

## 3 KEHÄRAKENTEET

### 3.1 Yleistä kehärakenteista

Kehärakenteen osina olevat palkit voivat ottaa vastaan kaikkia kannattimen rasituksia, jotka ovat normaali- ja leikkausvoima sekä taivutus- ja vääntömomentti. Kehärakenteessa taivutuksella ja/tai väännöllä on oleellinen merkitys ainakin rakenteen jossakin osassa. Kehärakenteen laskentamallissa on siis momenttien ja leikkausvoimien kuormittamia palkkeja, mutta mukana voi myös olla vain normaalivoimaa vastaanottavia sauvoja. Yleensä kehärakenteen palkkien oletetaan kiinnittyvän toisiinsa jäykästi kehän nurkissa. Tällöin palkkien päät eivät kierry toisiinsa nähden vaan kokevat saman nurkkaan liittyvän rotaation. Kehärakennemallissa voi joskus esiintyä sisäisiä niveliä tai luisteja. Niillä voidaan mallintaa palkin päät kiinnityksiä, jotka eivät ota merkittävästi vastaan taivutusmomenttia tai leikkausvoimaa tietyssä suunnassa.

Kehärakenteen palkkien geometria mallinnetaan niiden pintakeskiöviivoilla, jotka liittyvät toisiinsa kehän nurkissa joko suoraan tai tietyllä epäkeskeisyydellä. Palkit ovat yleensä tasapaksuja, jolloin niille tarvitaan kannattimen teorian mukaiset poikkileikkauksen pintasuureet. Muuttuvan poikkileikkauksen omaavan kannattimen käsittely ei onnistu kovin yleisesti peruslukuopilla, mutta elementtimenetelmässä se voidaan mallintaa halutulla tarkkuudella jakamalla palkki riittävän moneen tasapaksuun osaan. Kehärakenteen kineettinen kuormitus koostuu palkkeihin tai nurkkiin kohdistuvista pistemäisistä voima- ja momenttikuormituksista sekä palkkeihin kohdistuvista viivakuormituksista ja lämpötilakuormituksista. Kinemaattinen kuormitus sisältää tukipisteiden tunnetut translaatio- ja rotaatiosiirtymät. Laskennan tuloksena saadaan palkkien rasituskuvat ja vastaavat jännitykset sekä nurkkien translaatio- ja rotaatiosiirtymät ja palkkien kimmoviivojen lausekkeet.

Kolmiulotteista kehärakennetta sanotaan avaruuskehäksi. Jos kehärakenteen kaikkien palkkien pintakeskiöviivat ja niiden poikkileikkausten toinen pääneliöakseli ovat samassa tasossa sekä kuormitus ja tuenta ovat sellaiset, että palkkien kimmoviivat muodonmuutosten jälkeenkin pysyvät tässä tasossa, sanotaan kyseistä kehärakennetta tasokehäksi. Jos edellä kuvattua tasorakennetta kuormitetaan ja tuetaan vain sen normaalin suunnasta, sanotaan sitä arinaksi. Arinaa voidaan elementtimenetelmässä käsitellä avaruuskehän elementillä, mutta sitä varten on kehitetty myös omia arinan erityispiirteet huomioon ottavia elementtejä.

Tavallisesti kehärakenteen nurkkiin syntyy kuormituksen vaikutuksesta sekä translaatiosiirtymiä että rotaatiosiirtymiä. Joissakin tapauksissa nurkkiin tulee translaatiosiirtymiä vain normaalivoimista johtuvien pituudenmuutosten takia. Koska kehässä palkkien pituudenmuutokset ovat yleensä niiden taipumiin verrattuna pieniä, ei tehdä suurta virhettä, vaikka ne oletetaan nolliksi. Tällä oletuksella kyseessä oleva kehä on nurkistaan siirtymätön ja sen nurkkiin voi syntyä vain rotaatioita. Nurkistaan siirtymätön kehä on harvinainen erityistapaus ja yleensä kehät ovat siirtyvänurkkaisia. Tässä

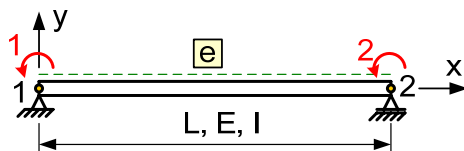
tarkastellaan kuitenkin nurkista siirtymätöntä kehärakennetta, koska vastaavalla palkkielementillä tarvitaan vain kaksi rotaatiovapausastetta, joten siitä on yksinkertaisinta aloittaa palkkielementtien teorian kehittäminen.

Ristikkorakenteiden yhteydessä esitetty suoran elementtimenetelmän formulointi soveltuu sellaisenaan kehärakenteisiin. Uutena piirteenä on rotaatiovapausasteiden käyttö solmumittauksessa. Laskennassa tarvitaan yleisen tasokehän ja avaruuskehän käsittelyyn sopivat elementit ja on tunnettava niiden jäykkyysmatriisien ja ekvivalenttien solmukuormitusvektoreiden lausekkeet. Palkkielementit ryhmitellään sen mukaan, miten ne ottavat huomioon leikkausvoiman vaikutuksen taipumaan. Hoikan palkin elementti ei ota leikkausvoimaa huomioon lainkaan ja korkean palkin elementti ottaa sen huomioon likimääräisesti poikkileikkauksen leikkauskertoimen avulla. Leikkausvoiman vaikutus on yleensä pieni. Tässä käsitellään yksityiskohtaisesti vain hoikan palkin elementtejä ja korkean palkin elementin tulokset esitetään ilman johtoa.

## 3.2 Tasokehä

### 3.2.1 Kahden vapausasteen palkkielementti

Tarkastellaan nurkista siirtymättömän tasokehän palkkielementtiä. Tätä elementtiä käytettäessä solmut voivat sijaita vain kehän nurkissa ja niillä on yksi rotaatiovapausaste. Kyseessä on kuvan 3.1 kaksisolmuinen kahden vapausasteen palkkielementti, joka on tuettu päistään niveltuennoilla siirtymättömäksi.



