

7 JÄYKÄN KAPPALEEN 3D-DYNAMIIKKAA

7.1 Yleistä

Hyvin moni jäykän kappaleen dynamiikan käytännön sovelluksista johtaa tasodynamiikan ongelmaan, jolloin voidaan soveltaa luvuissa 5 ja 6 esitettyjä tasokinematiikan ja -kinetiikan periaatteita. Toisaalta löytyy myös runsaasti sovelluksia, joissa tasoliikkeen edellytykset eivät toteudu ja kappaleen liiketilan analysointi edellyttää 3D-dynamiikan käyttöä. Kolmannen ulottuvuuden lisääminen mutkistaa kinematiikan ja kinetiikan yhtälöitä merkittävästi. Voima-, nopeus-, kiihtyvyys- ja liikemäärävektoreihin tulee tällöin vain yksi lisäkomponentti, mutta momentti-, kulmanopeus-, kulmakiihtyvyys- ja kulmaliikemäärävektoreihin tulee peräti kaksi lisäkomponenttia. Tasoliikkeessä riittää tuntea kappaleen hitausmomentti esimerkiksi sen massakeskiön kautta kulkevan liiketason normaalin suhteen, mutta 3D-liikkeessä on tunnettava sen hitausmatriisi (kolme hitausmomenttia ja kolme hitaustuloa) esimerkiksi jossakin sen massakeskiöön kiinnitetyssä koordinaatistossa. Tasoliikkeen analysointi voidaan suorittaa suunnilleen samalla työmäärällä joko trigonometriaa tai vektorimatematiikkaa käyttäen. Jäykän kappaleen 3D-liikkeen tarkastelussa ainoa yleisesti ratkaisuun johtava käsittelytapa on vektorimatematiikan käyttö.

Tässä yhteydessä ei ole tarkoitus esittää 3D-dynamiikkaa sen koko laajuudessa, vaan tarjota vain lyhyt johdanto aiheeseen. Esitettävän teorian perustella pystytään kuitenkin ratkaisemaan monia usein esiintyviä käytännön sovelluksia ja se toimii myös pohjana pitemmälle meneville dynamiikan opinnoille. Käsittely etenee seuraavassa samalla periaatteella kuin tasoliikkeen yhteydessäkin, ensin esitetään tarvittavat kinematiikan asiat ja sen jälkeen edetään kinetiikkaan.

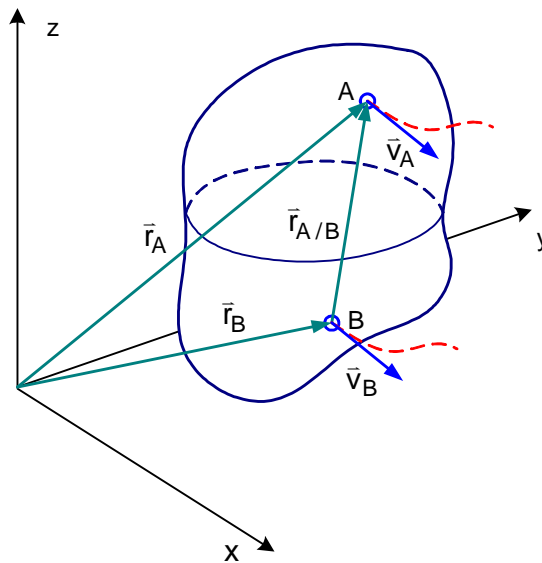
7.2 Kinematiikkaa

7.2.1 Translaatio

Kuva 7.1 esittää kolmiulotteisessa avaruudessa translaatiossa olevaa jäykkää kappaletta. Kyseessä on suoraviivainen translaatio, kun kappaleen mitkä tahansa kaksi pistettä A ja B liikkuvat pitkin yhdensuuntaisia suoria. Käyräviivaisessa translaatiossa pisteet liikkuvat pitkin yhdensuuntaisia avaruuskäyriä. Kummassakin tapauksessa kappaleen jokainen jana AB säilyttää suuntansa liikkeen aikana. Pisteiden A paikka-vektorille ja sen aikaderivaatoille voidaan kirjoittaa

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{A/B} \quad \vec{v}_A = \vec{v}_B \quad \vec{a}_A = \vec{a}_B \quad (7.1)$$

sillä vektori $\vec{r}_{A/B}$ on vakiovektori, jolloin sen aikaderivaatat ovat nollia. Kappaleen



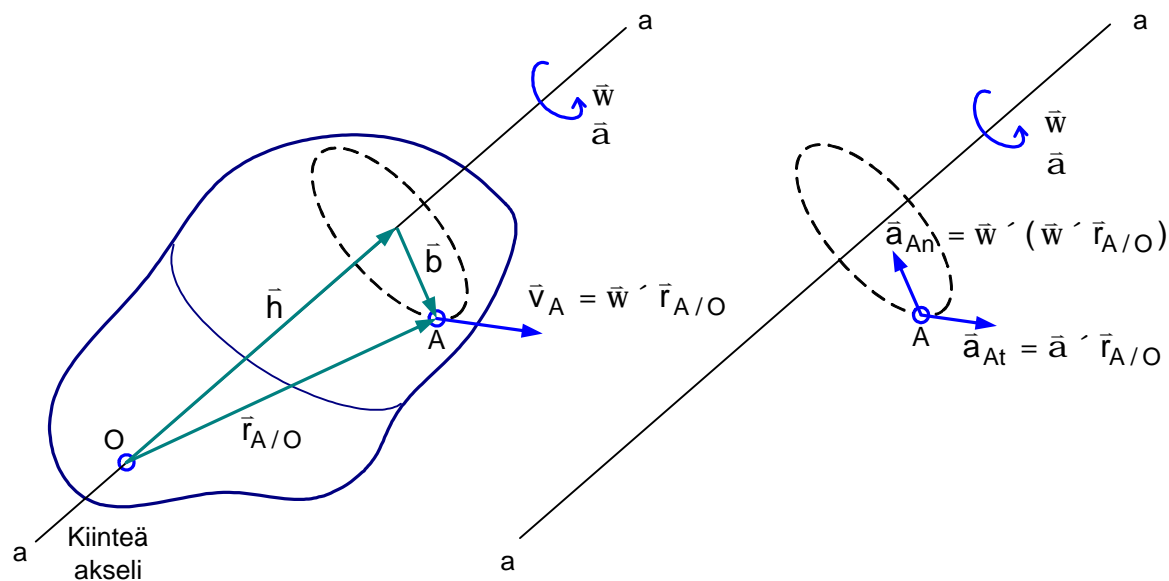
Kuva 7.1 Translaatio.

kaikilla pisteillä on siis sama nopeus- ja kiihtyvyysh vektori. Kuten jo tasoliikkeen tarkastelun yhteydessä todettiin, voidaan jäykän kappaleen translaatioliikkeen kinematiikka käsitellä partikkelin kinematiikan avulla, esimerkiksi kappaleen massakeskion liiketilän tunteminen riittää.

7.2.2 Rotaatio kiinteän akselin ympäri

Tarkastellaan sitten jäykän kappaleen rotaatiota avaruudessa kiinteän akselin a -a ympäri, jolloin kappaleen kulmanopeusvektori $\bar{\omega}$ on tämän akselin suuntainen

kuvan 7.2 mukaisesti. Vektorin $\bar{\omega}$ suunta pysyy tässä tapauksena vakiona ja ainoastaan sen suuruus voi vaihdella. Koordinaatiston origo O voidaan yleisyyttä rajoittamatta valita rotaatioakselilta. Kappaleen mielivaltainen piste A , joka ei ole rotaatioak-



Kuva 7.2 Rotaatio.

selilla, liikkuu rotaatioakselia vastaan kohtisuorassa tasossa ympyrärataa pitkin ja sen nopeusvektorille voidaan kirjoittaa

$$\bar{v}_A = \bar{\omega}' \bar{b} = \bar{\omega}' (\bar{r}_{A/O} - \bar{h}) \quad \text{P} \quad \boxed{\bar{v}_A = \bar{\omega}' \bar{r}_{A/O}} \quad (7.2)$$

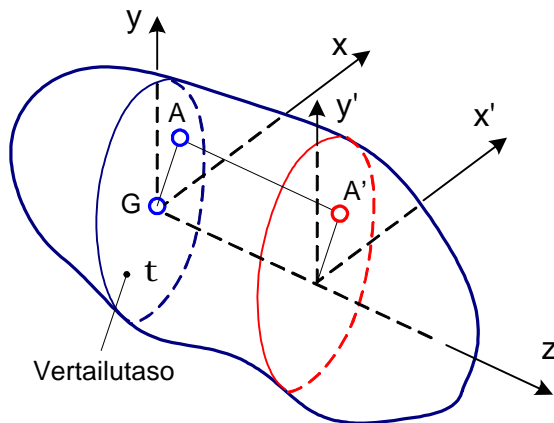
sillä $\bar{\omega}' \bar{h} = \bar{0}$. Piste A kiihtyvyysh vektori saadaan derivoimalla sen nopeusvektori ajan suhteen, jolloin seuraa tulos

$$\bar{\mathbf{a}}_A = \dot{\bar{\mathbf{w}}} \cdot \bar{\mathbf{r}}_{A/O} + \bar{\mathbf{w}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{r}}}_{A/O} \quad \text{D} \quad \bar{\mathbf{a}}_A = \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{r}}_{A/O} + \bar{\mathbf{w}} \cdot (\bar{\mathbf{w}} \cdot \bar{\mathbf{r}}_{A/O}) \quad (7.3)$$

Kiihtyvyyksvektorilla on tavanomaiset komponentit ratakäyrän tangentin ja normaalin suuntiin ja niiden suuruudet ovat $a_{An} = |\dot{\bar{\mathbf{w}}} \cdot (\bar{\mathbf{w}} \cdot \bar{\mathbf{r}}_{A/O})| = b\omega^2$ ja $a_{At} = |\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{r}}_{A/O}| = ba$. Vektorit $\bar{\mathbf{v}}_A$ ja $\bar{\mathbf{a}}_A$ ovat kohtisuorassa vektoreita $\bar{\mathbf{w}}$ ja $\bar{\mathbf{a}}$ vastaan, joten kiinteän akselin ympäri tapahtuvassa rotaatiossa pätevät tulokset $\bar{\mathbf{v}}_A \times \bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{v}}_A \times \bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}_A \times \bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{a}}_A \times \bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{0}}$.

