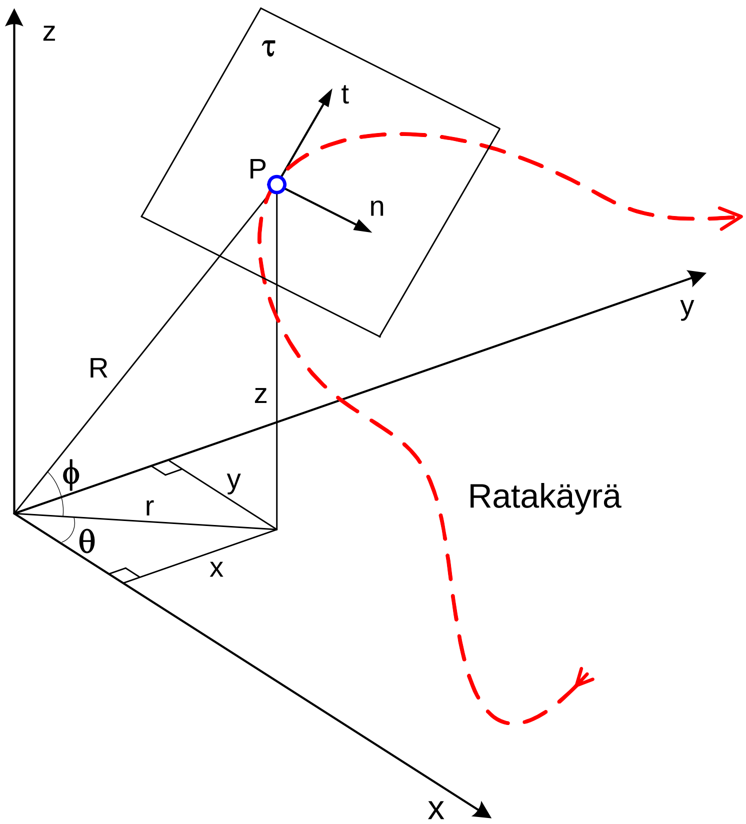
PARTIKKELIN KINEMATIIKKA

Partikkelilla eli massapisteellä tarkoitetaan kappaletta, jonka mitat ovat epäoleellisen pienet tarkasteltavan tehtävän kannalta.

Kinematiikan tehtävänä on selvittää, miten voidaan määrittää partikkelin **asema**, **nopeus** ja **kiihtyvyys** sen liikkuessa ratakäyräänsä pitkin.



Tarkastelut suoritetaan sopivassa **koordinaatistossa**, joita ovat

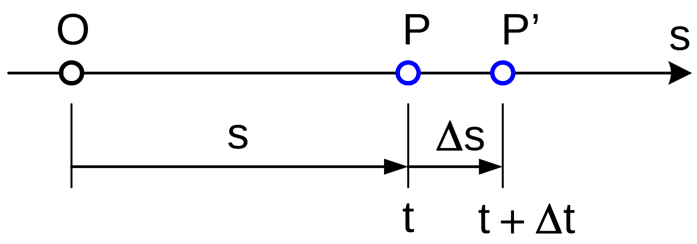
- suorakulmaiset koordinaatit (x, y, z)
- sylinterikoordinaatit (r, θ, z)
- pallokoordinaatit (R, θ, ϕ).
- paikallisessa tangenttitasossa ratakäyrän tangentin, päänormaalin ja sivunormaalin suunnat (t, n, b)

Jos partikkelin ratakäyrä on tasokäyrä, se on **tasoliikkeessä**.

Suoraviivaisessa liikkeessä partikkelin ratakäyrä on suora viiva.

PARTIKKELIN KINEMATIIKKA

Suoraviivainen liike



Keskinopeus aikavälillä Δt on $v_k = \Delta s / \Delta t$.

Kun $\Delta t \to 0$, keskinopeus v_k lähestyy **nopeutta hetkellä t** eli

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}}$$

Partikkelin hetkellinen nopeus on sen asemakoordinaatin muutosnopeus eli derivaatta ajan suhteen.

Keskikiihtyvyys aikavälillä Δt on $a_k = \Delta v / \Delta t$, missä Δv on nopeuden muutos aikavälillä Δt.

