TAMK **M. Lähteenmäki**
Konetekniikka
K-12104 Lujuusopin jatkokurssi
Luentoesimerkit

I LUJUUSOPIN PERUSYHTÄLÖT

I.1. Tutki, ovatko xy-koordinaatistossa annetut jännityskomponentit

$$\sigma_x = -\frac{3}{2}x^2y^2 \qquad \sigma_y = -\frac{1}{4}y^4 \qquad \tau_{xy} = xy^3$$

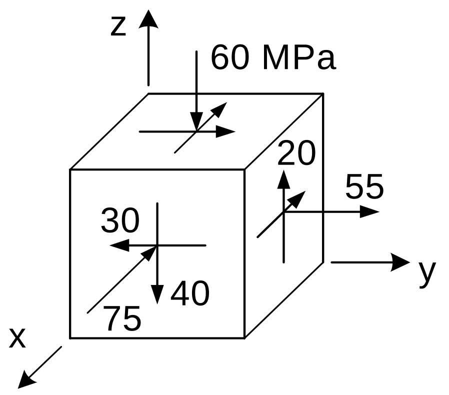
mahdolliset tasojännitystilassa. Tilavuusvoimat f_x ja f_y ovat nollia.

I.2. Osoita, että jännityskomponentit (A, B ja C ovat vakioita)

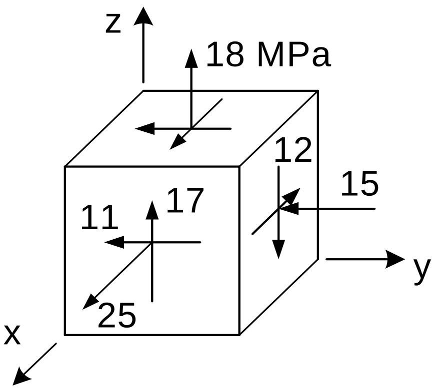
$$\sigma_x = A\,zx^2 - Bx^3/3 \qquad \sigma_y = -Bxy^2 + Cy^3/3 \qquad \sigma_z = Cyz^2 + Az^3/3$$
$$\tau_{xy} = Bx^2y \qquad \tau_{xz} = -Az^2x \qquad \tau_{yz} = -Cy^2z$$

toteuttavat jännityskomponenttien kolmiulotteiset tasapainoehdot, kun tilavuusvoimat f_x, f_y ja f_z ovat nollia.

I.3. Levyrakenteen pisteessä on tasojännitystilan $\sigma_x = 80\ \text{MPa}$, $\sigma_y = -40\ \text{MPa}$ ja $\tau_{xy} = -50\ \text{MPa}$. Kirjoita mielivaltaisen suunnan θ normaalijännityksen $\sigma_{x'}$ ja leikkausjännityksen $\tau_{x'y'}$ lausekkeet kulman θ funktiona. Piirrä jännitysten $\sigma_{x'}$ ja $\tau_{x'y'}$ kuvaajat Mathcadilla karteesiseen koordinaatistoon, kun $\theta \in [0, 2\pi]$. Piirrä jännitysten $\sigma_{x'}$ ja $\tau_{x'y'}$ kuvaajat Mathcadilla myös napakoordinaatistoon ja totea kuvaajista jännitysten ääriarvot ja niiden esiintymissuunnat sekä näiden välinen kohtisuoruus. Totea myös leikkausjännitysten nollakohtia vastaavat suunnat. Laske pääjännitykset ja -suunnat sekä leikkausjännityksen suurin arvo xy-tasossa ja sen esiintymissuunta.

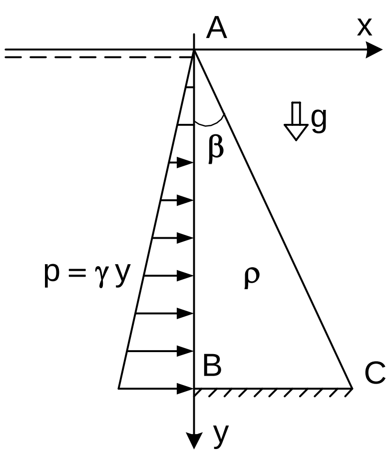


I.4. Kappaleen pisteessä on oheisen jännityselementin mukainen jännitystila. Kirjoita kuvaan merkittyä xyz-koordinaatistoa vastaava jännitysmatriisi. Laske suunnan $\vec{n} = (2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k})/\sqrt{6}$ jännitysvektori ja sen komponentit σ_n ja τ_n. Kirjoita vastaava jännitysmatriisi siinä koordinaatistossa, joka saadaan kiertämällä xyz-koordinaatistoa x-akselin ympäri 45^o myötäpäivään.



