

8 YHDEN VAPPAUSASTEEN VÄRÄHTELY

8.1 Yleistä

Koneen- ja rakenneosat voidaan mitoittaa tavanomaisilla statiikan ja lujuusopin menetelmillä kuormitusten ollessa ajasta riippumattomia eli staattisia. Käytännössä esiintyy myös usein tilanteita, joissa kuormitukset vaihtelevat ajan mukana eli ovat dynaamisia. Tällöin kuormituksen suuruus, suunta tai vaikutuskohta voi olla ajasta riippuva. Jos kuormitus on tunnettu ajan funktio, sanotaan sitä deterministiseksi kuormitukseksi. Jos taas kuormitushistoria tunnetaan vain tilastollisessa mielessä, on kyseessä satunnaiskuormitus.

Jos kappaleeseen kohdistuva kuormitus aiheuttaa sille liiketilan, joka toistuu määräajan kuluttua joko täysin tai lähes samanlaisena, sanotaan syntynyttä liikettä kappaleen värähtelyksi. Vastaavasti satunnaiskuormituksen aiheuttamaa liikettä kutsutaan satunnaisliikkeeksi. Koneissa yleisesti esiintyvät koneen osien toistuvat liikesarjat aiheuttavat värähtelyjä, jotka tavallisesti lisäävät rasituksia ja pienentävät hyötysuhdetta. Koneiden käyttönopeuksien kasvaessa on värähtelyanalyysillä yhä suurempi osuus koneensuunnittelussa. Myös rakenteiden suunnittelussa on värähtelyiden hallitseminen tullut tärkeäksi, koska materiaalien lujuusominaisuuksien parantuessa rakenteet voidaan suunnitella yhä kevyemmiksi, jolloin niiden värähtelyherkkyys kasvaa.

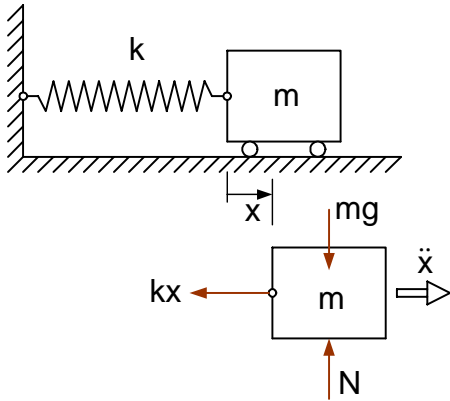
Koneissa ja laitteissa värähtelyt ovat yleensä haitallisia ja suunnittelijan on pyrittävä estämään ne mahdollisimman tarkoin. Haitat ilmenevät muun muassa laitteiden toimintahäiriöinä ja väsymisvaurioina sekä vaikutuksina värähtelyille alttiina oleviin ihmisiin. Haittojen eliminoinnissa yritetään värähtelevän systeemin ominaisuuksiin ja kuormitukseen vaikuttamalla saada värähtelyamplitudit niin pieniksi, että haitat voidaan katsoa merkityksettömiksi. Löytyy myös teknillisiä sovelluksia, joissa värähtelyjä käytetään hyväksi. Tällaisia ovat esimerkiksi sekoittimet, seulat ja värähtelyherkkyyskatsastimet.

8.2 Partikkelin ominaisvärähtely

Kun jousella alustaan tuettua kappaletta poikkeutetaan tasapainoasemastaan ja päästetään sitten liikkeelle ilman samanaikaisesti vaikuttavia ulkoisia voimia, syntyy kappaleelle liike, jota kutsutaan ominaisvärähtelyksi eli vapaaksi värähtelyksi. Käytännön tilanteissa ominaisvärähtelyn aikana vaikuttaa aina liikettä vastustavia voimia, jotka vähitellen pienentävät värähtelyliikkeen amplitudia, kunnes liike lopulta pysähtyy. Tällaisia liikettä vastustavia voimia ovat esimerkiksi mekaaninen kitka ja väliaikainen vastus. Toisinaan vaimennusvoimat ovat niin pieniä, että niiden vaikutusta ei kannata ottaa huomioon, jolloin kyseessä on vaimenematon ominaisvärähtely. Usein vaimennusvoimilla on kuitenkin huomattava vaikutus eikä niitä voida jättää pois tar-

kasteluista. Tällöin on kyseessä vaimeneva ominaisvärähtely. Seuraavassa tarkastellaan erikseen kumpaakin näistä perustapauksista.

8.2.1 Vaimenematon ominaisvärähtely



Kuva 8.1 Ominaisvärähtelyn perusmalli.

Tarkastellaan kuvan 8.1 mukaisen jousimassa systeemin värähtelyä kitkattomalla vaakatasolla. Merkitään symbolilla x massan vaakasemaa mitattuna staattisesta tasapainoasemasta, jossa jousi on venymätön. Jousen oletetaan käyttäytyvän lineaarisesti, jolloin jousivoiman lauseke on

$$F_j = kx \quad (8.1)$$

missä k on jousivakio. Värähtelevän massan liikeyhtälö saadaan kuvan 8.1 vapaakappalekuvasta soveltamalla Newtonin II lakia vaakasuunnassa

$$\rightarrow \quad -kx = m\ddot{x} \quad m\ddot{x} + kx = 0 \quad (8.2)$$

Jakamalla kaavassa (8.2) puolittain massalla m , menee liikeyhtälö standardimuotoon

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (8.3)$$

jolloin on otettu käyttöön merkintä

$$\omega = \sqrt{k/m} \quad (8.4)$$

Suuretta ω sanotaan ominaiskulmataajuudeksi. Liikeyhtälö (8.3) on harmonisen värähtelyliikkeen differentiaaliyhtälö. Liikeyhtälön (8.3) yleinen ratkaisu on tunnetusti

$$x(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t \quad (8.5)$$

missä A_1 ja A_2 ovat alkuehdoista riippuvia vakioita. Kun systeemin alkuasema x_0 ja alkunopeus \dot{x}_0 tunnetaan, voidaan vakiot A_1 ja A_2 laskea. Nopeuden lausekkeeksi tulee derivoimalla

$$\dot{x}(t) = A_1 \omega \cos \omega t - A_2 \omega \sin \omega t \quad (8.6)$$

Alkuehdoista seuraa vakioille A_1 ja A_2 seuraava ratkaisu

$$x_0 = x(0) = A_2 \quad \dot{x}_0 = \dot{x}(0) = A_1 \omega \quad A_1 = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \quad A_2 = x_0 \quad (8.7)$$

Liikkeyhtälön ratkaisu $x(t)$ menee näin ollen muotoon

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t \quad (8.8)$$

Liikkeyhtälön (8.3) ratkaisu voidaan esittää myös vaihtoehtoisesti muodossa

$$x(t) = C \sin(\omega t + \psi) \quad (8.9)$$

missä siirtymän maksimiarvoa C sanotaan värähdysliikkeen amplitudiksi ja kulmaa ψ vaihekulmaksi. Nopeuden lausekkeeksi tulee derivoimalla

$$\dot{x}(t) = C \omega \cos(\omega t + \psi) \quad (8.10)$$

Alkuehdoista seuraa nyt vakioille C ja ψ seuraava ratkaisu

$$\begin{aligned} x_0 = x(0) &= C \sin \psi & \dot{x}_0 = \dot{x}(0) &= C \omega \cos \psi & \Rightarrow \\ C &= \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2} & \psi &= \tan^{-1} \left(\frac{x_0 \omega}{\dot{x}_0} \right) \end{aligned} \quad (8.11)$$

Liikkeyhtälön ratkaisuksi $x(t)$ tulee

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2} \sin \left[\omega t + \tan^{-1} \left(\frac{x_0 \omega}{\dot{x}_0} \right) \right] \quad (8.12)$$

Kaavoista (8.7) ja (8.11) näkyy, että vakioiden A_1 ja A_2 sekä C ja ψ välillä on yhteys

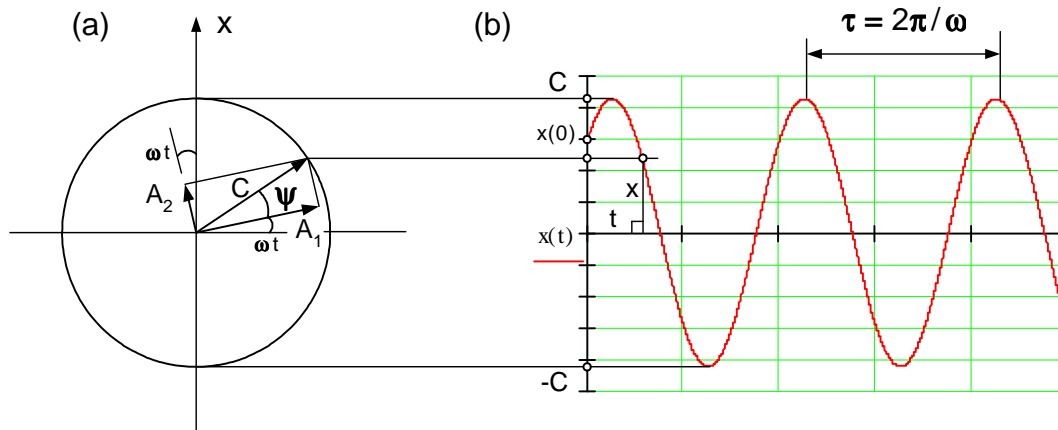
$$C = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \quad \psi = \tan^{-1}(A_2 / A_1) \quad (8.13)$$

Kun liikkeyhtälön (8.3) ratkaisu esitetään tx -koordinaatistossa, saadaan kuvan 8.2 (b) mukainen sinikäyrä. Tämän käyrän oordinaatat ovat tasaisella kulmanopeudella ω pyörivän C -pituisen vektorin pystyprojektiot kuvan 8.2 (a) mukaisesti. Kuvasta 8.2 (a) näkyy myös muiden vakioiden A_1 , A_2 ja ψ tulkinta.