Kun $\Delta t \to 0$, keskikiihtyvyys a_k lähestyy **kiihtyvyyttä hetkellä t** eli

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \dot{v} = \ddot{s}}$$

Partikkelin hetkellinen kiihtyvyys on sen nopeuden muutosnopeus eli derivaatta ajan suhteen.

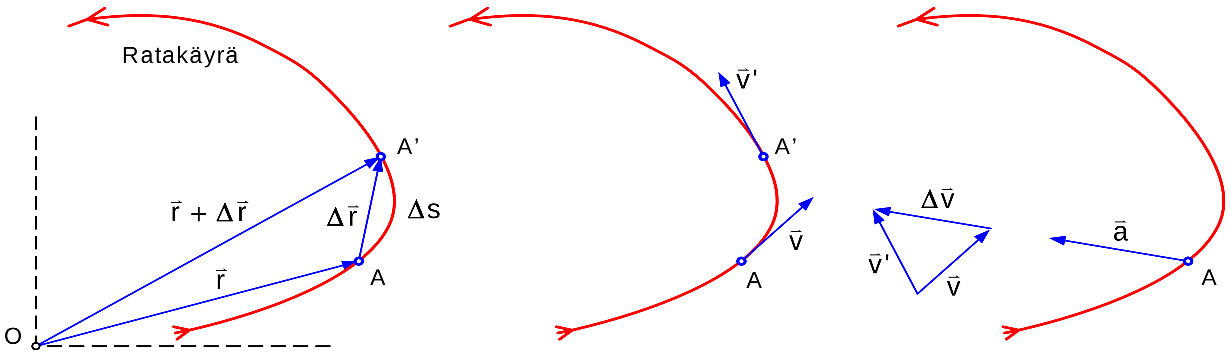
Eliminoimalla nopeuden ja kiihtyvyyden kaavoista aikadifferentiaali dt, saadaan tulos

$$\boxed{v\,dv = a\,ds} \qquad \text{eli} \qquad \boxed{\dot{s}\,d\dot{s} = \ddot{s}\,ds}$$

jota sanotaan dynamiikassa **energiadifferentiaaliyhtälöksi**.

PARTIKKELIN KINEMATIIKKA

Käyräviivainen tasoliike



Partikkelin **keskinopeus** pisteiden A ja A' välillä on $\vec{v}_k = \Delta\vec{r} / \Delta t$.

Partikkelin **nopeus hetkellä t** on sen keskinopeuden $\vec{v}_k$ raja-arvo, kun aikaväli $\Delta t \to 0$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}}$$

Nopeusvektori $\vec{v}$ on ratakäyrän tangentin suuntainen.

Partikkelin **keskikiihtyvyys** pisteiden A ja A' välillä on $\vec{a}_k = \Delta\vec{v} / \Delta t$, joka on nopeuden muutoksen $\Delta\vec{v}$ suuntainen vektori. Nopeusvektorin muutos $\Delta\vec{v}$ aiheutuu sekä sen **suunnan** että **suuruuden** muutoksesta.

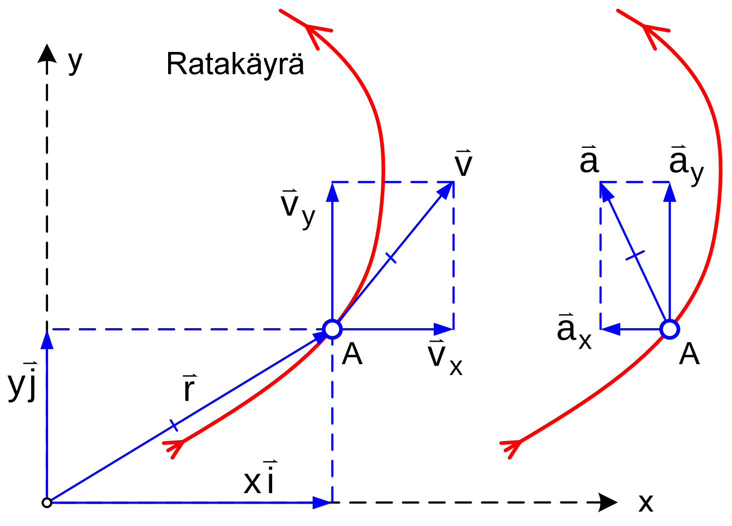
Partikkelin **kiihtyvyys hetkellä t** on sen keskikiihtyvyyden $\vec{a}_k$ raja-arvo, kun aikaväli $\Delta t \to 0$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}}$$

Kiihtyvyysvektori kuvaa nopeusvektorin muutosnopeutta ja sisältää nopeusvektorin suunnan ja suuruuden muutosten vaikutukset. Kiihtyvyysvektori osoittaa ratakäyrän kuperalle puolelle.

