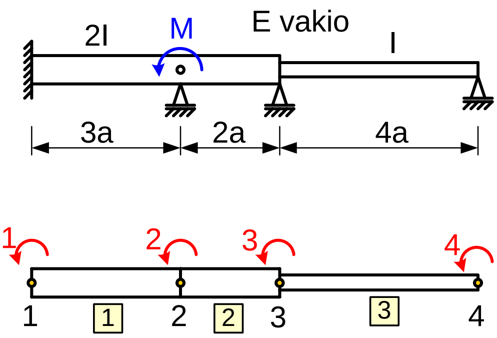
Esimerkki 3.1



Kuva 1. Jatkuva palkki.

Sovelletaan kahden vapausasteen palkkielementtiä kuvan 1 jatkuvan palkin statiikan ratkaisemiseen elementtimenetelmällä. Kun solmut sijoitetaan tukipisteiden kohdalle, eivät ne voi siirtyä pystysuunnassa, mutta niveltuentojen kohdalla olevissa solmuissa voi olla nollasta poikkeavat rotaatiot. Elementtiverkossa on kolme elementtiä ja neljä solmua, jolloin vapausasteita on neljä. Kuormituksena on solmun 2 kohdalla oleva pistemomentti M, joten ekvivalenttisia solmukuormituksia ei tarvita.

Muodostetaan elementtien jäykkyysmatriisit kaavasta (3.3)

$$[k]^1 = \frac{2EI}{3a}\begin{array}{c c} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & \;\; 2 \end{matrix} & \end{array} \qquad [k]^2 = \frac{2EI}{2a}\begin{array}{c c} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & \;\; 3 \end{matrix} & \end{array} \qquad [k]^3 = \frac{EI}{4a}\begin{array}{c c} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 & \;\; 4 \end{matrix} & \end{array}$$

jossa matriisien yhteyteen on merkitty osoitenumerot sijoittelusummausta varten. Kun summaus tehdään ja otetaan huomioon tuenta ja kuormitus, saadaan elementtiverkon perusyhtälöksi

$$\frac{EI}{6a}\begin{bmatrix} 16 & 8 & 0 & 0 \\ 8 & 40 & 12 & 0 \\ 0 & 12 & 30 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \Phi^2 \\ \Phi^3 \\ \Phi^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^1 \\ M \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tästä voidaan ottaa erilleen vapaita solmusiirtymiä vastaavat kolme viimeistä yhtälöä, jolloin saadaan

$$\frac{EI}{6a}\begin{bmatrix} 40 & 12 & 0 \\ 12 & 30 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Phi^2 \\ \Phi^3 \\ \Phi^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \Phi^2 \\ \Phi^3 \\ \Phi^4 \end{bmatrix} = \frac{Ma}{332EI} \cdot \begin{bmatrix} 57 \\ -24 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Tukimomentti M^1 saadaan perusyhtälöryhmän ensimmäisestä yhtälöstä

$$M^1 = \frac{EI}{6a} \cdot 8\Phi^2 = \frac{19}{83}M$$

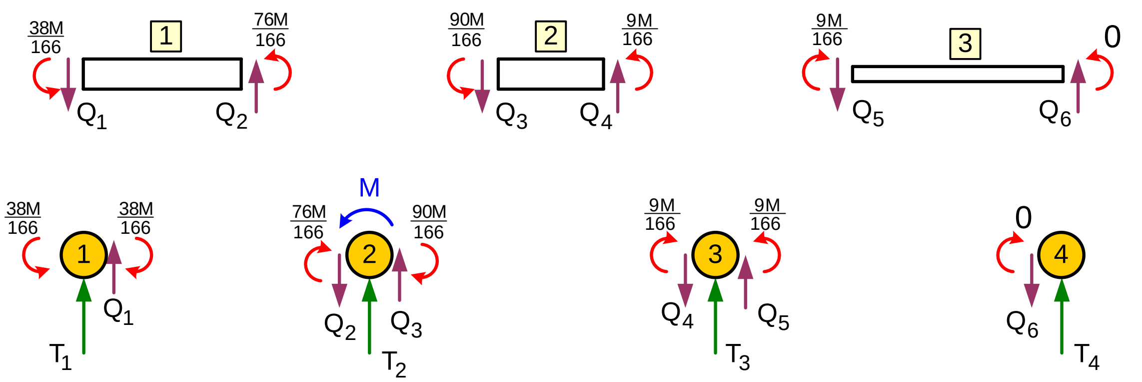
Ratkaistaan elementtien solmuvoimavektorit elementin perusyhtälöstä $\{f\}=[k]\{u\}$

$$\begin{bmatrix} m^1 \\ m^2 \end{bmatrix}^1 = \frac{2EI}{3a}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 57 \end{bmatrix}\cdot\frac{Ma}{332EI} = \begin{bmatrix} 38 \\ 76 \end{bmatrix}\cdot\frac{M}{166}$$

$$\begin{bmatrix} m^1 \\ m^2 \end{bmatrix}^2 = \frac{2EI}{2a}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 57 \\ -24 \end{bmatrix}\cdot\frac{Ma}{332EI} = \begin{bmatrix} 90 \\ 9 \end{bmatrix}\cdot\frac{M}{166}$$

$$\begin{bmatrix} m^1 \\ m^2 \end{bmatrix}^3 = \frac{EI}{4a}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -24 \\ 12 \end{bmatrix}\cdot\frac{Ma}{332EI} = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \end{bmatrix}\cdot\frac{M}{166}$$

Tulosten avulla voidaan piirtää kuvan 2 elementtien ja solmujen vapaakappalekuvat. Niihin on merkitty myös palkeissa vaikuttavat leikkausvoimat $Q_1 \cdots Q_6$, joita ei saatu elementtien perusyhtälöistä, koska poikittaista mittausta ei ollut elementissä mukana. Solmujen vapaakappalekuvista nähdään niiden olevan momenttitasapainossa.



