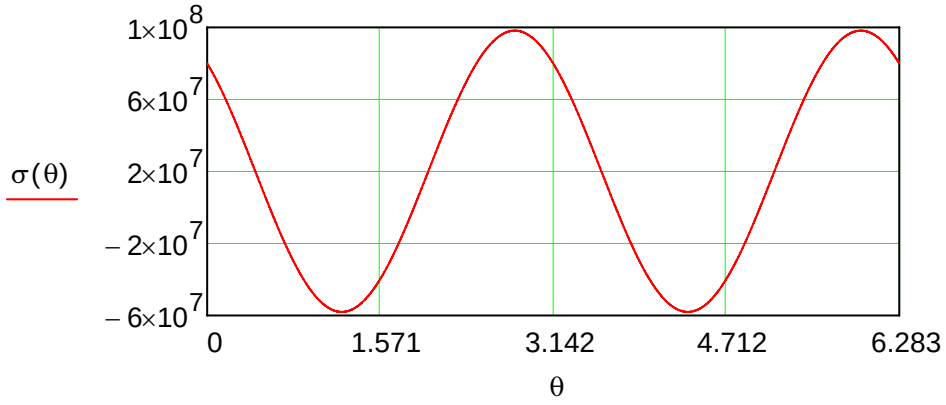
I.3. Levyrakenteen pisteessä on tasojännitystilan $\sigma_x = 80\ \text{MPa}$, $\sigma_y = -40\ \text{MPa}$ ja $\tau_{xy} = -50\ \text{MPa}$. Kirjoita mielivaltaisen suunnan θ normaalijännityksen $\sigma_{x'}$ ja leikkausjännityksen $\tau_{x'y'}$ lausekkeet kulman θ funktiona. Piirrä jännitysten $\sigma_{x'}$ ja $\tau_{x'y'}$ kuvaajat Mathcadilla karteesiseen koordinaatistoon, kun $\theta \in [0, 2\pi]$. Piirrä jännitysten $\sigma_{x'}$ ja $\tau_{x'y'}$ kuvaajat Mathcadilla myös napakoordinaatistoon ja totea kuvaajista jännitysten ääriarvot ja niiden esiintymissuunnat sekä näiden välinen kohtisuoruus. Totea myös leikkausjännitysten nollakohtia vastaavat suunnat. Laske pääjännitykset ja -suunnat sekä leikkausjännityksen suurin arvo xy-tasossa ja sen esiintymissuunta.

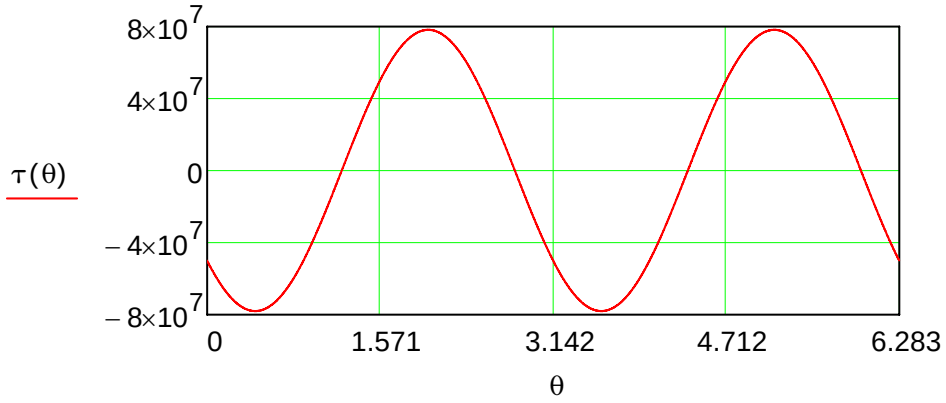
Ratkaisu:

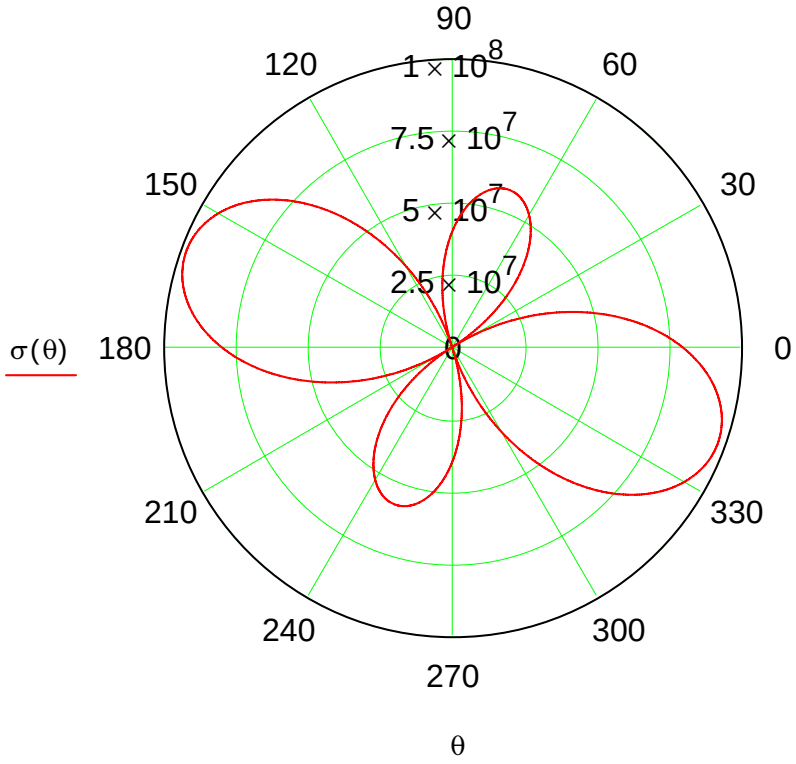
$$\text{MPa} := \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \qquad \sigma_x := 80\cdot\text{MPa} \qquad \sigma_y := -40\cdot\text{MPa} \qquad \tau_{xy} := -50\cdot\text{MPa}$$