Kuva 3.1 Palkkielementti.

Elementti on suora ja tasapaksu palkki, jonka pientä pituudenmuutosta ei oteta huomioon. Lokaalin xyz-koordinaatiston origo on alkusolmussa ja y ja z ovat poikkileikkauksen pääneliöakselit. Kuormituksesta syntyvä taivutusmomentti vaikuttaa lokaalin z-akselin ympäri ja pääneliömomentti tämän akselin suhteen on I. Kuvassa 3.1 on elementin solmumittaus, jossa solmusuureet ovat rotaatio ja momentti z-akselin ympäri elementin päissä olevissa solmuissa. Lokaalikoordinaatiston solmusiirtymävektori  $\{\underline{u}\}$  ja solmuvoimavektori  $\{\underline{f}\}$  ovat

$$\{\underline{f}\} = \begin{Bmatrix} \underline{m}^1 & \underline{m}^2 \end{Bmatrix} \quad \{\underline{u}\} = \begin{Bmatrix} \underline{\varphi}^1 & \underline{\varphi}^2 \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

Merkinnöistä on jätetty mittauksen suuntaan viittaava alaindeksi z pois, koska sekaannuksen vaaraa ei ole. Solmusuureiden positiivinen suunta on vastapäivään. Palkkiteoriassa taivutusmomentti on positiivinen, kun se venyttää positiivista y-arvoa vastaavaa reunaa palkista ja y-akselin suunta on alaspäin. Elementtimenetelmässä ei kannata käyttää tällaista koordinaatistoa, vaan y-akselin suunta on kuvan 3.1 mukaisesti ylöspäin. Tällöin taivutusmomentti on positiivinen, kun se venyttää palkin ylä-

reunaa. Solmuvoimavektorin komponenteista momentti  $\underline{m}^1$  on palkin alkupään taivutusmomentti, mutta momentti  $\underline{m}^2$  on sen loppupään taivutusmomentin vastasuure.

Elementin perusyhtälö  $[\underline{k}] \{\underline{u}\} = \{\underline{f}\}$  on auki kirjoitettuna muotoa

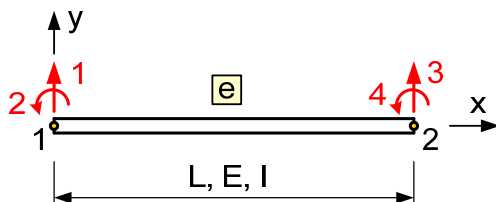
$$\begin{bmatrix} \underline{m}^1 \\ \underline{m}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\phi}^1 \\ \underline{\phi}^2 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Jäykkyysmatriisin  $[\underline{k}]$  sarakkeiden alkiot saadaan ykkössiirtymämenetelmällä. Kun elementti pakotetaan siirtymätilaan  $\{\underline{u}\} = \{1 \ 0\}$ , siihen tarvittavat momentit ovat kuvan 3.3 taulukon tapauksen 5 mukaan  $k_{11} = 4EI/L$  ja  $k_{21} = 2EI/L$ . Siirtymätilaa  $\{\underline{u}\} = \{0 \ 1\}$  vastaavat momentit ovat puolestaan tapauksen 7 mukaan  $k_{12} = 2EI/L$  ja  $k_{22} = 4EI/L$ . Elementin jäykkyysmatriisi on näin ollen

$$[\underline{k}] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Jotta kuvan 3.1 elementtiä voitaisiin käyttää, tarvitaan jäykkyysmatriisin (3.3) lisäksi ekvivalenttien solmukuormitusten kaavat elementtikuormitusten käsittelemiseksi. Tiettyyn kuormitukseen liittyvät ekvivalenttiset solmukuormitukset ovat vastaavan vapausasteistaan kiinnitetyn palkin tukireaktioiden vastasuureet. Tarvitaan siis jäykän kiinnityksen tukimomentteja, jotka tunnetaan kaikille tavallisille kuormituksille. Kuvassa 3.3 on taulukko, jossa on muutamia palkin kuormitustapauksia ja niihin liittyvät tukimomentit. Taulukossa on myös pystysuuntaiset tukivoimat, koska niitä tarvitaan jatkossa palkkielementeille, joissa y-akselin suuntaiset siirtymät ovat mukana solmumittauksessa. Muita kuormitustapauksia on helposti löydettävissä kirjallisuudesta.

### 3.2.2 Neljän vapausasteen palkkielementti



Kuva 3.2 Palkkielementti.

Kun kuvan 3.1 elementin solmuihin lisätään y-akselin suuntaiset siirtymämittaukset, saadaan neljän vapausasteen palkkielementti kuvan 3.2 mukaisesti. Vastaavat lokaalikoordinaatiston solmusiirtymä- ja solmuvoimavektori ovat

$$\begin{aligned} \{\underline{u}\} &= \left\{ \underline{u}_y^1 \quad \underline{\phi}^1 \quad \underline{u}_y^2 \quad \underline{\phi}^2 \right\} \\ \{\underline{f}\} &= \left\{ \underline{f}_y^1 \quad \underline{m}^1 \quad \underline{f}_y^2 \quad \underline{m}^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Kaavan (3.4) vektoreita vastaava elementin jäykkyysmatriisi  $[\underline{k}]$  voidaan johtaa yk-

kössiirtymäperiaatteella. Elementin perusyhtälö  $[k] \{u\} = \{f\}$  on auki kirjoitettuna

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u}_y^1 \\ \underline{\phi}^1 \\ \underline{u}_y^2 \\ \underline{\phi}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{f}_y^1 \\ \underline{m}^1 \\ \underline{f}_y^2 \\ \underline{m}^2 \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