7.2.3 Yleistetty tasoliike

Kun jäykän kappaleen kaikki pisteet liikkuvat tietyn kiinteän tason t kanssa yhden-suuntaisissa tasoissa kuvan 7.3 mukaisesti, on kyseessä ns. yleistetty tasoliike. Vertailutasoksi valitaan tavallisesti massakeskiön G kautta kulkeva taso. Nyt ei kuiten-



Kuva 7.3 Yleistetty tasoliike.

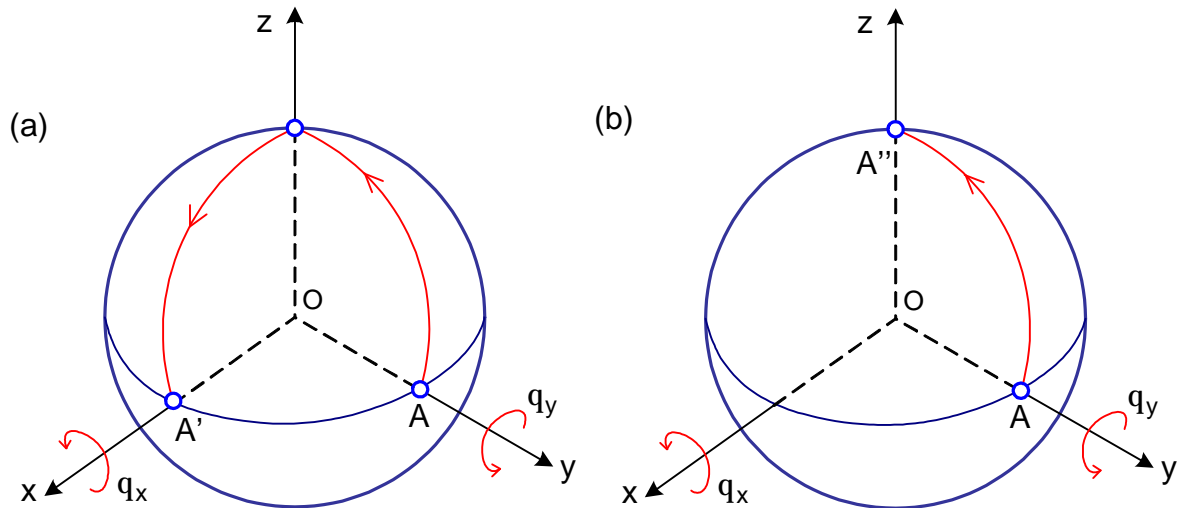
kaan oleteta kappaletta symmetriseksi tämän vertailutason suhteen, kuten tehtiin luvuissa 5 ja 6 tasoliikkeen tarkastelun yhteydessä. Koska kappaleen jokainen piste A' liikkuu samalla tavalla kuin sen vertailutasossa t sijaitseva vastinpiste A , riittää yleistetyn tasoliikkeen kinematiikan tarkasteluun luvussa 5 esitetty tasoliikkeen kinematiikka. Yleistetyn tasoliikkeen kinetiikka eroaa kuitenkin tasoliikkeen kinetiikasta pois jätetystä symmetriaoletuksesta johtuen, kuten myöhemmin tulee esille.

7.2.4 Palloliike

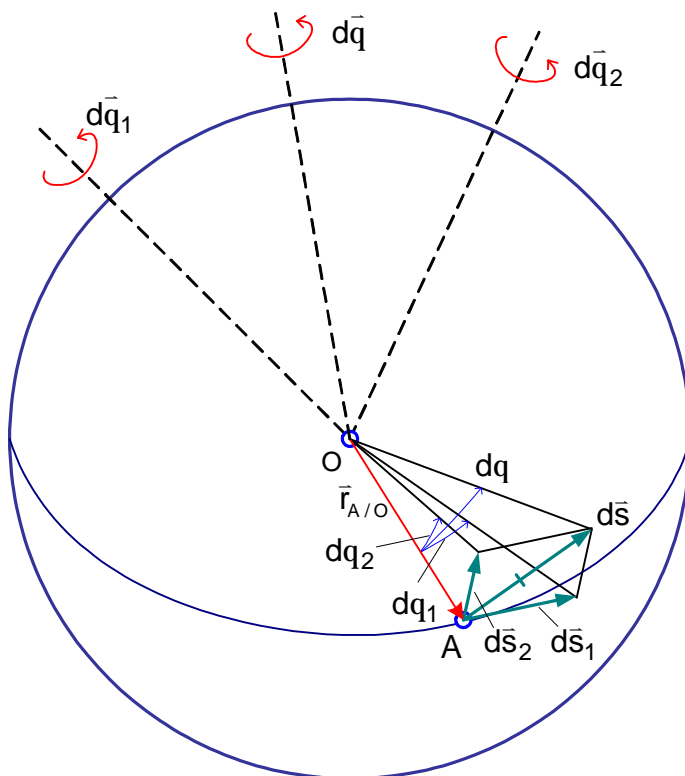
Palloliike tarkoittaa tapausta, jossa kappaleessa tai sen jatkeessa on yksi kiinteä piste liikkeen aikana. Tätä kiinteää pistettä kutsutaan palloliikkeen rotaatiokeskukseksi. Palloliikkeessä eivät kappaleen kulmanopeusvektorin suuruus eikä suunta säily vakiona ja kummastakin muutoksesta aiheutuu kappaleelle kulmakiihtyvyyttä.

Tarkastellaan aluksi, millä ehdolla rotaatioita esittävät vektorit ovat ns. aitoja vektoreita, jolloin niitä voidaan laskea yhteen suunnikassääntöä käyttäen. Kuvassa 7.4 tarkastellaan jäykästä kappaleesta erotettua pallon muotoista osaa, joka on palloliikkeessä pisteen O suhteen. xyz-koordinaatisto on kiinteä eikä siis liiku kappaleen mukana. Kuvassa (a) on esitetty pisteen A liike, kun kappale kokee 90° vastapäiväiset rotaatiot ensin x-akselin ympäri (q_x) ja sitten y-akselin ympäri (q_y), jolloin A tulee

pisteeseen A' . Kuvassa (b) edellä mainitut rotaatiot tapahtuvat päinvastaisessa järjestyksessä ja pisteen A lopullinen asema on A'' . Pisteen A loppuasema riippuu siis siitä, missä järjestyksessä rotaatiot tapahtuvat, joten rotaatioiden yhteenlasku ei noudata vaihdantalakia eikä tapahdu suunnikassäännön mukaisesti. Äärelliset rotaatiot eivät näin ollen ole aitoja vektoreita.



Kuva 7.4 Rotaatiokesimerkki.



Kuva 7.5 Pienten rotaatioiden yhteenlasku.