I.5.
a) Kappaleen pisteessä on oheisen jännityselementin mukainen jännitystila. Laske tätä jännitystilaa vastaavan jännitysmatriisin pääinvariantit I_1, I_2 ja I_3. Muodosta se kolmannen asteen yhtälö, josta pääjännitykset voidaan ratkaista. Ratkaise pääjännitykset Mathcadin polyroots-funktiolla. Ratkaise pääsuunnat käyttäen hyväksi Mathcadin solve-block rakennetta.

b) Ratkaise pääjännitykset Mathcadin eigenvals-funktiolla ja pääsuunnat eigenvecs-funktiolla.



I.6. Oheinen kuva esittää padon kiilamaista poikkileikkausta. Padon materiaalin tiheys on ρ ja sen reunaan asti ulottuvan nesteen γ/g. Osoita, että kuvan xy-koordinaatistossa annetut jännityskomponentit

$$\sigma_x = -\gamma y$$

$$\sigma_y = (\rho g - 2\gamma/\tan^2\beta)x/\tan\beta + (\gamma/\tan^2\beta - \rho g)y$$

$$\tau_{xy} = -(\gamma/\tan^2\beta)x$$

toteuttavat jännityskomponenttien tasapainoyhtälöt ja reunaehdot sivuilla AB ja AC.

I.7. Kappaleen siirtymäkenttä on (yksikkönä mm)

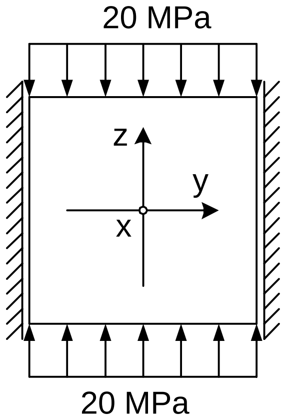
$$u = (x^2 + 10)\cdot 10^{-2} \qquad v = (2yz)\cdot 10^{-2} \qquad w = (z^2 - xy)\cdot 10^{-2}$$

Laske pisteiden $A(2,-1,3)$ ja $B(-1,-2,2)$ siirtymäkomponentit.
Paljonko pisteiden A ja B välinen etäisyys muuttuu siirtymien johdosta? Mikä on keskimääräinen venymä pisteessä A suuntaan B?
Määritä muodonmuutoskomponenttien lausekkeet ja laske niiden arvot pisteessä A.
Kirjoita pisteen A muodonmuutostilaa vastaava muodonmuutosmatriisi ja määritä sen avulla venymä ε_n janan AB suuntaisen yksikkövektorin $\vec{n}_{AB}$ suunnassa. Vertaa tulosta aikaisemmin laskettuun venymään ε_{AB} ja selitä mistä johtuu tuloksissa oleva ero. Määritä muodonmuutosmatriisin päävenymät ja pääsuunnat.
Osoita, että edellä annettu siirtymäkenttä on mahdollinen kappaleen siirtymäkenttä, ts. se johtaa yhteensopiviin muodonmuutoskomponentteihin.

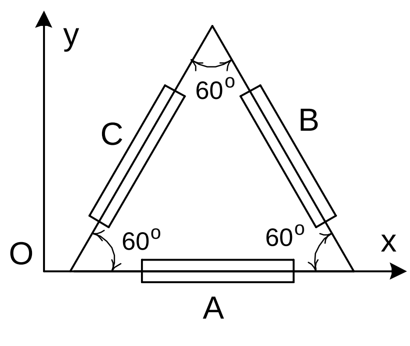
I.8. Kappaleen pisteessä on jännitysmatriisin

$$[S]=\begin{bmatrix}20 & 6 & 5\\ 6 & -25 & -12\\ 5 & -12 & 15\end{bmatrix}\text{MPa}$$

mukainen jännitystila. Laske tämän pisteen muodonmuutosmatriisi $[V]$, kun $E=210\ \text{GPa}$ ja $\nu=0{,}3$.

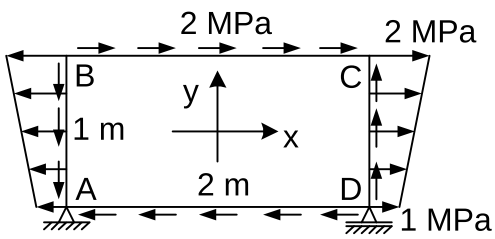


I.9. Teräskuutiota puristetaan z-akselin suunnassa tasaisella paineella $20\ \text{MPa}$. Kuution muodonmuutokset y-suunnassa on estetty, mutta x-suunnassa niitä voi vapaasti syntyä. Määritä kuution jännitys- ja muodonmuutoskomponentit (vakiokenttä), kun $\nu=0{,}3$ ja $E=210\ \text{GPa}$.