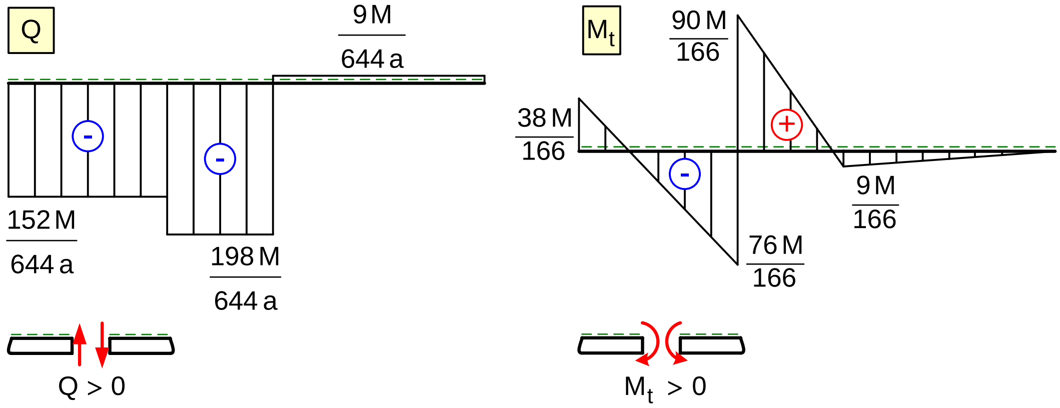
Kuva 2. Elementtien ja solmujen vapaakappalekuvat.

Leikkausvoimat $Q_1 \cdots Q_6$ voidaan laskea elementtien voima- ja momenttitasapainosta, minkä jälkeen tukireaktiot $T_1 \cdots T_4$ ratkeavat solmujen voimatasapainosta. Tulokset tasapainolaskuista ovat

$$Q_1 = Q_2 = -\frac{152M}{664a} \qquad Q_3 = Q_4 = -\frac{198M}{664a} \qquad Q_5 = Q_6 = \frac{9M}{664a}$$

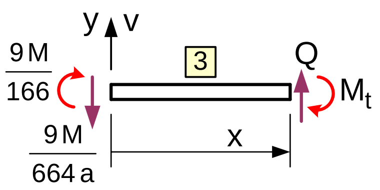
$$T_1 = \frac{152M}{664a} \qquad T_2 = \frac{46M}{664a} \qquad T_3 = -\frac{207M}{664a} \qquad T_4 = \frac{9M}{664a}$$

Kun elementtien päissä vaikuttavat voimat ja momentit tunnetaan, voidaan palkille laatia kuvan 3 leikkausvoima- ja taivutusmomenttikuva.



Kuva 3. Leikkausvoima- ja taivutusmomenttikuva.

Palkkielementtien taipumaviivat voidaan määrittää kimmoviivan differentiaaliyhtälön avulla. Tarkastellaan elementin 3 taipumaviivaa v(x) sen xy-lokaalikoordinaatistossa. Kuvan 4 perusteella elementin 3 taivutusmomentin lausekkeeksi tulee



Kuva 4. Taipuman määritys.

$$M_t(x) = \frac{9M}{166}\left(-1 + \frac{x}{4a}\right)$$

Kun yllä oleva tulos sijoitetaan kimmoviivan differentiaaliyhtälöön ja integroidaan kahdesti, seuraa taipuman lausekkeeksi

$$EIv'' = \frac{9M}{166}\left(1 - \frac{x}{4a}\right) \quad \Rightarrow \quad EIv' = \frac{9M}{166}\left(x - \frac{x^2}{8a}\right) + C_1 \quad \Rightarrow$$

$$EIv = \frac{9M}{166}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{24a}\right) + C_1 x + C_2$$

Vakiot C_1 ja C_2 saadaan ratkaistua palkin alkupään siirtymäreunaehdoista, jotka ovat $v(0) = 0$ ja $v'(0) = \Phi^3$. Näistä seuraa integroimisvakioille arvot $C_2 = 0$, $C_1 = EI\Phi^3 = -12Ma/166$ sekä taipumaksi ja kiertymäksi

$$v(x) = \frac{3M}{1328EI}\left(-\frac{x^3}{a} + 12x^2 - 32ax\right) \qquad v'(x) = \frac{3M}{1328EI}\left(-\frac{3x^2}{a} + 24x - 32a\right)$$

Edellä olevista lausekkeista tulee palkin loppupään $x = 4a$ taipumalle ja kiertymälle oikeat arvot

$$v(4a) = 0 \qquad v'(4a) = \frac{12Ma}{332EI} = \Phi^4$$