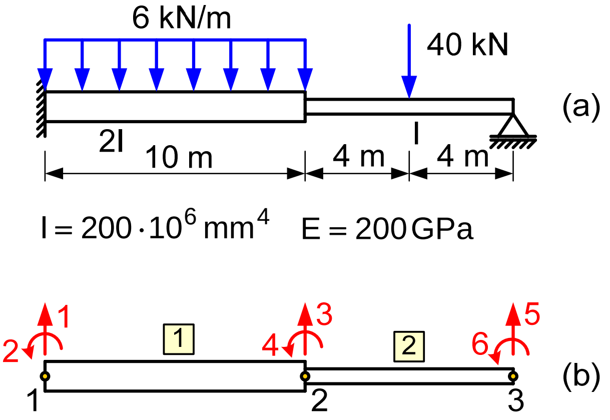
Esimerkki 3.3



Kuva 1. Jatkuva palkki.

Sovelletaan neljän vapausasteen palkkielementtiä kuvan 1 (a) jatkuvan palkin statiikan ratkaisemiseen. Valitaan kuvan (b) mukainen kahden elementin ja kuuden vapausasteen elementtiverkko, jossa on tukiin liittyvät vapausasteet mukana. Taivutusjäykkyyden muutoskohtaan on pakko sijoittaa solmu, koska elementin tulee olla tasapaksu. Pistevoiman vaikutuskohtaan voitaisiin sijoittaa solmu, jolloin voima olisi solmukuormitus, mutta käsitellään se ekvivalenttisten solmukuormitusten avulla.

Kirjoitetaan elementtien jäykkyysmatriisit kaavasta (3.6) ja ekvivalenttiset solmukuormitusvektorit kuvan 3.3 taulukon avulla. Käytetään yksikköjärjestelmää (N,mm), mutta yksiköitä ei merkitä välivaiheisiin näkyviin.

$$\frac{EI_1}{L_1}=\frac{200\cdot10^3\cdot2\cdot200\cdot10^6}{10\cdot10^3}=8\cdot10^9 \qquad \{\underline{r}\}^1=10^3\left\{\begin{array}{cccc}-30 & -50\cdot10^3 & -30 & 50\cdot10^3\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{array}\right\}$$

$$[\underline{k}]^1=8\cdot10^3\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0{,}12 & 600 & -0{,}12 & 600\\ 600 & 4\cdot10^6 & -600 & 2\cdot10^6\\ -0{,}12 & -600 & 0{,}12 & -600\\ 600 & 2\cdot10^6 & -600 & 4\cdot10^6\end{bmatrix}\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array}\\ \begin{array}{cccc}1 & 2 & 3 & 4\end{array}\end{array}$$

$$\frac{EI_2}{L_2}=\frac{200\cdot10^3\cdot200\cdot10^6}{8\cdot10^3}=5\cdot10^9 \qquad \{\underline{r}\}^2=10^3\left\{\begin{array}{cccc}-20 & -40\cdot10^3 & -20 & 40\cdot10^3\\ 3 & 4 & 5 & 6\end{array}\right\}$$

$$[\underline{k}]^2=5\cdot10^3\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0{,}1875 & 750 & -0{,}1875 & 750\\ 750 & 4\cdot10^6 & -750 & 2\cdot10^6\\ -0{,}1875 & -750 & 0{,}1875 & -750\\ 750 & 2\cdot10^6 & -750 & 4\cdot10^6\end{bmatrix}\begin{array}{c}3\\4\\5\\6\end{array}\\ \begin{array}{cccc}3 & 4 & 5 & 6\end{array}\end{array}$$

Jäykkyysmatriisien termeissä on suuruusluokkaeroja, mikä on tavallista elementin ja varsinkin elementtiverkon jäykkyysmatriisissa. Tämä merkitsee sitä, että laskut tietokoneella on suoritettava riittävän monta oikeata numeroa sisältävillä liukuluvuilla, jotta ratkaisu ei epäonnistuisi pyöristysvirheiden takia.

Kun jäykkyysmatriisit ja kuormitukset sijoittelusummataan ja otetaan huomioon tuennat, saadaan elementtiverkon perusyhtälöksi

$$10^3\begin{bmatrix} 0{,}96 & 4800 & -0{,}96 & 4800 & 0 & 0 \\ 4800 & 32\cdot 10^6 & -4800 & 16\cdot 10^6 & 0 & 0 \\ -0{,}96 & -4800 & 1{,}8975 & -1050 & -0{,}9375 & 3750 \\ 4800 & 16\cdot 10^6 & -1050 & 52\cdot 10^6 & -3750 & 10\cdot 10^6 \\ 0 & 0 & -0{,}9375 & -3750 & 0{,}9375 & -3750 \\ 0 & 0 & 3750 & 10\cdot 10^6 & -3750 & 20\cdot 10^6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_Y^2 \\ \Phi^2 \\ 0 \\ \Phi^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^1 - 30\cdot 10^3 \\ M^1 - 50\cdot 10^6 \\ -50\cdot 10^3 \\ 10\cdot 10^6 \\ F^3 - 20\cdot 10^3 \\ 40\cdot 10^6 \end{bmatrix}$$