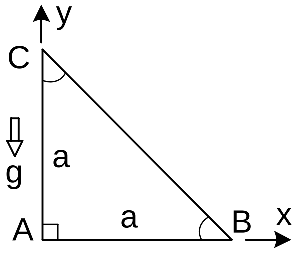


I.10. Kuvan mukaisella venymäliuskarusetilla mitataan kappaleen ulkopinnasta venymät suuntiin A, B ja C ($\varepsilon_A, \varepsilon_B, \varepsilon_C$). a) Johda kaavat, joilla päävenymät, pääsuunnat ja pääjännitykset voidaan laskea mitatuista venymistä. b) Sovella kaavoja tapaukseen $E=210\ \text{GPa}$, $\nu=0{,}3$, $\varepsilon_A=-1100\mu$, $\varepsilon_B=900\mu$ ja $\varepsilon_C=400\mu$.

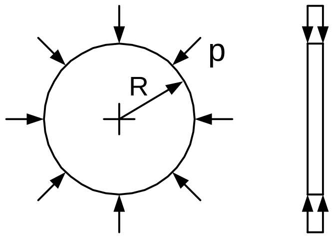
II 2D-SOLIDIRAKENTEET



II.1. Päättele oheisessa levyssä vaikuttavien jännityskomponenttien lausekkeet ja osoita, että ne toteuttavat voimamenetelmän perusyhtälöt ja reunaehdot. Ratkaise sitten levyn siirtymäkomponenttien lausekkeet ja määritä niistä pisteen C siirtymät. Materiaalivakiot ovat $E=210\ \text{GPa}$ ja $\nu=0{,}3$.



II.2. Osoita, että $\phi(x,y) = (\rho g/3)y^3$ (ρ on tiheys) kelpaa Airyn jännitysfunktioksi ja määritä sitä vastaavat reunakuormitukset oheisen suorakulmaisen kolmion muotoisessa pystyasennossa painovoimakentässä olevassa levyssä. Esitä tulos kuvan avulla ja tarkista koko levyn tasapaino.



II.3. Sovella rotaatiosymmetristä ratkaisua kuvan mukaisen tasaisen reunapaineen p kuormittaman ohuen ympyrälevyn tapaukseen.

II.4. Osoita, että tapauksessa $p_u = 0$, $p_s \neq 0$ paksuseinäisen sylinteriputken $\max \sigma_{vert}/\mathrm{MLJH}$ on putken sisäpinnalla. Johda putkelle MLJHin mukainen seinämän paksuuden mitoituskaava $\frac{s}{a} = \sqrt{\frac{\sigma_{sall}}{\sigma_{sall} - 2p_s}} - 1$. Osoita MLJHin avulla, että putken lujuutta ei voida rajattomasti lisätä paksuntamalla sen seinämää.

II.5. Paksuseinäisen sylinteriputken säteet ovat $a = 280$ mm ja $b = 700$ mm. Sisäpuolinen paine on $p_i = 2p$ ja ulkopuolinen paine $p_o = p$. Putki pääsee vapaasti laajenemaan pituussuunnassa. Osoita, että MLJHin mukaisen vertailujännityksen maksimiarvo on putken sisäpinnassa ja laske sen perusteella p_{sall}, kun $\sigma_{sall} = 140$ MPa. Laske arvoa p_{sall} vastaava putken ulkohalkaisijan muutos, kun $\nu = 0{,}3$ ja $E = 210$ GPa.

II.6. Laaditaan Mathcad-dokumentti paksuseinäisen sylinteriputken jännityksien ja säteittäissiirtymän tutkimiseen. Lähtötietoina annetaan dokumentin alussa kimmomoduuli E, Poissonin vakio ν, sisäsäde a, ulkosäde b, sisäpaine p_s, ulkopaine p_u sekä tieto siitä, onko putken pituuden muutos estetty vai ei.

Dokumentti tekee lähtötiedot saatuaan seuraavaa:

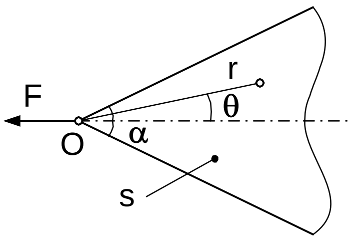
a) Piirtää samaan kuvaan jännitysten σ_r, σ_θ ja σ_z kuvaajat säteen r funktiona putken paksuuden matkalta.

b) Piirtää samaan kuvaan vertailujännitysten $\sigma_{vert}/\mathrm{MLJH}$ ja $\sigma_{vert}/\mathrm{VVEH}$ kuvaajat säteen r funktiona putken paksuuden matkalta ja etsii niiden maksimiarvot.

