



**5.6**  $r$ -säteinen pyörä vierii liukumatta pitkin vaakasuoraa pintaa. Määritä pyörän kulma-asema, kulmanopeus ja kulmakihtiys sen keskipisteen  $O$  liikesuureiden  $s$ ,  $v_O$  ja  $a_O$  funktiona. Määritä myös alustan kanssa kosketuksessa olevan pyörän kehän pisteen  $A$  nopeus ja kiihtyvyys.

### Ratkaisu:

Pyörä vierii liukumatta  $\Rightarrow s = OO' = C'A$ . Pystysuuntainen säde  $OC$  kääntyy kulman  $\theta$  uuteen asentoon  $O'C' \Rightarrow$

$$s = O'C' \cdot \theta = r\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{s}{r}$$

$\theta$  mitataan pystysuunnasta, positiivinen suunta on myötäpäivään.

$$v_O = \dot{s} = r\dot{\theta} = r\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_O}{r}$$

$$a_O = \dot{v}_O = r\ddot{\theta} = r\dot{\omega} = r\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{a_O}{r}$$

Pisteen  $C$  koordinaatit kuvan  $xy$ -koordinaatistossa ovat (sykloidi):

$$x = s - r \sin \theta = r(\theta - \sin \theta) \quad y = r - r \cos \theta = r(1 - \cos \theta)$$

$$\dot{x} = r\dot{\theta}(1 - \cos \theta) = r\omega(1 - \cos \theta) \quad \dot{y} = r\dot{\theta} \sin \theta = r\omega \sin \theta$$

$$\ddot{x} = r\ddot{\theta}(1 - \cos \theta) + r\dot{\theta}^2 \sin \theta = r\alpha(1 - \cos \theta) + r\omega^2 \sin \theta$$

$$\ddot{y} = r\ddot{\theta} \sin \theta + r\dot{\theta}^2 \cos \theta = r\alpha \sin \theta + r\omega^2 \cos \theta$$

Kosketuspisteelle  $A$  on  $\theta = 0 + (n \cdot 2\pi)$   $n = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow$

$$\dot{x} = 0 \quad \dot{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_A = 0$$

$$\ddot{x} = 0 \quad \ddot{y} = r\omega^2 \quad \Rightarrow \quad a_A = r\omega^2 \quad \uparrow$$