Aikaväliä, jonka kuluttua liike toistuu samanlaisena, kutsutaan ominaisvärähdysajaksi τ ja sen käänteisarvoa $f = 1/\tau$ ominaistajuuudeksi. Koska sinin jakso on 2π , seuraa kaavasta (8.10) yhteys $\omega\tau = 2\pi$, joten voidaan kirjoittaa seuraavat tulokset.

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (8.14)$$

Ominaiskulmataajuuden ω yksikkö on rad/s ja ominaistajuuden f yksikkö $1/s = \text{Hz}$.

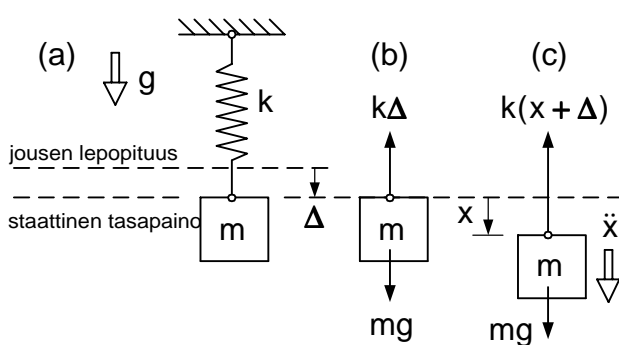


Kuva 8.2 Vaimenematon ominaisvärähtely.

Tarkastellaan vielä kuvan 8.3 (a) mukaisen jousi-massa systeemin ominaisvärähtelyä, jolloin värähtely tapahtuu pystysuunnassa painovoimakentässä. Massan m aseman ilmaisee staattisesta tasapainoasemasta mitattu koordinaatti x . Kuvassa 8.3 (b) systeemi on staattisessa tasapainoasemassaan, jossa jousen pituudenmuutos on Δ . Staattinen tasapainoehto pystysuunnassa on

$$\uparrow \quad k\Delta - mg = 0 \quad k\Delta = mg \quad (8.15)$$

Kuvasta 8.3 (c) saadaan liikeyhtälö soveltamalla Newtonin II lakia pystysuunnassa



$$\uparrow \quad k(\Delta + x) - mg = -m\ddot{x} \quad (8.16)$$

josta saadaan systeemin liikeyhtälöksi tuloksen (8.15) avulla

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (8.17)$$

mikä on aivan samaa muotoa kuin liikeyhtälö (8.2). Staattisen tasapainoaseman käyttö vertailukohtana aiheuttaa liikeyhtälölle yksinkertaisen muodon, jossa painovoiman vaikutus on eliminoitunut. Tuloksen (8.15) perusteella suureiden ω , τ ja f lausekkeet menevät muotoon

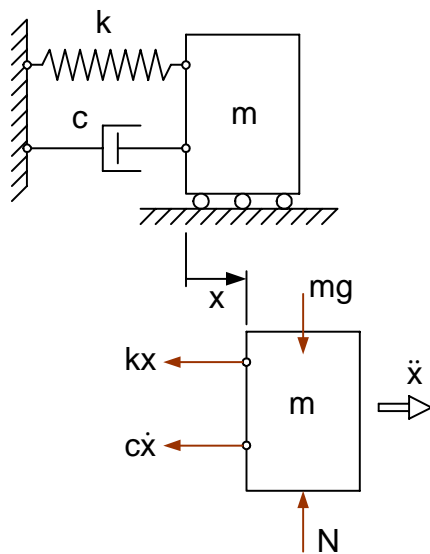
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta}} \quad \tau = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta}{g}} \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta}} \quad (8.18)$$

josta näkyy, että ω voidaan määrittää mittaamalla jousen staattinen pituudenmuutos.

On syytä huomata erityisesti, että suureet ω , τ ja f riippuvat vain systeemin massasta m ja jousivakiosta k ja ovat näin ollen sen perusominaisuuksia, ts. ne eivät riipu esimerkiksi ulkoisesta kuormituksesta.

8.2.2 Vaimeneva ominaisvärähtely

Jokaisessa mekaanisessa systeemissä esiintyy ainakin jossain määrin vaimennusvoimia, jotka pienentävät systeemin mekaanista energiaa (potentiaali- ja liike-



Kuva 8.4 Vaimeneva ominaisvärähtely.

energia) värähtelyliikkeen aikana muuttaen sitä esimerkiksi lämmöksi. Vaimennusvoimien tarkka matemaattinen mallinnus on melko hankalaa niiden monimutkaisen luonteen takia. Käytetyin vaimennusmalli on nestevaimennus eli viskoosi vaimennus, jolloin kuvan 8.1 laskentamalliin lisätään iskunvaimennuselementti kuvan 8.4 mukaisesti. Viskoosissa vaimennuksessa vaimennusvoiman F_v oletetaan olevan suoraan verrannollinen värähtelevän massan nopeuteen eli

$$F_v = c \dot{x} \quad (8.19)$$

missä c on verrannollisuuskerroin, jota sanotaan vaimennusvakioksi. Vaimennusvakion yksikkö on esimerkiksi Ns/m . Viskoosia vaimennusta käytetään usein kuvaamaan likimääräisesti muunkin tyyppisiä vaimennusvoimia. Värähtelevän massan liikeyhtälöksi saadaan kuvan 8.4 vapaakappalekuvasta

$$-kx - c\dot{x} = m\ddot{x} \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (8.20)$$

Jakamalla puolittain massalla m , menee liikeyhtälö standardimuotoon

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (8.21)$$

jolloin on otettu käyttöön merkinnät

$$\omega = \sqrt{k/m} \quad \zeta = c/(2m\omega) \quad (8.22)$$

Suuretta ζ sanotaan vaimennussuhteeksi. Vaimennussuhde kuvaa vaimennuksen voimakkuutta ja se on dimensioton luku.

Etsitään liikeyhtälön (8.21) ratkaisua muodossa $x(t) = A e^{\lambda t}$, missä A ja λ ovat vakioi-

ta. Tällöin on $\dot{x}(t) = A\lambda e^{\lambda t}$ ja $\ddot{x}(t) = A\lambda^2 e^{\lambda t}$. Sijoittamalla ratkaisuyrite liikeyhtälöön (8.21) saadaan

$$A e^{\lambda t} (\lambda^2 + 2\zeta\omega\lambda + \omega^2) = 0 \quad (8.23)$$

mikä toteutuu kaikilla ajan t arvoilla vain, jos

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega\lambda + \omega^2 = 0 \quad (8.24)$$

Yhtälöä (8.24) sanotaan karakteristiseksi yhtälöksi ja sen juuret ovat

$$\lambda_1 = \omega \left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \quad \lambda_2 = \omega \left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \quad (8.25)$$

Liikeyhtälön (8.21) yleinen ratkaisu on siis muotoa

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\zeta\omega t} \left(A_1 e^{\sqrt{\zeta^2 - 1}\omega t} + A_2 e^{-\sqrt{\zeta^2 - 1}\omega t} \right) \quad (8.26)$$

missä vakiot A_1 ja A_2 määräytyvät massan m alkuaseman x_0 ja alkunopeuden \dot{x}_0 perusteella. Koska vaimennusvakio ζ voi saada arvoja väliltä $0 \leq \zeta < \infty$, voi yllä ne-
liöjuuressa oleva lauseke $\zeta^2 - 1$ olla positiivinen tai nolla tai negatiivinen ja liikeyhtälön ratkaisu on luonteeltaan erilainen kussakin tapauksessa.