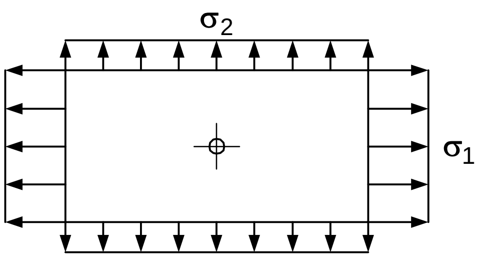
c) Piirtää säteittäissiirtymän u_r kuvaajan säteen r funktiona putken paksuuden matkalta ja etsii sen maksimiarvon.

II.7. Rengaslaikan $a = 50\ \text{mm}$, $b = 400\ \text{mm}$, $E = 210\ \text{GPa}$, $\nu = 0{,}3$, $\rho = 7850\ \text{kg/m}^3$ ja $\sigma_{sall} = 200\ \text{MPa}$. Määritä MLJH:n perusteella, kuinka suurella pyörimisnopeudella n (r/min) laikkaa voidaan korkeintaan pyörittää. Laske, paljonko laikan sisä- ja ulkosäde muuttuvat, kun laikalla on suurin sallittu pyörimisnopeus.

II.8. Ympyrälevyn $b = 500\ \text{mm}$, $\rho = 7850\ \text{kg/m}^3$, $E = 210\ \text{GPa}$ ja $\nu = 0{,}3$. Määritä kuinka suuri levyn pyörimisnopeus n voi enintään olla, kun sallittu halkaisijan muutos on $0{,}2\ \text{mm}$. Laske suurinta pyörimisnopeutta vastaava levyn normaalijännityksen maksimiarvo.

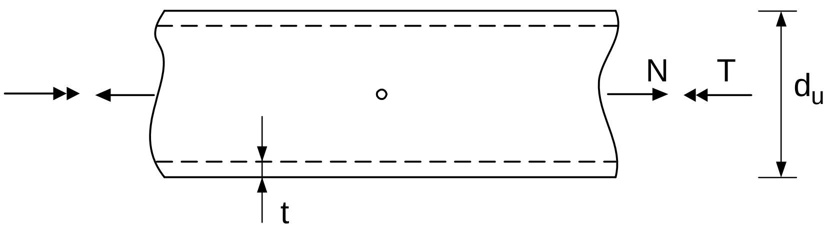


II.9. Laske napakoordinaatistossa annetusta jännitysfunktiosta $\phi(r,\theta) = C r \theta \sin\theta$ seuraavat jännityskomponenttien σ_r, σ_θ ja $\tau_{r\theta}$ lausekkeet ja osoita, että ne toteuttavat oheisen kuvan mukaisen puoliäärettömän kiilan reunaehdot pistevoiman vaikutuspistettä O lukuun ottamatta. Määritä vakio C ottamalla vapaakappalekuvaksi r-säteinen kärkiosa kiilasta ja soveltamalla tasapainoa. Esitä periaatekuvat viivan $\theta = 0^o$ jännityskomponenttien jakaantumisesta.



II.10. Osoita, että oheisen levyn pienen reiän reunapisteen $(r = a)$ $\max \sigma_\theta = 3\sigma_1 - \sigma_2$ ja $\min \sigma_\theta = -\sigma_1 + 3\sigma_2$, kun $\sigma_1 \geq \sigma_2$. Sovella tulosta isotrooppiseen $(\sigma_1 = \sigma_2)$ ja puhtaan leikkausjännitystilan $(\sigma_1 = -\sigma_2)$ loven muotolukujen määritykseen.

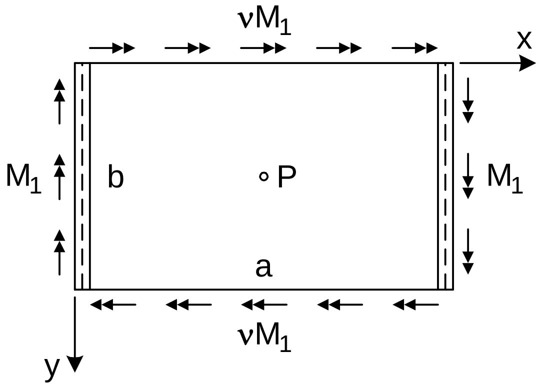
II.11. Ohutseinäisen putken ulkohalkaisija on $d_u = 161\ \text{mm}$ ja seinämän paksuus $t = 1\ \text{mm}$. Putkea rasittavat normaalivoima $N = 10\ \text{kN}$ ja vääntömomentti $T = 1{,}1\ \text{kNm}$ kuvan mukaisesti. Putken seinämään porataan reikä, jonka halkaisija on hyvin pieni putken ulkohalkaisijaan verrattuna. Määritä reiän reunan kehäjännityksen σ_θ suurin ja pienin arvo.



