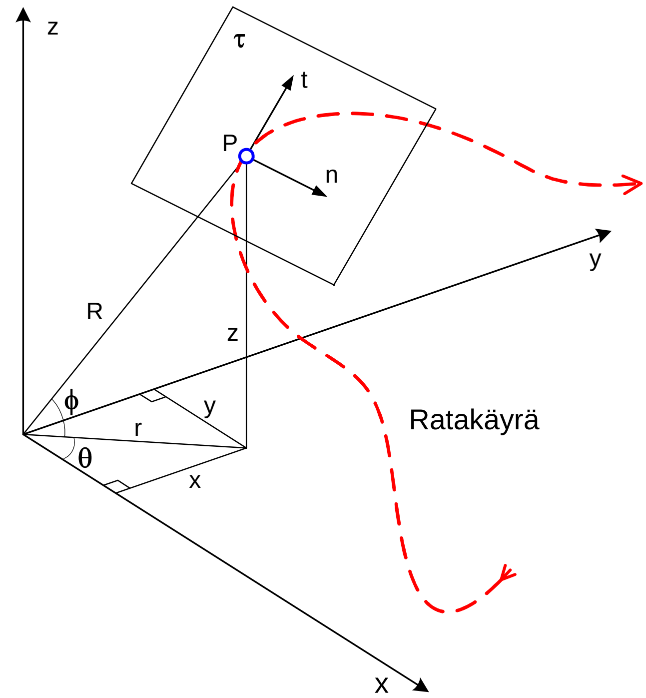
2. PARTIKKELIN KINEMATIIKKA

2.1 Yleistä

Partikkelilla eli massapisteellä tarkoitetaan kappaletta, jonka mitat ovat epäoleellisen pienet tarkasteltavan tehtävän kannalta. Kappaleen ei tarvitse kuitenkaan olla ihmisen kannalta pienikokoinen. Esimerkiksi lentokoneen lentoreitin tarkastelussa voidaan konetta pitää partikkelina, sillä sen mitat ovat epäoleellisen pienet verrattuna etäisyyksiin reitillä. Jos taas tutkitaan lentokoneen rakenteiden lujuutta tai jäykkyyttä, ei partikkelimalli ole käyttökelpoinen.



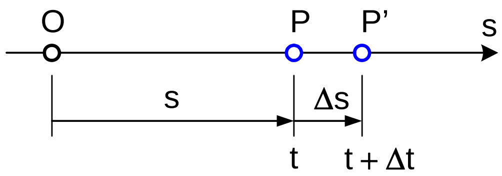
Kuva 2.1 Partikkelin ratakäyrä.

Kinematiikka eli geometrinen liikeoppi tutkii liikkeen geometriaa puuttumatta sen syihin eli voimasysteemiin, joka liikkeen aiheuttaa. Tarkastelut suoritetaan jossakin sopivassa koordinaatistossa. Kuvassa 2.1 on esitetty partikkelin P ratakäyrä kolmiulotteisessa avaruudessa. Kinematiikan tehtävänä on selvittää, miten voidaan määrittää partikkelin asema, nopeus ja kiihtyvyys sen liikkuessa ratakäyräänsä pitkin. Kuvassa 2.1 on liikkeen tarkasteluun sopivia koordinaatteja; suorakulmaiset koordinaatit (x, y, z), sylinterikoordinaatit (r, θ, z) ja pallokoordinaatit (R, θ, ϕ). Analysointi voidaan suorittaa myös ratakäyrän paikallisessa tangenttitasossa τ (oskuloiva taso) käyttämällä ratakäyrän tangentin, päänormaalin ja sivunormaalin suuntaisia koordinaatteja (t, n, b). Käytettävä koordinaatisto voi olla levossa (inertiaalikoordinaatisto) tai liikkua tunnetulla tavalla. Jos partikkelin ratakäyrä on tasokäyrä, sanotaan sen olevan tasoliikkeessä. Suoraviivainen liike on tasoliikkeen erityistapaus, jossa ratakäyrä on suora viiva.

2.2 Suoraviivainen liike

Tarkastellaan partikkelia P, joka liikkuu pitkin suoraa viivaa kuvan 2.2 mukaisesti. Partikkelin asema hetkellä t voidaan ilmoittaa antamalla sille origosta O mitattu koordinaatti s. Hetkellä $t+\Delta t$ partikkeli on kohdassa P’, jolloin sen koordinaatti on $s+\Delta s$. Partikkelin keskinopeus aikavälillä Δt on $v_k = \Delta s / \Delta t$. Kun $\Delta t \to 0$, keskinopeus v_k lähestyy partikkelin hetkellistä nopeutta v ajan hetkellä t eli

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}} \tag{2.1}$$



Kuva 2.2 Suoraviivainen liike.

