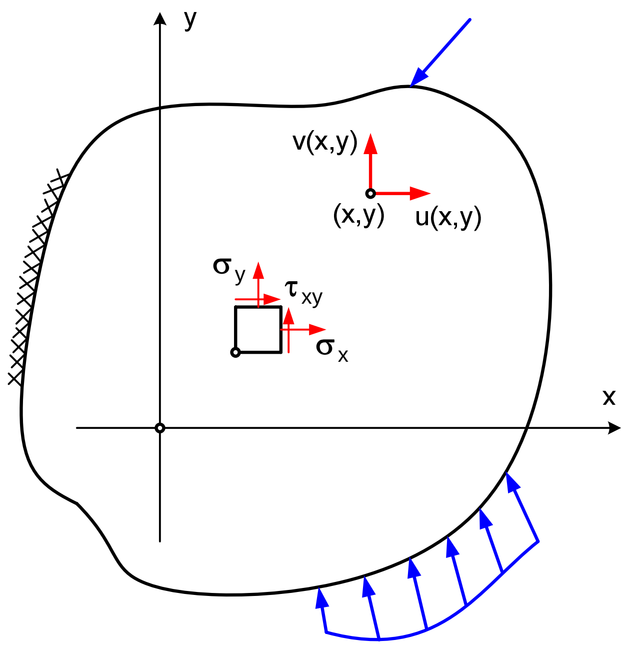
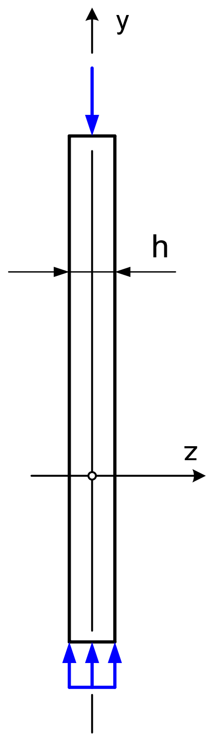
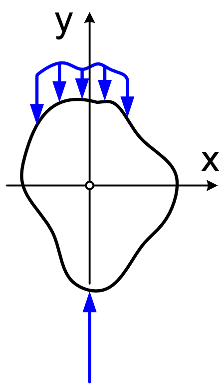
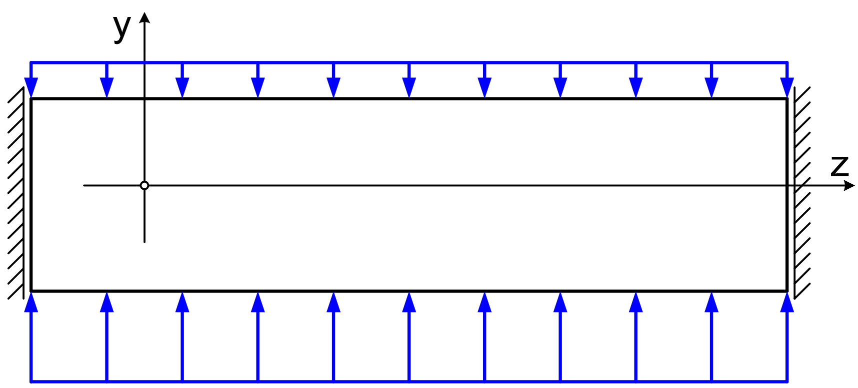
TASOJÄNNITYSTILA (TJT)





TASOMUODONMUUTOSTILA (TMT)





TASOJÄNNITYSTILAN PERUSYHTÄLÖT

Tasapainoyhtälöt:

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + f_x = 0 \qquad \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + f_y = 0$$

Materiaaliyhtälöt:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \qquad \gamma_{xy} = \tau_{xy}/G \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \qquad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \qquad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

Kinemaattiset yhtälöt:

$$\varepsilon_x = u,_x \qquad \varepsilon_y = v,_y \qquad \gamma_{xy} = u,_y + v,_x$$

Yhteensopivuusyhtälöt:

$$\varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx} = \gamma_{xy,xy} \qquad \varepsilon_{z,yy} = 0 \qquad \varepsilon_{z,xx} = 0$$

Reunaehdot:

Siirtymäkomponenttien reunaehdot: $u = \tilde{u}$ $\quad v = \tilde{v}$

Jännityskomponenttien reunaehdot: $t_x = \sigma_x a + \tau_{xy} b$

$t_y = \tau_{xy} a + \sigma_y b$

Sekareunaehdot: $u = \tilde{u}$ $\quad t_y = \tau_{xy} a + \sigma_y b$

Sekareunaehdot: $v = \tilde{v}$ $\quad t_x = \sigma_x a + \tau_{xy} b$

TASOJÄNNITYSTILAN PERUSYHTÄLÖT

Voimamenetelmä: Perustuntemattomat $\boxed{\sigma_x}$, $\boxed{\sigma_y}$ ja $\boxed{\tau_{xy}}$.

Michell-Beltrami-yhtälöt

$$\boxed{\begin{cases} \sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + f_x = 0 \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + f_y = 0 \\ \nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\nu)(f_{x,x} + f_{y,y}) \end{cases}}$$

Harmoninen operaattori

$$\nabla^2(\ ) = (\ )_{,xx} + (\ )_{,yy}$$

Siirtymämenetelmä: Perustuntemattomat $\boxed{u}$ ja $\boxed{v}$.

Navierin yhtälöt

$$\boxed{\begin{cases} e_{,x} + \dfrac{1-\nu}{1+\nu}\nabla^2 u + \dfrac{2(1-\nu)}{E} f_x = 0 \\ e_{,y} + \dfrac{1-\nu}{1+\nu}\nabla^2 v + \dfrac{2(1-\nu)}{E} f_y = 0 \end{cases}}$$

Suhteellinen tilavuuden muutos

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y = u_{,x} + v_{,y}$$

AIRYN JÄNNITYSFUNKTIO

Tilavuusvoimakentällä on potentiaalifunktio $V(x,y)$

$$\boxed{f_x = -V_{,x} \qquad f_y = -V_{,y}}$$

Airyn jännitysfunktio $\phi = \phi(x,y)$ toteuttaa ehdot

$$\boxed{\sigma_x = \phi_{,yy} + V \qquad \sigma_y = \phi_{,xx} + V \qquad \tau_{xy} = -\phi_{,xy}}$$

jolloin **tasapainoyhtälöt toteutuvat automaattisesti**.

Yhteensopivuusyhtälö

$$\boxed{\phi_{,xxxx} + 2\phi_{,xxyy} + \phi_{,yyyy} = (-1+\nu)(V_{,xx} + V_{,yy})}$$

Merkitään: $\nabla^4 = (\,)_{,xxxx} + 2(\,)_{,xxyy} + (\,)_{,yyyy}$ ja $\nabla^2 = (\,)_{,xx} + (\,)_{,yy}$

$$\boxed{\nabla^4\phi = (-1+\nu)\nabla^2 V}$$

Jos V on **harmoninen**, $\nabla^2 V = 0$, jolloin ϕ on **biharmoninen** eli

$$\boxed{\nabla^4\phi = 0}$$

Jokainen biharmoninen funktio tarjoaa siis **tasapainossa olevan** ja **yhteensopivan** jännitystilakentän, kun V on harmoninen.

Airyn jännitysfunktio on käänteinen menetelmä, jolloin ensin keksitään ratkaisu (biharmoninen funktio) ja sitten tutkitaan millaiset reunaehdot se saadaan toteuttamaan Usein reunaehdot saadaan toteutumaan vain keskimääräisesti.

PERUSYHTÄLÖT NAPAKOORDINAATISTOSSA

Tasapainoyhtälöt

$$\sigma_{r,r} + \frac{1}{r}\tau_{r\theta,\theta} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + f_r = 0 \qquad \frac{1}{r}\sigma_{\theta,\theta} + \tau_{r\theta,r} + \frac{2}{r}\tau_{r\theta} + f_\theta = 0$$

Materiaaliyhtälöt

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) \qquad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_\rho)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_r + \sigma_\theta) \qquad \gamma_{r\theta} = \tau_{r\theta}/G \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta) \qquad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r) \qquad \tau_{r\theta} = G\gamma_{r\theta}$$

Kinemaattiset yhtälöt

$$\varepsilon_r = u_{r,r} \qquad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r}u_{\theta,\theta} \qquad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r}u_{r,\theta} + u_{\theta,r} - \frac{1}{r}u_\theta$$

Reunaehtotapaukset koskevat r- ja θ-suuntia.