III LAATTARAKENTEET

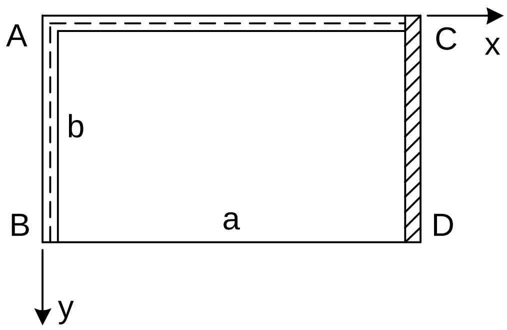
III.1. Teräslaatan paksuus $h = 6\ \mathrm{mm}$ ja materiaalivakiot ovat $E = 200\ \mathrm{GPa}$ ja $\nu = 0{,}3$. Määritä laatan suureet D ja I. Laatan kuormituksesta aiheutuu sen keskipinnan tiettyyn pisteeseen momenttitiheydet $M_x = 0{,}6\ \mathrm{kN}$, $M_y = 0{,}4\ \mathrm{kN}$ ja $M_{xy} = -0{,}5\ \mathrm{kN}$. Laske kimmopinnan kaarevuudet κ_x ja κ_y sekä kierevyys κ_{xy} tässä pisteessä. Määritä lisäksi tarkastelukohdan leikkausten $x = \mathrm{vakio}$ ja $y = \mathrm{vakio}$ jännitysjakautumat ja piirrä niiden kuvaajat. Laske vielä laatan alapinnan $\sigma_{vert}/\mathrm{MLJH}$.

III.2. Suorakulmiolaatta on reunoilta $x = 0$ ja $x = a$ niveltuettu sekä reunoilta $y = 0$ ja $y = b$ vapaa. Kuormituksena ovat reunoilla vaikuttavat vakio taivutusmomentin viivatiheydet M_1 ja νM_1. Määritä vakiot $C_1, \cdots, C_6$ siten, että



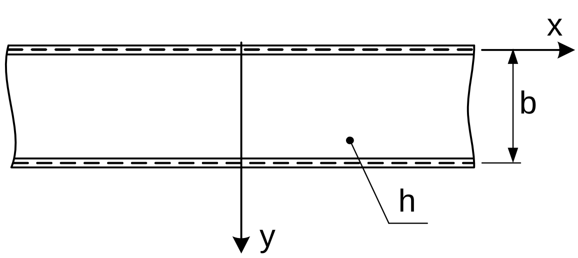
$$w = C_1 + C_2\,x + C_3\,y + C_4\,x^2 + C_5\,xy + C_6\,y^2$$

on laatan taipuman lauseke. Laske laatan kaarevuudet ja kierevyys. Selvitä, miksi pinnaksi laatan keskipinta taipuu. Laske laatan maksimi taipuma ja keskikohdan yläpinnan pisteen P $\sigma_{vert}/\mathrm{VVEH}$, kun laatan paksuus $h = 24\ \mathrm{mm}$, $a = 2\ \mathrm{m}$, $b = 1\ \mathrm{m}$, $M_1 = 1200\ \mathrm{N}$, $\nu = 0{,}3$ ja $E = 210\ \mathrm{GPa}$.



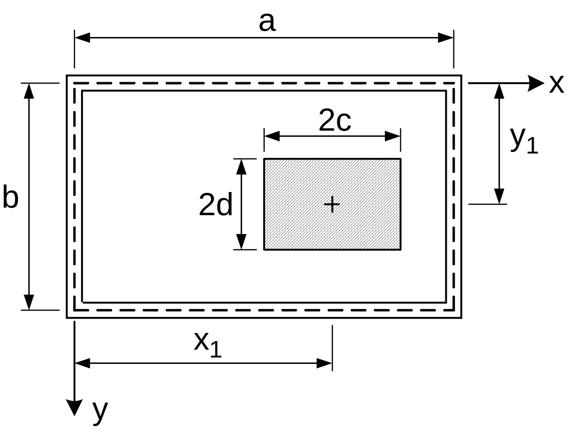
III.3. Kuvan mukaisen suorakulmiolaatan reunoilla on seuraavat tuennat: AB ja AC ovat niveltuettuja, CD on jäykästi tuettu ja BD vapaa reuna. Kirjoita laatan reunaehdot ja lausu ne taipuman w avulla.