Differentiaalisen pienet rotaatiot sen sijaan noudattavat suunnikassääntöä. Kuvassa 7.5 on havainnollistettu pisteen O suhteen palloliikkeessä olevan kappaleen kahden pienen rotaation $d\bar{q}_1$ ja $d\bar{q}_2$ yhteisvaikutusta kappaleeseen. Pisteen A rotaatiosta $d\bar{q}_1$ johtuva siirtymävektori on $d\bar{s}_1 = d\bar{q}_1 \times \bar{r}_{A/O}$ ja rotaatiosta $d\bar{q}_2$ johtuva siirtymävektori on $d\bar{s}_2 = d\bar{q}_2 \times \bar{r}_{A/O}$. Siirtymävektorit $d\bar{s}_1$ ja $d\bar{s}_2$ ovat aitoja vektoreita, jotka voidaan laskea yhteen suunnikassäännöllä ja niiden summa on vaihdannainen. Saadaan siis seuraavat tulokset

$$d\vec{s} = d\vec{s}_1 + d\vec{s}_2 = d\vec{q}_1 \cdot \vec{r}_{A/O} + d\vec{q}_2 \cdot \vec{r}_{A/O} = (d\vec{q}_1 + d\vec{q}_2) \cdot \vec{r}_{A/O}$$

$$d\vec{s} = d\vec{s}_2 + d\vec{s}_1 = d\vec{q}_2 \cdot \vec{r}_{A/O} + d\vec{q}_1 \cdot \vec{r}_{A/O} = (d\vec{q}_2 + d\vec{q}_1) \cdot \vec{r}_{A/O}$$

Rotaatioiden $d\vec{q}_1$ ja $d\vec{q}_2$ yhteisvaikutus on täten rotaatio $d\vec{q}$ ja sille pätee

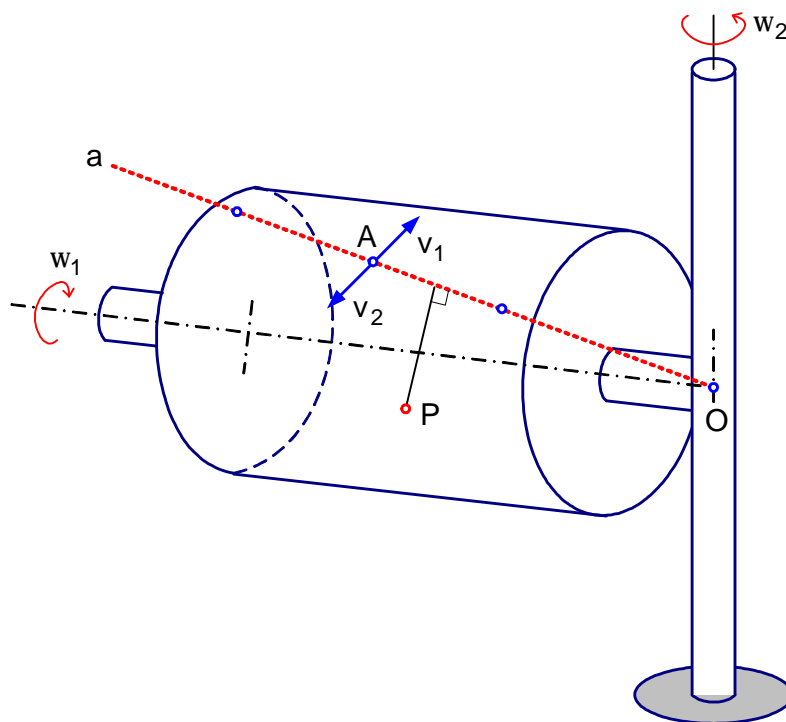
$$d\vec{q} = d\vec{q}_1 + d\vec{q}_2 = d\vec{q}_2 + d\vec{q}_1 \quad (7.4)$$

Jakamalla yhtälössä 7.4 aikadifferentiaalilla dt nähdään, että on voimassa

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \quad (7.5)$$

sillä $d\vec{q}/dt = \dot{\vec{q}} = \vec{\omega}$. Kaavan (7.5) mukaan kappaleen kulmanopeus on aito vektori, jolle voidaan yhteenlaskussa käyttää suunnikassääntöä. Voidaan myös havaita, että palloliikkeessä oleva kappale on hetkellisessä rotaatiossa keskuksen O kautta kulkevan akselin ympäri. Hetkellinen rotaatioakseli on kappaleen kulmanopeusvektorin suuntainen.

Tarkastellaan hetkellisen rotaatioakselin käsitteen havainnollistamiseksi vielä kuvan 7.6 mukaista esimerkkiä. Kuvan sylinterimäinen kappale pyörii akselinsa ympäri ta-

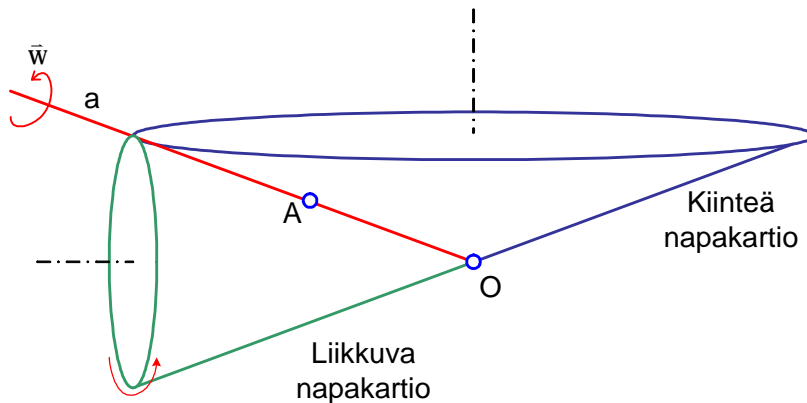


Kuva 7.6 Hetkellinen rotaatioakseli.

sisalla kulmanopeudella w_1 ja sylinterin akseli on kiinnitetty pystyakseliin, joka pyörii tasaisella kulmanopeudella w_2 . Kulmanopeuksien suunnat selviävät kuvasta. On ilmeistä, että on olemassa suora O-a, jolla sijaitsevien kappaleen pisteiden kulmanopeuksista w_1 ja w_2 aiheutuvat nopeusvektorit ovat vastavektoreita, jotka kumoavat toisensa (esim. piste A). Tämän suoran pisteiden nopeudet ovat hetkellisesti nollavektoreita ja kaikki muut kappaleen pisteet (esim. piste P) ovat het-

kellesesti rotaatiossa sen ympäri. On selvää, että liikkeen edetessä hetkellisen rotaatioakselin asento avaruudessa muuttuu ja sillä olevat kappaleen pisteet vaihtuvat, toisin sanoen hetkellisellä rotaatioakselilla olevien pisteiden kiihtyvyydet eivät ole nol-

lavektoreita. Hetkellinen rotaatio ei siis ole aitoa rotaatiota, sillä kappaleen pisteiden kiihtyvyyksiä ei voi määrittää ajattelemalla sen olevan rotaatiossa hetkellisen rotaatioakselin ympäri, vaikka nopeudet voidaankin.

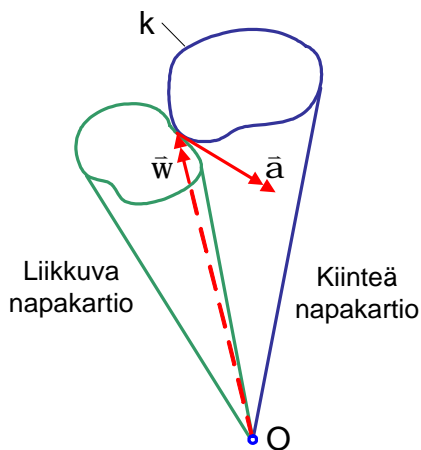


Kuva 7.7 Napakartiot.

Kuvan 7.6 esimerkin hetkellinen rotaatioakseli $O-a$ piirtää liikkeen aikana avaruuteen suoran ympyräkartion, jonka akseli on pystysuorassa. Tätä kutsutaan kiinteäksi napakartioksi. Hetkellinen rotaatioakseli piirtää myös kappaleeseen suoran ympyräkartion, jonka

akseli taas on sylinterin akseli. Tätä kutsutaan vuorostaan liikkuvaksi napakartioksi. Nämä napakartiot on esitetty kuvassa 7.7. Liikkeen tapahtuessa liikkuva napakartio

vierii pitkin kiinteätä napakartiota. Yleisemmässä palloliikkeen tapauksessa kulmanopeusvektorit eivät ole vakioita ja napakartiot eivät ole suoria ympyräkartiota, vaan yleisempiä kartiopintoja kuvan 7.8 mukaisesti, mutta joka tapauksessa liike tapahtuu niin, että liikkuva napakartio vierii pitkin kiinteätä napakartiota.



Kuva 7.8 Napakartiot.

Kulmakiihtyvyyksvektori \bar{a} saadaan derivoimalla kulmanopeusvektori \bar{w} ajan suhteen kiinteässä koordinaatistossa, toisin sanoen $\bar{a} = \dot{\bar{w}}$. Jäykän kappaleen tasoliikkeessä kulmanopeusvektorin suuruus voi muuttua, mutta sen suunta vakio. Kolmiulotteisessa liikkeessä on otettava huomioon, että sekä kulmanopeusvektorin suuruus että sen suunta voivat muuttua ajan funktiona ja

molemmista muutoksista aiheutuu kulmakiihtyvyyttä. Kulmanopeusvektorin \bar{w} kärki piirtää liikkeen aikana avaruuteen käyrän k kuvan 7.8 mukaisesti. Kulmakiihtyvyys \bar{a} on tämän käyrän tangentin suuntainen vektori ja osoittaa kulmanopeuden muutoksen suuntaan.

