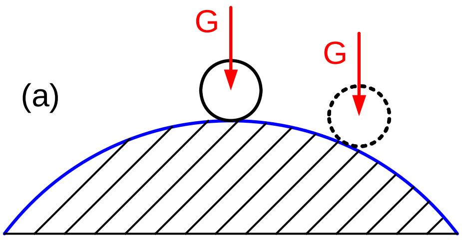
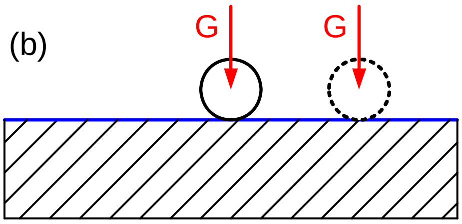
STABIILIUSTEORIAN PERUSKÄSITTEITÄ

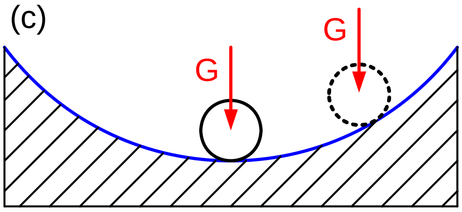
TASAPAINON LAJIT



Labiili eli horjuva**.** Pienikin poikkeama tasapainoasemasta aiheuttaa tasapainoasemasta etääntymisen.

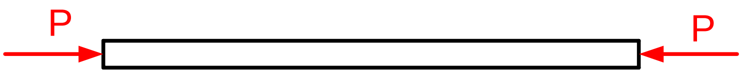


Indifferentti eli epämääräinen. Viereisetkin asemat ovat tasapainoasemia.



Stabiili eli vakaa. Systeemi palaa tähän tasapainoasemaan, vaikka sitä hieman poikkeutetaan siitä.

Keskeisesti puristetun sauvan **suora tasapainoasema on stabiili vain puristuskuormituksen kriittiseen arvoon** P_n **saakka**. Kuormituksen saavuttaessa kriittisen arvon, muuttuu tasapaino indifferentiksi. Tätä suuremmilla kuormituksilla suora asema on labiili. Tällöin sivulle taipunut muoto on stabiili.



STAATTINEN KRITEERI

Kun halutaan määrittää **nurjahduskuormituksen** P_n **arvo**, voidaan tarkastella sauvaa indifferentissä tasapainoasemassa hieman sivulle taipuneena ja soveltaa tilanteeseen statiikan tasapainoehtoja ja lujuusopin staattisten taipumien teoriaa. Staattisella kriteerillä **ei saada selville nurjahdukseen liittyviä taipumia**, vain nurjahdusmuoto selviää.

EULERIN NURJAHDUSTAPAUKSET

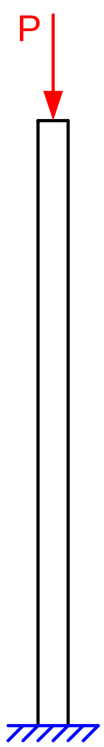
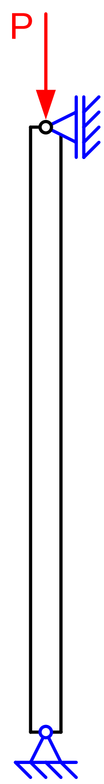
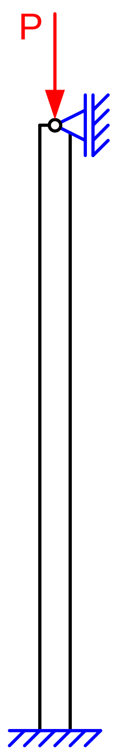
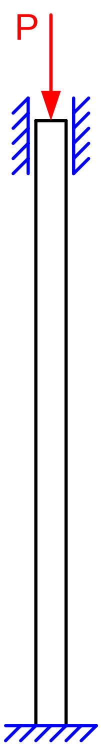
Sauvan oletetaan olevan on suora ja tasapaksu.

Nurjahdusvoima

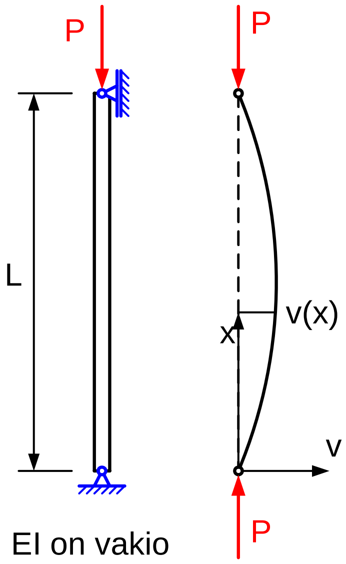
$$\boxed{P_n = \frac{\pi^2 EI}{L_n^2} = \mu \cdot \frac{\pi^2 EI}{L^2}}$$

E kimmomoduuli $I = I_{min}$ neliömomentti L sauvan pituus

L_n nurjahduspituus μ jäykistyskerroin

N:o	I	II	III	IV
				
Tuenta	jäykkä - vapaa	nivel - nivel	jäykkä - nivel	jäykkä - jäykkä
L_n	2L	L	0,699L	0,5L
μ	0,25	1	2,05	4