Kun elementti pakotetaan siirtymätilaan  $\{u\} = \{1 \ 0 \ 0 \ 0\}$ , siihen tarvittavat solmuvoimat ovat kuvan 3.3 taulukon tapauksen 4 mukaan  $k_{11} = 12EI/L^3$ ,  $k_{21} = 6EI/L^2$ ,  $k_{31} = -12EI/L^3$  ja  $k_{41} = 6EI/L^2$ . Muita ykkössiirtymätilanteita vastaavat solmuvoimat

	$\bar{r}^1$	$\bar{r}^2$	$\bar{r}^3$	$\bar{r}^4$
① 	$\frac{b^2(3a+b)}{L^3} F$	$\frac{ab^2}{L^2} F$	$\frac{a^2(a+3b)}{L^3} F$	$-\frac{a^2b}{L^2} F$
② 	$\frac{6ab}{L^3} M$	$\frac{b(2a-b)}{L^2} M$	$-\frac{6ab}{L^3} M$	$\frac{a(2b-a)}{L^2} M$
③ 	$\frac{L}{2} q$	$\frac{L^2}{12} q$	$\frac{L}{2} q$	$-\frac{L^2}{12} q$
④ 	$\frac{12EI}{L^3} \delta$	$\frac{6EI}{L^2} \delta$	$-\frac{12EI}{L^3} \delta$	$\frac{6EI}{L^2} \delta$
⑤ 	$\frac{6EI}{L^2} \beta$	$\frac{4EI}{L} \beta$	$-\frac{6EI}{L^2} \beta$	$\frac{2EI}{L} \beta$
⑥ 	$-\frac{12EI}{L^3} \delta$	$-\frac{6EI}{L^2} \delta$	$\frac{12EI}{L^3} \delta$	$-\frac{6EI}{L^2} \delta$
⑦ 	$\frac{6EI}{L^2} \beta$	$\frac{2EI}{L} \beta$	$-\frac{6EI}{L^2} \beta$	$\frac{4EI}{L} \beta$

Kuva 3.3 Palkin tukireaktioita.

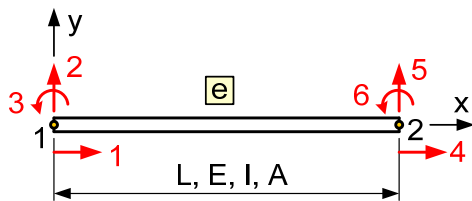
saadaan kuvan 3.3 taulukon tapauksista 5, 6 ja 7. Jäykkyysmatriisi  $[k]$  on siis

$$[k] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Koska kuvan 3.2 elementissä on solmujen poikittaissuuntainen voima- ja siirtymämittaus, tarvitaan elementtikuormitusten käsittelyssä tukimomenttien lisäksi myös poikittaisia tukivoimia. Kuvassa 3.3 ovat muutaman tavallisen perustapauksen tukivoimat.

### 3.2.3 Kuuden vapausasteen palkkielementti

Yleisen tasokehän käsittelyyn tarvitaan elementti, joka voi olla mielivaltaisessa asen-



Kuva 3.4 Palkkielementti.

nossa XY-globaalkoordinaatistossa ja jonka solmuilla on translaatiovapausasteet X- ja Y-akseleiden suunnissa ja rotaatiovapausaste Z-akselin ympäri. Tarvittava elementti on siis globaalimittauksella varustettu kuuden vapausasteen palkkielementti. Tarkastellaan tilannetta ensin elementin xyz-lokaalikoordinaatistossa. Kun kuvan 3.2 palkkielementin solmuihin lisätään palkin suuntainen mittaus ja numerointi vaih-

detaan solmuittain eteneväksi, saadaan kuvan 3.4 kuuden vapausasteen palkkielementti. Sen lokaalikoordinaatiston solmusiirtymä- ja solmuvoimavektori ovat

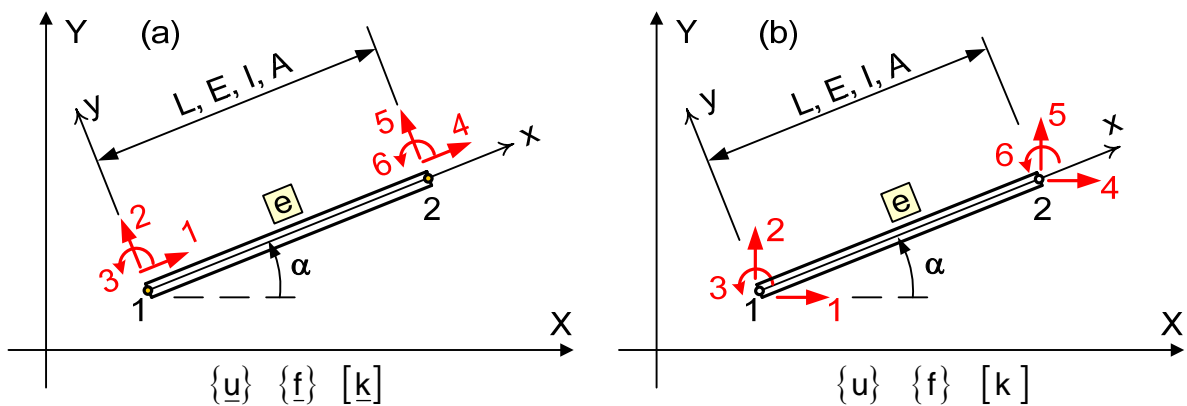
$$\{\underline{u}\} = \left\{ \underline{u}_x^1 \quad \underline{u}_y^1 \quad \underline{\phi}^1 \quad \underline{u}_x^2 \quad \underline{u}_y^2 \quad \underline{\phi}^2 \right\} \quad \{\underline{f}\} = \left\{ \underline{f}_x^1 \quad \underline{f}_y^1 \quad \underline{m}^1 \quad \underline{f}_x^2 \quad \underline{f}_y^2 \quad \underline{m}^2 \right\} \quad (3.7)$$