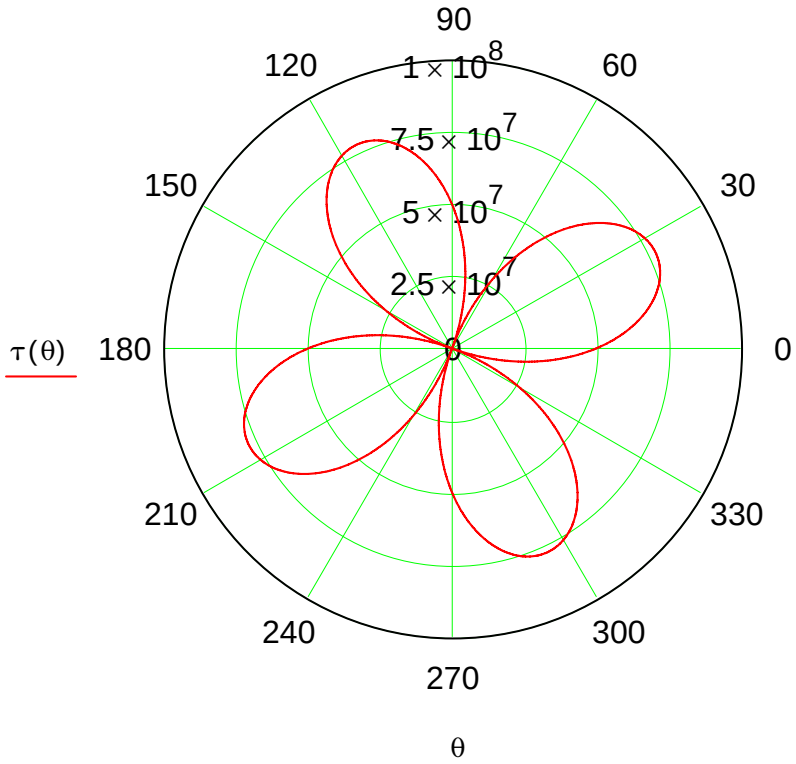
$$\sigma(\theta) := \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cdot\cos(2\cdot\theta) + \tau_{xy}\cdot\sin(2\cdot\theta)$$



$$\tau(\theta) := -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cdot\sin(2\cdot\theta) + \tau_{xy}\cdot\cos(2\cdot\theta)$$




90
120
60
150
30
180
0
210
330
240
300
270
1 × 10^8
7.5 × 10^7
5 × 10^7
2.5 × 10^7
0
σ(θ)
θ


90
120
60
150
30
180
0
210
330
240
300
270
1 × 10^8
7.5 × 10^7
5 × 10^7
2.5 × 10^7
0
τ(θ)
θ

$$\sigma_k := \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \qquad R := \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^{\,2}} \qquad \sigma_1 := \sigma_k + R \qquad \sigma_2 := \sigma_k - R$$

$\sigma_k = 20\,\text{MPa}$ $R = 78.102\,\text{MPa}$

Pääjännitykset: $\sigma_1 = 98.102\,\text{MPa}$ $\sigma_2 = -58.102\,\text{MPa}$

$$\theta_r := \frac{1}{2}\cdot\text{atan}\left(\frac{2\cdot\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) \qquad \theta_1 := \theta_r + \text{if}\left(\tau_{xy}\cdot\sin(2\cdot\theta_r) \geq 0\,, 0\,, \frac{\pi}{2}\right) \qquad \theta_2 := \theta_1 + \frac{\pi}{2}$$

Pääsuunnat: $\theta_1 = -19.903\,\text{deg}$ $\theta_2 = 70.097\,\text{deg}$

$$\tau_{max} := R \qquad \psi := \theta_1 - \frac{\pi}{4}$$

Leikkausjännnityksen maksimi xy-tasossa:

$\tau_{max} = 78.102\,\text{MPa}$ $\psi = -64.903\,\text{deg}$