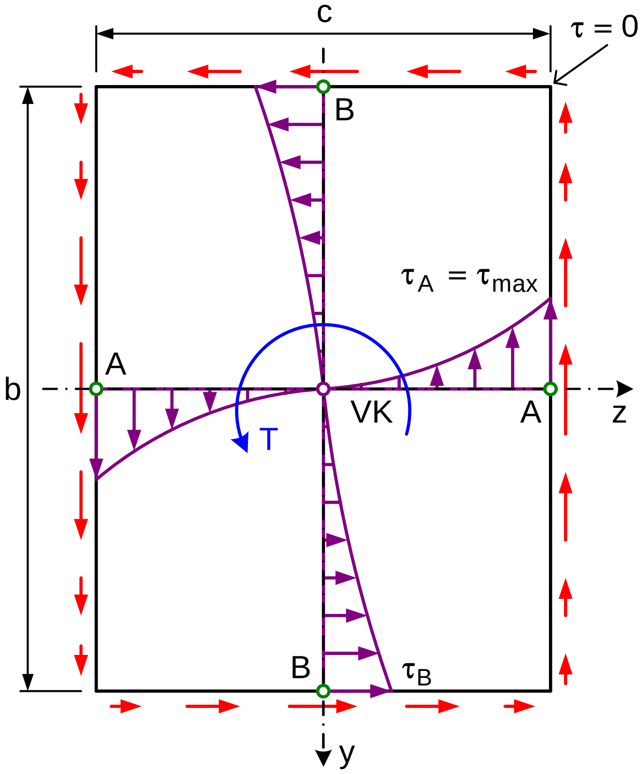
$$\boxed{I_v = \frac{4A^2}{\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{t_i}}}$$

jossa n on seinämän paksuuksien lukumäärä ja $t_i$ seinämän paksuus, jota on keskiviivan matkalla $s_i$.

# SUOROKULMIOPOIKKILEIKKAUKSEN VÄÄNTÖ

- Poikkipintasuureille ja $\tau -$ jakautumalle ratkaisu sarjojen avulla.
- $\tau_{max}$ esiintyy pitkän sivun keskipisteessä.

Leikkausjännityksen jakaantumien symmetria-akseleilla ja reunoilla.




$$\tau_{max} = \frac{T}{W_v}$$

$$\theta = \frac{T}{GI_v}$$

Oletus: $c < b$

$$W_v = \beta b c^2$$

$$I_v = \alpha b c^3$$

$$\tau_B = \eta \tau_{max}$$

Vakiot $\alpha, \beta$ ja $\eta$ saadaan oheisesta taulukosta sivusuhteen $b/c$ funktiona.

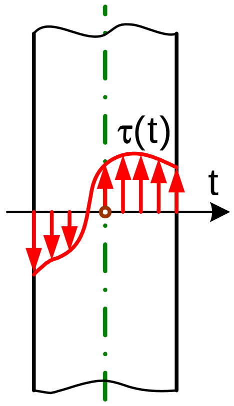
| b/c | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| α | 0,141 | 0,196 | 0,229 | 0,249 | 0,263 | 0,281 | 0,299 | 0,307 | 0,313 | 0,333 |
| β | 0,208 | 0,231 | 0,246 | 0,258 | 0,267 | 0,282 | 0,299 | 0,307 | 0,313 | 0,333 |
| η | 1,000 | 0,859 | 0,795 | 0,766 | 0,753 | 0,745 | 0,743 | 0,742 | 0,742 | 0,742 |