EULER II, NURJAHDUSVOIMA



Kimmoviivan differentiaaliyhtälöstä seuraa

$$EI\,v''(x) = -M_t(x) = -P\,v(x) \qquad (1)$$

Merkitään $k^2 = \dfrac{P}{EI}$, jolloin yhtälöstä (1) tulee

$$\boxed{v'' + k^2 v = 0} \qquad (2)$$

Yhtälö (2) on **nurjahduksen differentiaaliyhtälö** (Euler II). Yhtälön (2) yleinen **ratkaisu** on tunnetusti

$$v(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$$ A ja B ovat vakioita

Reunaehdot ovat $v(0) = 0$ ja $v(L) = 0$. Ensimmäisestä seuraa tulos $A = 0$ ja toisesta vaatimus $B\sin(kL) = 0$. Tapaus $B = 0$ vastaa suoraa tasapainoasemaa, joten on oltava

$$\sin(kL) = 0 \quad \Rightarrow \quad kL = \sqrt{\frac{P}{EI}}\,L = n\pi \quad n = 1, 2, \cdots \quad \Rightarrow$$

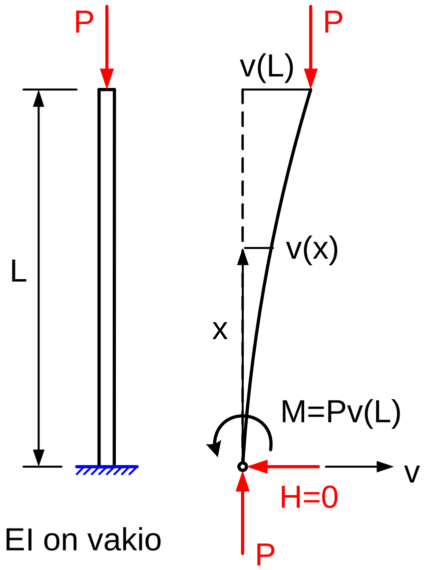
$$P = P_n = n^2\frac{\pi^2 EI}{L^2}$$ pienin voima saadaan, kun $n = 1 \;\Rightarrow$

Nurjahdusvoima $$\boxed{P_n = \frac{\pi^2 EI}{L^2}}$$

Nurjahdusmuodoiksi tulevat sinifunktiot $$\boxed{v(x) = B\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

Alhaisinta nurjahdusvoimaa vastaa yllä olevan kuvan siniaallon puolikas. Amplitudia B ei voi määrittää pelkästään staattista kriteeriä käyttäen.

EULER I, NURJAHDUSVOIMA



Kimmoviivan differentiaaliyhtälöstä seuraa

$$EI\,v''(x) = -P\,v(x) + P\,v(L) \qquad (1)$$

Merkitään $k^2 = \dfrac{P}{EI}$, jolloin yhtälöstä (1) tulee

$$\boxed{v'' + k^2 v = k^2 v(L)} \qquad (2)$$

Yhtälö (2) on **nurjahduksen differentiaaliyhtälö** (Euler I). Yhtälön (2) yleinen **ratkaisu** on tunnetusti muotoa

$$v(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx) + v(L) \qquad \text{A ja B ovat vakioita} \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \quad v'(x) = -k\,A\sin(kx) + k\,B\cos(kx)$$

Reunaehdot ovat $v(0) = 0$ ja $v'(0) = 0$. Ensimmäisestä ehdosta seuraa yhteys $A = -v(L)$ ja toisesta ehdosta tulos $B = 0$. Yhtälöstä (3) seuraa nyt vaatimus

$$v(L) = A\cos(kL) + v(L) \quad \Rightarrow \quad \cos(kL) = 0$$

$$\Rightarrow \quad kL = \sqrt{\frac{P}{EI}}\,L = \frac{n\pi}{2} \qquad n = 1, 3, \cdots \quad \Rightarrow \quad P = P_n = n^2\,\frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$

Nurjahdusvoimaksi tulee arvolla $n = 1$

$$\boxed{P_n = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}}$$

Alimmaksi nurjahdusmuodoksi tulee

$$\boxed{v(x) = A\left[\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) - 1\right]}$$

NURJAHDUSJÄNNITYS

Eulerin **nurjahdusjännitys** $\sigma_n = \dfrac{P_n}{A} = \dfrac{\pi^2 EI}{L_n^2 A}$

Neliösäde nurjahdustason normaalin suhteen on $i = \sqrt{\dfrac{I}{A}}$

Redusoitu **hoikkuusluku** $\lambda_n = \dfrac{L_n}{i}$ kuvaa sauvan hoikkuutta ja tuennan jäykkyyttä.

$$\boxed{\sigma_n = \frac{\pi^2 E}{\lambda_n^2}}$$

$\lambda_n \sigma_n -$koordinaatistossa Eulerin hyperbeli.

$$\boxed{\sigma_n \leq \sigma_{-p} \quad \Rightarrow \quad \lambda_n \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{-p}}} = \lambda_{nr}}$$

Rajahoikkuusluku λ_{nr} on materiaalivakio.

Teräksen S235 vauriokäyrä