PARTIKKELIN KINETIIKKA

Newtonin II laki

$$\boxed{\vec{R} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}}$$

- $\vec{R}$ on partikkeliin vaikuttavien voimien resultantti
- m on partikkelin massa
- $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$ on partikkelin absoluuttinen kiihtyvyys

Suoraviivaisen liikkeen liikeyhtälöt (liikesuunta x):

$$\boxed{R_x = ma_x \qquad R_y = 0 \qquad R_z = 0}$$

Tasoliikkeen liikeyhtälöt eri koordinaatistoissa:

xy-koordinaatisto:

$$\boxed{R_x = ma_x = m\ddot{x} \qquad R_y = ma_y = m\ddot{y}}$$

Ratakoordinaatisto:

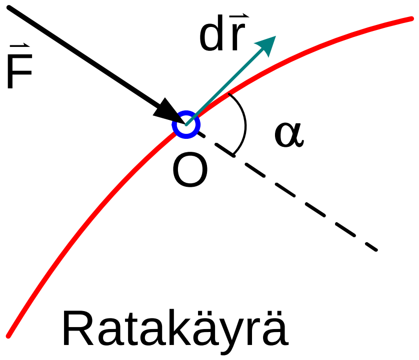
$$\boxed{R_t = ma_t = m\dot{v} \qquad R_n = ma_n = mv^2/\rho}$$

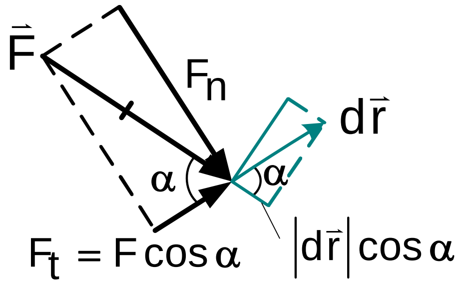
Napakoordinaatisto:

$$\boxed{R_r = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \qquad R_\theta = ma_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})}$$

PARTIKKELIN KINETIIKKA

Voiman tekemä työ





Kun voiman $\vec{F}$ vaikutuspisteen siirtymä on $d\vec{r}$, on voiman tekemä työ $dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$. Pistetulon määritelmän mukaan on $dW = F|d\vec{r}|\cos\alpha$, missä α on vektoreiden $\vec{F}$ ja $d\vec{r}$ välinen kulma.

Voiman tekemä työ on siirtymän suuruus kerrottuna voiman siirtymän suuntaisella komponentilla $F_t = F\cos\alpha$. Siirtymää vastaan kohtisuora voimakomponentti $F_n = F\sin\alpha$ ei tee työtä.

Kun voiman $\vec{F}$ vaikutuspiste siirtyy pitkin partikkelin ratakäyrää asemasta $s = s_A$ asemaan $s = s_B$, on voiman tekemä työ

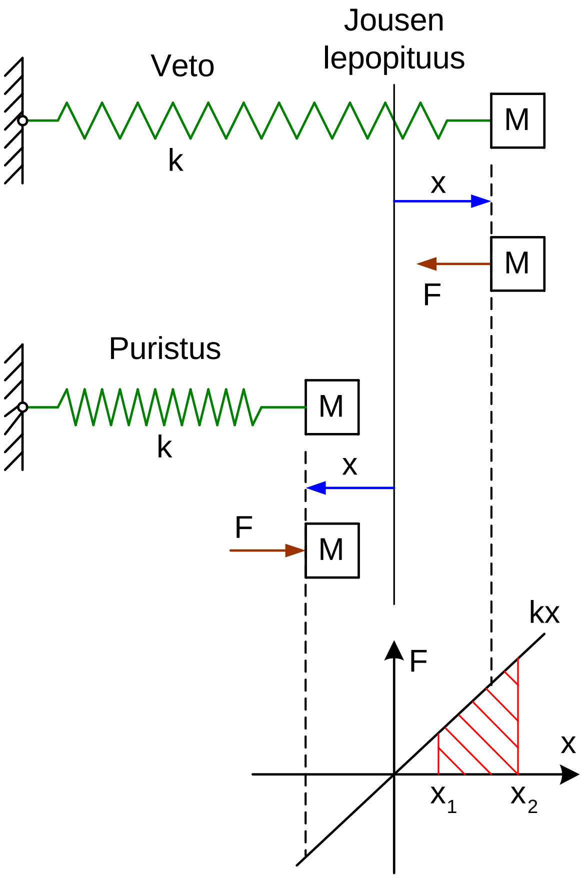
$$\boxed{W = \int_{s_A}^{s_B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{s_A}^{s_B} (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz) = \int_{s_A}^{s_B} F_t\,ds}$$

jolloin on merkitty $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$ ja $d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$. Työintegraali voidaan laskea, kun voimakomponenttien riippuvuus siirtymistä tunnetaan. Kun F_t on vakio, on

$$\boxed{W = F_t \int_{s_A}^{s_B} ds = F_t\,(s_B - s_A) = F_t\,\Delta s}$$

jossa Δs on ratakäyrää pitkin mitattu matka.