Hetkellinen nopeus on asemakoordinaatin muutosnopeus eli derivaatta ajan suhteen. Kaavassa (2.1) on aikaderivaattaa merkitty suureen päällä olevalla pisteellä, kuten dynamiikassa on tapana.

Kun partikkeli on hetkellä t kohdassa P, sen nopeus on v. Hetkellä $t+\Delta t$ partikkeli on kohdassa P’, jolloin sen nopeus on $v+\Delta v$, jossa Δv on nopeuden muutos aikavälillä Δt. Partikkelin keskikiihtyvyys aikavälillä Δt on $a_k = \Delta v / \Delta t$. Kun $\Delta t \to 0$, keskikiihtyvyys a_k lähestyy partikkelin hetkellistä kiihtyvyyttä a ajan hetkellä t eli

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \dot{v} = \ddot{s}} \tag{2.2}$$

Hetkellinen kiihtyvyys on nopeuden muutosnopeus eli derivaatta ajan suhteen.

Nopeus ja kiihtyvyys ovat vektorisuureita ja niillä on suuruus ja suunta. Suoraviivaisessa liikkeessä suunta voidaan ilmaista etumerkin avulla, eikä vektoreita tarvitse välttämättä käyttää. Nopeuden itseisarvoa kutsutaan vauhdiksi.

Eliminoimalla kaavoista (2.1) ja (2.2) aikadifferentiaali dt, saadaan tulos

$$\boxed{v\,dv = a\,ds} \qquad \text{eli} \qquad \boxed{\dot{s}\,d\dot{s} = \ddot{s}\,ds} \tag{2.3}$$

jota sanotaan energiadifferentiaaliyhtälöksi. Kaavat (2.1), (2.2) ja (2.3) ovat partikkelin suoraviivaisen liikkeen perusdifferentiaaliyhtälöt, joiden avulla kinematiikan tehtävät voidaan ratkaista.

Jos partikkelin asemakoordinaatti s tunnetaan ajan t funktiona, voidaan nopeus v ja kiihtyvyys a määrittää kaavoista (2.1) ja (2.2). Useimmiten kuitenkin kiihtyvyys saadaan ensiksi selville vaikuttavista voimista, kuten kinetiikassa tulee esille. Tällöin muut suureet on laskettava kiihtyvyydestä integroimalla. Tapauksesta riippuen kiihtyvyys voidaan saada ajan, aseman tai nopeuden funktiona. Kiihtyvyys voi olla useammankin muuttujan funktio. Seuraavassa on esitetty muutamia tavallisimmin esiintyviä erityistapauksia ja niiden ratkaisuperiaatteet.

(a) Tasaisesti kiihtyvä liike, a on vakio. Kaavoista (2.1), (2.2) ja (2.3) seuraa

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a\,dt = a\int_{t_0}^{t} dt \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v = v_0 + a(t - t_0)} \tag{2.4}$$

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{s_0}^{s} a\,ds = a\int_{s_0}^{s} ds \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)} \tag{2.5}$$

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_{t_0}^{t} v\,dt \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{s = s_0 + v_0(t - t_0) + \tfrac{1}{2}a(t - t_0)^2} \tag{2.6}$$

joissa v_0 ja s_0 ovat nopeus ja asema hetkellä t_0.

(b) Kiihtyvyys tunnetaan ajan funktiona eli $a = f(t)$. Nopeuden ja aseman määritys sujuu seuraavasti. Kaavasta (2.2) seuraa $f(t) = dv/dt$, josta saadaan

$$dv = f(t)\,dt \qquad \Rightarrow \qquad \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt \qquad \Rightarrow \qquad v = v_o + \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt \tag{2.7}$$

Suorittamalla edellä integrointi saadaan nopeus v ajan t funktiona. Kaavasta (2.1) saadaan edelleen

$$ds = v\,dt \qquad \Rightarrow \qquad \int_{s_0}^{s} ds = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt \qquad \Rightarrow \qquad s = s_o + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt \tag{2.8}$$

(c) Kiihtyvyys tunnetaan nopeuden funktiona eli $a = g(v)$. Tällöin voidaan edetä seuraavasti. Kaavasta (2.2) seuraa $g(v) = dv/dt$, josta saadaan

$$dt = \frac{dv}{g(v)} \qquad \Rightarrow \qquad \int_{t_0}^{t} dt = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{g(v)} \qquad \Rightarrow \qquad t = t_o + \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{g(v)} \tag{2.9}$$

