

4.6 Vaunun A massa on 16 kg ja se liikkuu vaaka-suuntaan nopeudella 1,2 m/s. Vaunuun on kiinnitetty massattomilla sauvoilla neljä palloa, joiden kunkin massa on 1,6 kg. Etualalla olevien pallojen 1 ja 2 systeemi pyörii vastapäivään pyörimisnopeudella 80 r/min ja taka-alalla olevien pallojen 3 ja 4 systeemi myötäpäivään pyörimisnopeudella 100 r/min. Määritä koko systeemin liike-energia, liikemäärä ja liikemäärän momentti pisteen O suhteen.

Ratkaisu:

Liike-energian lauseke on $T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i |\dot{\mathbf{p}}_i|^2$

Pallojen nopeudet pisteen O suhteen: $|\dot{\mathbf{p}}_i| = v_{\text{rel}} = r \dot{\theta} \Rightarrow$

$$v_{\text{rel}}^{1,2} = 0,450 \text{ m} \cdot \frac{80 \cdot 2\pi}{60 \text{ s}} = 3,77 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad v_{\text{rel}}^{3,4} = 0,300 \text{ m} \cdot \frac{100 \cdot 2\pi}{60 \text{ s}} = 3,14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

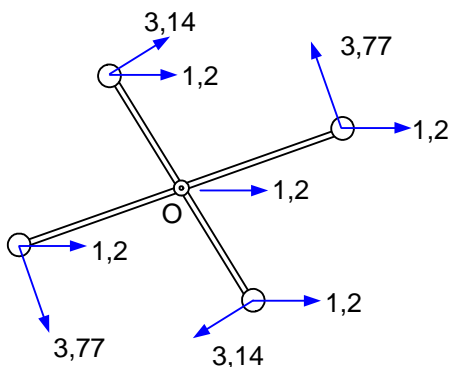
$$\frac{1}{2} m v_G^2 = \frac{1}{2} (16 + 4 \cdot 1,6) \text{ kg} \cdot 1,2^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 16,13 \text{ J}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i |\dot{\mathbf{p}}_i|^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} 1,6 \text{ kg} \cdot 3,77^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} + 2 \cdot \frac{1}{2} 1,6 \text{ kg} \cdot 3,14^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 22,74 \text{ J} + 15,78 \text{ J} = 38,52 \text{ J}$$

$$\Rightarrow T = 16,13 \text{ J} + 38,52 \text{ J} \Rightarrow T = 54,65 \text{ J}$$

Liikemäärän kaava on: $\bar{\mathbf{p}} = m \bar{\mathbf{v}}_G$. Pallojen pyörimisestä johtuvat liikemäärät kumoavat pareittain toisensa, koska ne ovat vastavektoreita. Vain vaunun ja pallojen translaatiosta johtuvat liikemäärät jäävät jäljelle.

$$\bar{\mathbf{p}} = (16 + 4 \cdot 1,6) \text{ kg} \cdot 1,2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \bar{\mathbf{i}} = 26,88 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \bar{\mathbf{i}} \Rightarrow \mathbf{p} = 26,88 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$



Liikemäärän momentti massakeskiön O suhteen saadaan tasoliikkeellä kaavasta

$$\bar{L}_O = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{p}} \times m_i \bar{\mathbf{v}}_i = \left(\sum_{i=1}^n \pm d_i m_i v_i \right) \bar{\mathbf{k}}$$

(d_i on momenttivarsi, etumerkki valitaan pyörimys-suunnan mukaan) Kuvasta näkyy, että nolasta poikkeavaa vaikutusta tulee vain pallojen rotaatiosta.

$$\bar{L}_O = (2 \cdot 0,45 \cdot 1,6 \cdot 3,77 - 2 \cdot 0,30 \cdot 1,6 \cdot 3,14) \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}} \bar{\mathbf{k}} = 2,42 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}} \bar{\mathbf{k}} \Rightarrow L_O = 2,42 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$$