Tavallisin esimerkki muuttuvan voiman työstä on jousivoiman työ.



Tarkastellaan työtä, jonka muuttuva jousivoima F tekee **partikkeliin** M, kun se jostain syystä liikkuu.

Jousi noudattaa lineaarisen jousen yhtälöä $F = k\,x$.

Sekä veto- että puristustapauksessa siirtymän kasvaessa partikkeliin vaikuttava voima F on vastakkaissuuntainen siirtymälle x, eli partikkeliin M tehty työ on negatiivinen.

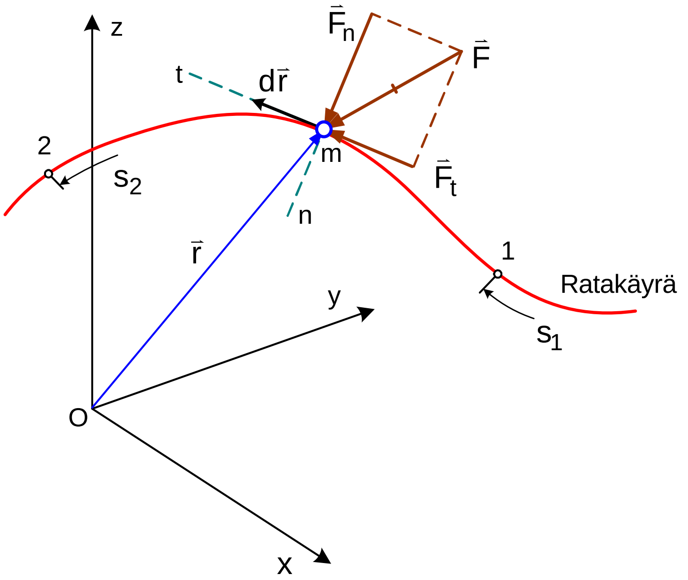
Kun jousen siirtymä kasvaa arvosta x_1 arvoon x_2, on partikkeliin M tehdyn työn lauseke

$$W_{1\to 2} = -\int_{x_1}^{x_2} F\,dx \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{W_{1\to 2} = -\int_{x_1}^{x_2} k\,x\,dx = -\frac{1}{2}k\,(x_2^2 - x_1^2)}$$

Jos jousen siirtymä pienenee arvosta x_2 arvoon x_1, ovat F ja x samansuuntaiset ja partikkeliin M tehty työ on positiivinen. Työn itseisarvo on molemmissa tilanteissa $F - x$ kuvaan viivoitetun pinnan ala.

PARTIKKELIN KINETIIKKA

Työlauseen johto



Partikkelin paikkavektori on $\vec{r}$, joka ajassa dt muuttuu määrän $d\vec{r}$. Voiman $\vec{F}$ tekemä työ tämän siirtymän aikana on $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Partikkelin liikkuessa asemasta 1 asemaan 2 tekee voima $\vec{F}$ työn

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Kun otetaan huomioon Newtonin II laki $\vec{F} = m\vec{a}$ ja energiadifferentiaaliyhtälö $a_t \, ds = v \, dv$, seuraa

$$W = \int_{s_1}^{s_2} m\vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{s_1}^{s_2} m a_t \, ds = \int_{v_1}^{v_2} m v \, dv = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$$

Suure $T = \frac{1}{2} m v^2$ on partikkelin liike-energia. Partikkelin työlause on siis

$$\boxed{W_{1\to 2} = \Delta T = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)}$$

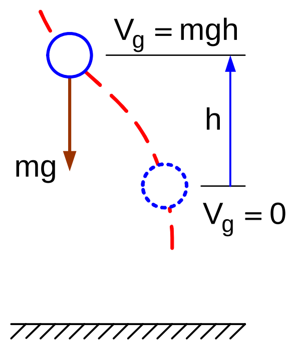
Vaihtoehtoinen esitysmuoto on

$$\boxed{T_1 + W_{1\to 2} = T_2}$$

missä T_1 on liike-energia aikavälin alussa ja T_2 lopussa.