Suorittamalla edellä integrointi saadaan aika t nopeuden v funktiona. Tuloksesta ratkaistaan nopeus v ajan t funktiona, minkä jälkeen asema s voidaan ratkaista kuten kohdassa (b). Vaihtoehtoisesti aseman s ratkaisemisessa voidaan käyttää kaavaa (2.3), josta tulee $v\,dv = g(v)\,ds$. Nyt voidaan integroida seuraavasti

$$ds = \frac{v}{g(v)}dv \qquad \Rightarrow \qquad \int_{s_0}^{s} ds = \int_{v_0}^{v} \frac{v}{g(v)}dv \qquad \Rightarrow \qquad s = s_o + \int_{v_0}^{v} \frac{v}{g(v)}dv \tag{2.10}$$

(d) Kiihtyvyys tunnetaan aseman funktiona eli $a = h(s)$. Kaavasta (2.3) seuraa nyt $v\,dv = h(s)\,ds$, josta voidaan integroida puolittain

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{s_0}^{s} h(s)\,ds \qquad \Rightarrow \qquad v^2 = v_0^2 + 2\int_{s_0}^{s} h(s)\,ds \tag{2.11}$$

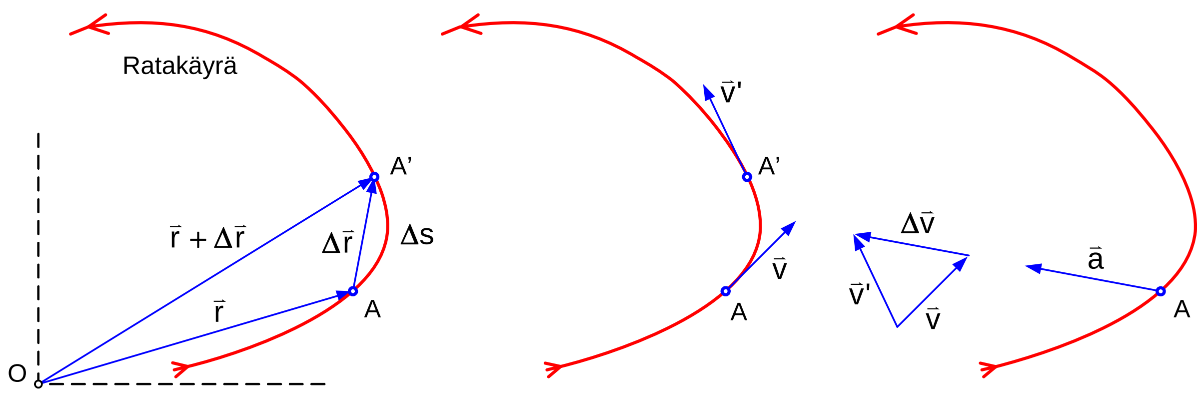
Edellä olevasta voidaan ratkaista nopeus v aseman s funktiona eli $v = k(s)$. Kaavasta (2.1) saadaan $ds = k(s)\,dt$, josta seuraa

$$dt = \frac{ds}{k(s)} \qquad \Rightarrow \qquad \int_{t_0}^{t} dt = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{k(s)} \qquad \Rightarrow \qquad t = t_0 + \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{k(s)} \tag{2.12}$$

Edellä ratkeaa integroimalla aika t aseman s funktiona. Tästä voidaan vielä ratkaista tarvittaessa asema s ajan t funktiona.

2.3 Käyräviivainen liike tasossa

Tarkastellaan partikkelin liikettä pitkin tasokäyrää kuvan 2.3 avulla. Partikkeli on hetkellä t kohdassa A ja sen paikkavektori origon O suhteen on $\bar{r}$. Hetkellä $t + \Delta t$ partikkeli on kohdassa A', jonka paikkavektori on $\bar{r} + \Delta\bar{r}$. $\Delta\bar{r}$ on aikaväliä Δt vastaava siirtymävektori. Rataa pitkin mitattu pisteiden A ja A' välinen etäisyys on Δs.



Kuva 2.3 Käyräviivainen liike tasossa.

Partikkelin keskinopeus pisteiden A ja A' välillä on $\bar{v}_k = \Delta\bar{r}/\Delta t$, joka on siirtymävektorin $\Delta\bar{r}$ suuntainen vektori. Partikkelin keskivauhti pisteiden A ja A' välillä on skalaari $v_k = \Delta s/\Delta t$. Keskinopeusvektorin suuruus lähestyy keskivauhtia, kun $\Delta t \to 0$.