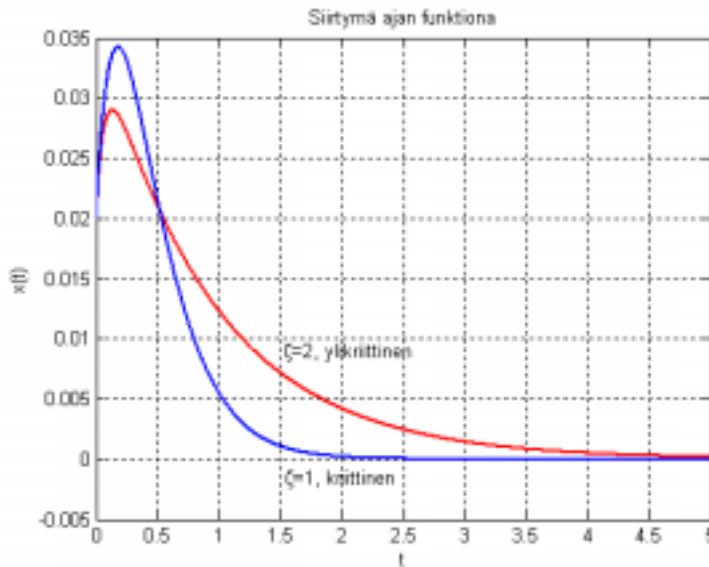
(a) Kun $\zeta > 1$ (ylikriittinen vaimennus), ovat juuret λ_1 ja λ_2 erisuuria negatiivisia reaalilukuja. Tällöin siirtymä x lähestyy asymptoottisesti nollaa, kun aika $t \rightarrow \infty$. Vaimennus on niin voimakas, että värähtelyä ei esiinny eikä syntyvä liike ole jaksollinen. Kun systeemin alkuasema x_0 ja alkunopeus \dot{x}_0 tunnetaan, on mahdollista laskea ratkaisussa (8.26) olevat vakiot A_1 ja A_2 . Voidaan osoittaa, että niiden lausekkeet ovat (todistus sivuutetaan)

$$A_1 = \frac{\dot{x}_0 + \left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \omega x_0}{2\omega\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad A_2 = \frac{-\dot{x}_0 + \left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \omega x_0}{2\omega\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (8.27)$$

(b) Kun $\zeta = 1$ (kriittinen vaimennus), ovat juuret λ_1 ja λ_2 yhtä suuria ja $\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega$, mikä on negatiivinen luku. Tällöin tyyppiä $Ae^{\lambda t}$ olevia ratkaisuja on vain yksi ja tarvitaan toinen siitä lineaarisesti riippumaton ratkaisu. Sellaiseksi kelpaa tyyppiä $Ate^{\lambda t}$ oleva ratkaisu. Liikeyhtälön yleiseksi ratkaisuksi tulee siis tässä tapauksessa

$$x(t) = A_1 e^{-\omega t} + A_2 t e^{-\omega t} \quad (8.28)$$

Myös kriittisen vaimennuksen tapauksessa vaimennus on niin voimakas, että siirtymä x lähestyy asymptoottisesti nollaa, kun aika $t \rightarrow \infty$. Kun systeemin alkuasema x_0 ja alkunopeus \dot{x}_0 tunnetaan, saadaan ratkaisussa (8.28) olevat vakiot A_1 ja A_2 kaavoista (todistus sivuutetaan)



Kuva 8.5 Kriittinen ja ylikriittinen vaimennus.

havainnollistettu tätä erällä lukuarvoilla [$m = 1 \text{ kg}$, $k = 16 \text{ N/m}$, $c_1 = 8 \text{ Ns/m}$ (kriittinen), $c_2 = 16 \text{ Ns/m}$ (ylikriittinen), $x_0 = 0,02 \text{ m}$ ja $\dot{x}_0 = 0,2 \text{ m/s}$].

(c) Kun $\zeta < 1$ (alikriittinen vaimennus), on lauseke $\sqrt{\zeta^2 - 1}$ imaginäärinen ja se voidaan laittaa muotoon $i \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}$, missä $i = \sqrt{-1}$. Karakteristisen yhtälön juuret λ_1 ja λ_2 ovat tässä tapauksessa kompleksilukuja ja toistensa liittolukuja. Liikkeyhtälön (8.21) yleinen ratkaisu on vastaavasti muotoa

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\zeta \omega t} \left(A_1 e^{i \sqrt{1 - \zeta^2} \omega t} + A_2 e^{-i \sqrt{1 - \zeta^2} \omega t} \right) \quad (8.31)$$

Otetaan käyttöön merkinnät

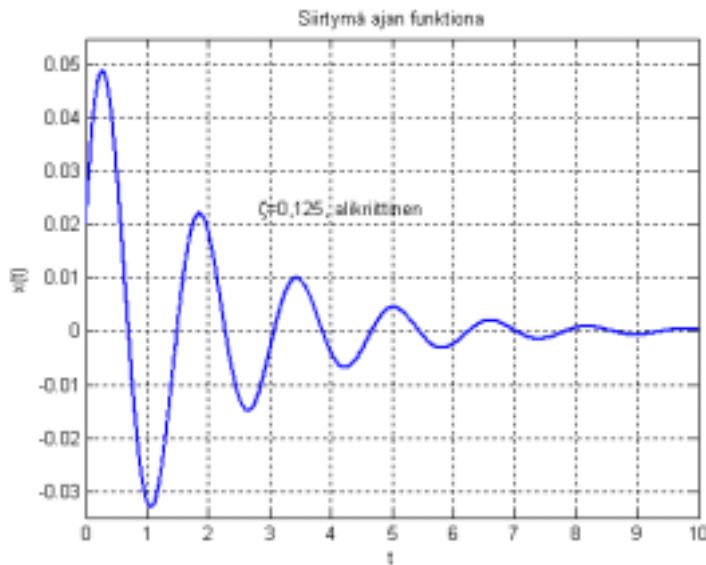
$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (8.32)$$

missä suure ω_d on vaimennettu ominaiskulmataajuus ja τ_d vaimennettu ominaisvärähdysaika. Eulerin kaavan $e^{\pm i x} = \cos x \pm i \sin x$ ja vaimennetun ominaiskulmataajuuden määritelmän perusteella saadaan ratkaisua (8.31) kehitettyä seuraavasti

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\zeta \omega t} [(A_1 \cos \omega_d t + i A_1 \sin \omega_d t) + (A_2 \cos \omega_d t - i A_2 \sin \omega_d t)] \\ &= e^{-\zeta \omega t} [(A_1 + A_2) \cos \omega_d t + i(A_1 - A_2) \sin \omega_d t] \end{aligned}$$

Kun edellä olevassa tuloksessa otetaan käyttöön uudet reaaliset vakiot $A_3 = A_1 + A_2$ ja $A_4 = i(A_1 - A_2)$, saadaan liikeyhtälön ratkaisu lopulliseen muotoonsa

$$x(t) = e^{-\zeta \omega t} (A_3 \cos \omega_d t + A_4 \sin \omega_d t) \quad (8.33)$$



Kuva 8.6 Alikriittinen vaimennus.

Ratkaisu (8.33) edustaa värähtelyä, jonka amplitudi pienenee kertoimen $e^{-\zeta \omega t}$ johdosta asympotoottisesti kohti nollaa, kun aika $t \rightarrow \infty$. Kuvassa 8.6 on havainnollistettu ratkaisun (8.33) käyttäytymistä eräillä lukuaroilla. ($m = 1 \text{ kg}$, $k = 16 \text{ N/m}$, $c = 1 \text{ Ns/m}$, (alikiittinen), $x_0 = 0,02 \text{ m}$ ja $\dot{x}_0 = 0,2 \text{ m/s}$). Kun alkuehdot x_0 ja \dot{x}_0 tunnetaan, voidaan vakiot A_3 ja A_4 laskea kaavoista (todistus sivuutetaan)

$$\begin{aligned} A_3 &= x_0 \\ A_4 &= \frac{\dot{x}_0 + \zeta \omega x_0}{\omega \sqrt{1 - \zeta^2}} \end{aligned} \quad (8.34)$$

Ratkaisu (8.33) voidaan esittää myös toisessa muodossa, kun vakioina käytetään amplitudia C ja vaihekulmaa ψ

$$x(t) = C e^{-\zeta \omega t} \sin(\omega_d t + \psi) \quad (8.35)$$

Alkuehtojen ollessa x_0 ja \dot{x}_0 vakioiden C ja ψ lausekkeet ovat (todistus sivuutetaan)

$$C = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta \omega x_0}{\omega \sqrt{1 - \zeta^2}} \right)^2} \quad \psi = \tan^{-1} \left(\frac{x_0 \omega \sqrt{1 - \zeta^2}}{\dot{x}_0 + \zeta \omega x_0} \right) \quad (8.36)$$