Kun kulmanopeusvektori esitetään kiinteässä XYZ-koordinaatistossa, toisin sanoen $\bar{w} = w_X \bar{I} + w_Y \bar{J} + w_Z \bar{K}$, saadaan kulmakiihtyvyydelle lauseke

$$\bar{a} = \dot{\bar{w}} = \dot{w}_X \bar{I} + \dot{w}_Y \bar{J} + \dot{w}_Z \bar{K} = a_X \bar{I} + a_Y \bar{J} + a_Z \bar{K} \quad (7.6)$$

sillä yksikkövektoreiden \bar{i} , \bar{j} ja \bar{k} aikaderivaatat ovat nollavektoreita. Jos taas kulmanopeusvektori esitetään kulmanopeudella \bar{W} pyörivässä xyz-koordinaatistossa, toisin sanoen $\bar{w} = w_x \bar{i} + w_y \bar{j} + w_z \bar{k}$, on kaavan $\bar{a} = \dot{\bar{w}}$ derivoinnissa otettava huomioon, että yksikkövektorit \bar{i} , \bar{j} ja \bar{k} eivät ole vakiovektoreita. Saadaan siis

$$\bar{a} = \dot{\bar{w}} = \dot{w}_x \bar{i} + \dot{w}_y \bar{j} + \dot{w}_z \bar{k} + w_x \dot{\bar{i}} + w_y \dot{\bar{j}} + w_z \dot{\bar{k}} \quad (7.7)$$

Luvun 5 kaavan (5.18) mukaan ovat voimassa tulokset

$$\dot{\bar{i}} = \bar{W} \times \bar{i} \quad \dot{\bar{j}} = \bar{W} \times \bar{j} \quad \dot{\bar{k}} = \bar{W} \times \bar{k} \quad (7.8)$$

joten sijoittamalla nämä kaavaan (7.7) saadaan

$$\bar{a} = \dot{w}_x \bar{i} + \dot{w}_y \bar{j} + \dot{w}_z \bar{k} + \bar{W} \times (w_x \bar{i} + w_y \bar{j} + w_z \bar{k}) = \dot{w}_x \bar{i} + \dot{w}_y \bar{j} + \dot{w}_z \bar{k} + \bar{W} \times \bar{w} \quad \text{P}$$

$$\bar{a} = \dot{\bar{w}} = \dot{w}_x \bar{i} + \dot{w}_y \bar{j} + \dot{w}_z \bar{k} + \bar{W} \times \bar{w} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k} + \bar{W} \times \bar{w} \quad (7.9)$$

Kun xyz-koordinaatisto kiinnitetään kappaleeseen, on $\bar{W} = \bar{w}$. Koska $\bar{w} \times \bar{w} = \bar{0}$, seuraa kaavasta (7.9) tällöin

$$\bar{a} = \dot{\bar{w}} = \dot{w}_x \bar{i} + \dot{w}_y \bar{j} + \dot{w}_z \bar{k} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k} \quad (7.10)$$

Kaavasta (7.10) nähdään, että myös kappaleeseen kiinnitetyssä ja sen mukana liikkuvassa koordinaatistossa kulmakiihtyvyyden \bar{a} komponentit ovat kulmanopeuden \bar{w} vastaavien komponenttien aikaderivaatat. Tällä tuloksella on huomattavaa merkitystä myös kinetiikassa, jossa kannattaa käyttää hyödyksi kappaleeseen kiinnitettyä koordinaatistoa, kuten myöhemmin tulee esille.

Edellä kaavassa (7.5) nähtiin, että kulmanopeuksien tapauksessa voitiin ajatella kappaleen olevan kahdessa (tai useammassa) samanaikaisessa rotaatiossa, joiden yhteistulos on suunnikassäännöllä saatava rotaatio. Kulmanopeus on näin ollen aito vektori. Kulmakiihtyvyyksistä puhuttaessa tällainen ajattelutapa ei ole mielekäs. Voidaan nimittäin osoittaa, että kulmakiihtyvyys ei ole aito vektori eikä kulmakiihtyvyyksiä voi laskea yhteen suunnikassäännöllä. Tässä yhteydessä ei todisteta edellä mainittua tulosta eikä muutenkaan tarkastella yleisesti kulmakiihtyvyyksien yhdistämistä.

Tarkastellaan seuraavassa vielä erityistapausta, jossa kappaleen kulmanopeusvektorin \bar{w} suuruus w on vakio, mutta suunta muuttuva. Kiinnitetään pyörivä xyz-koordinaatisto nyt kappaleen kulmanopeusvektoriin \bar{w} , jolloin kaavassa (7.9) \bar{W} tarkoittaa sitä kulmanopeutta, jolla kappaleen kulmanopeusvektori \bar{w} pyörii ja lisäksi näin valitussa koordinaatistossa on voimassa $\dot{w}_x = \dot{w}_y = \dot{w}_z = 0$. Kulmakiihtyvyydelle seuraa tällöin kaavasta (7.9) monissa sovelluksissa käyttökelpoinen lauseke

$$\vec{a} = \vec{W}' \vec{w} \quad (7.11)$$

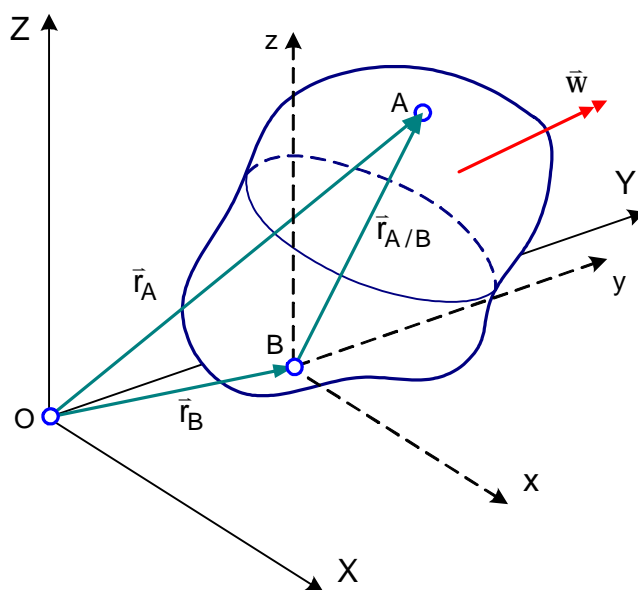
Palloliikkeessä olevan jäykän kappaleen mielivaltaisen pisteen A nopeus- ja kiihtyvyysvektorille pätevät kohdassa 7.2.2 saadut lausekkeet, kun piste O on palloliikkeen rotaatiokeskus, jolloin sen kiihtyvyys on nollavektori. Tällöin voidaan ajatella kappaleen pyörivän hetkellisen rotaatioakselin ympäri. On siis voimassa

$$\vec{v}_A = \vec{w}' \vec{r}_{A/O} \quad \vec{a}_A = \vec{a}' \vec{r}_{A/O} + \vec{w}' (\vec{w}' \vec{r}_{A/O}) \quad (7.12)$$

Missä $\vec{r}_{A/O}$ on pisteen A paikkavektori rotaatiokeskukseen O nähden. Kaava (7.12) eroaa kohdan 7.2.2 kaavasta 7.3 kuitenkin siinä, että kulmakihtyvyysvektorilla $\vec{a} = \dot{\vec{w}}$ on komponentti myös kohtisuoraan kulmanopeutta vastaan, mikä aiheutuu kulmanopeusvektorin suunnan muutoksesta. Tällöin kiihtyvyyskomponentti $\vec{a}' \vec{r}_{A/O}$ ei myöskään ole hetkellistä rotaatioakselia vastaan kohtisuorassa tasossa.

7.2.5 Yleinen liike

Yleisen kolmiulotteisen liikkeen kinematiikka voidaan parhaiten käsitellä suhteellisen liikkeen periaatteita käyttäen, jolloin tietyn kappaleen pisteen A liikkeen ajatellaan koostuvan sopivasti valitun vertailupisteen B avaruustranslaatiosta ja palloliikkeestä tämän vertailupisteen suhteen. Vertailupisteen B suhteen tapahtuvan palloliikkeen kuvailussa voidaan käyttää vertailupisteeseen kiinnitettyä ja sen mukana liikuvaa koordinaatistoa. Vertailupisteeseen kiinnitetyn koordinaatiston voidaan ajatella suoritavan vain vertailupisteen mukaista avaruustranslaatiota, jolloin akseleiden suuntaiset yksikkövektorit ovat vakiovektoreita. Toinen mahdollisuus on käyttää vertailupisteeseen kiinnitettyä ja kulmanopeudella \vec{W} pyörivää koordinaatistoa, jolloin koordinaatiston kulmanopeus \vec{W} voi olla kappaleen kulmanopeudesta \vec{w} poikkeava. Sovelluksissa on usein kuitenkin tarkoituksenmukaisinta valita $\vec{W} = \vec{w}$.



Kuva 7.9 Yleinen liike.

