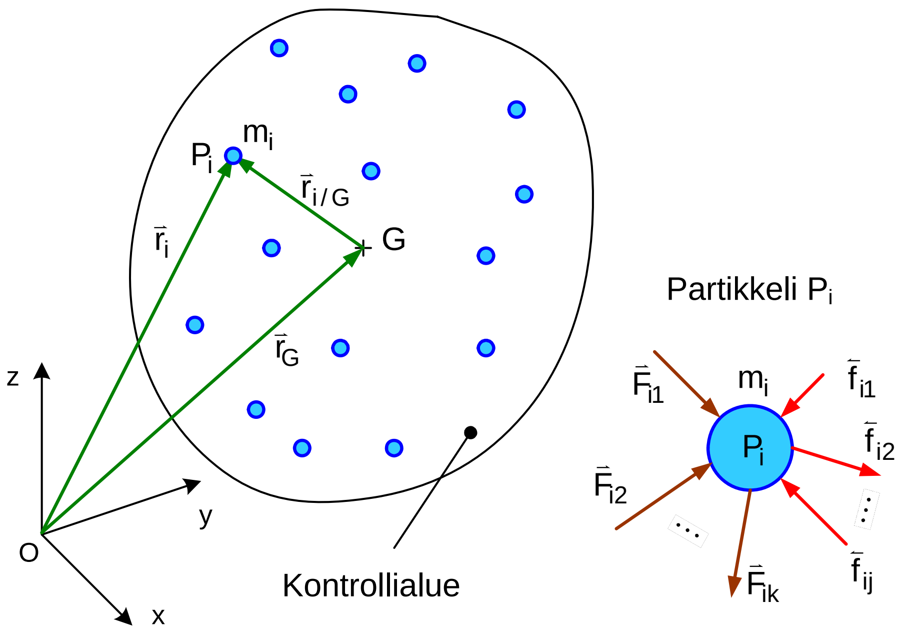
# YLEISTETTY NEWTONIN II LAKI




Massakeskiön G paikkavektori $\vec{r}_G$ toteuttaa ehdon

$$m\,\vec{r}_G = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{r}_i \quad \Rightarrow \quad m\,\ddot{\vec{r}}_G = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\ddot{\vec{r}}_i$$

Partikkelin $P_i$ liikeyhtälö

$$\vec{R}_i = \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \cdots + \vec{F}_{ik} + \vec{f}_{i1} + \vec{f}_{i2} + \cdots + \vec{f}_{ij} = m_i\,\ddot{\vec{r}}_i$$

Summaamalla kaikkien partikkelien liikeyhtälöt puolittain seuraa

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \cdots + \vec{F}_{ik}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{f}_{i1} + \vec{f}_{i2} + \cdots + \vec{f}_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\ddot{\vec{r}}_i$$

Ulkoisten voimien summaa: $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \cdots + \vec{F}_{ik}\right)$

Sisäisten voimien summa: $\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{f}_{i1} + \vec{f}_{i2} + \cdots + \vec{f}_{ij}\right) = \vec{0}$

Yleistetty Newtonin II laki eli partikkelisysteemin massakeskiön liikelaki:

$$\boxed{\vec{R} = m\ddot{\vec{r}}_G = m\vec{a}_G}$$

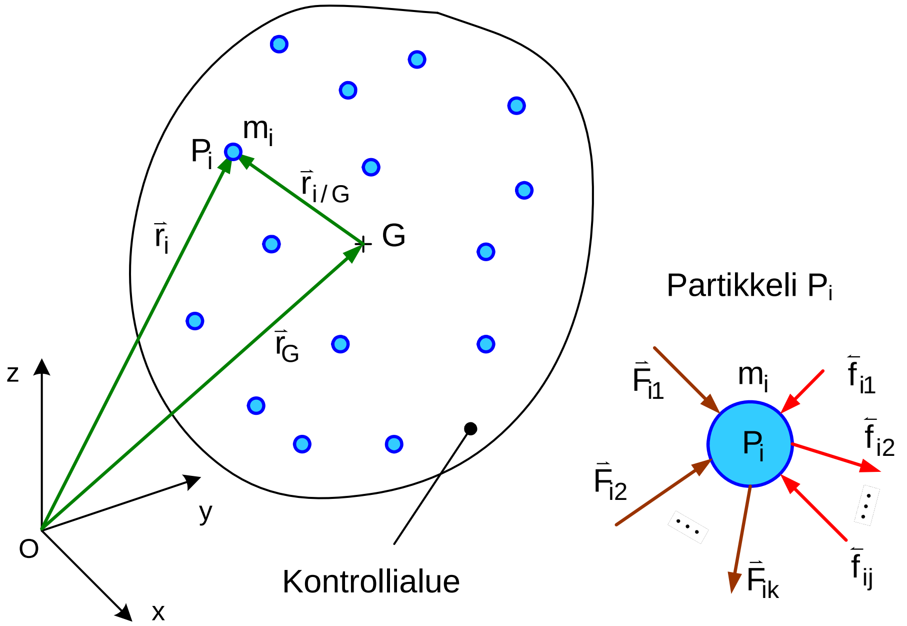
Partikkelisysteemiin vaikuttavien ulkoisten voimien resultantti on yhtä suuri kuin systeemin kokonaismassa kertaa sen massakeskiön kiihtyvyys.