Vaimennussuhteen ζ suuruutta on usein vaikea arvioida tarkasti. Sitä voidaan tutkia myös kokeellisesti mittaamalla, kuinka nopeasti värähtelyn amplitudi pienenee. Tar-

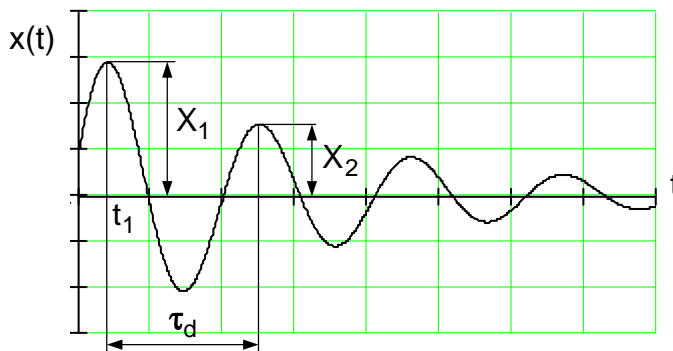
kastellaan tätä ratkaisun (8.35) avulla, joka on esitetty graafisesti kuvassa 8.7. Logaritminen dekrementti on määritelmänsä mukaan luonnollinen logaritmi kahden peräkkäisen jakson amplitudien suhteesta. Määritelmästä ja ratkaisusta (8.35) seuraa logaritmiselle dekrementille δ kuvan 8.7 merkinnöin lauseke

$$\delta = \ln \frac{X_1}{X_2} = \ln \frac{e^{-\zeta \omega t_1} \sin(\omega_d t_1 + \psi)}{e^{-\zeta \omega (t_1 + \tau_d)} \sin[\omega_d (t_1 + \tau_d) + \psi]} \quad (8.37)$$

Koska $\omega_d \tau_d = 2\pi$, mikä on sinifunktion jakso, sievenee kaava (8.37) muotoon

$$\delta = \ln \frac{X_1}{X_2} = \zeta \omega \tau_d = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (8.38)$$

Kun ζ on pieni, on $\sqrt{1-\zeta^2} \approx 1$ ja $\delta \approx 2\pi\zeta$. Kaavasta (8.38) voidaan ratkaista vaimennussuhteelle kaava



Kuva 8.7 Logaritminen dekrementti.

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \quad (8.39)$$

Logaritmista dekrementtiä voidaan käyttää vaimennussuhteen ζ kokeellisessa määrittämisessä. Vaimennussuhde ζ on mahdollista laskea kaavasta (8.39), kun δ on ensin määritetty kaavan (8.38) mittaustuloksista X_1 ja X_2 . Jos amplitudit X_1 ja X_2

poikkeavat hyvin vähän toisistaan, on kaavan (8.38) käyttö epätarkkaa. Tällöin on mahdollista käyttää vaihtoehtoista kaavaa

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{X_1}{X_{n+1}} \quad (8.40)$$

missä X_{n+1} on amplitudi, kun n värähtelyjaksoa on kulunut amplitudista X_1 .

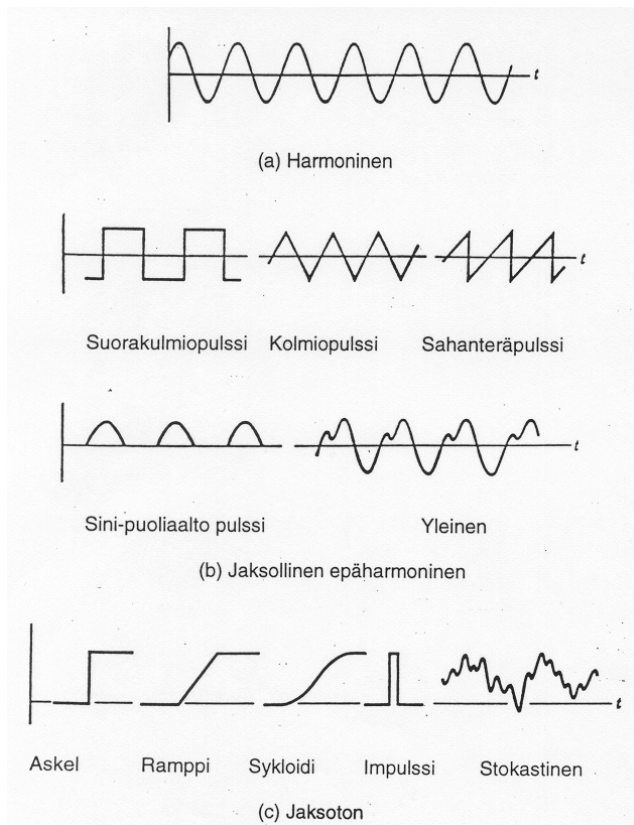
8.3 Partikkelin pakkovärähtely

Ominaisvärähtelyllä on monia merkittäviä käytännön sovelluksia, mutta vielä tätäkin useammin värähtelyanalyysissä tutkitaan pakkovärähtelyitä, jotka ovat mekaanisen systeemin ulkoisista tai sisäisistä häiriökuormituksista johtuvia värähtelyitä. Häiriökuormitukset voivat olla ulkoisia kuormituksia tai syntyä esimerkiksi tasapainottamat-

toman roottorin pyörimisliikkeen seurauksena. Pakkovärähtelyitä voi syntyä myös värähtelevän kiinnitysalustan vaikutuksesta. Jos systeemissä on vaimennusta, on kyseessä vaimeneva pakkovärähtely, mutta muuten vaimenematon pakkovärähtely. Sitä osaa pakkovärähtelystä, joka häviää systeemistä lyhyen ajan kuluessa, sanotaan transientiksi. Transienttia värähtelyä esiintyy esimerkiksi iskukuormitusten, kapaleiden törmäysten ja liikkuvien kuormitusten yhteydessä. Transientin värähtelyn hävittyä jää jäljelle pysyvä värähtely. Pysyvä värähtely liittyy koneiden ja rakenteiden jatkuvaan käyttöön ja se säilyy huomattavasti transienttia värähtelyjä pitempiä aikoja.

Värähtelyanalyysissä sanotaan pakkovärähtelyn aiheuttajaa herätteeksi ja seurauksena olevaa systeemin liiketilaa (asema, nopeus, kiihtyvyys) vasteeksi. Tarkastelut

voidaan jakaa osiin herätteen tyyppin perusteella. Jos heräte on vailla mitään säännöllisyyttä, on kyseessä satunnaisheräte ja syntyvää liikettä sanotaan satunnaisvärähtelyksi eli stokastiseksi värähtelyksi. Jos heräte tunnetaan esimerkiksi ajan funktiona, se on deterministinen. Deterministinen heräte on jaksollinen, jos se toistuu säännöllisin välein samanlaisena. Erityisen tärkeä jaksollinen heräte on harmoninen heräte, jolloin kyseessä on sinimuotoinen herätevoiman vaihtelu. Kuvassa 8.8 on esitetty muutamia herätefunktioita, (a) on harmoninen heräte, kuvassa (b) on muita jaksollisia herätteitä sekä kuvassa (c) jaksottomia herätteitä.



Kuva 8.8 Herätefunktioita.

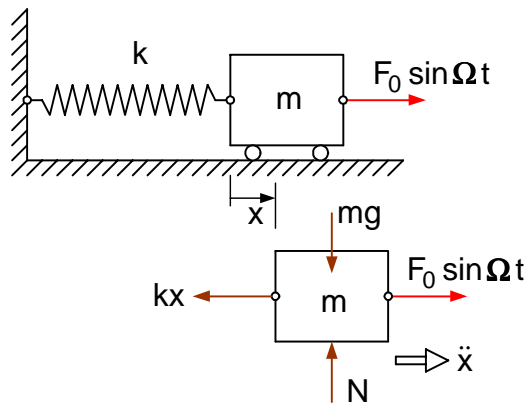
rähtely tapahtuu samalla taajuudella kuin herätevoima vaihtelee. Tavallisia harmonisen herätteen lähteitä ovat pyörivät ja edestakaisin liikkuvat koneenosat sekä itse koneen tai sen alustan liike. Syntyvät värähtelyt ovat yleensä haitallisia ja ainakin resonanssitilanne tulee useimmissa tapauksissa välttää. Tähän päästään värähtelyt huomioon ottavalla suunnittelulla.

Vaimenematonta pakkovärähtelyä ei tarkkaan ottaen käytännössä esiinny, mutta jos vaimennus on vähäistä, kannattaa se analyysin yksinkertaistamiseksi olettaa nollassi. Seuraavassa tarkastellaankin aluksi vaimenematonta harmonista pakkovärähtelyä, jolloin pakkovärähtelyn perusominaisuudet tulevat esille mahdollisimman yksin-

kertaisissa puitteissa ja tarkastelut voidaan sen jälkeen yleistää hieman mutkikkaampaan vaimenevan värähtelyn tapaukseen.