Tarkastellaan ensin tapausta, jossa vertailupisteeseen kiinnitetty koordinaatisto on avaruustranslaatiassa sen mukana kuvan 7.9 mukaisesti. Kappaleen kulmanopeus on \vec{w} ja kulmakihtyvyys $\vec{a} = \dot{\vec{w}}$. Kun piste B valitaan vertailupisteeksi, voidaan mielivaltaisen pisteen A nopeus- ja kiihtyvyys-

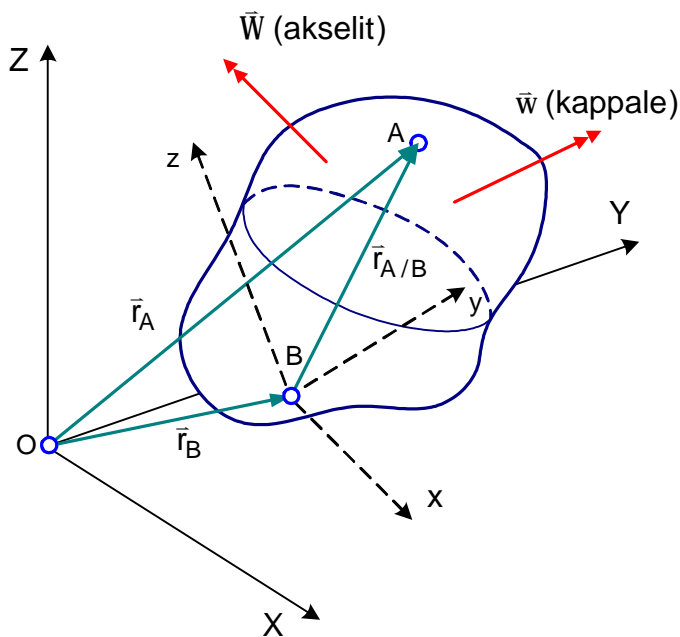
vektoreille kirjoittaa lausekkeet

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B} \quad \vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B} \quad (7.13)$$

jolloin suureet $\vec{v}_{A/B}$ ja $\vec{a}_{A/B}$ ovat pisteen A nopeus ja kiihtyvyys pisteen B suhteen. Koska piste A suorittaa palloliikettä pisteen B suhteen ja pisteeseen B kiinnitetty xyz-koordinaatisto ei pyöri, ovat edellisessä kohdassa johdetut kaavat (7.12) voimassa suhteelliselle nopeudelle ja kiihtyvyydelle. Saadaan siis tulokset

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}' \vec{r}_{A/B} \quad \vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\omega}' \vec{r}_{A/B} + \vec{\omega}' (\vec{\omega}' \vec{r}_{A/B}) \quad (7.14)$$

Vertailupisteen valinta edellä olevissa kaavoissa on tietysti aivan vapaata, mutta käytännössä vertailupisteeksi valitaan sellainen piste, jonka liiketila tunnetaan joko kokonaan tai ainakin osittain. Varsinkin kinetiikan tehtävissä kappaleen massakeskiö on usein parhaiten soveltuva vertailupiste.



Kuva 7.10 Yleinen liike.

Tutkitaan sitten tapausta, jossa vertailupisteeseen kiinnitetty xyz-koordinaatisto pyöri kulmanopeudella $\vec{\omega}$ kuvan 7.10 mukaisesti, jolloin siihen liittyvät yksikkövektorit eivät ole vakioita ja niillä on aikaderivaatat

$$\begin{aligned} \dot{\vec{i}} &= \vec{\omega}' \vec{i} \\ \dot{\vec{j}} &= \vec{\omega}' \vec{j} \\ \dot{\vec{k}} &= \vec{\omega}' \vec{k} \end{aligned} \quad (7.15)$$

Pisteen A nopeudelle ja kiihtyvyydelle pätevät nyt tasoliikkeen yhteydessä johdetut kaavat (5.23) ja (5.29), jotka yleistyvät suoraan kolmiulotteiseen tapaukseen lisäämällä

vektoreihin vain tarvittavat lisäkomponentit ja ottamalla huomioon, että nyt koordinaatiston kulmanopeutta on merkitty symbolilla $\vec{\omega}$. Saadaan siis tulokset

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}' \vec{r}_{A/B} + \vec{v}_{rel} \quad (7.16)$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}}' \vec{r}_{A/B} + \vec{\omega}' (\vec{\omega}' \vec{r}_{A/B}) + 2\vec{\omega}' \vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel} \quad (7.17)$$

Edellä olevissa kaavoissa $\vec{r}_{A/B} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ on pisteen A paikkavektori pisteeseen B nähden. Vektorin $\vec{r}_{A/B}$ suuruus on vakio, mutta sen suunta muuttuu kappaleen

pyöriessä. Suure $\vec{v}_{\text{rel}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$ on pisteen A nopeus ja $\vec{a}_{\text{rel}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$ kiihtyvyys pyörivässä xyz-koordinaatistossa. Koordinaatiston kulmanopeus \vec{W} voi siis kaavoissa (7.16) ja (7.17) olla kappaleen kulmanopeudesta \vec{w} poikkeava. Jos kuitenkin xyz-koordinaatisto kiinnitetään kappaleeseen, on $\vec{W} = \vec{w}$ ja suhteellinen nopeus \vec{v}_{rel} ja kiihtyvyys \vec{a}_{rel} ovat nollavektoreita. Tällöin kaavat (7.16) ja (7.17) ovat samat kuin kaava (7.14).

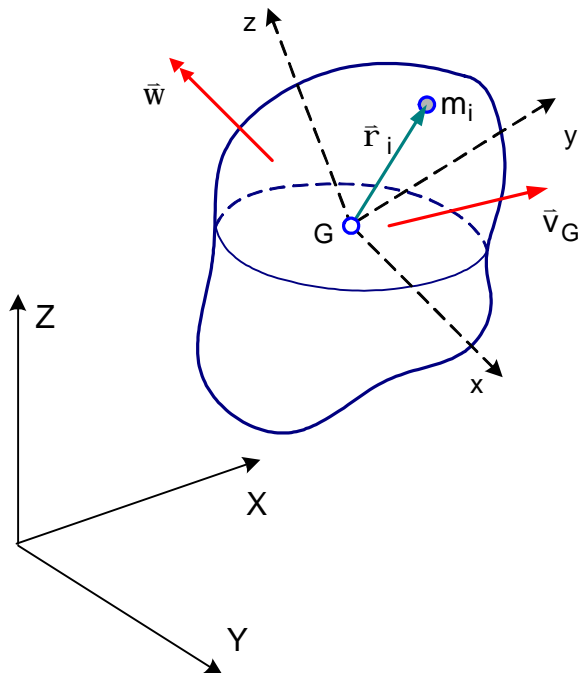
7.3 Kinetiikkaa

7.3.1 Liikemäärän momentti

Luvussa 4 johdettu yleistetty Newtonin II laki pätee mielivaltaiselle partikkelisysteemille ja siten myös jäykän kappaleen kolmiulotteiselle liikkeelle on voimassa voimaliikkeyhtälö

$$\vec{R} = m\vec{a}_G = \dot{\vec{p}} \quad \vec{p} = m\vec{v}_G \quad (7.18)$$

Luvussa 6 johdettiin yleisistä partikkelisysteemin momenttiliikkeyhtälöistä (4.18) ja (4.21) lähtien jäykän kappaleen tasoliikkeelle yhtälöt (6.4) ja (6.9). Kolmiulotteiselle jäykän kappaleen liikkeelle nämä momenttiliikkeyhtälöt ovat huomattavasti mutkikkaammat, sillä tällöin kaavoissa esiintyvällä liikemäärän momentilla on kolme komponenttia, kun tasoliikkeessä komponentteja on vain yksi.



Kuva 7.11 Yleinen liike.

Tarkastellaan nyt yleistä jäykän kappaleen kolmiulotteista liikettä kuvan 7.11 mukaisesti. xyz-koordinaatisto kiinnitetään kappaleeseen ja sen origoksi valitaan kappaleen massakeskiö G. Tällöin xyz-koordinaatiston kulmanopeus on sama kuin kappaleen kulmanopeus \vec{w} . XYZ-koordinaatisto on kiinteä. Kappaleen absoluuttinen liikemäärän momentti massakeskiön G suhteen on kaavan (4.19) mukaisesti

$$\vec{L}_G = \dot{\vec{a}} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \quad (7.19)$$

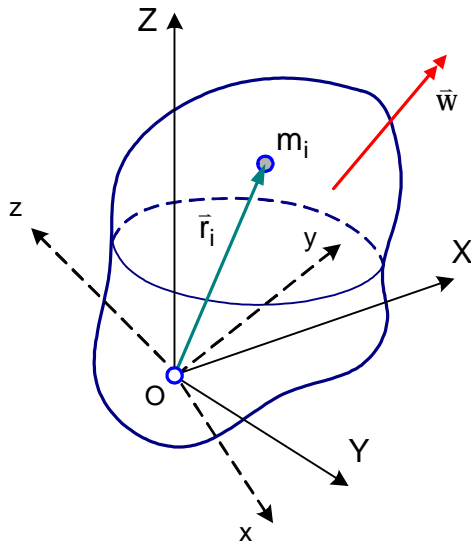
missä \vec{r}_i on massaelementin m_i paikkavektori massakeskiöön nähden ja \vec{v}_i on vastaavasti sen absoluutt-

tinen nopeusvektori. Koska jäykälle kappaleelle on voimassa suhteellisen liikkeen kaava $\vec{v}_i = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}_i$, saadaan

$$\vec{L}_G = -\vec{v}_G \times \dot{\vec{a}} m_i \vec{r}_i + \dot{\vec{a}} [\vec{r}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)] \quad (7.20)$$

Kaavassa (7.20) on $\dot{\vec{a}} m_i \vec{r}_i = m \vec{r}_G = \vec{0}$. Merkitään jatkossa massaelementtiä m_i symbolilla dm ja sen paikkavektoria symbolilla \vec{r} ja korvataan (ääretön) summa integraalilla kappaleen massan yli, jolloin kaava (7.20) menee muotoon

$$\vec{L}_G = \int_m \dot{\vec{a}} [\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] dm \quad (7.21)$$



Kuva 7.12 Palloliike.