PARTIKKELIN KINEMATIIKKA

Käyräviivainen tasoliike xy-koordinaatistossa



Partikkelin **asemavektori** $\vec{r}$ voidaan esittää yksikkövektoreiden $\vec{i}$ ja $\vec{j}$ sekä pisteen A koordinaattien x ja y avulla

$$\boxed{\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}}$$

Yksikkövektorit $\vec{i}$ ja $\vec{j}$ ovat vakiovektoreita, joten $\dot{\vec{i}} = \vec{0}$ ja $\dot{\vec{j}} = \vec{0}$!

Nopeus- ja kiihtyvyysvektori saadaan derivoimalla peruskaavoista

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} \qquad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}}$$

Nopeus- ja kiihtyvyysvektorin komponenteille saadaan

x-suunta: $v_x = \dot{x}$ $\quad a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$

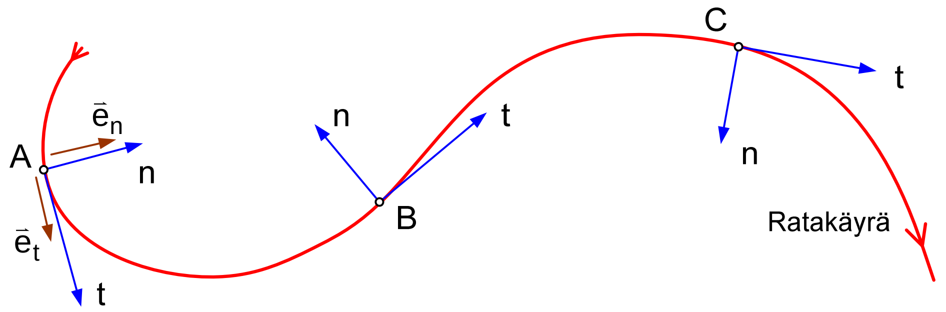
y-suunta: $v_y = \dot{y}$ $\quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}$

Nopeuden ja kiihtyvyyden suuruudet $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ $\quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

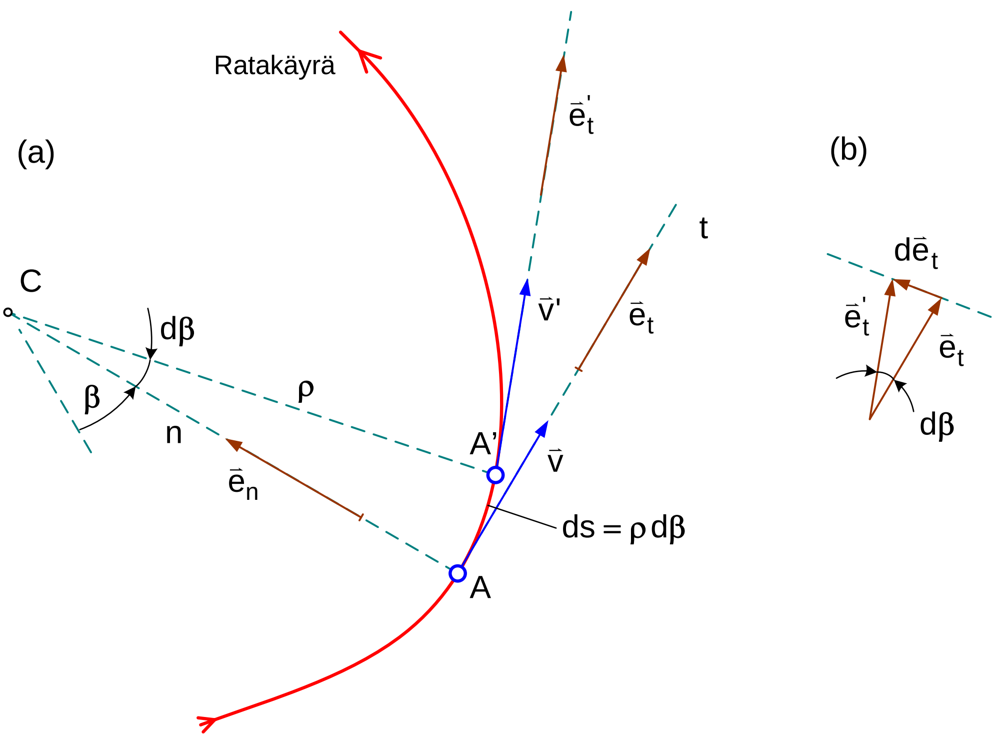
xy-koordinaatistossa tasoliike voidaan jakaa kahdeksi toisistaan riippumattomaksi komponenttiliikkeeksi!!!