8.3.1 Vaimenematon pakkovärähtely

Kuvassa 8.9 on esitetty lineaarisen yhden vapausasteen harmonisen pakkovärähtelijän perusmalli, jonka muodostavat jousi k , pistemassa m ja massaan vaikuttava harmoninen pakkovoima $F(t) = F_0 \sin \Omega t$. Pakkovoiman lausekkeessa F_0 on



Kuva 8.9 Pakkovärähtelyn perusmalli.

sen amplitudi ja Ω kulmataajuus. Systemin liikettä tutkitaan staattisesta tasapainoasemasta mitatun koordinaatin x avulla. Kuvan 8.9 perusteella saadaan

$$\begin{aligned} \rightarrow -kx + F_0 \sin \Omega t &= m\ddot{x} \\ m\ddot{x} + kx &= F_0 \sin \Omega t \end{aligned} \quad (8.41)$$

Jakamalla kaavassa (8.41) puolittain massalla ja ottamalla huomioon ominaiskulmataajuuden määritelmä $\omega = \sqrt{k/m}$ menee liikeyhtälö (8.41) standardimuotoon

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t \quad (8.42)$$

Liikeyhtälön (8.42) yleinen ratkaisu on muotoa $x = x_h + x_p$, missä x_h on homogeenisen yhtälön $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ yleinen ratkaisu ja x_p täydellisen yhtälön (8.42) jokin yksityisratkaisu. Kaavan (8.6) mukaan on

$$x_h = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t \quad (8.43)$$

missä vakiot A_1 ja A_2 saadaan systeemin alkuehdoista. Yksityisratkaisu x_p on muotoa $x_p = X \sin \Omega t$, missä X on vakio. Sijoittamalla edellä esitetty yksityisratkaisu liikeyhtälöön (8.42) saadaan

$$-X\Omega^2 \sin \Omega t + X\omega^2 \sin \Omega t = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t \quad X = \frac{F_0/m}{\omega^2 - \Omega^2}$$

josta seuraa yksityisratkaisulle kaava

$$x_p = \frac{F_0/m}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t \quad (\Omega \neq \omega) \quad (8.44)$$

Liikkeyhtälön (8.42) ratkaisu on siis

$$x(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t + \frac{F_0/m}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t \quad (\Omega \neq \omega) \quad (8.45)$$

Kaava (8.44) ei ole voimassa, jos $\Omega = \omega$, jolloin toisaalta yksityisratkaisuyrite $x_p = X \sin \Omega t$ sisältyy jo homogeenisen yhtälön yleiseen ratkaisuun (8.43). Oikea yksityisratkaisu tapauksessa $\Omega = \omega$ on

$$x_p = \frac{F_0 \omega}{2k} t \sin \omega t \quad (\Omega = \omega) \quad (8.46)$$

kuten helposti voidaan todeta sijoittamalla ratkaisu (8.46) liikkeyhtälöön (8.42).

Ratkaisussa (8.45) osa $x_h = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t$ edustaa ominaisvärähtelyä, joka häviää systeemistä vaimennuksen takia lyhyen ajan kuluessa. Pysyvää pakkovärähtelyä edustaa osa x_p , joka ei riipu systeemin alkuehdoista ja säilyy niin kauan kuin pakkovoima vaikuttaa. Kaavasta (8.44) näkyy, että pakkovärähtely tapahtuu samalla taajuudella kuin pakkovoima vaihtelee. Pakkovärähtelyn amplitudi X on

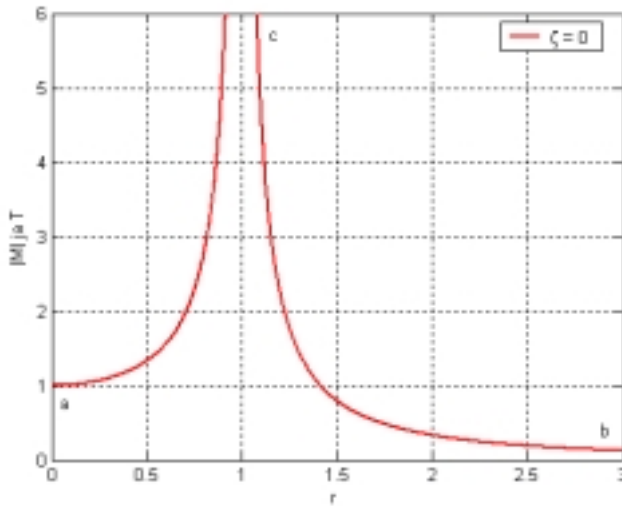
$$X = \frac{F_0/m}{\omega^2 - \Omega^2} \quad (8.47)$$

Kun otetaan huomioon yhteys $m = k/\omega^2$ sekä merkitään $\Delta = F_0/k$ ja $r = \Omega/\omega$, saadaan kaavasta (8.47) tulos

$$M = \frac{X}{\Delta} = \frac{1}{1 - r^2} \quad (8.48)$$

Suuretta M sanotaan vahvistuskertoimeksi ja suuretta r tajuussuhteeksi. M kertoo kuinka suuri värähtelyn amplitudi X on verrattuna pakkovoiman amplitudin F_0 aiheuttamaan staattiseen siirtymään Δ . Kuvassa 8.10 vahvistuskertoimen itseisarvo $|M|$ on esitetty tajuussuhteen r funktiona. Kaavan (8.47) mukaan amplitudi $X > 0$, kun $\Omega < \omega$, jolloin pakkovoima ja värähtely ovat samassa vaiheessa. Amplitudi $X < 0$, kun $\Omega > \omega$. Koska $X \sin \Omega t = -X \sin(\Omega t + \pi)$, voidaan päätellä, että pakkovoima ja värähtely ovat tällöin vastakkaisissa vaiheissa. Kuvan 8.10 käyrässä on kolme erityisen kiinnostavaa kohtaa, joita on merkitty a, b ja c. Kohdassa a Ω on hyvin pieni, ts. pakkovoima vaihtelee hyvin hitaasti ja amplitudi X on lähellä staattista siirtymää Δ ($M \approx 1$). Kohdassa b on $\Omega \gg \omega$, jolloin pakkovoima vaihtelee niin nopeasti, että massalla m 'ei ole aikaa' seurata pakkovoiman vaihtelua ja amplitudi X jää hyvin pieneksi ($M \approx 0$). Kiinnostavin ilmiö on kohdassa c, missä amplitudi X lähestyy ääretön-

tä, kun $\Omega \rightarrow \omega$. Tätä tilannetta sanotaan resonanssiksi. Jos pakkovoiman taajuus $\Omega = \omega$, on voimassa yksityisratkaisu (8.46), josta nähdäänkin, että $x_p \rightarrow \infty$, kun $t \rightarrow \infty$.



Kuva 8.10 Vahvistuskertoimen ja siirtyvyys.

Edellä esitetyn perusteella on selvää, että harmoninen pakkovoima aiheuttaa värähtelyongelmia, jos sen kulmataajuus on sama kuin systeemin ominaiskulmataajuus tai on lähellä sitä. Käytännössä värähtelyn amplitudi ei tietenkään voi tulla äärettömäksi, vaan systeemi vaurioituu aikaisemmin liiallisen värähtelyn seurauksena. Suunnittelijan tehtävänä on valita systeemin parametrit k ja m niin, että se toimii

riittävällä etäisyydellä resonanssikohdastaan. Tätä kutsutaan systeemin virittämiseksi. Pakkovärähtelyssä olevan massan kiinnitysalustaansa aiheuttamia voimavaikutuksia ei yleensä pystytä kokonaan välttämään, mutta niitä voidaan huomattavasti pienentää oikealla joustavien kiinnityselementtien valinnalla. Jos alustaan siirtyvän voiman maksimiarvo on pienempi kuin värähtelyn aiheuttaneen pakkovoiman amplitudi, sanotaan kiinnityselementtejä värähtelyn eristimiksi. Värähtelyn eristyksen tehtävänä on estää värähtelevän kappaleen aiheuttamien voimien siirtymistä ympäristöön tai estää värähtelevän ympäristön aiheuttamien voimien siirtymistä herkkiin laitteisiin. Ongelma on siis molemmissa tapauksissa sama, siirtyvä voima on saatava mahdollisimman pieneksi.