III.4. Kuvan mukaisen laattakaistan pituus on hyvin suuri sen leveyteen b verrattuna. x-suuntaisilla reunoilla $y = 0$ ja $y = b$ on niveltuennat. Määritä laatan taipuman w ja jännityskomponenttien σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz} ja τ_{xz} lausekkeet sekä niiden maksimiarvot, kun laatalla on a) kuormitus $p(y) = p_0 \sin\dfrac{\pi y}{b}$ ja b) tasainen kuormitus p_0. $\nu = 0{,}3$.



III.5. Suorakulmion (sivut a ja b) muotoisen varastohuoneen lattialaatan sivut ovat niveltuetut. Lattialle on varastoitu rakeista ainetta, josta aiheutuvaa kuormitusta approksimoidaan lausekkeella $p(x,y) = p_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}$, jolloin p_0 on kuormitustiheys laatan keskikohdalla. Määritä laatan suureiden w, M_x, M_y, M_{xy}, Q_x ja Q_y lausekkeet. Laske korvikeleikkausvoima V_x laatan reunoilla $x = 0$ ja $x = a$ sekä korvikeleikkausvoima V_y laatan reunoilla $y = 0$ ja $y = b$ ja päättele näistä laatan tukireaktiot. Vertaa tukireaktioiden ja kuormituksen resultantteja ja totea niiden erosta laatan nurkkavoimien arvot.

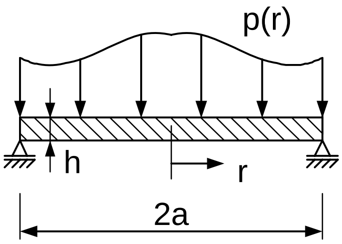
III.6. Reunoiltaan niveltuetulla suorakulmiolaatalla on kuvan mukaisella $2c \times 2d$-alueella (keskipiste on (x_1, y_1)) tasainen kuormitus p_0. a) Määritä laatan taipuman kaksoissinisarja. b) Johda raja-arvotarkastelulla a)-kohdan tuloksesta kohdassa (x_1, y_1) vaikuttavan pistevoiman P aiheuttaman taipuman kaksoissinisarja. c) Kirjoita b)-kohdan sarja tapauksessa $x_1 = \frac{a}{2}$, $y_1 = \frac{b}{2}$ ja $a = b$. Esitä maksimi taipuman sarja ja laske maksimi taipuman arvoja käyttäen eri termimääriä. Vertaa tuloksia tarkkaan arvoon $0{,}01160 \cdot \frac{Pa^2}{D}$.



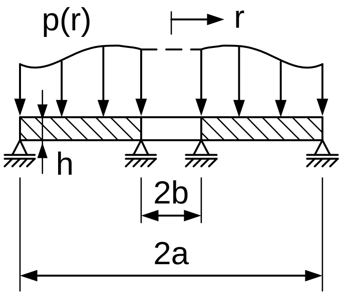
III.7. Paineen säätösysteemiin sisältyy ohut teräksinen ympyrälaatta, jonka tehtävänä on sulkea sähköpiiri taipumalla keskeltä $1\,\mathrm{mm}$, kun paine sen toisella puolella saavuttaa arvon $3\,\mathrm{MPa}$. Laske tarvittava laatan paksuus, kun sen säde on $a = 0{,}030\ \mathrm{m}$ ja reuna on jäykästi kiinnitetty. Määritä laskettua paksuutta vastaava laatan suurin normaalijännitys ja arvioi konstruktion käyttökelpoisuutta lujuuden kannalta. $\nu = 0{,}3$ ja $E = 200\ \mathrm{GPa}$.

III.8. Reunaltaan niveltuetun ympyrälaatan säde on $a = 0{,}1\,\mathrm{m}$ ja paksuus $h = 10\ \mathrm{mm}$. Laattaan kohdistuu tasainen kuormitus $p = 0{,}5\ \mathrm{MPa}$. Materiaali on alumiinia, jonka $\nu = 0{,}35$, $E = 70\ \mathrm{GPa}$ ja $R_e = 241\,\mathrm{MPa}$. Laske laatan varmuusluku myötöön nähden MLJH:n mukaan.