PARTIKKELIN KINEMATIIKKA

Käyräviivainen tasoliike tn-ratakoordinaatistossa



Yksikkövektorien $\vec{e}_t$ ja $\vec{e}_n$ suunta muuttuu liikkeen aikana, joten ne **eivät ole vakiovektoreita** eli $\dot{\vec{e}}_t \neq \vec{0}$ ja $\dot{\vec{e}}_n \neq \vec{0}$.



β on vertailusuunnasta mitattu kulma-asema, $d\beta$ sen lisäys ja ρ ratakäyrän kaarevuussäde. Nopeus $\vec{v}$ on vektorin $\vec{e}_t$ suuntainen. $ds = \rho\, d\beta \quad \Rightarrow \quad$ nopeuden suuruus on $v = ds/dt = \rho\, d\beta/dt = \rho\dot{\beta}$.

Nopeusvektori on

$$\boxed{\vec{v} = v\,\vec{e}_t = \rho\dot{\beta}\,\vec{e}_t}$$

Kiihtyvyysvektoriksi saadaan määritelmästä

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\,\vec{e}_t)}{dt} = \dot{v}\,\vec{e}_t + v\,\dot{\vec{e}}_t$$

$$d\vec{e}_t = d\beta\,\vec{e}_n \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{d\beta}{dt}\vec{e}_n \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{e}}_t = \dot{\beta}\,\vec{e}_n = \frac{v}{\rho}\vec{e}_n$$

$$\boxed{\vec{a} = \dot{v}\,\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n}$$

Nopeus- ja kiihtyvyysvektorin komponenteille saadaan

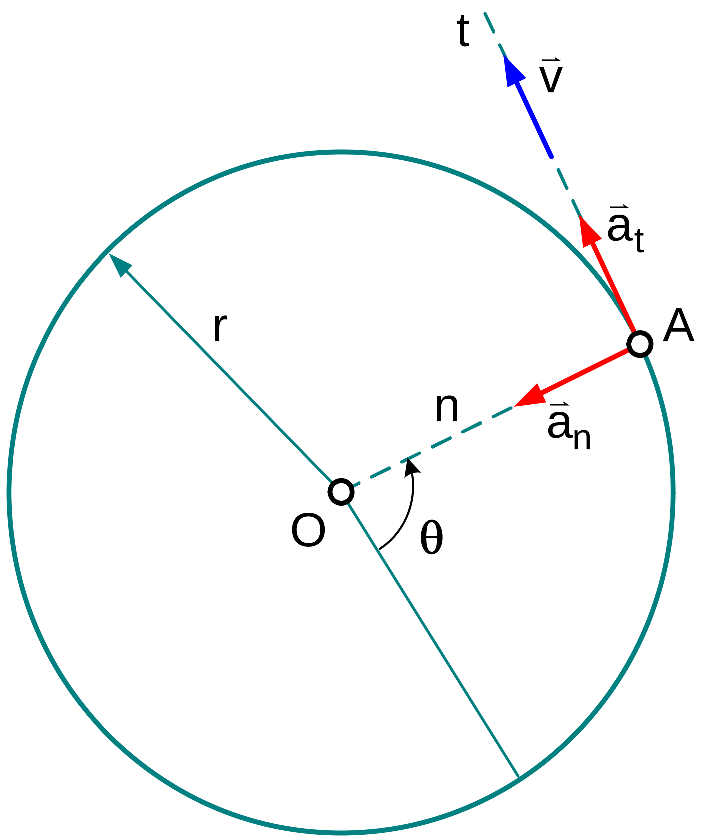
t-suunta: $v_t = v \qquad a_t = \dot{v}$

n-suunta: $v_n = 0 \qquad a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$