Kuvan 8.9 mallissa pakkovoiman vaikutuksesta alustaan siirtyvän voiman maksimiarvo on $F_A = k X$, jolle voidaan kaavan (8.47) avulla kirjoittaa

$$F_A = k \frac{F_0 / m}{\omega^2 - \Omega^2} = \frac{F_0}{1 - r^2} \quad (8.49)$$

Värähtelyn siirtyvyys T määritellään seuraavasti

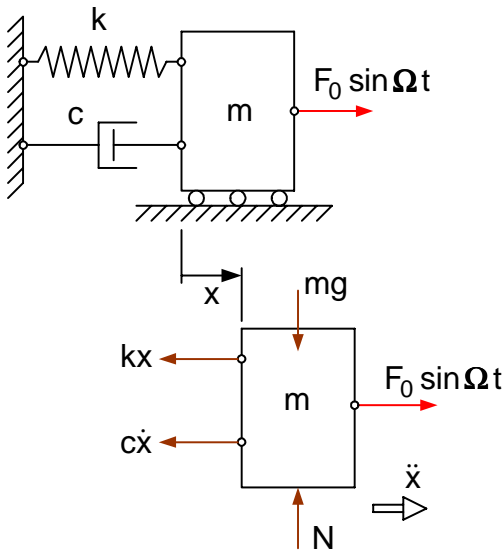
$$T = \left| \frac{F_A}{F_0} \right| = \left| \frac{1}{1 - r^2} \right| \quad (8.50)$$

Siirtyvyys kertoo sen, kuinka suuri osa pakkovoimaan amplitudista siirtyy jousen kautta alustaan. Kaavoista (8.48) ja (8.50) nähdään, että tässä tapauksessa siirtyvyys on sama kuin vahvistuskertoimen itseisarvo. Kuvassa 8.10 on näin ollen myös siirtyvyys T taajuussuhteen funktiona. Kaavasta (8.50) nähdään, että $T < 1$ vain, kun $r > \sqrt{2}$. Tällöin jousesta on hyötyä, koska se pienentää alustaan siirtyvän voiman

maksimiarvoa, joka ilman jouta olisi F_0 . Alueessa $r < \sqrt{2}$ on $T > 1$ ja alustaan siirtävän voiman maksimiarvo on suurempi kuin F_0 ja jousen käytöstä on vain haittaa. Edulliseen siirtyvyyteen päästään siis virittämällä systeemi niin, että se toimii kuvan 8.10 käyrällä ominaistajuuttaan vastaavan kohdan oikealla puolella riittävän kaukana. Näin viritettyä systeemiä kutsutaan yliviritettyksi.

8.3.2 Vaimeneva pakkovärähtely

Kuvassa 8.11 on esitetty viskoosisti vaimennetun yhden vapausasteen harmonisen pakkovärähtelijän perusmalli. Siihen kuuluu jousi k , massa m , vaimennin c sekä massaan vaikuttava harmoninen pakko-voima $F(t) = F_0 \sin \Omega t$. Kuvasta 8.11 saadaan liikeyhtälö



$$\rightarrow -kx - c\dot{x} + F_0 \sin \Omega t = m\ddot{x} \quad (8.51)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \Omega t$$

Ottamalla huomioon ominaiskulmataajuuden ω ja vaimennussuhteen ζ määritelmät saadaan yhtälö (8.51) kirjoitettua standardimuotoon

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t \quad (8.52)$$

Kuva 8.11 Vaimeneva pakkovärähtely.

Yhtälön (8.52) yleinen ratkaisu on muotoa $x = x_h + x_p$, missä x_h on homogeenisen

yhtälön $\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = 0$ yleinen ratkaisu ja x_p täydellisen yhtälön (8.52) jokin yksityisratkaisu. Ratkaisun osa x_h on kaavan (8.35) mukaan alikriittisen vaimennuksen tapauksessa

$$x_h = Ce^{-\zeta\omega t} \sin(\omega_d t + \psi) \quad (8.53)$$

On ilmeistä, että x_h edustaa ominaisvärähtelyä, joka häviää vaimennuksen ansiosta nopeasti. Yksityisratkaisu voidaan tässä tapauksessa löytää yritefunktiolla

$$x_p = A_1 \sin \Omega t + A_2 \cos \Omega t \quad \text{tai} \quad x_p = X \sin(\Omega t - \phi) \quad (8.54)$$

missä A_1 ja A_2 sekä X ja ϕ ovat vakioita. Yritteistä jälkimmäinen on hieman kätevämpi, joten käytetään sitä. Vakiot X ja ϕ voidaan määrittää sijoittamalla yrite x_p

liikeyhtälöön (8.52). Nopeudelle ja kiihtyvyydelle tulee derivoimalla lausekkeet

$$\dot{x}_p = \Omega X \cos(\Omega t - \phi) \quad \ddot{x}_p = -\Omega^2 X \sin(\Omega t - \phi) \quad (8.55)$$

joten sijoitus liikeyhtälöön (8.52) antaa aluksi

$$-(\Omega^2 - \omega^2) X \sin(\Omega t - \phi) + 2\zeta \omega \Omega X \cos(\Omega t - \phi) = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t \quad (8.56)$$

Käyttämällä kaavassa (8.56) sinin ja cosinin 'vähennyslaskukaavoja' saadaan edelleen

$$\begin{aligned} &-(\Omega^2 - \omega^2) X (\sin \Omega t \cos \phi - \cos \Omega t \sin \phi) + \\ &+ 2\zeta \omega \Omega X (\cos \Omega t \cos \phi + \sin \Omega t \sin \phi) = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t \end{aligned} \quad (8.57)$$

Merkitsemällä edellä olevan yhtälön eri puolilla esiintyvien termien $\sin \Omega t$ ja $\cos \Omega t$ kertoimet puolittain samoiksi saadaan yhtälöpari

$$(\omega^2 - \Omega^2) X \cos \phi + 2\zeta \omega \Omega X \sin \phi = \frac{F_0}{m} \quad (\omega^2 - \Omega^2) X \sin \phi - 2\zeta \omega \Omega X \cos \phi = 0 \quad (8.58)$$

joista saadaan ratkaistua yksityisratkaisussa x_p olevat vakiot X ja ϕ . Tulos on (todistus sivuutetaan)

$$X = \frac{F_0 / k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\Omega}{\omega}\right)^2}} \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta \frac{\Omega}{\omega}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \right) \quad (8.59)$$

Vakiot X ja ϕ ovat pakkovärähtelyn $x_p = X \sin(\Omega t - \phi)$ amplitudi ja vaihekulma. Kun merkitään jälleen $\Delta = F_0 / k$ ja $r = \Omega / \omega$, saadaan vahvistuskertoimelle M ja vaihekulmalle ϕ kaavat

$$M = \frac{X}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad \phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta r}{1-r^2} \quad (8.60)$$

Liikeyhtälön (8.52) ratkaisu on edellä olevan perusteella alikriittisen vaimennuksen tapauksessa

$$x(t) = C e^{-\zeta \omega t} \sin(\omega_d t + \psi) + X \sin(\Omega t - \phi) \quad (8.61)$$

missä vakiot X ja ϕ saadaan kaavasta (8.59). Vakiot C ja ψ määräytyvät pakkovärähtelijän alkuehdoista (alkuasema ja -nopeus), mutta eivät tietenkään ole kaavan (8.36) mukaiset, sillä yksityisratkaisu x_p vaikuttaa myös niiden arvoihin.

Kuvassa 8.12 on esitetty kaavan (8.60) vahvistuskertoimen M ja vaihekulman ϕ kuvaajia taajuussuhteen r funktiona muutamilla vaimennussuhteen ζ arvoilla. Vahvistuskertoimen M käyrästä nähdään, että kaikki käyrät ovat nollavaimennusta vastaavan käyrän alapuolella. Vaimennus siis pienentää pakkovärähtelyn amplitudia ja erityisesti resonanssin läheisyydessä tämä pieneneminen on voimakasta. Nähdään myös, että käyrien maksimit eivät ole kohdassa $\Omega = \omega$. Ne eivät ole myöskään kohdassa $\Omega = \omega_d = \omega \sqrt{1 - \zeta^2}$, vaan hieman tämän vasemmalla puolella kohdassa $\Omega = \omega_r = \omega \sqrt{1 - 2\zeta^2}$, kuten kaavasta (8.60) voidaan todeta etsimällä vahvistuskertoimen M derivaatan nollakohta. Arvoa ω_r sanotaan resonanssikulmataajuudeksi. Vaimenevalla värähtelyllä ovat siis ominaiskulmataajuus ω , vaimennettu ominaiskulmataajuus ω_d ja resonanssikulmataajuus ω_r erisuuria. Jos vaimennussuhde ζ on pieni, ovat ne kuitenkin hyvin lähellä toisiaan ja rajatapauksessa $\zeta = 0$ ne ovat samat. Maksimiampplitudiksi kohdassa $\Omega = \omega_r$ tulee