**Kapean** suorakulmion $(c << b)$ likikaavat:

$$I_v \approx \frac{1}{3} b c^3$$

$$W_v \approx \frac{1}{3} b c^2$$

# OHUTSEINÄISEN AVOIMEN POIKKILEIKKAUKSEN VÄÄNTÖ




**MÄÄRITELMÄ:** Ohutseinäisen poikkileikkauksen seinämän **leikkausvuo** on

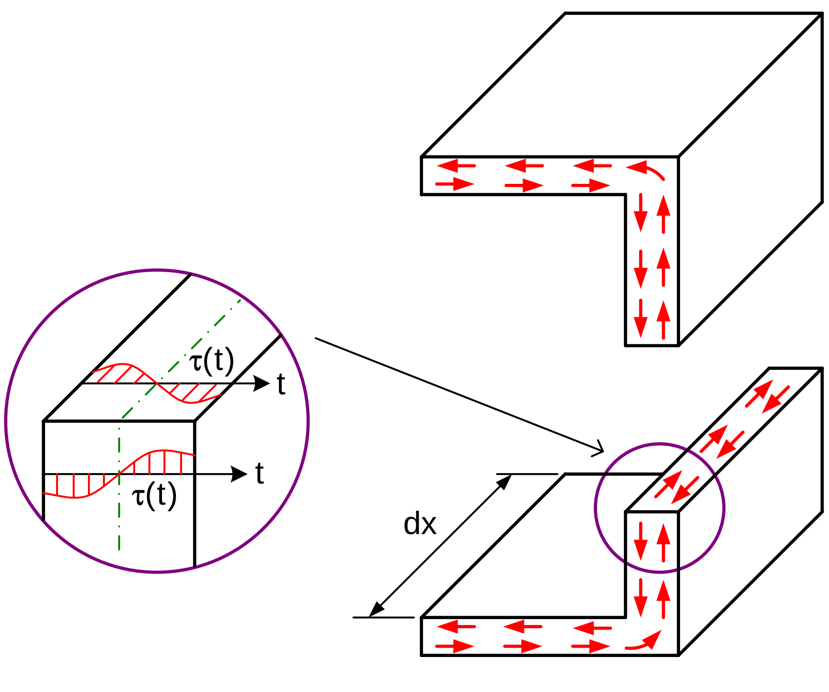
$$\boxed{v_\tau = \int_t \tau(t)\,dt}$$

Kun $\tau$ on vakio seinämän paksuuden suunnassa, tulee leikkausvuolle aikaisemmin esitetty lauseke $\tau t$.

**LAUSE:** Ohutseinäisen avoimen poikkileikkauksen **leikkausvuo on nolla** seinämän joka kohdassa.

**TODISTUS:** Tarkastellaan differentiaalipalaa, jonka pituus on dx. Halkaistaan pala kahtia pitkittäisleikkauksella. Tämä onnistuu **yhdellä** leikkauksella, koska poikkipinta on avoin. Pitkittäisleikkauksen $\tau$ on sama kuin poikkileikkauksen $\tau$ tällä kohdalla. Alaosan pitkittäisestä **voimatasapainosta** seuraa

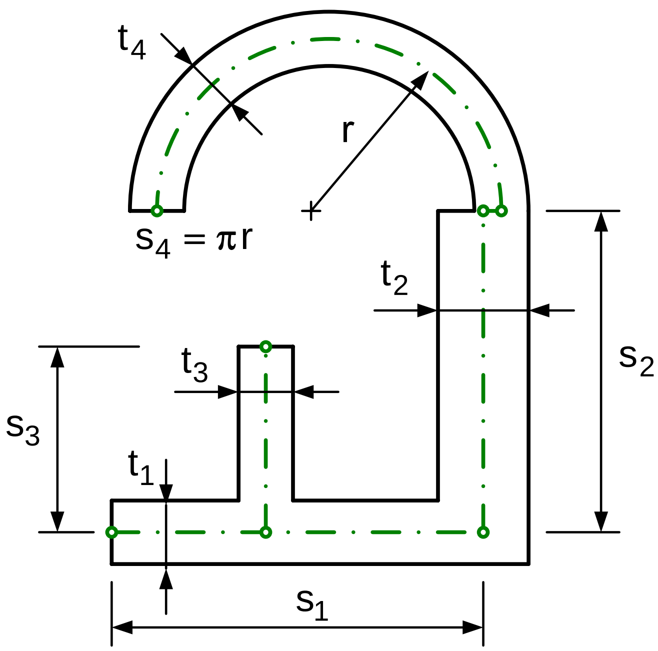
$$dx \cdot \int_t \tau(t)\,dt = 0 \quad \Rightarrow \quad v_\tau = \int_t \tau(t)\,dt = 0$$