Nopeuden ja kiihtyvyyden suuruudet

$$v = \sqrt{v_t^2 + v_n^2} \qquad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

YMPYRÄLIIKE

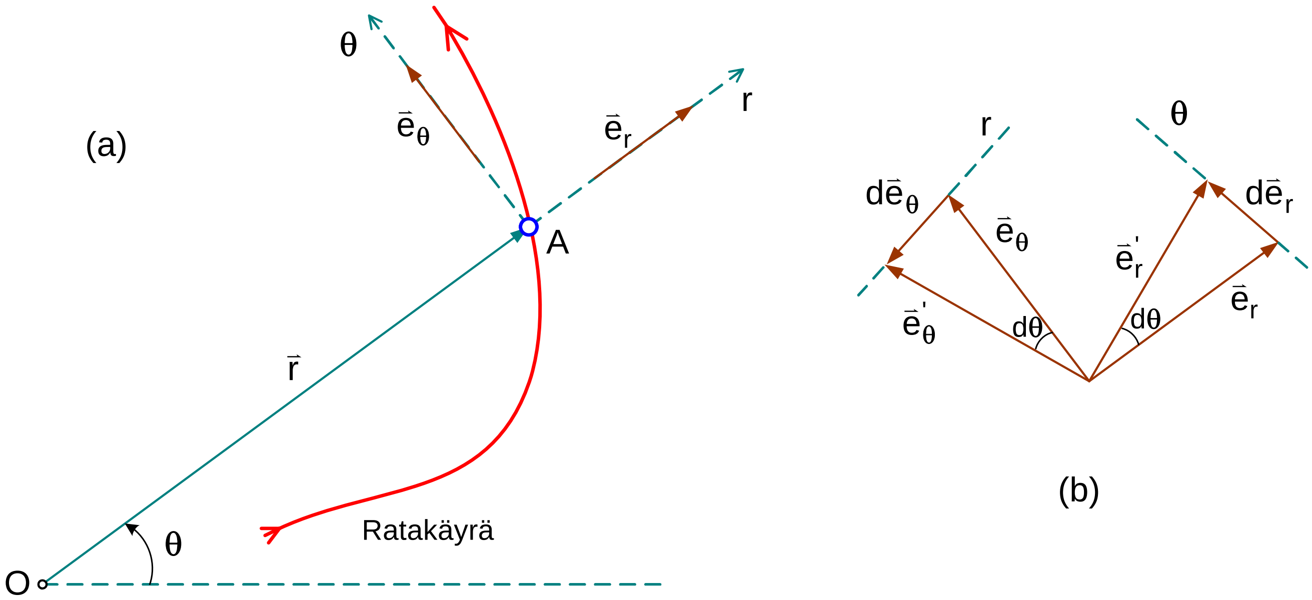


Kulmanopeus: $\omega = \dot{\theta}$	
Kulmakiihtyvyys: $\alpha = \ddot{\theta}$	

$v_t = r\,\omega$	$v_n = 0$
$a_t = r\,\alpha$	$a_n = v^2 / r$

PARTIKKELIN KINEMATIIKKA

Käyräviivainen tasoliike rθ-napakoordinaatistossa



Yksikkövektorien $\vec{e}_r$ ja $\vec{e}_\theta$ suunta muuttuu liikkeen aikana, joten ne **eivät ole vakiovektoreita** eli $\dot{\vec{e}}_r \neq \vec{0}$ ja $\dot{\vec{e}}_\theta \neq \vec{0}$.

$$d\vec{e}_r = d\theta\,\vec{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta}$$

$$d\vec{e}_\theta = -d\theta\,\vec{e}_r \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_r \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\,\vec{e}_r}$$

Partikkelin asema $\boxed{\vec{r} = r\,\vec{e}_r}$

Nopeusvektori on $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\vec{e}}_r \quad \Rightarrow$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta}$$

Kiihtyvyysvektoriksi saadaan

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (\ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\,\dot{\vec{e}}_r) + (\dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\,\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\,\dot{\theta}\,\dot{\vec{e}}_\theta) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta}$$