Partikkelin hetkellinen nopeus $\bar{v}$ on sen keskinopeuden $\bar{v}_k$ raja-arvo, kun $\Delta t \to 0$ eli

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}} \tag{2.13}$$

Vektorin $\Delta\vec{r}$ suunta lähestyy ratakäyrän tangentin suuntaa, kun Δt lähestyy nollaa. Tästä seuraa, että $\vec{v}$ on ratakäyrän tangentin suuntaan. Nopeuden $\vec{v}$ suuruus on partikkelin hetkellinen vauhti v, jolle voidaan kirjoittaa

$$v = |\vec{v}| = \left|\frac{ds}{dt}\right| = |\dot{s}| \tag{2.14}$$

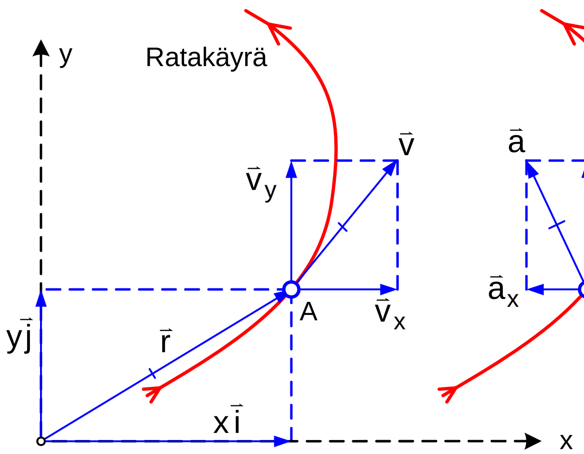
Tarkastellaan edelleen kuvaa 2.3. Kohdassa A partikkelin nopeusvektori on $\vec{v}$ ja kohdassa A’ se on $\vec{v}'$. Pisteiden A ja A’ välillä nopeusvektorin muutos on $\Delta\vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}$. Nopeusvektorin muutos $\Delta\vec{v}$ aiheutuu sen suunnan ja suuruuden muutoksesta. Partikkelin keskikiihtyvyys pisteiden A ja A’ välillä on $\vec{a}_k = \Delta\vec{v}/\Delta t$, joka on nopeuden muutoksen $\Delta\vec{v}$ suuntainen vektori. Partikkelin hetkellinen kiihtyvyys $\vec{a}$ on sen keskikiihtyvyyden $\vec{a}_k$ raja-arvo, kun aikaväli $\Delta t \to 0$ eli

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}} \tag{2.15}$$

Kiihtyvyysvektori $\vec{a}$ kuvaa nopeusvektorin muutosnopeutta. Se sisältää nopeusvektorin suunnan ja suuruuden muutosten vaikutukset. On ilmeistä, että kiihtyvyysvektori osoittaa ratakäyrän kuperalle puolelle, kuten kuvassa 2.3 on esitetty. Muuta ei kiihtyvyysvektorin suunnasta voida yleisesti sanoa.

Kaavojen (2.13) ja (2.15) soveltaminen edellyttää jonkin koordinaatiston käyttöä. Seuraavissa käsitellään erikseen kolmea tavallista koordinaatiston valintaa.

2.4 Tasoliike xy-koordinaatistossa



Kuva 2.4 xy-koordinaatisto.

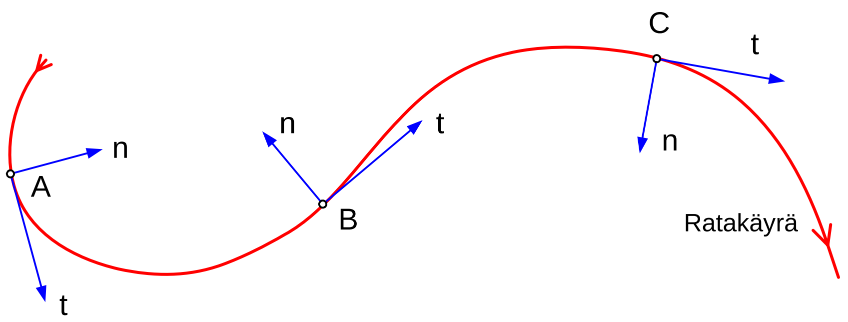
xy-koordinaatistossa partikkelin paikkavektori $\vec{r}$ voidaan esittää yksikkövektoreiden $\vec{i}$ ja $\vec{j}$ sekä pisteen A koordinaattien x ja y avulla kuvan 2.4 mukaisesti. Saadaan siis

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{r} &= x\vec{i} + y\vec{j} \\ \vec{v} &= \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} \\ \vec{a} &= \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} \end{aligned}} \tag{2.16}$$

Kaavoissa (2.16) ei yksikkövektoreita tarvinnut derivoida, koska niiden suuruus ja suunta ovat koko ajan samat eli ne ovat vakiovektoreita. Kuvassa 2.4 on esitetty myös nopeuden $\bar{v}$ ja kiihtyvyyden $\bar{a}$ komponentit. Nopeuden ja kiihtyvyyden komponentit ovat $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$, $a_x = \ddot{x}$, $a_y = \ddot{y}$ ja niiden suuruudet ovat $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ ja $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

2.5 Tasoliike tn-koordinaatistossa

tn-koordinaatiston akselit ovat ratakäyrän tangentin ja päänormaalin suuntaan. Kullakin ratakäyrän pisteellä on oma koordinaatistonsa kuvan 2.5 mukaisesti. n-akseli osoittaa aina ratakäyrän kaarevuuskeskiöön. Nopeuden $\bar{v}$ ja kiihtyvyyden $\bar{a}$ kom-



Kuva 2.5 tn-koordinaatisto.