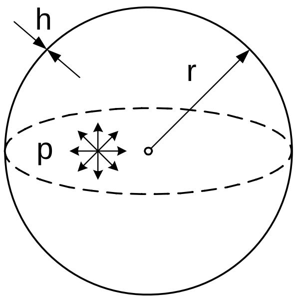
III.9. Laadi Mathcad-dokumentti, joka ratkaisee ulkoreunaltaan niveltuetun ympyrälaatan statiikan (w, M_r, M_θ, Q_r), kun dokumentissa annettava kuormitusfunktio $p(r)$ on rotaatiosymmetrinen. Dokumentin tulee myös piirtää suureiden w, M_r, M_θ, Q_r kuvaajat ja etsiä niiden ääriarvot. Sovella dokumenttia kuormitusfunktioihin a) $p(r) = p_0$ ja b) $p(r) = p_0\left(1 - \frac{r}{a}\right)$ tapauksessa $E = 210$ GPa, $\nu = 0{,}3$, $a = 200$ mm, $h = 5$ mm ja $p_0 = 0{,}1$ MPa.



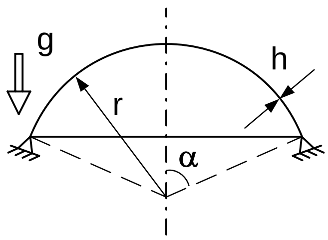
III.10. Laadi Mathcad-dokumentti, joka ratkaisee ulko- ja sisäreunaltaan niveltuetun rengaslaatan statiikan (w, M_r, M_θ, Q_r), kun dokumentissa annettava kuormitusfunktio $p(r)$ on rotaatiosymmetrinen. Dokumentin tulee myös piirtää suureiden w, M_r, M_θ, Q_r kuvaajat ja etsiä niiden ääriarvot. Sovella dokumenttia kuormitusfunktioihin a) $p(r) = p_0$ ja b) $p(r) = \frac{p_0}{a-b}(a - r)$ tapauksessa $E = 210$ GPa, $\nu = 0{,}3$, $a = 200$ mm, $b = 100$ mm, $h = 5$ mm ja $p_0 = 0{,}1$ MPa.



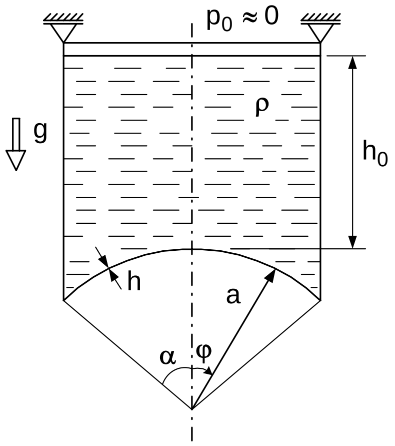
IV KUORIEN KALVOTEORIAA



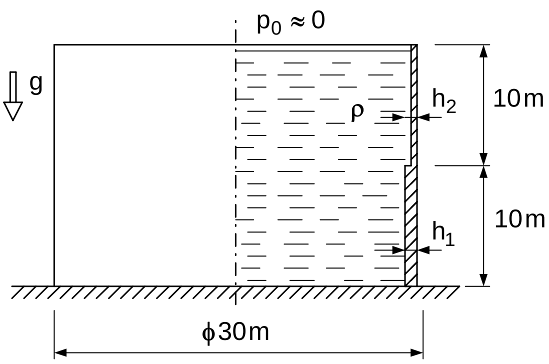
IV.1. Määritä oheisen pallokuoren sisäpuolisesta ylipaineesta p johtuvien kalvovoimien N_φ, N_θ ja $N_{\varphi\theta}$ sekä vastaavien kalvojännitysten σ_φ, σ_θ ja $\tau_{\varphi\theta}$ lausekkeet. Laske vielä pallon säteen muutos Δr, kun materiaalivakiot ovat E ja ν. Sovella tuloksia lukuarvoihin $p = 2$ MPa, $r = 1$ m, $h = 12$ mm. $E = 210$ GPa ja $\nu = 0{,}3$.



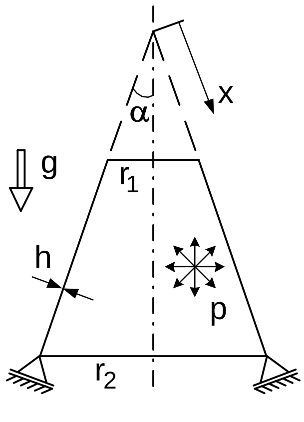
IV.2. Määritä oheisen pallokalotin muotoisen kuoren kalvovoimien N_φ ja N_θ lausekkeet, kun kuormituksena on pyörähdysakselin suuntainen painovoima. Kuoren materiaalin tiheys on ρ. Laske kalvojännitykset σ_φ ja σ_θ. Selvitä, millä kulman α arvoilla kuoressa on vain puristusjännityksiä ($0 < \alpha \le 90^\circ$).