Tarkastellaan ennen kaavan (7.21) jatkokehityä, vielä kappaleen liikemäärän momenttia, kun kappale on palloliikkeessä kiinteän pisteen O suhteen kuvan 7.12 mukaisesti. Kappaleeseen kiinnitetyn xyz-koordinaatiston origo on nyt pisteessä O. Kaavan (4.16) mukaan kappaleen absoluuttinen liikemäärän momentti kiinteän pisteen O suhteen on

$$\vec{L}_O = \dot{\vec{a}} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \quad (7.22)$$

missä \vec{r}_i on massaelementin m_i paikkavektori pisteeseen O nähden ja \vec{v}_i on sen absoluuttinen nopeusvektori. Koska jäykän kappaleen palloliikkeelle on voimassa $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$, saadaan kaavasta (7.22) seuraava tulos vaihtamalla merkintöjä edellä olevaan tapaan

$$\vec{L}_O = \int_m \dot{\vec{a}} [\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] dm \quad (7.23)$$

Kaavat (7.21) ja (7.23) ovat muodoltaan aivan samat, erona on vain se, mistä pisteestä massaelementin paikkavektori on mitattu. Merkitään seuraavassa tätä paikkavektoria kummassakin tapauksessa lausekkeella $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ja liikemäärän momenttia lyhyemmin symbolilla \vec{L} . Tällöin esitettävä teoria on voimassa kummassakin edellä kuvatussa tapauksessa. Kun merkitään vielä $\vec{\omega} = \omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k}$, voidaan kaavojen (7.21) ja (7.23) integrandeina olevat vektorikolmitulot kehittää seuraavasti

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{w}}' \cdot \bar{\mathbf{r}} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ w_x & w_y & w_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (zw_y - yw_z)\bar{i} + (xw_z - zw_x)\bar{j} + (yw_x - xw_y)\bar{k} \\ \bar{\mathbf{r}}' \cdot (\bar{\mathbf{w}}' \cdot \bar{\mathbf{r}}) &= \begin{vmatrix} & \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & & y & z \\ zw_y - yw_z & xw_z - zw_x & yw_x - xw_y & \end{vmatrix} \\ &= [(y^2 + z^2)w_x - xyw_y - xzw_z]\bar{i} + [-xyw_x + (z^2 + x^2)w_y - yzw_z]\bar{j} \\ &\quad + [-xzw_x - yzw_y + (x^2 + y^2)w_z]\bar{k}\end{aligned}$$

Liikemäärän momentin lausekkeeksi tulee näin ollen

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{L}} &= \hat{\mathbf{e}}_x \int_m \dot{\mathbf{r}}(y^2 + z^2) dm - w_y \int_m \dot{\mathbf{r}}xy dm - w_z \int_m \dot{\mathbf{r}}xz dm \hat{\mathbf{u}}_1 \bar{i} \\ &\quad + \hat{\mathbf{e}}_y \int_m \dot{\mathbf{r}}xy dm + w_y \int_m \dot{\mathbf{r}}(z^2 + x^2) dm - w_z \int_m \dot{\mathbf{r}}yz dm \hat{\mathbf{u}}_2 \bar{j} \\ &\quad + \hat{\mathbf{e}}_z \int_m \dot{\mathbf{r}}xz dm - w_y \int_m \dot{\mathbf{r}}yz dm + w_z \int_m \dot{\mathbf{r}}(x^2 + y^2) dm \hat{\mathbf{u}}_3 \bar{k}\end{aligned} \quad (7.22)$$

Edellä olevassa kaavassa olevat integraalit ovat kappaleeseen liittyviä geometrisia suureita ja niitä merkitään seuraavasti

$$\begin{aligned}I_{xx} &= \int_m \dot{\mathbf{r}}(y^2 + z^2) dm & I_{xy} &= \int_m \dot{\mathbf{r}}xy dm \\ I_{yy} &= \int_m \dot{\mathbf{r}}(z^2 + x^2) dm & I_{xz} &= \int_m \dot{\mathbf{r}}xz dm \\ I_{zz} &= \int_m \dot{\mathbf{r}}(x^2 + y^2) dm & I_{yz} &= \int_m \dot{\mathbf{r}}yz dm\end{aligned} \quad (7.23)$$

Suureet I_{xx} , I_{yy} ja I_{zz} ovat kappaleen hitausmomentit koordinaattiakseleiden suhteen ja suureet I_{xy} , I_{xz} ja I_{yz} kappaleen hitaustulot koordinaattitasojen suhteen. Kappaleen hitaussuureet kuvaavat sitä, miten sen massa on jakaantunut koordinaattiakseleiden suhteen. Monien yksinkertaisen muotoisten kappaleiden hitaussuureet löytyvät taulukoista. Monimutkaisempien kappaleiden hitaussuureet voidaan määrittää ainakin numeerisesti ja esimerkiksi monissa koneensuunnittelun tietokoneohjelmistoissa on tämä ominaisuus käytettävissä. Erityisesti on syytä huomata, että kappaleen hitaussuureet liittyvät aina joihinkin koordinaattiakseleihin. Taulukoista saatavat hitaussuureet on annettu yleensä kappaleen massakeskiöön sijoitetussa koordinaatistossa. Mikäli hitaussuureita tarvitaan johonkin toiseen origoon sijoitetussa koordinaatistos-

sa, voidaan niiden laskemiseen käyttää Steinerin siirtosääntöjä.

Käyttämällä kappaleen hitaussyureille edellä olevia merkintöjä menee liikemäärän momentin lauseke muotoon

$$\bar{L} = (+I_{xx}w_x - I_{xy}w_y - I_{xz}w_z)\bar{i} + (-I_{xy}w_x + I_{yy}w_y - I_{yz}w_z)\bar{j} + (-I_{xz}w_x - I_{yz}w_y + I_{zz}w_z)\bar{k} \quad (7.24)$$

joten sen komponentit ovat

$$\begin{aligned} L_x &= +I_{xx}w_x - I_{xy}w_y - I_{xz}w_z \\ L_y &= -I_{xy}w_x + I_{yy}w_y - I_{yz}w_z \\ L_z &= -I_{xz}w_x - I_{yz}w_y + I_{zz}w_z \end{aligned} \quad (7.25)$$

Liikemäärän momentin kaava (7.25) pätee sekä massakeskiön että palloliikkeen rotaatiokeskuksen suhteen, mutta kaavan hitausmomentit eivät tietenkään ole eri tapauksissa saman suuruiset, koska xyz-koordinaatisto sijoitettiin niissä eri tavalla. Kummassakin tapauksessa xyz-koordinaatisto kiinnitettiin kuitenkin kappaleeseen, jolloin kappaleen asento tässä koordinaatistossa ei muutu, vaikka kappale liikkuu. Tällöin saavutetaan se huomattava etu, että kappaleen hitaussyureet ovat kaavassa (7.25) vakioita. Mikäli liikemäärän momentin esittämiseen käytetään jotakin muuta kuin kappaleeseen kiinnitettyä koordinaatistoa, ovat tähän koordinaatistoon liittyvät hitaussyureet ajan funktioita, mikä tekee liikkeen analysoinnin yleensä huomattavasti mutkikkaammaksi.