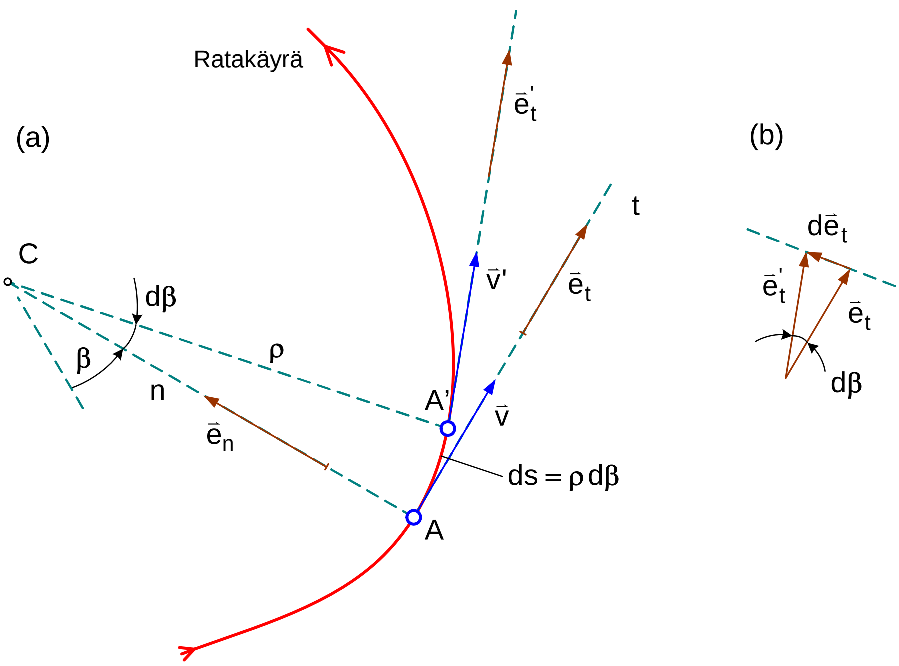
ponentit voidaan lausua tn-koordinaatistossa. Määritellään yksikkövektorit $\bar{e}_t$ ja $\bar{e}_n$ t- ja n-suuntiin kuvan 2.6 mukaisesti, jossa ne liittyvät ratakäyrän pisteeseen A. Aikavälillä dt partikkeli liikkuu matkan ds pisteeseen A’, johon liittyvät yksikkövektorit $\bar{e}_t^{'}$ ja $\bar{e}_n^{'}$. Kulma β on vertailusuunnasta mitattu kulma-asema ja $d\beta$ sen lisäys välillä AA’. Kun ratakäyrän kaarevuussäde on ρ, on $ds = \rho d\beta$ ja nopeuden suuruus $v = ds/dt = \rho d\beta/dt$. Nopeusvektori $\bar{v}$ on siis

$$\boxed{\bar{v} = v\,\bar{e}_t = \rho\dot{\beta}\,\bar{e}_t} \tag{2.17}$$

Määritelmän mukaan kiihtyvyysvektori on $\bar{a} = d\bar{v}/dt$. Kaavasta (2.17) seuraa

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d(v\,\bar{e}_t)}{dt} = v\,\dot{\bar{e}}_t + \dot{v}\,\bar{e}_t \tag{2.18}$$

Yksikkövektorin $\bar{e}_t$ derivaatta $\dot{\bar{e}}_t$ ei ole nolla, sillä sen suunta ei ole vakio. Derivaatta $\dot{\bar{e}}_t$ saadaan kuvasta 2.6 (b), jossa on pisteisiin A ja A’ liittyvät yksikkövektorit $\bar{e}_t$ ja $\bar{e}_t^{'}$ sekä muutos $d\bar{e}_t$. Muutoksen $d\bar{e}_t$ suuruus on $|d\bar{e}_t| = |\bar{e}_t|d\beta = d\beta$ ja se tapahtuu vektorin $\bar{e}_n$ suuntaan, joten $d\bar{e}_t = d\beta\,\bar{e}_n$ ja