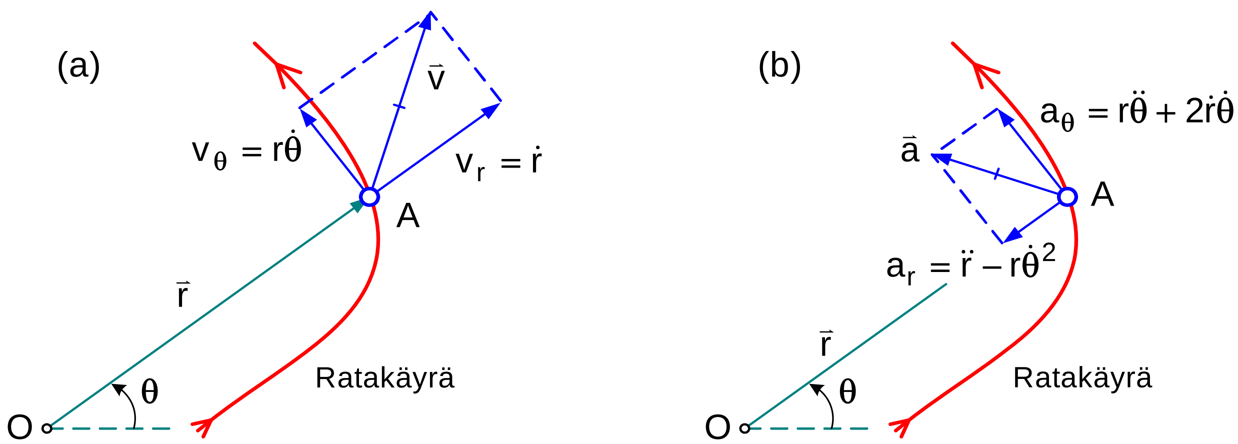
Nopeus- ja kiihtyvyysvektorin komponenteille saadaan

r-suunta: $v_r = \dot{r}$ $\quad a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$

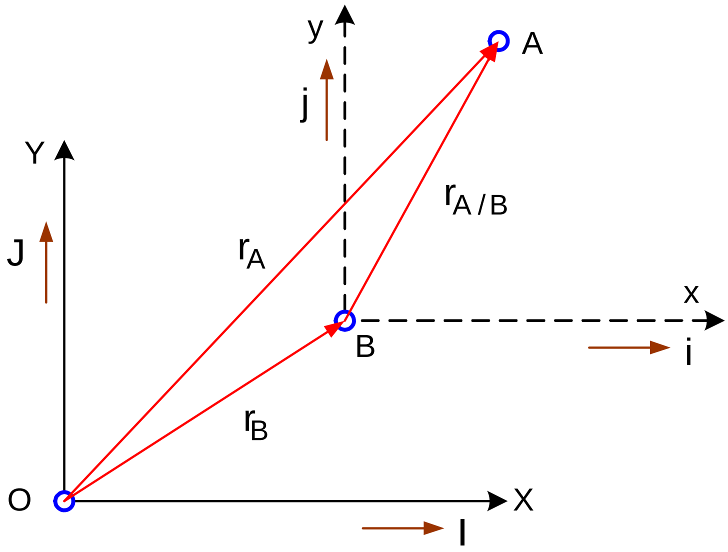
θ-suunta: $v_\theta = r\dot{\theta}$ $\quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

Nopeuden ja kiihtyvyyden suuruudet

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} \qquad a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$$



SUHTEELLINEN LIIKE



XY-koordinaatistossa on kiinteä.

xy-koordinaatisto on kiinnitetty partikkeliin B ja on sen mukana trans-laatiossa.

B on vertailupartikkeli, jonka avulla partikkelin A liikettä tarkastellaan.

Asema: $\boxed{\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{A/B}}$ $\vec{r}_{A/B} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Nopeus: $\boxed{\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}}$ $\vec{v}_{A/B} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$

Kiihtyvyys: $\boxed{\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}}$ $\vec{a}_{A/B} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$

$\vec{r}_{A/B}$ partikkelin A suhteellinen asema partikkeliin B nähden
$\vec{v}_{A/B}$ partikkelin A suhteellinen nopeus partikkeliin B nähden
$\vec{a}_{A/B}$ partikkelin A suhteellinen kiihtyvyys partikkeliin B nähden