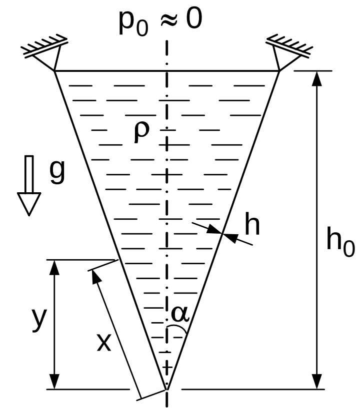
IV.3. Nestesäiliö on tehty sylinteri- ja pallokuoresta kuvan osoittamalla tavalla. Säiliössä on nestettä (tiheys ρ) korkeudelle h_0 asti. Määritä pohjaosan kalvojännityksien lausekkeet meridiaanikulman ϕ funktiona. Onko kalvoratkaisu tarkasti voimassa sylinteri- ja pallokuoren liitoskohdassa? Sovella tuloksia lukuarvoihin $\alpha = 45^\circ$, $a = 3\ \text{m}$, $h = 5\ \text{mm}$, $h_0 = 5\ \text{m}$, $\rho = 1000\ \text{kg/m}^3$, $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$. Piirrä pohjaosan kalvovoimien ja VVEHin mukaisen vertailujännityksen kuvaajat kulman φ funktiona ja etsi vertailujännityksen maksimikohta ja -arvo.



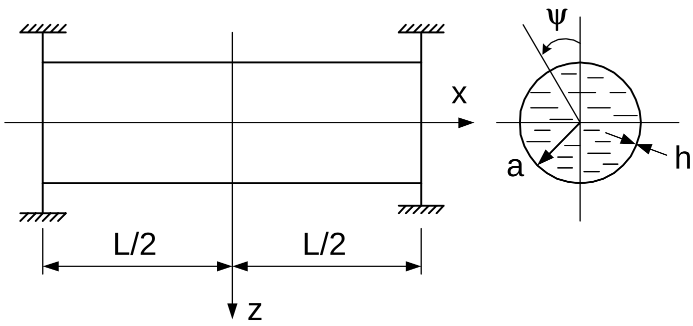
IV.4. Määritä oheisen sylinterin muotoisen öljysäiliön seinämän paksuudet h_1 ja h_2 siten, että kehän suuntainen normaalijännitys ei ylitä arvoa $75\ \text{MPa}$. Öljyn tiheys $\rho = 850\ \text{kg/m}^3$.



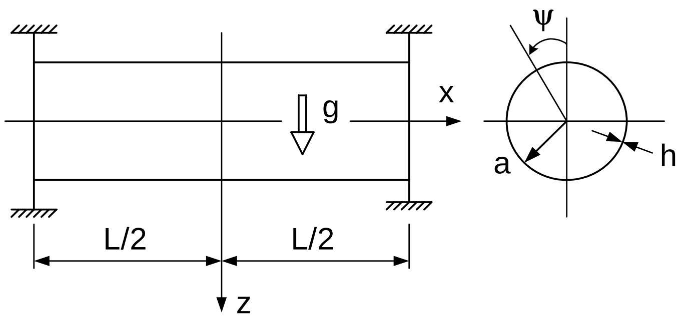
IV.5. Ratkaise oheisen katkaistun kartion kalvovoimien N_x ja N_θ lausekkeet ja niiden ääriarvot, kun kuormituksena on a) ylipaine p ja b) kuoren oma painovoima (tiheys on ρ). Tutki myös umpinainen kartio ($r_1 = 0$).



IV.6. Kuvan mukainen kartion muotoinen nestesäiliö on täynnä nestettä (tiheys ρ). Määritä kalvojännityksien lausekkeet sivuviivan suuntaisen koordinaatin x funktiona. Sovella tuloksia lukuarvoihin $\alpha = 45^\circ$, $a = 3\ \mathrm{m}$, $h = 5\ \mathrm{mm}$, $h_0 = 5\ \mathrm{m}$, $\rho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$, $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$. Piirrä kalvovoimien ja VVEHin mukaisen vertailujännityksen kuvaajat koordinaatin x funktiona ja etsi vertailujännityksen maksimikohta ja -arvo.



IV.7. Määritä kuvan ympyräsylinterikuoren kalvovoimien N_x, N_ψ ja $N_{x\psi}$ lausekkeet, kun sylinteri on täynnä nestettä, jonka tiheys on ρ. Kuori on tuettu päistään ohuilla levyillä, jolloin kuoren päissä $N_x = 0$.



IV.8. Kuvan mukaista vaaka-asennossa olevaa sylinterikuorta rasittaa sen oma painovoima $q = \rho g h$. Määritä kuoren kalvojännitykset, kun sen päissä on (a) tuennat, joiden kohdalla $N_x = 0$ ja (b) tuennat, jotka estävät kuoren pituudenmuutoksen.