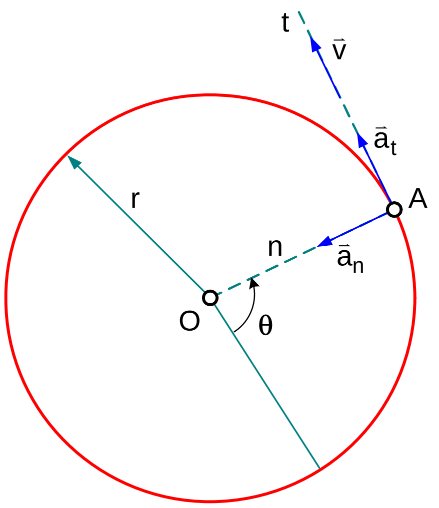
Kuva 2.6 Liike tn-koordinaatistossa.

$$\frac{d\bar{e}_t}{d\beta} = \frac{d\bar{e}_t}{dt}\frac{dt}{d\beta} = \bar{e}_n \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\bar{e}}_t = \dot{\beta}\,\bar{e}_n \tag{2.19}$$

Aikaisemmin saatiin tulos $v = \rho\dot{\beta}$, joten kaavojen (2.18) ja (2.19) perusteella saadaan

$$\boxed{\bar{a} = \dot{v}\,\bar{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\bar{e}_n} \tag{2.20}$$

jossa $a_t = \dot{v} = \ddot{s}$, $a_n = v^2/\rho = \rho\dot{\beta}^2 = v\dot{\beta}$ ja $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$. Normaalin suuntainen kiihtyvyyskomponentti a_n osoittaa aina ratakäyrän kuperalle puolelle.



Kuva 2.7 Ympyräliike.

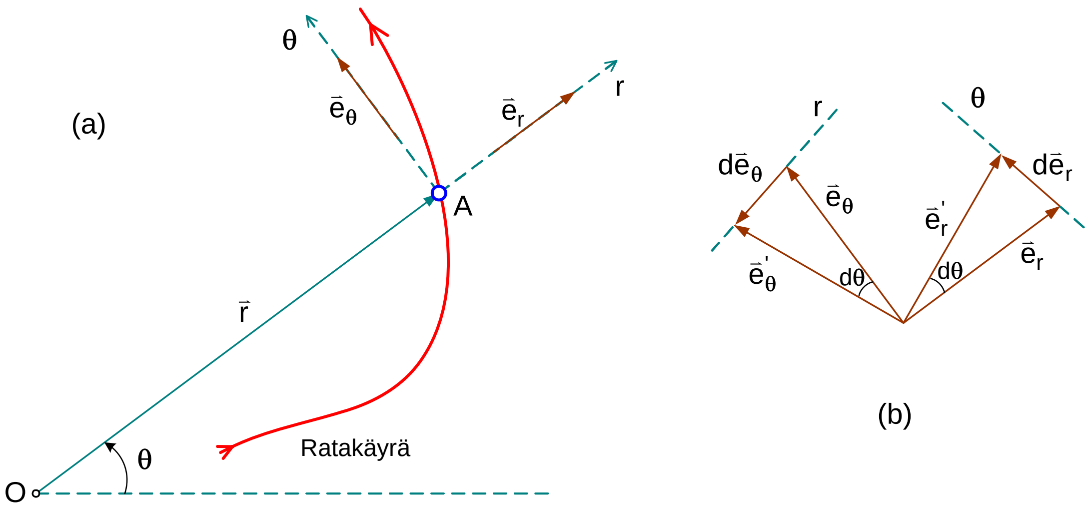
Ympyräliike on käyräviivaisen tasoliikkeen tärkeä erityistapaus. Kaarevuussäde on tällöin vakio, $\rho = r$ ja kulma β korvataan jostakin sopivasta vertailusäteestä mitatulla kulmakoordinaatilla θ kuvan 2.7 mukaisesti. Kaavoista (2.17) ja (2.20) seuraa ympyräliikkeelle kaavat

$$\boxed{\begin{aligned} v &= r\dot{\theta} = r\omega \\ a_t &= \dot{v} = r\ddot{\theta} = r\dot{\omega} = r\alpha \\ a_n &= v^2/r = r\dot{\theta}^2 = r\omega^2 \end{aligned}} \tag{2.21}$$

ω on ympyräliikkeen kulmanopeus ja $\alpha = \dot{\omega}$ kulmakiihtyvyys.

2.6 Tasoliike napakoordinaatistossa

Napakoordinaatistossa partikkelin asema annetaan napasäteen r ja napakulman θ avulla kuvan 2.8 (a) mukaisesti. Koordinaattisuuntien yksikkövektorit ovat $\bar{e}_r$ ja $\bar{e}_\theta$.



Kuva 2.8 Napakoordinaatisto.