Kappaleen hitaussyureista voidaan muodostaa symmetrinen 3x3-matriisi, jota sanotaan sen hitausmatriisiksi

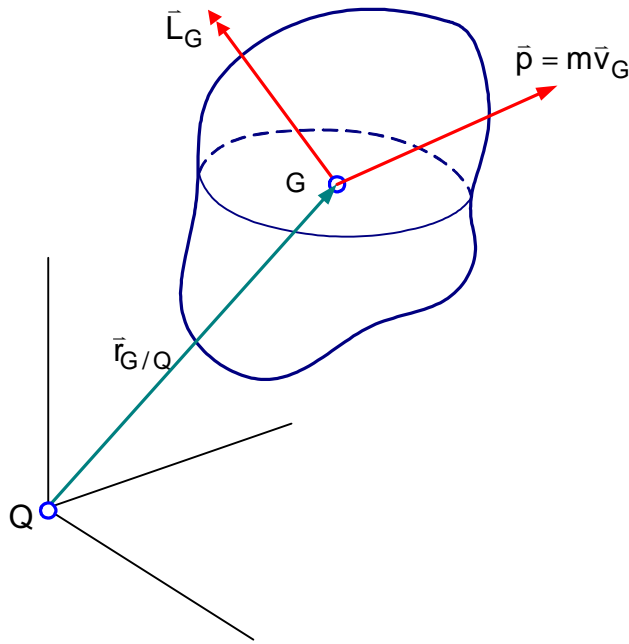
$$[I] = \begin{bmatrix} \hat{e} & \hat{e} & \hat{e} \\ I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{matrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{matrix} \quad (7.26)$$

On selvää, että kappaleen hitaussyureet tiettyyn origoon asetetussa koordinaatistossa riippuvat koordinaattiakseleiden suunnista. Jokaiseen koordinaatiston asentoon liittyy siis sitä vastaava hitausmatriisi. Voidaan todistaa, että aina on olemassa sellainen koordinaatiston asento, jossa kappaleen kaikki kolme hitaustuloa ovat nolliä. Vastaavia hitausmomentteja I_{11} , I_{22} ja I_{33} sanotaan kappaleen päähitausmomentteiksi ja koordinaattiakseleita, joiden suhteen ne esiintyvät, kutsutaan vastaavasti päähitausakseleiksi. Voidaan osoittaa myös, että päähitausmomenttien joukosta löytyvät hitausmomentin ääriarvot, toisin sanoen niiden joukossa on pienin ja suurin hitausmomentti, mitä esiintyy tähän origoon liittyvien akselien suhteen. Kun koordinaattiakseleiksi valitaan päähitausakselit, menee liikemäärän momentin lauseke (7.24) yksinkertaiseen muotoon

$$\bar{\mathbf{L}} = I_{11} w_1 \bar{\mathbf{i}}_1 + I_{22} w_2 \bar{\mathbf{i}}_2 + I_{33} w_3 \bar{\mathbf{i}}_3 \quad (7.27)$$

missä kulmanopeuden pääakseleiden suuntaisia komponentteja on merkitty w_1 , w_2 ja w_3 sekä pääakseleihin liittyviä yksikkövektoreita $\bar{\mathbf{i}}_1$, $\bar{\mathbf{i}}_2$ ja $\bar{\mathbf{i}}_3$. Päähitausmomentit ovat hitausmatriisin ominaisarvot ja päähitausakselit vastaavat hitausmatriisin ominaisvektoreita, joten niiden laskeminen onnistuu helposti. Pääakselisto on liikemäärän momentin esittämisen kannalta yksinkertainen, mutta siinä voi olla hankalampi

määrittää esimerkiksi voimien momenttivarsia. Kaavasta (7.27) näkyy, että vektorit $\bar{\mathbf{L}}$ ja $\bar{\mathbf{w}}$ ovat samansuuntaiset vain, jos kaikki päähitausmomentit ovat yhtä suuria eli $I_{11} = I_{22} = I_{33}$ tai kappale pyörii yhden pääakselinsa ympäri.



Kuva 7.13 Liikemäärän momentin siirtösääntö.

Kuvassa 7.13 on esitetty kappaleen liikemäärävektori $\bar{\mathbf{p}} = m\bar{\mathbf{v}}_G$ ja sen liikemäärän momenttivektori massakeskiön suhteen $\bar{\mathbf{L}}_G$. Molemmat vektorit on piirretty kappaleen massakeskiöön, vaikka $\bar{\mathbf{L}}_G$ on vapaa vektori, joka ei 'vaikuta' mihinkään tiettyyn pisteeseen. Vektoripari $\bar{\mathbf{p}}$ ja $\bar{\mathbf{L}}_G$ on täysin analoginen statiikan dynamin $\bar{\mathbf{R}}$ ja $\bar{\mathbf{M}}_G$ kanssa. Tämän analogian perusteella voidaan kirjoittaa lauseke liikemäärän momentille mielivaltaisen pisteen Q suhteen, jolloin Q ei ole kiinnitetty kappaleeseen

$$\bar{\mathbf{L}}_Q = \bar{\mathbf{L}}_G + \bar{\mathbf{r}}_{G/Q} \times \bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{L}}_G + \bar{\mathbf{r}}_{G/Q} \times m\bar{\mathbf{v}}_G \quad (7.28)$$

Kaava (7.28) tarjoaa liikemäärän momentille 'siirtösäännön'.

7.3.2 Liike-energia

Luvussa 4 johdettiin mielivaltaisen partikkelisysteemin liike-energialle kaava

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \left| \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i \right|^2 \quad (7.29)$$

missä v_G on massakeskiön nopeuden suuruus ja $\bar{\mathbf{r}}_i$ on massaelementin m_i paikka-

vektori massakeskiöön nähden. Ensimmäisen termin todettiin olevan systeemin translaatioliike-energia ja toisen termin todettiin johtuvan partikkelien liikkeestä massakeskiöön nähden. Ensimmäinen termi voidaan kirjoittaa myös seuraavaan muotoon

$$\frac{1}{2} m v_G^2 = \frac{1}{2} \bar{v}_G \times m \bar{v}_G = \frac{1}{2} \bar{v}_G \times \bar{p}$$

Toisessa termissä $\dot{\bar{r}}_i$ on massaelementin m_i suhteellinen nopeus massakeskiöön nähden ja jäykässä kappaleessa suhteellinen nopeus aiheutuu palloliikkeestä, joten $\dot{\bar{r}}_i = \bar{\omega} \times \bar{r}_i$. Sijoittamalla tämä liike-energian toiseen termiin ja ottamalla huomioon, että skalaarikolmitulossa pisteen ja ristin paikan voi vaihtaa saadaan

$$\begin{aligned} \dot{\bar{a}} \frac{1}{2} m_i |\dot{\bar{r}}_i|^2 &= \dot{\bar{a}} \frac{1}{2} m_i (\bar{\omega} \times \bar{r}_i) \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_i) \\ &= \dot{\bar{a}} \frac{1}{2} m_i \bar{\omega} \times \bar{r}_i \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_i) = \frac{1}{2} \bar{\omega} \times \dot{\bar{a}} m_i \bar{r}_i \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_i) = \frac{1}{2} \bar{\omega} \times \bar{L}_G \end{aligned}$$

Yhdistämällä edellä saadut tulokset saadaan jäykän kappaleen liike-energian yleiseksi kaavaksi

$$T = \frac{1}{2} \bar{v}_G \times \bar{p} + \frac{1}{2} \bar{\omega} \times \bar{L}_G \quad (7.30)$$

Kun kaavaan (7.30) sijoitetaan liikemäärän momentin lauseke (7.24) ja pistetulot kerrotaan auki, saadaan liike-energian kaava muotoon

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \left(I_{xx}^G w_x^2 + I_{yy}^G w_y^2 + I_{zz}^G w_z^2 - 2 I_{xy}^G w_x w_y - 2 I_{xz}^G w_x w_z - 2 I_{yz}^G w_y w_z \right) \quad (7.31)$$

missä hitaussyureissa oleva yläindeksi G korostaa sitä, että ne ovat massakeskiössä olevan koordinaatiston suhteen.

Jos jäykkä kappale on palloliikkeessä kiinteän pisteen O suhteen tai kappaleessa on piste O, jonka nopeus on hetkellisesti nolla, on liike-energian lauseke kirjoitettavissa myös muotoon

$$T = \dot{\bar{a}} \frac{1}{2} m_i \dot{\bar{r}}_i \times \dot{\bar{r}}_i$$

missä \bar{r}_i on massaelementin m_i paikkavektori pisteeseen O nähden ja $\dot{\bar{r}}_i$ näin ollen sen absoluuttinen nopeus. Koska tässä tapauksessa on voimassa $\dot{\bar{r}}_i = \bar{\omega} \times \bar{r}_i$, saadaan liike-energian lauseketta kehitettyä seuraavasti

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{a}} \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i &= \dot{\mathbf{a}} \frac{1}{2} m_i (\bar{\mathbf{w}} \times \bar{\mathbf{r}}_i) \times (\bar{\mathbf{w}} \times \bar{\mathbf{r}}_i) \\ &= \dot{\mathbf{a}} \frac{1}{2} m_i \bar{\mathbf{w}} \times \bar{\mathbf{r}}_i \times (\bar{\mathbf{w}} \times \bar{\mathbf{r}}_i) = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{w}} \times \dot{\mathbf{a}} m_i \bar{\mathbf{r}}_i \times (\bar{\mathbf{w}} \times \bar{\mathbf{r}}_i) = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{w}} \times \bar{\mathbf{L}}_O\end{aligned}$$

Liike-energialle tulee näin vaihtoehtoiset kaavat

$$T = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{w}} \times \bar{\mathbf{L}}_O \quad (7.30)$$

$$T = \frac{1}{2} \left(I_{xx}^O w_x^2 + I_{yy}^O w_y^2 + I_{zz}^O w_z^2 - 2 I_{xy}^O w_x w_y - 2 I_{xz}^O w_x w_z - 2 I_{yz}^O w_y w_z \right) \quad (7.31)$$

Hitaussuureissa oleva yläindeksi O viittaa siihen, että ne ovat pisteessä O olevan koordinaatiston suhteen lasketut.