Vapaita solmusiirtymiä vastaavat yhtälöt ovat

$$10^3\begin{bmatrix} 1{,}8975 & -1050 & 3750 \\ -1050 & 52\cdot 10^6 & 10\cdot 10^6 \\ 3750 & 10\cdot 10^6 & 20\cdot 10^6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_Y^2 \\ \Phi^2 \\ \Phi^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50\cdot 10^3 \\ 10\cdot 10^6 \\ 40\cdot 10^6 \end{bmatrix}$$

Solmusiirtymien ratkaisuksi tulee (rotaatioiden yksikkö on radiaani) $U_Y^2 = -57{,}414\,\text{mm}$ $\Phi^2 = -0{,}003786$ $\Phi^3 = 0{,}014658$

Tukireaktiot ratkeavat perusyhtälöryhmän kolmesta jäljelle jääneestä yhtälöstä, joista saadaan

$$F^1 - 30\cdot 10^3 = 10^3(-0{,}96\,U_Y^2 + 4800\,\Phi^2) \quad \Rightarrow \quad F^1 = 66{,}945\,\text{kN}$$

$$M^1 - 50\cdot 10^3 = 10^3(-4800\,U_Y^2 + 16\cdot 10^6\,\Phi^2) \quad \Rightarrow \quad M^1 = 265{,}013\,\text{kNm}$$

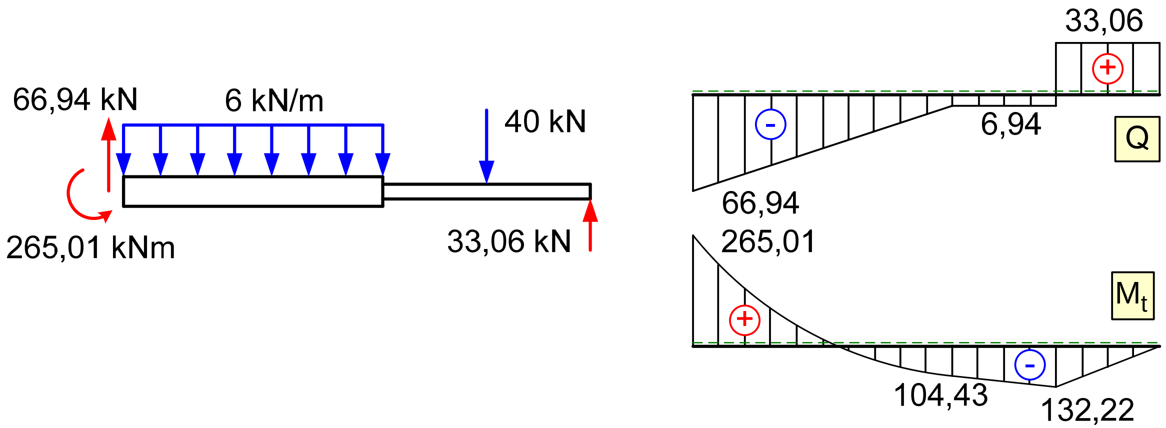
$$F^3 - 20\cdot 10^3 = 10^3(-0{,}9375\,U_Y^2 - 3750\,\Phi^2 - 3750\,\Phi^3) \quad \Rightarrow \quad F^3 = 33{,}055\,\text{kN}$$

Elementin perusyhtälöstä tulee seuraavat lokaalikoordinaatiston solmuvoimavektorit

$$\begin{bmatrix} \underline{f}_y^1 \\ \underline{m}^1 \\ \underline{f}_y^2 \\ \underline{m}^2 \end{bmatrix}^1 = 8\cdot 10^3 \begin{bmatrix} 0{,}12 & 600 & -0{,}12 & 600 \\ 600 & 4\cdot 10^6 & -600 & 2\cdot 10^6 \\ -0{,}12 & -600 & 0{,}12 & -600 \\ 600 & 2\cdot 10^6 & -600 & 4\cdot 10^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -57{,}414 \\ -0{,}003786 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -30\cdot 10^3 \\ -50\cdot 10^6 \\ -30\cdot 10^3 \\ 50\cdot 10^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66{,}94\cdot 10^3 \\ 265{,}01\cdot 10^6 \\ -6{,}94\cdot 10^3 \\ 104{,}43\cdot 10^6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{f}_y^1 \\ \underline{m}^1 \\ \underline{f}_y^2 \\ \underline{m}^2 \end{bmatrix}^2 = 5\cdot 10^3 \begin{bmatrix} 0{,}1875 & 750 & -0{,}1875 & 750 \\ 750 & 4\cdot 10^6 & -750 & 2\cdot 10^6 \\ -0{,}1875 & -750 & 0{,}1875 & -750 \\ 750 & 2\cdot 10^6 & -750 & 4\cdot 10^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -57{,}414 \\ -0{,}003786 \\ 0 \\ 0{,}014658 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -20\cdot 10^3 \\ -40\cdot 10^6 \\ -20\cdot 10^3 \\ 40\cdot 10^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}94\cdot 10^3 \\ -104{,}43\cdot 10^6 \\ 33{,}06\cdot 10^3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Saatujen tuloksien avulla voidaan laatia kuvan 2 palkin vapaakappalekuva sekä leikkausvoima- ja taivutusmomenttikuva.



Kuva 2. Palkin vapaakappalekuva ja rasituskuvat.