ROTAATIOSYMMETRINEN TILANNE

Tasapainoyhtälö

$$\sigma_{r,r} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + f_r = 0$$

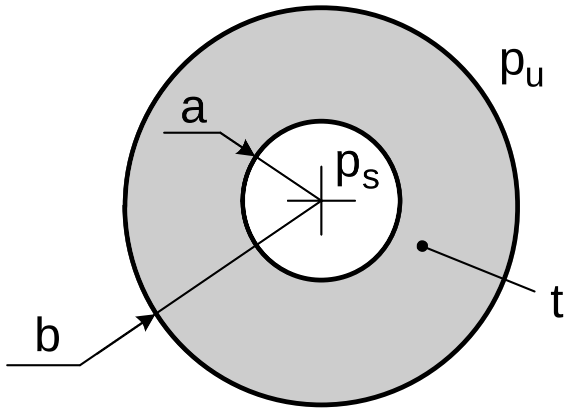
Materiaaliyhtälöt

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) \qquad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) \qquad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_r + \sigma_\theta)$$

Kinemaattiset yhtälöt

$$\varepsilon_r = u_{r,r} \qquad \varepsilon_\theta = u_r / r$$

YMPYRÄRENGASLEVY JA SYLINTERIPUTKI



Säteittäinen ja kehän suuntainen normaalijännitys

$$\sigma_r = \frac{a^2 p_s - b^2 p_u}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2 (p_s - p_u)}{r^2 (b^2 - a^2)} \qquad \sigma_\theta = \frac{a^2 p_s - b^2 p_u}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2 (p_s - p_u)}{r^2 (b^2 - a^2)}$$

a) Putken pituuden muutos vapaa

Säteittäissiirtymä
$$u_r = \frac{1}{E}\left[(1-\nu)\frac{a^2 p_s - b^2 p_u}{b^2 - a^2} r + (1+\nu)\frac{a^2 b^2 (p_s - p_u)}{r(b^2 - a^2)}\right]$$

Pituuden muutos
$$\Delta L = -\frac{2\nu L}{E} \cdot \frac{a^2 p_s - b^2 p_u}{b^2 - a^2}$$

b) Putken pituuden muutos täysin estetty

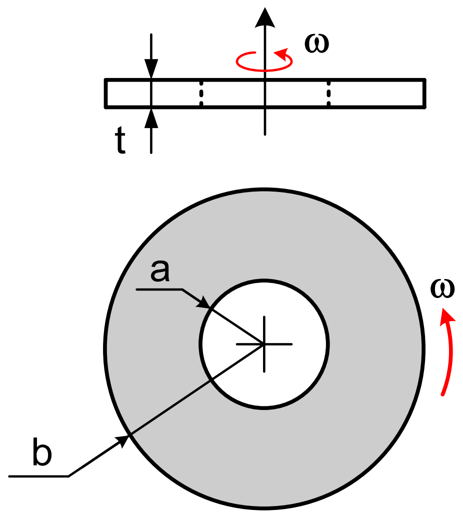
Normaalijännitys pituussuunnassa
$$\sigma_z = 2\nu \cdot \frac{a^2 p_s - b^2 p_u}{b^2 - a^2}$$

Säteittäissiirtymä
$$u_{r1} = \frac{(1+\nu)}{E}\left[(1-2\nu)\frac{a^2 p_s - b^2 p_u}{b^2 - a^2} r + \frac{a^2 b^2 (p_s - p_u)}{r(b^2 - a^2)}\right]$$

c) Putken päät suljetut, pituuden muutos vapaa

Normaalijännitys pituussuunnassa
$$\sigma_z = \frac{a^2 p_s - b^2 p_u}{b^2 - a^2}$$

PYÖRIVÄ TASAPAKSU YMPYRÄRENGASLEVY



Säteittäinen ja kehän suuntainen normaalijännitys

$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2(a^2+b^2-a^2b^2/r^2-r^2)$$

$$\sigma_\theta = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2(a^2+b^2+a^2b^2/r^2-\frac{1+3\nu}{3+\nu}r^2)$$