Koska palkin lineaarisessa teoriassa veto/puristus ei ole kytketty taivutukseen ja leikkaukseen, saadaan kuvan 3.4 elementin jäykkyysmatriisi sijoittelusummaamalla aksiaalisen elementin jäykkyysmatriisi (2.6) ja neljän vapausasteen palkkielementin jäykkyysmatriisi (3.6) kuvan 3.4 numeroinnin mukaisesti. Tuloksena on seuraava kuuden vapausasteen palkkielementin lokaalikoordinaatiston jäykkyysmatriisi

$$[k] = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & -k & 0 & 0 \\ 0 & 12\kappa/L^2 & 6\kappa/L & 0 & -12\kappa/L^2 & 6\kappa/L \\ 0 & 6\kappa/L & 4\kappa & 0 & -6\kappa/L & 2\kappa \\ -k & 0 & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & -12\kappa/L^2 & -6\kappa/L & 0 & 12\kappa/L^2 & -6\kappa/L \\ 0 & 6\kappa/L & 2\kappa & 0 & -6\kappa/L & 4\kappa \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

jossa on merkitty  $k = EA/L$  ja  $\kappa = EI/L$ . Koska kuuden vapausasteen palkkielementissä on mukana palkin suuntainen solmumittaus, voidaan sen avulla ottaa huomioon myös palkin pituuden muutoksen vaikutukset. Elementti kuormitusten käsittely sujuu ekvivalenttien solmukuormitusten avulla aikaisemmin esitetyllä tavalla, nyt tarvitaan vain kaikkiin kolmeen solmuvapausasteeseen liittyviä kiinnitysreaktioita. Näitä saadaan muutamalle perustapauksille kuvien 2.13 ja 3.3 taulukoista.

Yleisen tasokehän tarkasteluun tarvitaan kuvan 3.5 (b) globaalkoordinaatistossa mielivaltaisessa asennossa olevan kuuden vapausasteen palkkielementin globaalimittaukseen liittyvä jäykkyyismatriisi. Etsitty jäykkyyismatriisi saadaan koordinaatiston kierron avulla, jolloin lähdetään liikkeelle kuvan 3.5 (a) mukaisista elementin lokaalkoordinaatiston solmusuurevektoreista  $\{\underline{u}\}$  ja  $\{\underline{f}\}$  sekä jäykkyyismatriisista  $[\underline{k}]$ .



Kuvan 3.5 (b) solmumittauksesta

$$\{\underline{u}\} = \{u_x^1 \quad u_y^1 \quad \varphi^1 \quad u_x^2 \quad u_y^2 \quad \varphi^2\} \quad \{\underline{f}\} = \{f_x^1 \quad f_y^1 \quad m^1 \quad f_x^2 \quad f_y^2 \quad m^2\} \quad (3.9)$$

päästään kuvan 3.5 (a) solmumittaukseen kiertämällä ensiksi mainittua kulma  $\alpha$  vastapäivään. Tällöin elementin solmumittauksien välillä ovat yhteydet

$$\{\underline{u}\} = [\underline{B}] \{\underline{u}\} \quad \{\underline{f}\} = [\underline{B}] \{\underline{f}\} \quad (3.10)$$

missä kinemaattinen matriisi  $[\underline{B}]$  on nyt

$$[\underline{B}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Kinemaattinen matriisi  $[B]$  muodostetaan soveltamalla solmujen translaatioiden mittauksiin koordinaatiston kiertoa ja jättämällä rotaation mittaukset ennalleen.  $[B]$  on ortogonaalinen matriisi eli  $[B]^{-1} = [B]^T$ , jolloin voimamittauksien yhteys voidaan kirjoittaa myös muotoon  $\{f\} = [B]^T \{f\}$ . Kaava (3.10) on siis myös tulkittavissa kontragradienttilaiksi, josta seuraa, että globaalkoordinaatiston jäykkyysmatriisi  $[k]$  saadaan kongruenssimuunnoksella kaavojen (3.8) ja (3.11) matriiseista

$$[k] = [B]^T [k] [B] \quad (3.12)$$

Kaavan (3.12) jäykkyysmatriisi  $[k]$  voitaisiin kirjoittaa auki suorittamalla matriisien kertomiset. Tulos on kuitenkin epähavainnollinen ja elementtien jäykkyysmatriisit voidaan laskea yhtä hyvin kaavasta (3.12).

Elementtikuormituksille voidaan muodostaa lokaalkoordinaatiston ekvivalenttinen solmukuormitusvektori  $\{r\}$  esimerkiksi kuvien 2.13 ja 3.3 taulukoista. Se on muunnettava globaalkoordinaatistoon ennen sijoittelusummausta, johon voidaan käyttää muunnosta (3.10) eli

$$\{r\} = [B] \{r\} \Rightarrow \{r\} = [B]^T \{r\} \quad (3.13)$$

### 3.2.4 Leikkausvoiman vaikutus

Edellä johdetut palkkielementtien jäykkyysmatriisit perustuivat tekniseen taivutusteoriaan, jolloin on otettu huomioon vain taivutusmomentin vaikutus palkin taipumaan. Palkin leikkausvoima aiheuttaa myös taipumista, joka varsinkin korkeilla palkeilla vaikuttaa hieman tuloksiin. Leikkausvoiman vaikutuksen määrittäminen yleiselle poikkileikkaukselle ei onnistu tarkasti kannattimen teorialla, mutta riittävän tarkka likiratkaisu saadaan käyttämällä leikkauskerrointa  $\phi$ , joka riippuu palkin materiaalista ja geometriasta. Monille poikkileikkauksille voidaan johtaa leikkauskertoimen likiarvo esimerkiksi teknisen taivutusteorian tai energiaperiaatteen avulla. Voidaan osoittaa, että leikkauskerrointa käytettäessä kuuden vapausasteen palkkielementin lokaali jäykkyysmatriisi (3.8) muuttuu muotoon