Partikkelin asema on $\bar{r} = r\bar{e}_r$. Nopeus on $\bar{v} = \dot{\bar{r}}$ ja kiihtyvyys $\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{r}}$. Derivoinnin suorittamiseksi on tunnettava vektoreiden $\bar{e}_r$ ja $\bar{e}_\theta$ aikaderivaatat, jotka eivät ole nollia, sillä niiden suunta muuttuu ratakäyrää pitkin liikuttaessa. Aikavälillä dt vektorit $\bar{e}_r$ ja $\bar{e}_\theta$ kiertyvät kulman $d\theta$ kuvan 2.8 (b) mukaisesti, jolloin niistä tulevat vektorit $\bar{e}_r^{\,'}$ ja $\bar{e}_\theta^{\,'}$. Muutosvektori $d\bar{e}_r$ on positiiviseen θ-suuntaan ja muutosvektori $d\bar{e}_\theta$ negatiiviseen r-suuntaan. Kummankin muutosvektorin suuruus on $1\cdot d\theta$. Tästä seuraa, että $d\bar{e}_r = d\theta\,\bar{e}_\theta$ ja $d\bar{e}_\theta = -d\theta\,\bar{e}_r$. Edelleen saadaan

$$\frac{d\bar{e}_r}{d\theta} = \frac{d\bar{e}_r}{dt}\frac{dt}{d\theta} = \bar{e}_\theta \qquad \text{ja} \qquad \frac{d\bar{e}_\theta}{d\theta} = \frac{d\bar{e}_\theta}{dt}\frac{dt}{d\theta} = -\bar{e}_r \tag{2.22}$$

joista seuraa yksikkövektoreiden derivaatoille kaavat

$$\dot{\bar{e}}_r = \dot{\theta}\,\bar{e}_\theta \qquad \text{ja} \qquad \dot{\bar{e}}_\theta = -\dot{\theta}\,\bar{e}_r \tag{2.23}$$

Nopeudelle $\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{r}\,\bar{e}_r + r\,\dot{\bar{e}}_r$ saadaan nyt (2.23) perusteella

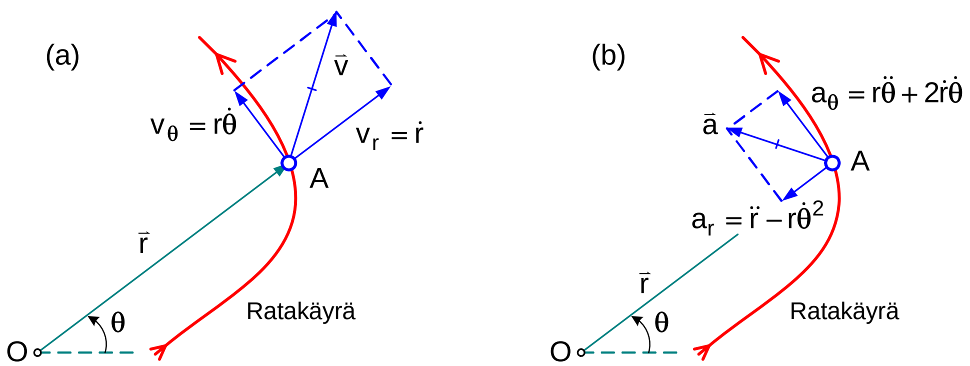
$$\boxed{\bar{v} = \dot{r}\,\bar{e}_r + r\dot{\theta}\,\bar{e}_\theta} \tag{2.24}$$

jossa $v_r = \dot{r}$, $v_\theta = r\dot{\theta}$ ja $v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$. Nopeuskomponentti v_r aiheutuu säteen r muutoksesta ja nopeuskomponentti v_θ säteen r kääntymisestä.

Kiihtyvyys $\vec{a}$ saadaan derivoimalla nopeuden $\vec{v}$ lauseke. Aluksi saadaan $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (\ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\,\dot{\vec{e}}_r) + (\dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\,\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\,\dot{\theta}\,\dot{\vec{e}}_\theta)$, josta seuraa kaavan (2.23) avulla

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\vec{e}_r + (r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta})\,\vec{e}_\theta} \tag{2.25}$$

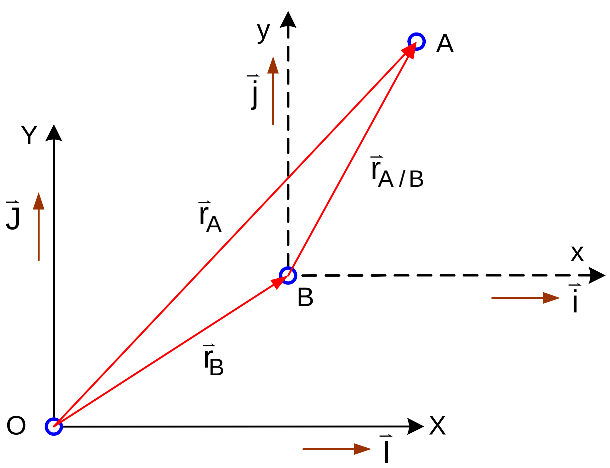
Kiihtyvyyden komponentit ja suuruus ovat $a_r = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2$, $a_\theta = r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}$ ja $a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$. Kuvassa 2.9 on havainnollistettu nopeuden ja kiihtyvyyden komponentteja napakoordinaatistossa.