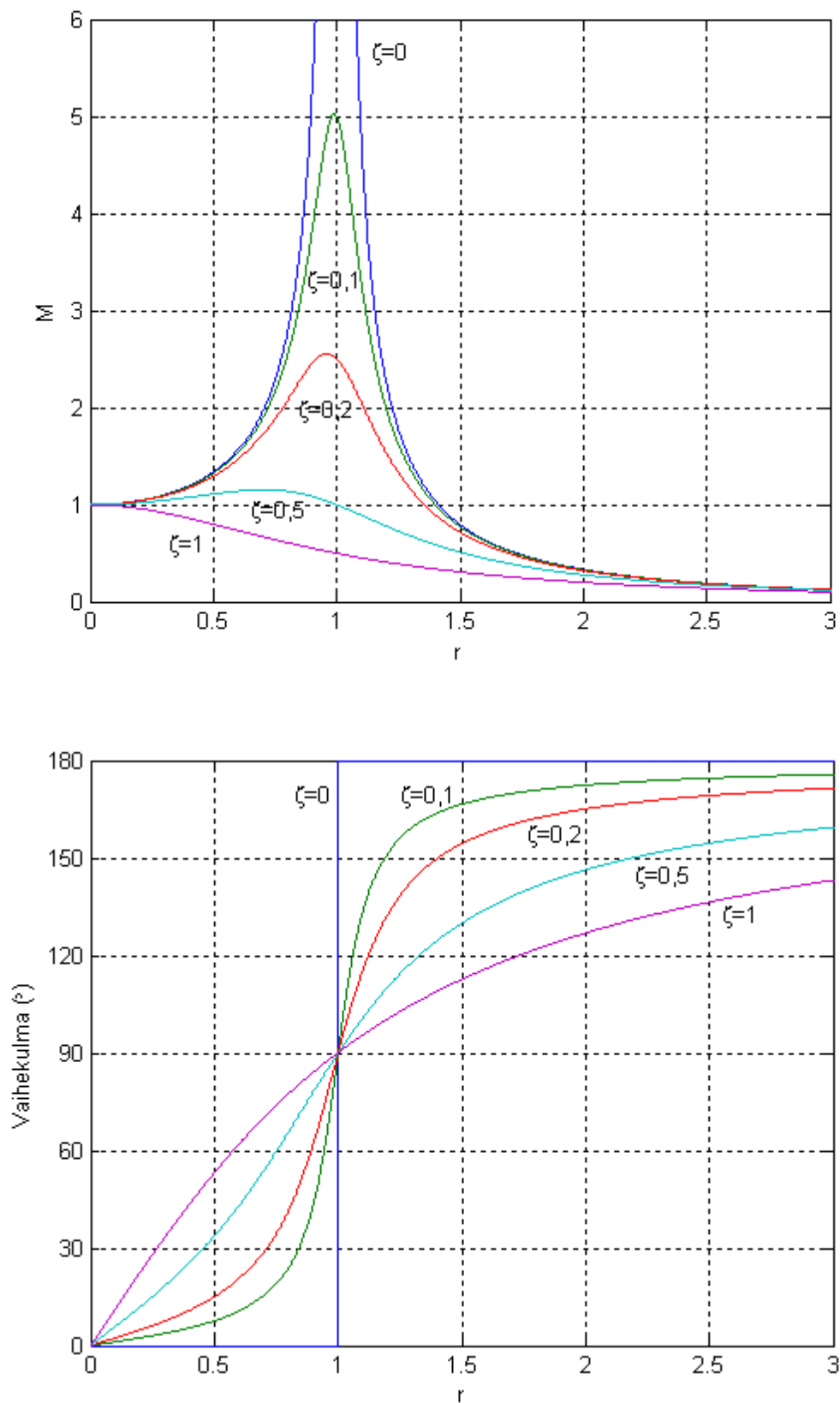
$$X_{\max} = \frac{F_0 / k}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (8.62)$$

mikä on käytännöllisesti katsoen sama kuin ominaiskulmataajuutta ω vastaava amplitudi, joka on

$$X_\omega = \frac{F_0 / k}{2\zeta} \quad (8.63)$$

Toisinaan myös ominaiskulmataajuutta ω sanotaan resonanssitaajuudeksi, koska erot ovat käytännössä hyvin pieniä. Vaihekulman ϕ käyrästä nähdään, että vaimenemattomassa tapauksessa $\zeta = 0$ vaihekulma $\phi = 0^\circ$ resonanssin alapuolella ja $\phi = 180^\circ$ resonanssin yläpuolella, jolloin siis voimaheräte ja siirtymävaste ovat vastaavasti samassa tai vastakkaisessa vaiheessa. Kun $\Omega = \omega$, on $\phi = 90^\circ$ riippumatta vaimennussuhteen ζ arvosta.

Tarkastellaan seuraavaksi voimaa, joka kuvan 8.11 laskentamallissa siirtyy värähtelyn aikana alustaan pakkovoiman vaikutuksesta. Tämän voiman lauseke on kuvassa 8.11 olevan vapaakappalekuvan ja kaavan (8.54) perusteella



Kuva 8.12 Vahvistuskertoimen ja vaihekulman.

$$F_a(t) = k x_p + c \dot{x}_p = k X \sin(\Omega t - \phi) + c \Omega X \cos(\Omega t - \phi) \quad (8.64)$$

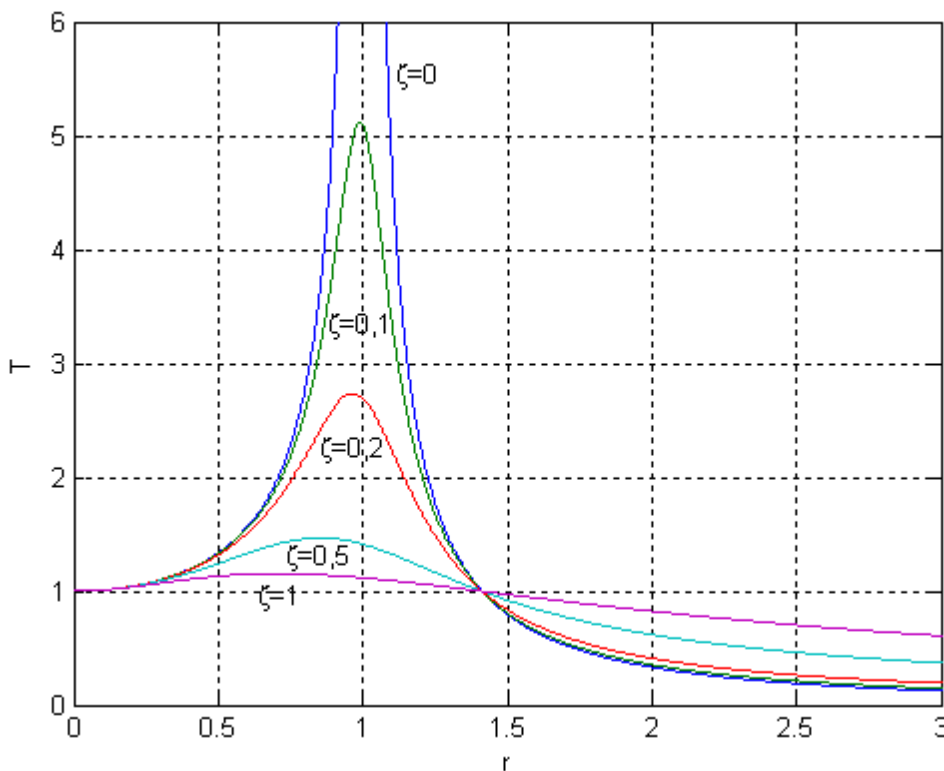
Voidaan helposti osoittaa, että voiman $F_a(t)$ suurin arvo on

$$F_A = \sqrt{(kX)^2 + (c\Omega X)^2} = kX \sqrt{1 + (2\zeta\Omega/\omega)^2} \quad (8.65)$$

missä amplitudi X saadaan kaavasta (8.59). Nähdään, että pakkovärähtelyn siirtyvyydeksi $T = |F_A/F_0|$ tulee lauseke

$$T = \left| \frac{F_A}{F_0} \right| = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (8.66)$$

Siirtyvyys T on esitetty kuvassa 8.13 taajuussuhteen r funktiona muutamalla vaimennussuhteen ζ arvoilla. Kuvasta 8.13 nähdään, että $T > 1$ alueella $r < \sqrt{2}$ kaikilla vaimennussuhteen ζ arvoilla, jolloin jousen käyttö suurentaa alustaan siirtyvää voimaa. Alueessa $r > \sqrt{2}$ on $T < 1$, ja jousen käyttö pienentää alustaan siirtyvää voimaa. Huomataan myös, että alueessa $r > \sqrt{2}$ vaimennuksen lisääminen suurentaa alustaan siirtyvää voimaa, sillä käyrät menevät kohdassa $r = \sqrt{2}$ ristiin.