$$[k] = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & -k & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12\kappa}{(1+\phi)L^2} & \frac{6\kappa}{(1+\phi)L} & 0 & -\frac{12\kappa}{(1+\phi)L^2} & \frac{6\kappa}{(1+\phi)L} \\ 0 & \frac{6\kappa}{(1+\phi)L} & \frac{(4+\phi)\kappa}{(1+\phi)} & 0 & -\frac{6\kappa}{(1+\phi)L} & \frac{(2-\phi)\kappa}{(1+\phi)} \\ -k & 0 & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12\kappa}{(1+\phi)L^2} & -\frac{6\kappa}{(1+\phi)L} & 0 & \frac{12\kappa}{(1+\phi)L^2} & -\frac{6\kappa}{(1+\phi)L} \\ 0 & \frac{6\kappa}{(1+\phi)L} & \frac{(2-\phi)\kappa}{(1+\phi)} & 0 & -\frac{6\kappa}{(1+\phi)L} & \frac{(4+\phi)\kappa}{(1+\phi)} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Leikkauskertoimen  $\phi$  lauseke voidaan esittää muodossa

$$\phi = \frac{12EI}{GA_s L^2} = 24(1+\nu) \frac{A}{A_s} \left(\frac{i}{L}\right)^2 \quad (3.15)$$

jossa  $E$ ,  $G$  ja  $\nu$  ovat materiaalivakiot,  $A_s$  tehollinen leikkauspinta-ala (leikkausvoiman vastaanottava pinta-ala) ja  $i$  poikkileikkauksen neliösäde. Leikkauspinta-aloja löytyy lujuusopin kirjallisuudesta, esimerkiksi suorakulmiolle  $A_s = 5A/6$ , ympyrälle  $A_s = 9A/10$  ja I-profiilille uuman pinta-ala. Kaavasta (3.15) näkyy, että leikkausmuodonmuutoksen vaikutus on pieni, jos palkin hoikkuusluku  $\lambda = L/i$  ei ole kovin pieni. Kun  $\nu = 0,3$  ja arvioidaan karkeasti  $A_s = A$ , saadaan seuraavia arvoja

$\lambda$	10	20	40	100
$\phi$	0,3120	0,0780	0,0195	0,00312

joista näkyy selvästi, että tavanomaisen hoikkuuden omaavalla palkilla leikkausvoiman vaikutus taipuman arvoon on vähäinen.

### 3.3 Avaruuskehä

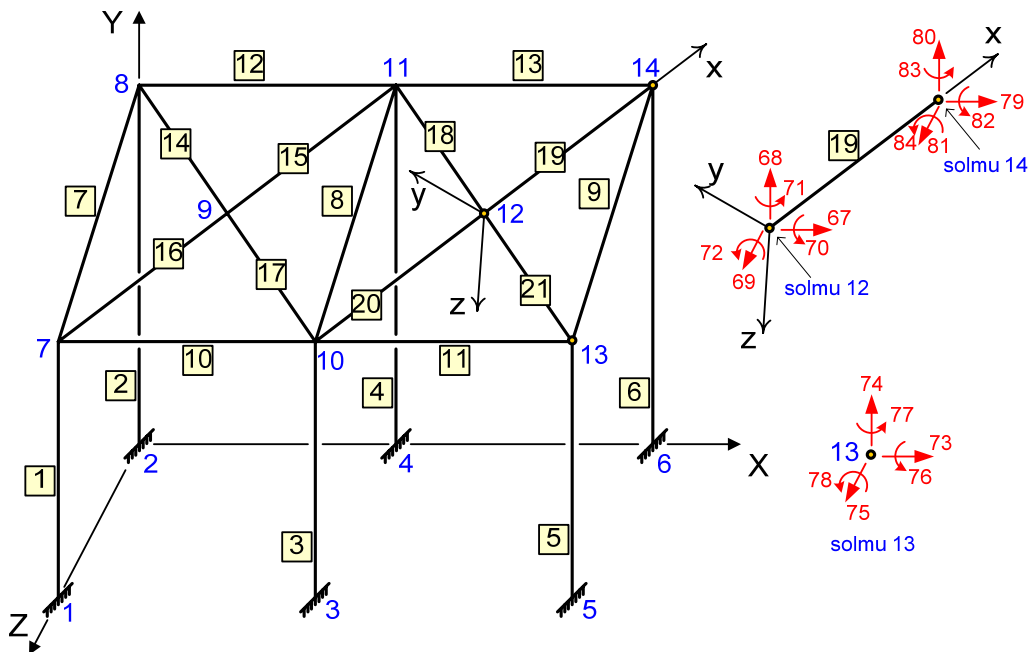
#### 3.3.1 Avaruuskehän elementtiverkko

Vain tasapaksuja ja suoria osia sisältävän avaruuskehän tarkka ratkaisu saadaan elementtiverkolla, jossa solmut sijoittuvat nurkkiin, tukipisteisiin, ulokepäihin ja poikkileikkauksen muutoskohtiin. Avaruuskehän elementit ovat suoria kaksisolmuksia palkkielementtejä. Kuvassa 3.6 on esimerkki avaruuskehän elementtiverkosta, jossa on 14 solmua ja 21 elementtiä. Avaruuskehälle sovitaan globaali XYZ-koordinaatisto, jonka akseleiden suhteen solmumittaus suoritetaan. Solmumittaus sisältää translaatiot ja solmuvoimat globaalisuunnissa ja rotaatiot ja momentit globaalisuuntien ympäri. Solmulla on 6 ja elementillä 12 vapausastetta. Elementin solmuvoimavektoreiden dimensio on 12 ja jäykkyysmatriisi on 12x12 matriisi. Kuvassa 3.6 on esitetty nuolisymboleilla solmun 13 vapausasteet. Kullakin elementillä on oma lokaali xyz-koordinaatisto, jonka x-akseli on elementin suuntainen ja yz-koordinaatisto on sen poikkileikkauksen pääkoordinaatisto. Kuvassa 3.6 on elementin 19 lokaalikoordinaatisto ja globaali solmumittaus.

