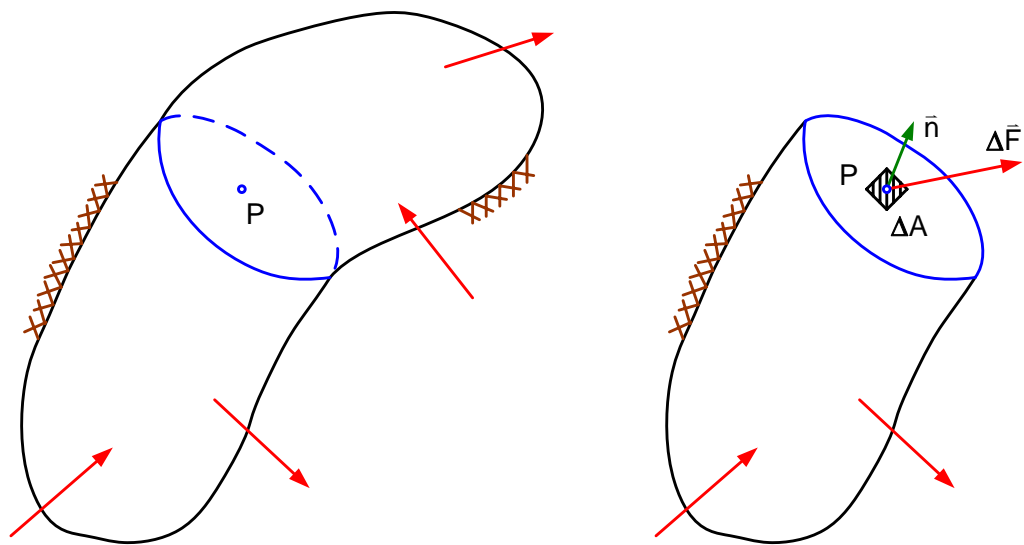


I. LUJUUSOPIN PERUSYHTÄLÖT

1 JÄNNITYSTILA

1.1 Jännitystilän käsite ja komponentit

Kuvassa 1.1 on mielivaltainen kolmiulotteinen kappale, jota kuormitetaan ja tuetaan siten, että se on tasapainossa. Kuormitus muodostuu kappaleen pintaan vaikuttavista pintavoimista (esim. paine) ja kappaleen kaikkiin osiin vaikuttavista tilavuusvoimista (esim. painovoima). Kuormituksen seurauksena kappaleen pisteisiin syntyy rasituksia. Pisteiden P kohdalla olevia rasituksia voidaan tutkia jakamalla kappale jollakin



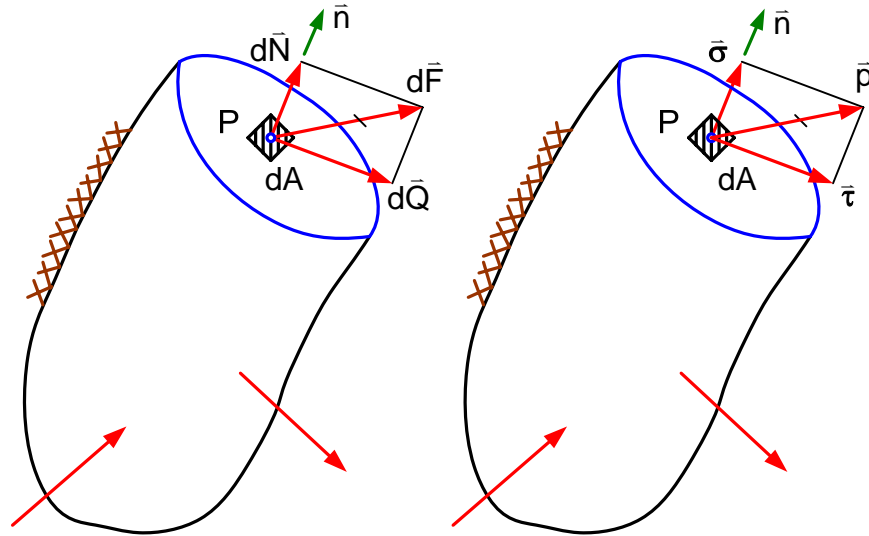
Kuva 1.1 Jännitysvektorin määrittely.