PARTIKKELIN KINETIIKKA

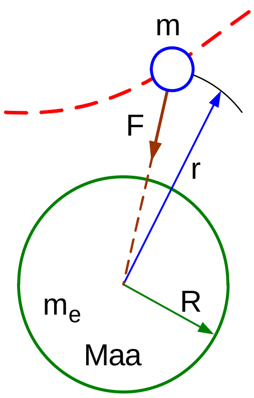
Potentiaalienergia



Lähellä maan pintaa:

$$\boxed{V_g = mgh}$$

$$\Delta V_g = mg(h_2 - h_1)$$



Suuret korkeuden muutokset

$$\boxed{V_g = -mgR^2/r}$$

$$\Delta V_g = -mgR^2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

Painovoiman tekemä työ on potentiaalienergian muutoksen vastaluku.

Kimmoenergia

Jousen kimmoenergia

$$\boxed{V_e = \frac{1}{2}k\,x^2}$$

$$\Delta V_e = \frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

Jousivoiman työ on kimmoenergian muutoksen vastaluku.

Kun painovoiman ja jousen voiman työt otetaan huomioon potentiaalienergian ja kimmoenergian avulla, voidaan työlause kirjoittaa muotoon

$$\boxed{W'_{1-2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e}$$

PARTIKKELIN KINETIIKKA

Voiman impulssilause

Partikkelin liikemäärä: $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$

Newtonin II laki voidaan kirjoittaa muotoon (m on vakio)

$$\vec{R} = m\vec{a} = m\dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{R} = \dot{\vec{p}}}$$

Komponenttimuoto: $\boxed{R_x = \dot{p}_x \qquad R_y = \dot{p}_y \qquad R_z = \dot{p}_z}$

$$\vec{R} = \dot{\vec{p}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{R}\,dt = d\vec{p} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{R}\,dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1}$$

Voiman impulssi: $\boxed{\vec{I}_R = \int_{t_1}^{t_2} \vec{R}\,dt}$ Vakiovoima: $\boxed{\vec{I}_R = \vec{R}\,\Delta t}$

Komponenttimuoto:

$$\boxed{I_{Rx} = p_{x2} - p_{x1} \qquad I_{Ry} = p_{y2} - p_{y1} \qquad I_{Rz} = p_{z2} - p_{z1}}$$

Momentin impulssilause

Liikemäärän momentti pisteen O suhteen: $\boxed{\vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{p}}$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{L}}_O = \dot{\vec{r}} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\dot{\vec{v}} = \vec{r} \times m\dot{\vec{v}}$$

Resultantin $\vec{R}$ momentti pisteen O suhteen: $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times m\dot{\vec{v}} \quad \Rightarrow$

Partikkelin momenttiliikeyhtälö: $\boxed{\vec{M}_O = \dot{\vec{L}}_O}$

Komponenttimuoto: $\boxed{M_{Ox} = \dot{L}_{Ox} \qquad M_{Oy} = \dot{L}_{Oy} \qquad M_{Oz} = \dot{L}_{Oz}}$

$$\vec{M}_O = \dot{\vec{L}}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{M}_O\, dt = d\vec{L}_O \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_O\, dt = \vec{L}_{O2} - \vec{L}_{O1}}$$

Momentin impulssi: $\boxed{\vec{I}_{MO} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_O\, dt}$ Vakiomomentti: $\boxed{\vec{I}_{MO} = \vec{M}_O\, \Delta t}$

Komponenttimuoto:

$$\boxed{I_{MOx} = L_{Ox2} - L_{Ox1} \quad I_{MOy} = L_{Oy2} - L_{Oy1} \quad I_{MOz} = L_{Oz2} - L_{Oz1}}$$

Liikemäärän ja sen momentin säilyminen

Jos $\vec{I}_R = \vec{0}$, $t \in [t_1, t_2]$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{p} = \vec{0}}$

jolloin partikkelin liikemäärä säilyy. Liikemäärä voi säilyä myös vain joissakin koordinaattisuunnissa.

Jos $\vec{I}_{MO} = \vec{0}$, $t \in [t_1, t_2]$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{L}_{O2} - \vec{L}_{O1} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{L}_O = \vec{0}}$

jolloin partikkelin liikemäärän momentti säilyy. Liikemäärän momentti voi säilyä myös vain joissakin koordinaattisuunnissa.

Liikemäärän ja sen momentin säilymisen välillä ei ole yhteyttä, toinen niistä voi säilyä, vaikka toinen ei säilykään.