Avaruuskehän elementtejä rasittaa taivutusmomentti ja leikkausvoima sen poikkileikkauksen päätasoissa ja lisäksi normaalivoima ja vääntömomentti. Näiden käsittelemiseen tarvitaan poikkileikkauksen pintasuureet eli ala  $A$ , pääneliömomentit  $I_y$  ja  $I_z$  sekä vääntöneliömomentti  $I_\nu$ , mikäli leikkausmuodonmuutosta ei oteta huomioon ja rajoitutaan vapaan väännön teoriaan olettaen lisäksi pintakeskiön ja vääntökeskiön



yhtyvän. Leikkausmuodonmuutos voidaan tarvittaessa ottaa likimääräisesti huomioon kumpaankin päätasoon liittyvien leikkauskertoimen  $\phi_z$  ja  $\phi_y$  avulla.



Kuva 3.6 Avaruuskehän elementtiverkko ja sen elementti.

### 3.3.2 Elementin lokaali jäykkyyismatriisi

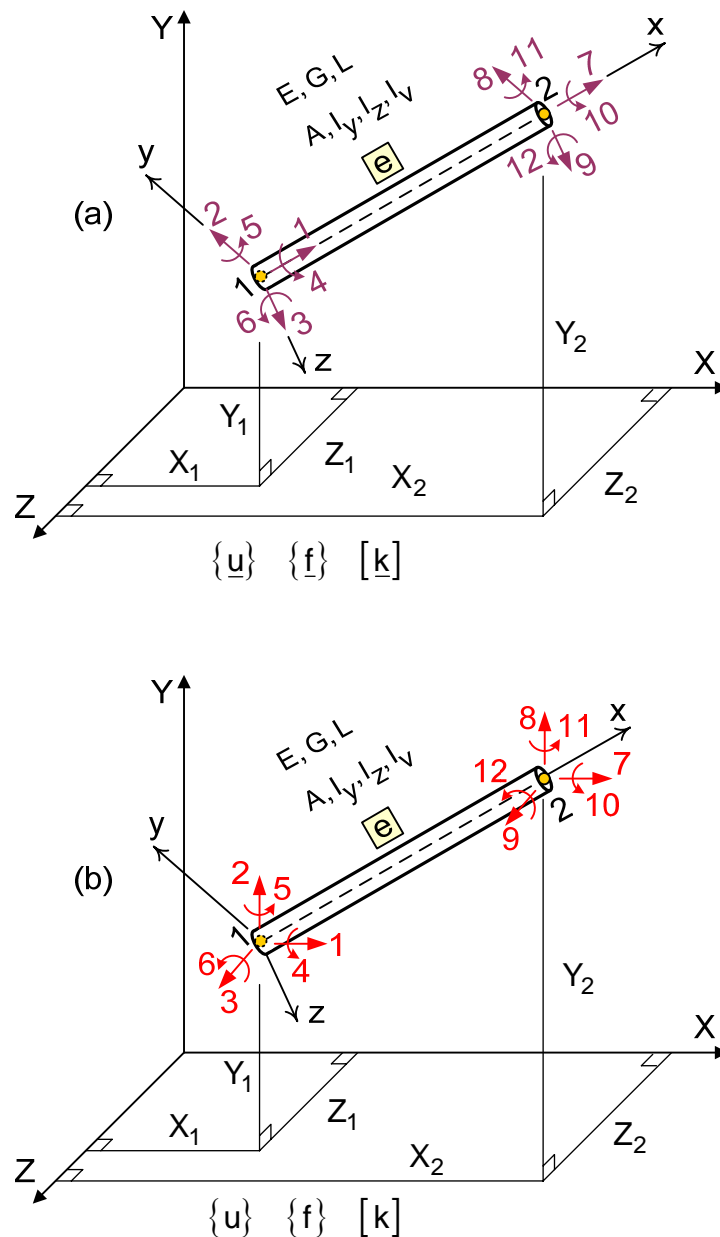
Avaruuskehän käsittelyyn elementtimenetelmällä tarvitaan kuvan 3.7 (b) globaali-koordinaatistossa mielivaltaisessa asennossa olevan 12 vapausasteen palkkielementin jäykkyyismatriisi, jonka solmumittaus liittyy globaali-koordinaatiston akselien suuntiin. Se voidaan johtaa koordinaatiston kiertoa käyttäen, jolloin lähdetään liikkeelle kuvan 3.7 (a) lokaali-koordinaatiston solmumittauksesta

$$\{\underline{u}\} = \left\{ \underline{u}_x^1 \quad \underline{u}_y^1 \quad \underline{u}_z^1 \quad \underline{\phi}_x^1 \quad \underline{\phi}_y^1 \quad \underline{\phi}_z^1 \quad \underline{u}_x^2 \quad \underline{u}_y^2 \quad \underline{u}_z^2 \quad \underline{\phi}_x^2 \quad \underline{\phi}_y^2 \quad \underline{\phi}_z^2 \right\} \quad (3.16)$$

$$\{\underline{f}\} = \left\{ \underline{f}_x^1 \quad \underline{f}_y^1 \quad \underline{f}_z^1 \quad \underline{m}_x^1 \quad \underline{m}_y^1 \quad \underline{m}_z^1 \quad \underline{f}_x^2 \quad \underline{f}_y^2 \quad \underline{f}_z^2 \quad \underline{m}_x^2 \quad \underline{m}_y^2 \quad \underline{m}_z^2 \right\}$$

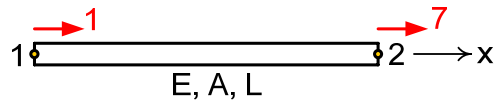
Lineaarisen lujuusopin teorian mukaan veto/puristus, vääntö sekä poikkileikkauksen kummankin päätason taivutus ja leikkaus ovat toisistaan riippumattomia. Tästä seuraa, että lokaali-koordinaatiston jäykkyyismatriisi  $[\underline{k}]$  voidaan muodostaa sijoittelusummaamalla kuvassa 3.8 esitetyt veto/puristuksen, väännön sekä poikkileikkauksen kummankin päätason taivutuksen ja leikkauksen jäykkyyismatriisit. Tulokseksi sijoittelusummauksesta tulee kaavan (3.17) elementin jäykkyyismatriisi.