Massakeskiön liikelain mukaan $\vec{R}$ ja $m\vec{a}_G$ ovat yhtä suuret ja samansuuntaiset, mutta niiden ei tarvitse olla samalla vaikutussuoralla.

Massakeskiön liikelain komponenttimuoto:

$$\boxed{R_x = ma_{Gx} \qquad R_y = ma_{Gy} \qquad R_z = ma_{Gz}}$$

# PARTIKKELISYSTEEMIN TYÖLAUSE




Partikkelille $P_i$ on voimassa työlause: $\boxed{W_i = \Delta T_i}$

$W_i$ on partikkeliin $P_i$ vaikuttavien voimien resultantin $\vec{R}_i$ tekemä työ

$\Delta T_i = \Delta\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right)$ on partikkelin $P_i$ liike-energian muutos

Laskemalla kaikkien kontrollialueen partikkeleiden työyhtälöt puolittain yhteen, saadaan partikkelisysteemin työlause: $\boxed{W = \Delta T}$

$W = \sum_{i=1}^{n} W_i$ on systeemiin tehty kokonaistyö, otettava huomioon sekä systeemin ulkoiset että sisäiset voimat

$\Delta T = \sum_{i=1}^{n} \Delta T_i$ on systeemin liike-energian muutos

Työlauseen vaihtoehtoinen muoto:

$$\boxed{W = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e}$$

$\Delta V_g$ systeemin yhteenlaskettu potentiaalienergian muutos

$\Delta V_e$ systeemin yhteenlaskettu kimmoenergian muutos

Systeemin liike-energialle saadaan

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_G + \vec{v}_{i/G}\right) \cdot \left(\vec{v}_G + \vec{v}_{i/G}\right) \quad \Rightarrow$$

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_G^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_{i/G}^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_G \cdot \vec{v}_{i/G}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_G^2 = \frac{1}{2} v_G^2 \sum_{i=1}^{n} m_i = \frac{1}{2} m v_G^2$$

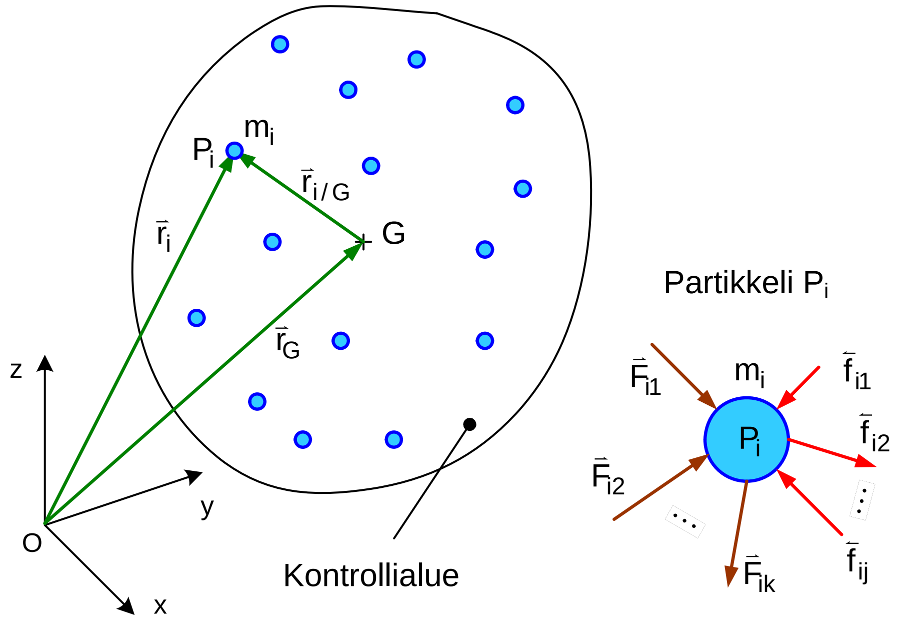
$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_G \cdot \vec{v}_{i/G} = \vec{v}_G \cdot \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_{i/G} \right) = \vec{0}$$

joten liike-energian lausekkeeksi tulee

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_{i/G}^2}$$

Liike-energia sisältää massakeskiön G liikkeestä aiheutuvan ensimmäisen termin ja partikkelien liikkeistä massakeskiön suhteen johtuvan toisen summatermin.