7.3.3 Liikkeyhtälöt

Luvussa 4 saatiin mielivaltaisen partikkelisysteemin voima- ja momenttiliikkeyhtälöiksi

$$\bar{\mathbf{R}} = \dot{\bar{\mathbf{p}}} \quad \bar{\mathbf{M}}_G = \dot{\bar{\mathbf{L}}}_G \quad \text{tai} \quad \bar{\mathbf{M}}_O = \dot{\bar{\mathbf{L}}}_O \quad (7.32)$$

missä momenttiliikkeyhtälö on joko massakeskiön G tai kiinteän pisteen O suhteen. Kun liikemäärän momentti on esitetty kulmanopeudella $\bar{\mathbf{W}}$ pyörivässä koordinaatistossa, tulee sen absoluuttiselle aikaderivaatalle lauseke

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{L}}} &= \dot{L}_x \bar{\mathbf{i}} + \dot{L}_y \bar{\mathbf{j}} + \dot{L}_z \bar{\mathbf{k}} + L_x \dot{\bar{\mathbf{i}}} + L_y \dot{\bar{\mathbf{j}}} + L_z \dot{\bar{\mathbf{k}}} = \dot{L}_x \bar{\mathbf{i}} + \dot{L}_y \bar{\mathbf{j}} + \dot{L}_z \bar{\mathbf{k}} + \\ &+ L_x (\bar{\mathbf{W}} \times \bar{\mathbf{i}}) + L_y (\bar{\mathbf{W}} \times \bar{\mathbf{j}}) + L_z (\bar{\mathbf{W}} \times \bar{\mathbf{k}}) = \dot{L}_x \bar{\mathbf{i}} + \dot{L}_y \bar{\mathbf{j}} + \dot{L}_z \bar{\mathbf{k}} + \bar{\mathbf{W}} \times (L_x \bar{\mathbf{i}} + L_y \bar{\mathbf{j}} + L_z \bar{\mathbf{k}}) = \dot{\bar{\mathbf{L}}} + \bar{\mathbf{W}} \times \bar{\mathbf{L}}\end{aligned}$$

$$\dot{\bar{\mathbf{L}}} = (\dot{L}_x \bar{\mathbf{i}} + \dot{L}_y \bar{\mathbf{j}} + \dot{L}_z \bar{\mathbf{k}}) + \bar{\mathbf{W}} \times \bar{\mathbf{L}} \quad (7.33)$$

Kaavan (7.33) oikealla puolella suluissa olevat termit johtuvat liikemäärän momentin komponenttien suuruuksien muutoksista ja viimeinen ristitulotermi liikemäärän momentin suunnan muutoksesta. Kehittämällä ristitulotermi auki saadaan

$$\bar{\mathbf{W}} \times \bar{\mathbf{L}} = \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{i}} & \bar{\mathbf{j}} & \bar{\mathbf{k}} \\ W_x & W_y & W_z \\ L_x & L_y & L_z \end{vmatrix} = (L_z W_y - L_y W_z) \bar{\mathbf{i}} + (L_x W_z - L_z W_x) \bar{\mathbf{j}} + (L_y W_x - L_x W_y) \bar{\mathbf{k}} \quad (7.34)$$

Tuloksien (7.33) ja (7.34) perusteella jäykän kappaleen momenttiliikkeyhtälö massa-

keskiön tai kiinteän pisteen suhteen menee muotoon

$$\vec{M} = (\dot{L}_x + L_z W_y - L_y W_z) \vec{i} + (\dot{L}_y + L_x W_z - L_z W_x) \vec{j} + (\dot{L}_z + L_y W_x - L_x W_y) \vec{k} \quad (7.35)$$

mikä on näiden yhtälöiden yleisin mahdollinen muoto. W_x , W_y ja W_z ovat xyz-koordinaatiston kulmanopeuskomponentit. L_x , L_y ja L_z ovat liikemäärän momentin komponentit ja ne ovat kaavan (7.25) mukaiset lausekkeet, joissa w_x , w_y ja w_z ovat kappaleen kulmanopeuskomponentit. Suureet w_x , w_y ja w_z voivat luonnollisesti olla ajan funktioita, mutta myös kappaleen hitaussuureet kaavassa (7.25) riippuvat ajasta, kun $\vec{W} = \vec{w}$.

Sovelletaan seuraavaksi kaavaa tapaukseen $\vec{W} = \vec{w}$ eli $W_x = w_x$, $W_y = w_y$ ja $W_z = w_z$, jolloin xyz-koordinaatisto on kiinnitetty kappaleeseen. Kappaleen hitaussuureet eivät tässä koordinaatistossa riipu ajasta, joten tässä tapauksessa on

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx} w_x - I_{xy} w_y - I_{xz} w_z & L_y &= -I_{xy} w_x + I_{yy} w_y - I_{yz} w_z & L_z &= -I_{xz} w_x - I_{yz} w_y + I_{zz} w_z \\ \dot{L}_x &= I_{xx} \dot{w}_x - I_{xy} \dot{w}_y - I_{xz} \dot{w}_z & \dot{L}_y &= -I_{xy} \dot{w}_x + I_{yy} \dot{w}_y - I_{yz} \dot{w}_z & \dot{L}_z &= -I_{xz} \dot{w}_x - I_{yz} \dot{w}_y + I_{zz} \dot{w}_z \end{aligned}$$

Sijoittamalla yllä olevat päätelmät kaavaan (7.35) ja laittamalla tulos komponentti-muotoon saadaan seuraava momenttiliikkeyhtälöryhmä

$$\begin{aligned} M_x &= +I_{xx} \dot{w}_x - I_{xy} \dot{w}_y - I_{xz} \dot{w}_z + (I_{zz} - I_{yy}) w_y w_z - I_{xz} w_x w_y + I_{xy} w_x w_z + I_{yz} (w_z^2 - w_y^2) \\ M_y &= -I_{xy} \dot{w}_x + I_{yy} \dot{w}_y - I_{yz} \dot{w}_z + (I_{xx} - I_{zz}) w_x w_z - I_{xy} w_y w_z + I_{yz} w_x w_y + I_{xz} (w_x^2 - w_z^2) \\ M_z &= -I_{xz} \dot{w}_x - I_{yz} \dot{w}_y + I_{zz} \dot{w}_z + (I_{yy} - I_{xx}) w_x w_y - I_{yz} w_x w_z + I_{xz} w_y w_z + I_{xy} (w_y^2 - w_x^2) \end{aligned} \quad (7.36)$$

Kaava (7.36) antaa momenttiliikkeyhtälöt kappaleeseen kiinnitetyssä koordinaatistossa aivan yleisessä muodossa, kun momenttipisteenä on massakeskiö tai kiinteä piste.

Mikäli kappaleeseen kiinnitetty koordinaatisto on samalla pääkoordinaatisto, ovat hitaustulot nollia ja yhtälöt (7.36) yksinkertaistuvat muotoon

$$\begin{aligned} M_1 &= I_{11} \dot{w}_1 + (I_{33} - I_{22}) w_2 w_3 \\ M_2 &= I_{22} \dot{w}_2 + (I_{11} - I_{33}) w_1 w_3 \\ M_3 &= I_{33} \dot{w}_3 + (I_{22} - I_{11}) w_1 w_2 \end{aligned} \quad (7.37)$$

missä indeksit 1, 2 ja 3 viittaavat pääakseleihin. Kaavan (7.37) yhtälöitä kutsutaan Eulerin yhtälöiksi.

7.3.4 Yleistetty tasoliike

Yleistetyssä tasoliikkeessä jäykän kappaleen kaikki pisteet liikkuvat tietyn kiinteän tason t kanssa yhdensuuntaisissa tasoissa kuvan 7.3 mukaisesti. Valitaan vertailutasoksi massakeskiön G kautta kulkeva taso ja kiinnitetään xyz-koordinaatisto kappaleeseen siten, että xy-taso on vertailutasossa ja origo massakeskiössä. Tällöin on $w_x = w_y = 0$ ja $w_z \neq 0$, sillä kappale voi pyöriä vain z-akselin suuntaisen suoran ympäri. Kaavasta (7.36) seuraa tässä tapauksessa momenttiliikkeyhtälöt

$$M_x = -I_{xz} \dot{w}_z + I_{yz} w_z^2 \quad M_y = -I_{yz} \dot{w}_z - I_{xz} w_z^2 \quad M_z = I_{zz} \dot{w}_z \quad (7.38)$$

Yhtälöt (7.38) ovat voimassa myös rotaatioakselilta valitun kiinteän pisteen suhteen, jolloin hitaussyöreet on laskettava vastaavasti tähän pisteeseen vastaavasti sijoitettussa koordinaatistossa. Yhtälöistä (7.38) viimeinen vastaa luvussa 5 esillä ollutta tavallisen tasoliikkeen momenttiliikkeyhtälöä. Momenttiliikkeyhtälöiden lisäksi on tietenkin käytettävissä kappaleen voimaliikkeyhtälöt, jotka tässä tapauksessa ovat muotoa

$$R_x = ma_{Gx} \quad R_y = ma_{Gy} \quad R_z = 0 \quad (7.39)$$

Kaavoilla (7.38) ja (7.39) on melko runsaasti käytännön sovelluksia esimerkiksi pyörivien tai vierivien koneenosien tarkasteluissa.