Kuvassa 3.8 esitetty vääntökuormituksen jäykkymatriisi seuraa vapaan väännön teoriasta, jolloin lokaali x-akseli on vääntökeskiön kohdalla. Koska kuvan 3.8 muissa kuormitustapauksissa lokaali x-akseli on pintakeskiön kohdalla, on jäykkymatriisi (3.17) tarkasti voimassa vain, kun vääntökeskiö yhtyy pintakeskiöön, kuten esimerkiksi kaksoissymmetrisillä poikkileikkauksilla. Leikkausvoimien vaikutus taipumaan voidaan ottaa likimääräisesti huomioon leikkauskertoimilla  $\phi_z$  ja  $\phi_y$  muuttamalla jäykkymatriisissa (3.17) kummankin päätason taivutusta ja leikkausta vastaavat alkioit kaavan (3.14) mukaisiksi.



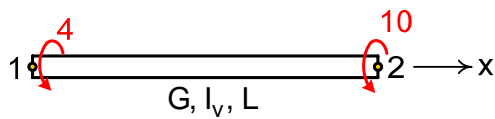
Kuva 3.7 Avaruuskehän elementin lokaali- ja globaalimittaus.

### Veto/puristus



$$[\underline{k}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 7 \end{matrix}$$

### Vääntö



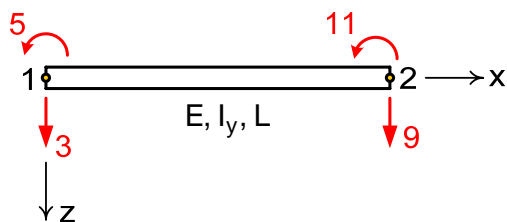
$$[\underline{k}] = \frac{GI_v}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 10 \end{matrix}$$

### xy-tason taivutus ja leikkaus



$$[\underline{k}] = \frac{EI_z}{L} \begin{bmatrix} 12/L^2 & 6/L & -12/L^2 & 6/L \\ 6/L & 4 & -6/L & 2 \\ -12/L^2 & -6/L & 12/L^2 & -6/L \\ 6/L & 2 & -6/L & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 6 \\ 8 \\ 12 \end{matrix}$$

### xz-tason taivutus ja leikkaus



$$[\underline{k}] = \frac{EI_y}{L} \begin{bmatrix} 12/L^2 & -6/L & -12/L^2 & -6/L \\ -6/L & 4 & 6/L & 2 \\ -12/L^2 & 6/L & 12/L^2 & 6/L \\ -6/L & 2 & 6/L & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 5 \\ 9 \\ 11 \end{matrix}$$

Kuva 3.8 Sijoittelusummattavat jäykkyysmatriisit.

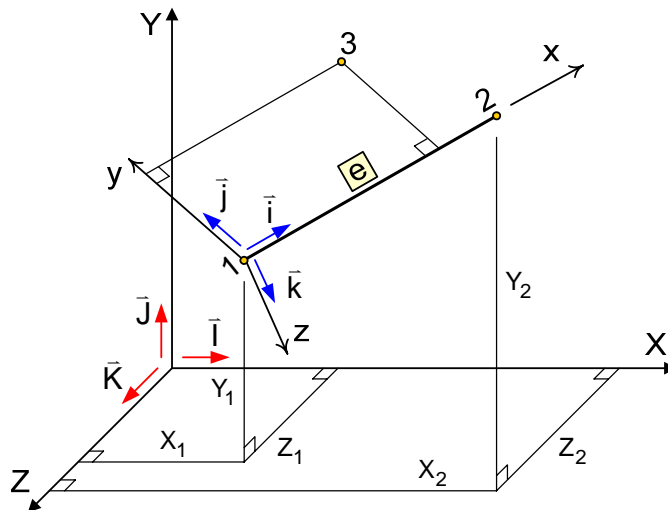
$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_v}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_v}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_v}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_v}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

### 3.3.3 Elementin globaali jäykkyysmatriisi

Palkkielementin lokaalikoordinaatiston jäykkyysmatriisi  $[k]$  on muunnettava globaalkoordinaatistoon. Tällöin saadaan jäykkyysmatriisi  $[k]$ , joka antaa globaalkoordinaatiston solmusuurevektoreiden

$$\begin{aligned} \{u\} &= \{u_X^1 \ u_Y^1 \ u_Z^1 \ \varphi_X^1 \ \varphi_Y^1 \ \varphi_Z^1 \ u_X^2 \ u_Y^2 \ u_Z^2 \ \varphi_X^2 \ \varphi_Y^2 \ \varphi_Z^2\} \\ \{f\} &= \{f_X^1 \ f_Y^1 \ f_Z^1 \ m_X^1 \ m_Y^1 \ m_Z^1 \ f_X^2 \ f_Y^2 \ f_Z^2 \ m_X^2 \ m_Y^2 \ m_Z^2\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

välisen yhteyden  $[k]\{u\} = \{f\}$ . Muuntamiseen voidaan käyttää kongruenssimuunnosta (3.12), jolloin on tunnettava tätä tapausta vastaava kinemaattinen matriisi  $[B]$ .



Kuva 3.9 Suuntasolmun käyttö.