# PARTIKKELISYSTEEMIN LIIKEMÄÄRÄ




Partikkelin $P_i$ liikemäärä: $\boxed{\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i}$

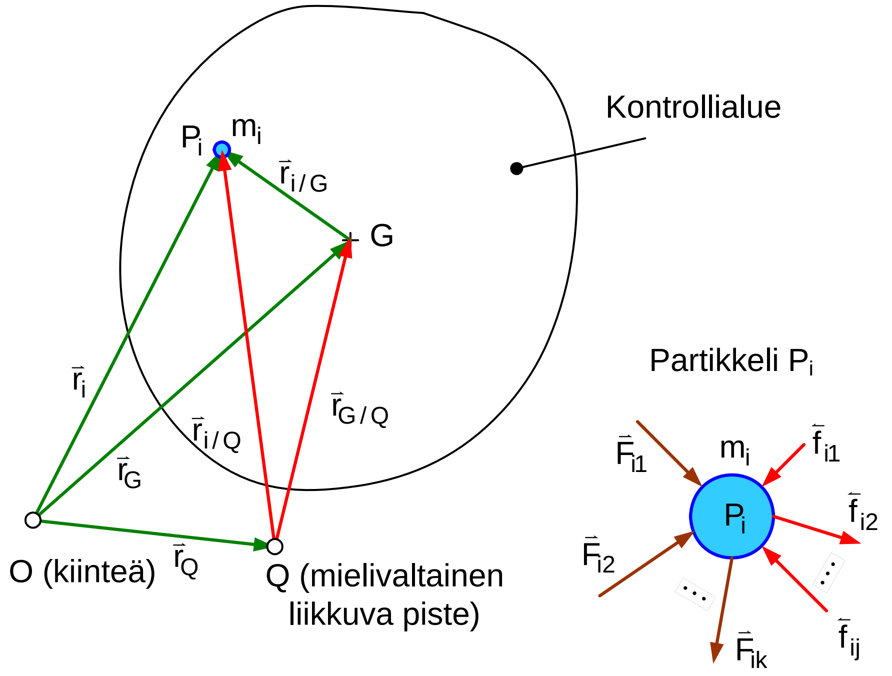
Systeemin liikemäärä: $\boxed{\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_i}$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_G + \vec{v}_{i/G} \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i (\vec{v}_G + \vec{v}_{i/G}) = \vec{v}_G \sum_{i=1}^{n} m_i + \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_{i/G}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_{i/G} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{p} = m \vec{v}_G}$$

$$\dot{\vec{p}} = m \dot{\vec{v}}_G = m \vec{a}_G = \vec{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{R} = \dot{\vec{p}}}$$

# PARTIKKELISYSTEEMIN LIIKEMÄÄRÄN MOMENTTI JA MOMENTTILIIKEYHTÄLÖ




## (a) Kiinteä momenttipiste O

Partikkelin $P_i$ liikemäärän momentti:

$$\boxed{\vec{L}_{Oi} = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i}$$

Systeemin liikemäärän momentti:

$$\boxed{\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i}$$

Derivoimalla puolittain ajan suhteen saadaan

$$\dot{\vec{L}}_O = \sum_{i=1}^{n} \dot{\vec{r}}_i \times m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{v}}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i$$

Newtonin II lain avulla saadaan

$$\dot{\vec{L}}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{R}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{Oi} = \vec{M}_O$$

Momenttiliikeyhtälö kiinteän pisteen O suhteen:

$$\boxed{\vec{M}_O = \dot{\vec{L}}_O}$$

## (b) Momenttipisteenä massakeskiö G

Partikkelin $P_i$ liikemäärän momentti: $\boxed{\vec{L}_{Gi} = \vec{r}_{i/G} \times m_i \vec{v}_i}$

Systeemin liikemäärän momentti: $\boxed{\vec{L}_G = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{i/G} \times m_i \vec{v}_i}$

Derivoimalla puolittain ajan suhteen saadaan

$$\dot{\vec{L}}_G = \sum_{i=1}^{n} \dot{\vec{r}}_{i/G} \times m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{i/G} \times m_i \dot{\vec{v}}_i$$

jossa oikean puolen ensimmäiselle termille saadaan

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{\vec{r}}_{i/G} \times m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \dot{\vec{r}}_{i/G} \times m_i (\vec{v}_G + \dot{\vec{r}}_{i/G}) = -\vec{v}_G \times \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{i/G} m_i + \sum_{i=1}^{n} \dot{\vec{r}}_{i/G} \times m_i \dot{\vec{r}}_{i/G} = \vec{0}$$