leikkauksella kahteen osaan kuvan 1.1 mukaisesti. Valitun leikkauksen määrittelee sen normaalin suuntainen yksikkövektori \vec{n} . Pisteiden P sisältävään pintaelementtiin ΔA kohdistuvien sisäisten voimien resultantti on $\Delta \vec{F}$. Pisteeseen P liittyvän pinta-elementin ΔA , jonka normaalin suunta on \vec{n} , jännitysvektori \vec{p} on raja-arvo

$$\vec{p} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A} = \frac{d\vec{F}}{dA} \quad (1.1)$$

Kaavan 1.1 raja-arvossa oletetaan, että elementin ΔA pientyessä piste P pysyy sen sisällä ja resultantin $\Delta \vec{F}$ vaikutuspiste lähestyy rajatta pistettä P . Kun aineelle oletetaan kontinuumimalli (jatkuva aine), raja-arvo 1.1 on olemassa. Jännitysvektorin \vec{p} lauseke riippuu valitusta leikkauksesta eli vektorista \vec{n} .

Kappaleen pisteen P jännitystilalla tarkoitetaan kaikkien sen kautta asetettujen pintaelementtien jännitysvektorien muodostamaa joukkoa. Kappaleen jännitystilakenttä muodostuu sen kaikkien pisteiden jännitystiloista.



Kuva 1.2 Jännitysvektorin komponentit.

Kuvassa 1.2 on differentiaalelementtiin dA kohdistuvan voimavektorin $d\bar{F}$ suora- kulmaiset komponentit $d\bar{N}$ ja $d\bar{Q}$. $d\bar{N}$ on normaalin \bar{n} suuntainen ja sitä sanotaan normaalivoimadifferentiaaliksi. $d\bar{Q}$ on pintaelementin dA suuntainen ja on nimeltään leikkausvoimadifferentiaali. Voidaan siis kirjoittaa

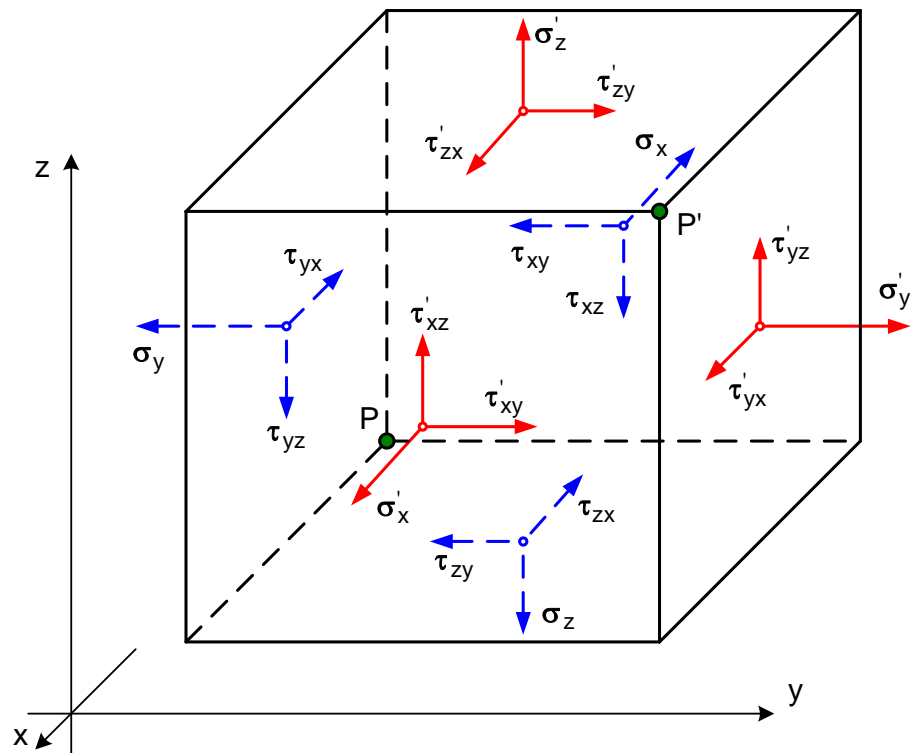
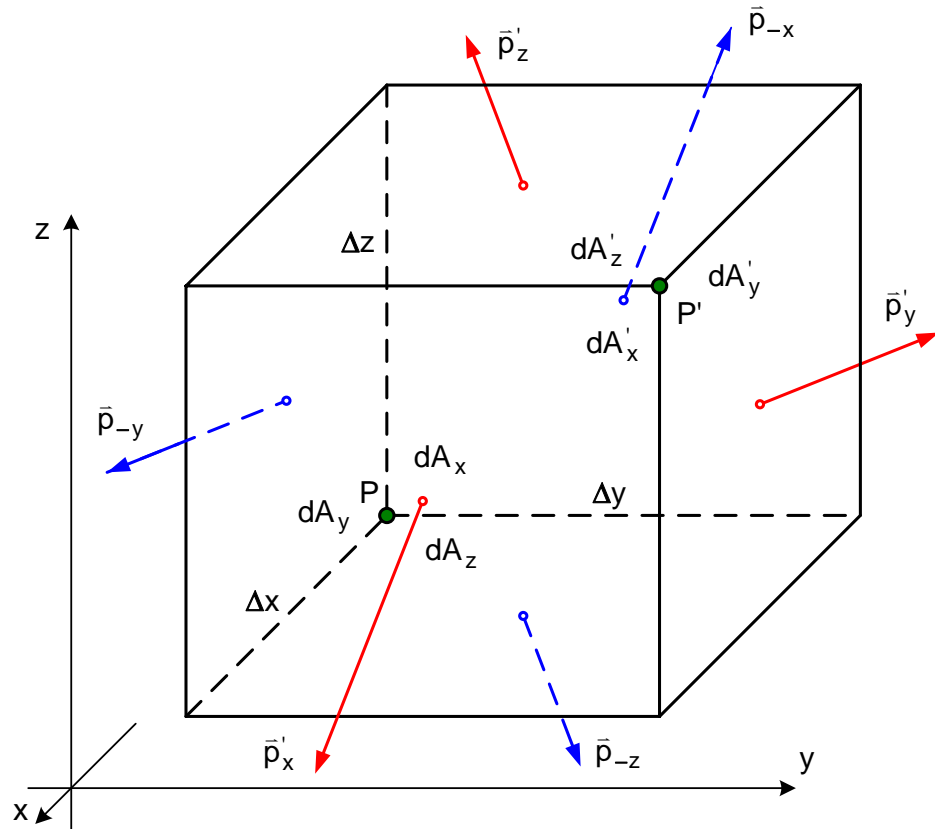
$$d\bar{F} = d\bar{N} + d\bar{Q} \quad (1.2)$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön (1.1) saadaan