# OHUTSEINÄISEN AVOIMEN POIKKILEIKKAUKSEN VÄÄNTÖ

## FÖPPLIN KAAVAT:

- Sopivat **avoimelle ohutseinäiselle** poikkileikkaukselle.
- Antavat **karkeahkot likiarvot** väännön poikkipintasuureille (sitä parempi tarkkuus, mitä ohuempi seinämänpaksuus).
- Seinämän **paksuus** on **alueittain vakio**.
- Poikkileikkaus **koostuu kapeista ”suorakulmioista”**, joiden keskiviivat voivat olla kaarevia.
- Poikkileikkaus voi olla **haarautuva** ja keskiviivojen ei tarvitse leikata osien liitoskohdissa.




$$\tau_{max} = \frac{T}{W_v}$$

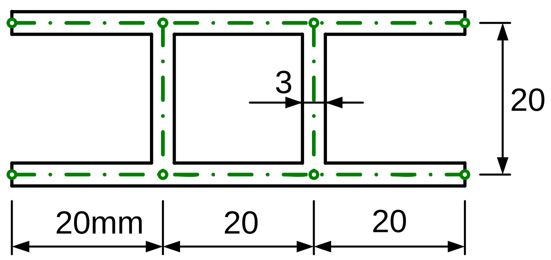
$$\theta = \frac{T}{G I_v}$$

$$W_v = I_v / t_{max}$$

$$I_v = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} s_i\, t_i^3$$

# YHDISTETTY POIKKILEIKKAUS

Tässä tutkitaan poikkileikkausta, jossa on **yksi kotelo-osa** ja lisäksi joukko saman seinämänpaksuuden omaavia **”vahvistusripoja”**.




**Esimerkki:** Vääntökannattimen pituus $L = 1000$ mm ja sitä rasittaa vääntömomentti $T = 30$ Nm. Poikkileikkaus on kuvan mukainen ja materiaalin $G = 80$ GPa. Määritä kannattimen päiden välinen vääntökulma ja osien leikkausjännityksien maksimiarvot.

**Ratkaisu:**

Lasketaan **vääntöneliömomentti** $I_v$ **yhteenlaskuperiaatteella** (kotelo Bredtin ja rivat Föpplin kaavalla)

$$I_v = I_{v1} + I_{v2} = \frac{4 \cdot (20\,\text{mm} \cdot 20\text{ mm})^2}{80\text{ mm}/3\text{ mm}} + 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 20\text{ mm} \cdot (3\text{ mm})^3$$

$$= (24000 + 720)\,\text{mm}^4 = 24720\text{ mm}^4$$

Vääntökulma on

$$\varphi = \frac{TL}{GI_v} = \frac{30 \cdot 10^3\text{ Nmm} \cdot 1000\text{ mm}}{80 \cdot 10^3\,(\text{N/mm}^2) \cdot 24720\text{ mm}^4} = 0{,}01517 = 0{,}8692^\circ$$

Kotelo-osa ottaa vääntömomentista $T$ osan $T_1$ ja rivat osan $T_2$. Kotelo-osan ja ripojen **vääntökulma on sama** $\varphi$. Tästä saadaan yhtälöpari

$$T_1 + T_2 = T \quad \text{ja} \quad \frac{T_1 L}{GI_{v1}} = \frac{T_2 L}{GI_{v2}} \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{I_{v1}}{I_v} T \qquad T_2 = \frac{I_{v2}}{I_v} T$$

Vääntömomentti jakaantuu siis osille vääntöneliömomenttien suhteessa. $\Rightarrow$

$$T_1 = \frac{24000}{24720} \cdot 30\text{ Nm} = 29{,}126\text{ Nm} \qquad T_2 = \frac{720}{24720} \cdot 30\text{ Nm} = 0{,}874\text{ Nm}$$

Kotelo: $W_{v1} = 2 \cdot (20\text{ mm} \cdot 20\text{ mm}) \cdot 3\text{ mm} = 2400\text{ mm}^3$

$$\tau_{max} = \frac{29{,}126 \cdot 10^3\text{ Nmm}}{2400\text{ mm}^3} = 12{,}13\text{ MPa}$$

Ripa (4 kpl): $W_{v2} = \frac{1}{3} \cdot 20\text{ mm} \cdot (3\text{ mm})^2 = 60\text{ mm}^3$

$$\tau_{max} = \frac{0{,}874 \cdot 10^3\text{ Nmm}}{4 \cdot 60\text{ mm}^3} = 3{,}64\text{ MPa}$$