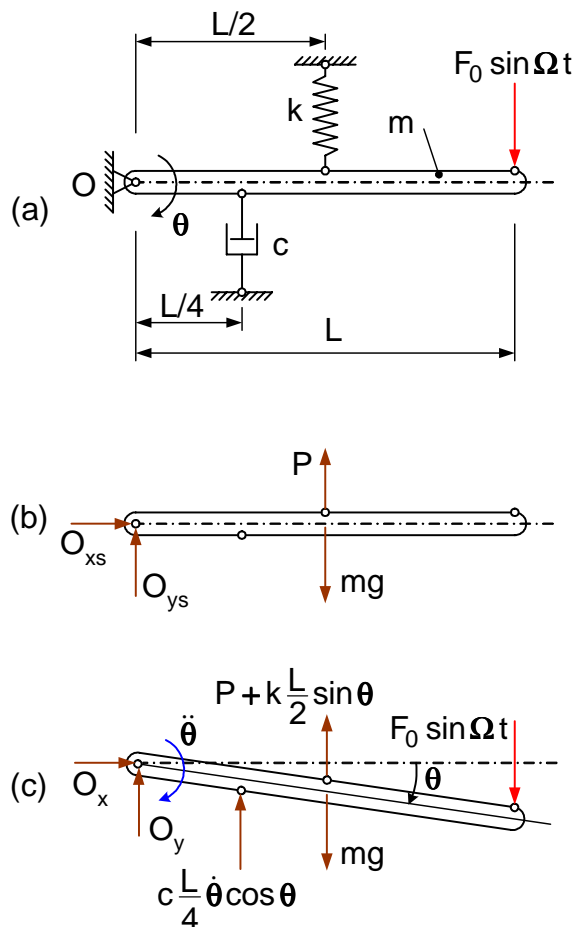


Kuva 8.13 Vaimenevan pakkovärähtelyn siirtyvyys.

8.4 Jäykän kappaleen värähtely

Edellä esitetty partikkelin värähtelyteoria sopii sellaisenaan jäykän kappaleen yhden vapausasteen värähtelyyn, mikäli sen värähtelyliike on translaatioliikettä. Tätä teoriaa voidaan soveltaa myös jäykän kappaleen yhden vapausasteen rotaatioliikkeeseen, jolloin kappale on pyörimisliikkeessä tietyn akselin ympäri. Kappaleen aseman kuvaamiseen käytetään kulmakoordinaattia, joka kertoo, kuinka suuren kulman se on kiertänyt rotaatioakselin ympäri mitattuna sopivasta vertailusuunnasta. Värähtelyä tutkittaessa kulmakoordinaattikin kannattaa mitata staattisesta tasapainoasemasta

lähtien, koska tällöin liikeyhtälöstä eliminoidut staattiseen tasapainoon liittyvät voimat ja momentit. Liikeyhtälö laaditaan tavanomaisesti kirjoittamalla kappaleen momenttiliikeyhtälö esimerkiksi massakeskiön tai rotaatiokeskuksen suhteen. Tulokseksi saatava liikeyhtälö osoittautuu olevan täysin analoginen translaatioliikkeen vastaavan yhtälön kanssa.



Kuva 8.14 Esimerkki rotaatiivärähtelystä.

$kL \sin \theta / 2$ ja vaimentimen kohdalla on nopeus $L \dot{\theta} \cos \theta / 4$. Kuvasta (c) saadaan seuraava momenttiliikeyhtälö pisteen O suhteen

$$c \frac{L}{4} \dot{\theta} \cos \theta \cdot \frac{L}{4} - mg \cdot \frac{L}{2} + (P + k \frac{L}{2} \sin \theta) \cdot \frac{L}{2} - F_0 \sin \Omega t \cdot L = -\frac{1}{3} mL^2 \cdot \ddot{\theta}$$

Kun edellä otetaan huomioon yhteys $P = mg$ ja että pienillä kulmilla $\sin \theta \approx \theta$ ja $\cos \theta \approx 1$, menee palkin liikeyhtälö muotoon

$$\frac{1}{3}mL^2\ddot{\theta} + c\frac{L^2}{16}\dot{\theta} + k\frac{L^2}{4}\theta = F_0 L \sin \Omega t \quad \ddot{\theta} + \frac{3c}{16m}\dot{\theta} + \frac{3k}{4m}\theta = \frac{3F_0}{mL} \sin \Omega t$$

Kun saatua liikeyhtälöä verrataan standardimuotoiseen translaatiotapauksen liikeyhtälöön $\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t$, havaitaan analogia ja voidaan identifioida palkin värähtelyn perussuureet ω ja ζ seuraavasti

$$\omega^2 = \frac{3k}{4m} \quad 2\zeta\omega = \frac{3c}{16m} \quad \omega = \sqrt{\frac{3k}{4m}} \quad \zeta = \frac{\sqrt{3c}}{16\sqrt{mk}}$$

Pakkovoimatermissä kerrointa F_0/m vastaa palkilla kerroin $3F_0/(mL)$. On selvää, että kaikki edellä johdetut tulokset ovat voimassa palkin värähtelyliikkeelle, kun niissä käytetään vakioiden paikalla tässä johdettuja palkkiin liittyviä vakioita.

8.5 Energiaperiaate

Vaimenemattomassa värähtelyssä systeemin mekaaninen energia säilyy, ts. systeemi on konservatiivinen. Tästä seuraa, että systeemin liikeyhtälö voidaan johtaa myös mekaanisen energian säilymisen periaatteella. Vaimenemattoman värähtelijän energia on osittain liike-energiaa ja osittain potentiaalienergiaa. Liike-energia varastoituu massaansa sen nopeuden seurauksena. Potentiaalienergia V varastoituu kimmoisiin osiin kimmoenergiaksi tai ilmenee voiman tekemänä työnä. On siis voimassa

$$T + V = \text{vakio} \quad \frac{d}{dt}(T + V) = 0 \quad (8.67)$$

Johdetaan vielä kuvan 8.3 värähtelijän liikeyhtälö energiaperiaatteella. Kun jousen liike-energia oletetaan nolllaksi, on ainoastaan massalla m liike-energiaa. Sen lauseke mielivaltaisella ajan hetkellä on

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad (8.68)$$

Valitaan staattinen tasapainoasema vertailukohdaksi painovoimasta aiheutuvaa potentiaalienergiaa laskettaessa. Kuvan 8.3 (b) ja (c) perusteella saadaan

$$V = V_c - V_b = \left[\frac{1}{2}k(x + \Delta)^2 - mgx \right] - \frac{1}{2}k\Delta^2$$

josta seuraa yhteyden $k\Delta = mg$ avulla tulos

$$V = \frac{1}{2} k x^2 \quad (8.69)$$

Sijoittamalla T ja V kaavaan (3.17) saadaan

$$\frac{d}{dt}(T + V) = m \dot{x} \ddot{x} + k x \dot{x} = 0 \quad m \ddot{x} + kx = 0 \quad (8.70)$$

mikä on sama liikeyhtälö kuin kaavassa (8.17) saatiin.

Jos ollaan kiinnostuneita vain ominaiskulmataajuudesta ω , voidaan se laskea lyhyesti ns. Rayleigh'in energiaperiaatteella seuraavassa esitetyllä tavalla. Energian säilymisen periaatteesta seuraa, että kahdelle mielivaltaiselle ajan hetkelle pätee

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (8.71)$$

Valitaan toiseksi hetkeksi systeemin staattinen tasapainoasema, jolloin voidaan sopia, että $V_1 = 0$. Toiseksi hetkeksi otetaan värähtelyn ääriasema, jossa massan nopeus on nolla ja siis $T_2 = 0$. Jos systeemin liike on harmonista värähtelyä, ovat T_1 ja V_2 liike- ja potentiaalienergian maksimiarvot. Näin saadaan tulokseksi Rayleigh'in energiaperiaate

$$T_{\max} = V_{\max} \quad (8.72)$$

josta ominaiskulmataajuus ω voidaan suoraan laskea.

Sovelletaan kaavaa (8.72) kuvan 8.1 systeemiin. Kaavan (8.9) mukaan suurin siirtymä $x_{\max} = C$ ja nopeuden kaavasta (8.10) näkyy, että suurimman nopeuden lauseke on $\dot{x}_{\max} = C\omega$. Sijoitetaan nämä kaavaan (8.72), jolloin saadaan

$$T_{\max} = \frac{1}{2} m \dot{x}_{\max}^2 = \frac{1}{2} m C^2 \omega^2 = \frac{1}{2} k C^2 = \frac{1}{2} k x_{\max}^2 = V_{\max} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (8.73)$$

mikä on sama tulos kuin kaavassa (8.4) määriteltiin.