Ottamalla lisäksi huomioon Newtonin II laki seuraa

$$\dot{\vec{L}}_G = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{i/G} \times m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \dot{\vec{r}}_{i/G} \times \vec{R}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{Gi} = \vec{M}_G$$

Momenttiliikeyhtälö massakeskiön G suhteen: $\boxed{\vec{M}_G = \dot{\vec{L}}_G}$

Massakeskiön suhteen lasketulle liikemäärän momentille pätee

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{L}_{G/Q} &= \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{i/G} \times m_i \vec{v}_{i/Q} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{i/G} \times m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_Q) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{i/G} \times m_i \vec{v}_i + \vec{v}_Q \times \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_{i/G} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{i/G} \times m_i \vec{v}_i = \vec{L}_G \end{aligned}}$$

eli se voidaan laskea käyttämällä partikkelien suhteellisia nopeuksia minkä tahansa pisteen suhteen.

## (b) Momenttipisteenä mielivaltainen liikkuva piste Q

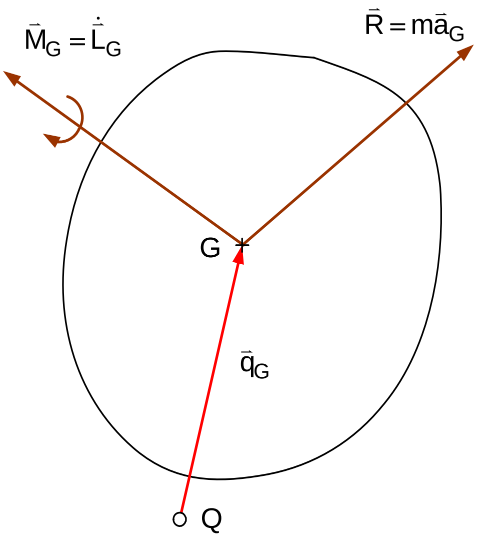
Partikkelin $P_i$ liikemäärän momentti: $$\boxed{\vec{L}_{Qi} = \vec{r}_{i/Q} \times m_i \vec{v}_i}$$

Systeemin liikemäärän momentti: $$\boxed{\vec{L}_Q = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{i/Q} \times m_i \vec{v}_i}$$

Sijoittamalla $\vec{r}_{i/Q} = \vec{r}_{G/Q} + \vec{r}_{i/G}$, saadaan $\vec{L}_Q = \vec{r}_{G/Q} \times \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{i/G} \times m_i \vec{v}_i$

Koska $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \vec{p} = m\vec{v}_G$, saadaan liikemäärän momentin siirtosääntö:

$$\boxed{\vec{L}_Q = \vec{L}_G + \vec{r}_{G/Q} \times m\vec{v}_G}$$




Ulkoisten voimien systeemi voidaan koota massakeskiöön G pariksi $\vec{R}$, $\vec{M}_G$ (dynami). Lisäksi on $\vec{R} = m\vec{a}_G$ ja $\vec{M}_G = \dot{\vec{L}}_G$.

Koska $\vec{M}_Q = \vec{M}_G + \vec{r}_{G/Q} \times \vec{R}$, saadaan momenttiliikeyhtälöksi pisteen Q suhteen

$$\boxed{\vec{M}_Q = \dot{\vec{L}}_G + \vec{r}_{G/Q} \times m\vec{a}_G}$$

# PARTIKKELISYSTEEMIN IMPULSSILAUSEET

## Voiman impulssilause

$$\vec{R} = \dot{\vec{p}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{R}\,dt = d\vec{p} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{R}\,dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1}$$

## Momentin impulssilause

Massakeskiön suhteen olevasta momenttiliikeyhtälöstä seuraa tulos $\vec{M}_G\,dt = d\vec{L}_G$, joka integroidaan ajan suhteen hetkestä $t_1$ hetkeen $t_2$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_G\,dt = \vec{L}_{G2} - \vec{L}_{G1}}$$

missä $\vec{L}_{G2}$ on systeemin liikemäärän momentti massakeskiön suhteen het-kellä $t_2$ ja $\vec{L}_{G1}$ hetkellä $t_1$.

Samankaltainen tulos saadaan myös kiinteätä momenttipistettä O käyttäen eli

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_O\,dt = \vec{L}_{O2} - \vec{L}_{O1}}$$