Säteittäissiirtymä

$$u_r = \frac{3+\nu}{8E}\rho\omega^2\left[(1-\nu)(a^2+b^2)r+(1+\nu)a^2b^2/r-\frac{1-\nu^2}{3+\nu}r^3\right]$$

Ympyrälevy

$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2(b^2-r^2) \qquad \sigma_\theta = \frac{1}{8}\rho\omega^2[(3+\nu)b^2-(1+3\nu)r^2]$$

$$u_r = \frac{1-\nu}{8E}\rho\omega^2\left[(3+\nu)b^2r-(1+\nu)r^3\right]$$

JÄNNITYSFUNKTIO NAPAKOORDINAATISTOSSA

Yhteensopivuusehto

$$\nabla^4\phi = \left[(\ )_{,rr} + \frac{1}{r}(\ )_{,r} + \frac{1}{r^2}(\ )_{,\theta\theta} \right]\left(\phi_{,rr} + \frac{1}{r}\phi_{,r} + \frac{1}{r^2}\phi_{,\theta\theta} \right) = 0$$

Jännityskomponenttien laskenta

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\phi_{,r} + \frac{1}{r^2}\phi_{,\theta\theta} \qquad \sigma_\theta = \phi_{,rr} \qquad \tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2}\phi_{,\theta} - \frac{1}{r}\phi_{,r\theta}$$

Muuttujien erottamiskeinolla saatavia jännitysfunktioita

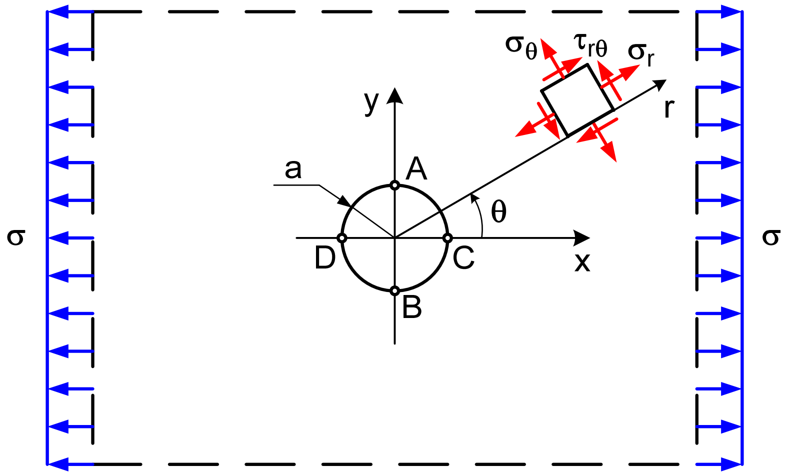
$$\phi_n(r,\theta) = R_n(r)\cdot\begin{cases} \sin(n\cdot\theta) \\ \cos(n\cdot\theta) \end{cases} \quad , \quad \text{n on kokonaisluku}$$

$$R_0(r) = A_0 + B_0 \ln r + C_0 r^2 + D_0 r^2 \ln r$$

$$R_1(r) = A_1 r + B_1 / r + C_1 r^3 + D_1 r \ln r$$

$$R_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n} + C_n r^{2+n} + D_n r^{2-n} \quad , n \geq 2$$

KIRSCHIN ONGELMA



Jännityskomponentit

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{2}\left[\left(1-(a/r)^2\right)+\left(1-4(a/r)^2+3(a/r)^4\right)\cos 2\theta\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma}{2}\left[\left(1+(a/r)^2\right)-\left(1+3(a/r)^4\right)\cos 2\theta\right]$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma}{2}\left(1+2(a/r)^2-3(a/r)^4\right)\sin 2\theta$$

Siirtymäkomponentit

$$u_r = \frac{\sigma r}{2E}\left[\left((1-\nu)+(1+\nu)(a/r)^2\right)+\left((1+\nu)+4(a/r)^2-(1+\nu)(a/r)^4\right)\cos 2\theta\right]$$

$$u_\theta = -\frac{\sigma r}{2E}\left((1+\nu)+2(1-\nu)(a/r)^2+(a/r)^4\right)\sin 2\theta$$