Tarkastellaan kuvan 3.9 elementtiä, jonka alku- ja loppusolmujen globaalinumeroiksi on valittu 1 ja 2. Elementillä on kolmaskin solmu eli suuntasolmu, jonka solmunumero on 3. Suuntasolmun avulla määritellään elementin asento sijoittamalla se elementin xy-päätasoon. Solmujen koordinaatit ovat 1( $X_1, Y_1, Z_1$ ), 2( $X_2, Y_2, Z_2$ ) ja 3( $X_3, Y_3, Z_3$ ). Solmukoordinaateista voidaan määrittää lokaalikoordinaatiston akseleiden suuntaiset yksikkövektorit  $\bar{i}, \bar{j}$  ja  $\bar{k}$  globaalkoordinaatiston yksikkövektoreiden  $\bar{I}, \bar{J}$  ja  $\bar{K}$  avulla. Muodostetaan ensin solmusta 1 solmuihin 2 ja 3 kulkevat apuvektorit  $\bar{a}$  ja  $\bar{b}$

$$\begin{aligned} \bar{a} &= (X_2 - X_1)\bar{I} + (Y_2 - Y_1)\bar{J} + (Z_2 - Z_1)\bar{K} \\ \bar{b} &= (X_3 - X_1)\bar{I} + (Y_3 - Y_1)\bar{J} + (Z_3 - Z_1)\bar{K} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Yksikkövektori  $\bar{i}$  voidaan laskea kaavasta

$$\bar{i} = \bar{a} / |\bar{a}| \quad (3.20)$$

Poistetaan vektorista  $\bar{b}$  vektorin  $\bar{a}$  suuntainen komponentti

$$\bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b}) \bar{a} / |\bar{a}|^2 = \frac{|\bar{a}|^2 \bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b}) \bar{a}}{|\bar{a}|^2} = \bar{c} \quad (3.21)$$

Vektori  $\bar{c}$  on yksikkövektorin  $\bar{j}$  suuntainen ja vektoreiden  $\bar{j}$  ja  $\bar{k}$  lausekkeet ovat siis

$$\bar{j} = \bar{c} / |\bar{c}| \quad \bar{k} = \bar{i} \times \bar{j} \quad (3.22)$$

Yksikkövektoreiden  $\bar{i}, \bar{j}$  ja  $\bar{k}$  globaalikomponentit ovat lokaaliakseleiden suuntakosinit globaaliakseleiden suhteen. Näistä saadaan koordinaatiston kiertomatriisi

$$[Q] = \begin{bmatrix} \cos(x, X) & \cos(x, Y) & \cos(x, Z) \\ \cos(y, X) & \cos(y, Y) & \cos(y, Z) \\ \cos(z, X) & \cos(z, Y) & \cos(z, Z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{xX} & c_{xY} & c_{xZ} \\ c_{yX} & c_{yY} & c_{yZ} \\ c_{zX} & c_{zY} & c_{zZ} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Kiertomatriisi  $[Q]$  muuntaa globaalkoordinaatiston vektorin  $\{V\}$  lokaalkoordinaatiston vektoriksi  $\{\underline{V}\}$  eli

$$\{\underline{V}\} = [Q] \{V\} \quad (3.24)$$

Kun vektoriksi  $\{V\}$  otetaan solmun 1 translaatiot, saadaan

$$\{\underline{u}_x^1 \quad \underline{u}_y^1 \quad \underline{u}_z^1\} = [Q] \{u_z^1 \quad u_y^1 \quad u_z^1\} \quad (3.25)$$

Kun rotaatiot oletetaan pieniksi, voidaan ne esittää vektorina ja muuntaa matriisilla  $[Q]$ . Solmun 1 rotaatioille on voimassa

$$\{\underline{\phi}_x^1 \quad \underline{\phi}_y^1 \quad \underline{\phi}_z^1\} = [Q] \{\phi_z^1 \quad \phi_y^1 \quad \phi_z^1\} \quad (3.26)$$

Vastaavat muunnosyhtälöt voidaan kirjoittaa myös solmun 2 translaatio- ja rotaatiokomponenteille. Kun nämä neljä yhtälöä yhdistetään koskemaan elementin kaikkia vapausasteita, saadaan yhteydet

$$\{\underline{u}\} = [B] \{u\} \quad \{f\} = [B] \{f\} \quad (3.27)$$

Matriisi  $[B]$  on globaali- ja lokaalkoordinaatiston välinen kinemaattinen matriisi

$$[B] = \begin{bmatrix}
 c_{xX} & c_{xY} & c_{xZ} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 c_{yX} & c_{yY} & c_{yZ} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 c_{zX} & c_{zY} & c_{zZ} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & c_{xX} & c_{xY} & c_{xZ} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & c_{yX} & c_{yY} & c_{yZ} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & c_{zX} & c_{zY} & c_{zZ} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{xX} & c_{xY} & c_{xZ} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{yX} & c_{yY} & c_{yZ} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{zX} & c_{zY} & c_{zZ} & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{xX} & c_{xY} & c_{xZ} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{yX} & c_{yY} & c_{yZ} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{zX} & c_{zY} & c_{zZ}
 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Koordinaatiston kiertomatriisi  $[Q]$  on ortogonaalinen matriisi eli  $[Q]^{-1} = [Q]^T$ , josta seuraa, että myös  $[B]^{-1} = [B]^T$ . Yhteys (3.27) voidaan näin ollen antaa myös kontragradienttilain muodossa

$$\{u\} = [B] \{u\} \quad \{f\} = [B]^T \{f\} \quad (3.29)$$

Kuvan 3.7 (b) globaalimittauksen jäykkymatriisi saadaan matriiseista  $[k]$  ja  $[B]$  kongruenssimuunnoksella

$$[k] = [B]^T [k] [B] \quad (3.30)$$

Kaavan (3.30) jäykkymatriisiin  $[k]$  alkiot voitaisiin kirjoittaa näkyviin suorittamalla matriisien kertomiset. Tulos on kuitenkin epähavainnollinen ja jäykkymatriisit voidaan laskea yhtä hyvin kaavasta (3.30).

Ekvivalenttiset solmukuormitukset saadaan palkkitaulukoista lokaalikoordinaatistossa. Ne on kuitenkin muunnettava globaalikoordinaatistoon ennen sijoittelusummausta. Tähän voidaan käyttää kaavaa (3.29) eli

$$\{r\} = [B]^T \{r\} \quad (3.31)$$