Kuva 2.9 Nopeus ja kiihtyvyys napakoordinaatistossa.

2.7 Suhteellinen liike

Edellä partikkelin liikettä tarkasteltiin koordinaatistoissa, jotka ajateltiin kiinteiksi. Kiinteässä koordinaatistossa annettua partikkelin asemaa, nopeutta tai kiihtyvyyttä sanotaan absoluuttiseksi. Aina ei ole kuitenkaan mahdollista tai kätevää käyttää kiinteää koordinaatistoa liikkeen tarkasteluun. Monissa sovelluksissa on yksinkertaisempaa tarkastella liikettä tietyllä tavalla liikkuvassa koordinaatistossa. Liikkuvan koordinaatiston suhteen annettua kinematiikan suuretta sanotaan suhteelliseksi. Absoluuttiset suureet saadaan, kun tunnetaan suhteelliset suureet ja niiden antamiseen käytetyn koordinaatiston liike kiinteään koordinaatistoon nähden.



Kuva 2.10 Suhteellinen liike.

Tässä kappaleessa tarkastellaan kiinteän koordinaatiston suhteen translaatiossa olevaa liikkuvaa koordinaatistoa. Rotaatiossa olevaa koordinaatistoa tutkitaan myöhemmin jäykän kappaleen kinematiikan yhteydessä. Lisäksi tässä rajoitutaan tasoliikkeen tarkasteluun. Kuvassa 2.10 on kaksi partikkelia A ja B, jotka ovat mielivaltaisissa tasoliikkeissä kiinteässä XY-tasossa. Kiinnitetään partikkeliin B xy-koordinaatisto, joka liikkuu sen mukana akseliensa suunnat säilyttäen ja tutkitaan partikkelin A liikettä tässä koordinaatistossa. Partikkelin A paikkavektori xy-koordinaatistossa on $\vec{r}_{A/B} = x\vec{i} + y\vec{j}$, jossa $\vec{i}$ ja $\vec{j}$ ovat xy-koordinaatiston yksikkövektorit ja x ja y partikkelin A koordinaatit xy-koordinaatistossa. Partikkelien A ja B absoluuttiset paikkavektorit XY-koordinaatistossa ovat $\vec{r}_A$ ja $\vec{r}_B$. Paikkavektoreiden välillä on yhteys

$$\boxed{\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{A/B}} \qquad (2.26)$$

Derivoimalla yhtälöä (2.26) puolittain ajan suhteen saadaan $\dot{\vec{r}}_A = \dot{\vec{r}}_B + \dot{\vec{r}}_{A/B} \quad \Rightarrow$

$$\boxed{\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}} \qquad (2.27)$$

jossa $\dot{\vec{r}}_{A/B} = \vec{v}_{A/B} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$ on partikkelin A nopeus partikkeliin B nähden. Yksikkövektoreiden $\vec{i}$ ja $\vec{j}$ aikaderivaatat ovat nollia, koska niiden suuruus ja suunta ovat vakioita. Derivoimalla uudelleen ajan suhteen saadaan $\ddot{\vec{r}}_A = \ddot{\vec{r}}_B + \ddot{\vec{r}}_{A/B} \quad \Rightarrow$

$$\boxed{\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}} \qquad (2.28)$$

jossa $\ddot{\vec{r}}_{A/B} = \vec{a}_{A/B} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$ on partikkelin A kiihtyvyys partikkeliin B nähden.

Suhteellisen liikkeen kaavat pätevät muissakin koordinaatistoissa, vaikka ne tässä johdettiin tasossa karteesisia koordinaatteja käyttäen. Jos liikkuvan koordinaatiston absoluuttinen nopeus $\vec{v}_B$ on vakio, on kiihtyvyys $\vec{a}_B = \vec{0}$ ja $\vec{a}_A = \vec{a}_{A/B}$. Tämä tarkoittaa sitä, että kiihtyvyys on sama kiinteässä ja liikkuvassa koordinaatistossa. Tästä seuraa, että Newtonin II laki $\vec{F} = m\vec{a}$ pätee kiinteän koordinaatiston lisäksi myös tasaisella nopeudella translaatiossa olevassa koordinaatistossa.