$$\bar{p} = \frac{d\bar{N}}{dA} + \frac{d\bar{Q}}{dA} = \bar{\sigma} + \bar{\tau} \quad (1.3)$$

jossa vektoria $\bar{\sigma}$ sanotaan normaalijännitysvektoriksi ja vektoria $\bar{\tau}$ leikkausjännitysvektoriksi. Kuvassa 1.2 on jännitysvektorin \bar{p} jako komponentteihin $\bar{\sigma}$ ja $\bar{\tau}$.

Pisteen P jännitystilän tunteminen edellyttää kaikkien siihen liittyvien pintaelementtien jännitysvektorien tuntemista. Näitä pintaelementtejä on ääretön määrä. Myöhemmin tullaan osoittamaan, että riittää tuntea kolmen toisiaan vastaan kohtisuorassa olevan pintaelementin jännitysvektorit. Nämä kolme pintaelementtiä valitaan koordinaattitasoista, jolloin niiden normaalit ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Kuvassa 1.3 dA_x , dA_y ja dA_z ovat tällaiset pintaelementit normaalien ollessa koordinaattiakselien negatiivisiin suuntiin. Näiden pintaelementtien jännitysvektorit ovat \bar{p}_{-x} , \bar{p}_{-y} ja \bar{p}_{-z} . Ne voidaan jakaa koordinaattiakselien suuntaisiksi komponenteiksi, jolloin kuhunkin pintaelementtiin tulee yksi normaalijännitys- ja kaksi leikkausjännityskomponenttia kuvan 1.3 mukaisesti. Kun koordinaattiakselien positiivisiin suuntiin olevia yksikkövektoreita merkitään \bar{i} , \bar{j} ja \bar{k} , saadaan pintaelementtien dA_x , dA_y ja dA_z jännitysvektoreiksi kuvan 1.3 perusteella



Kuva 1.3 Jännitystilän komponentit.

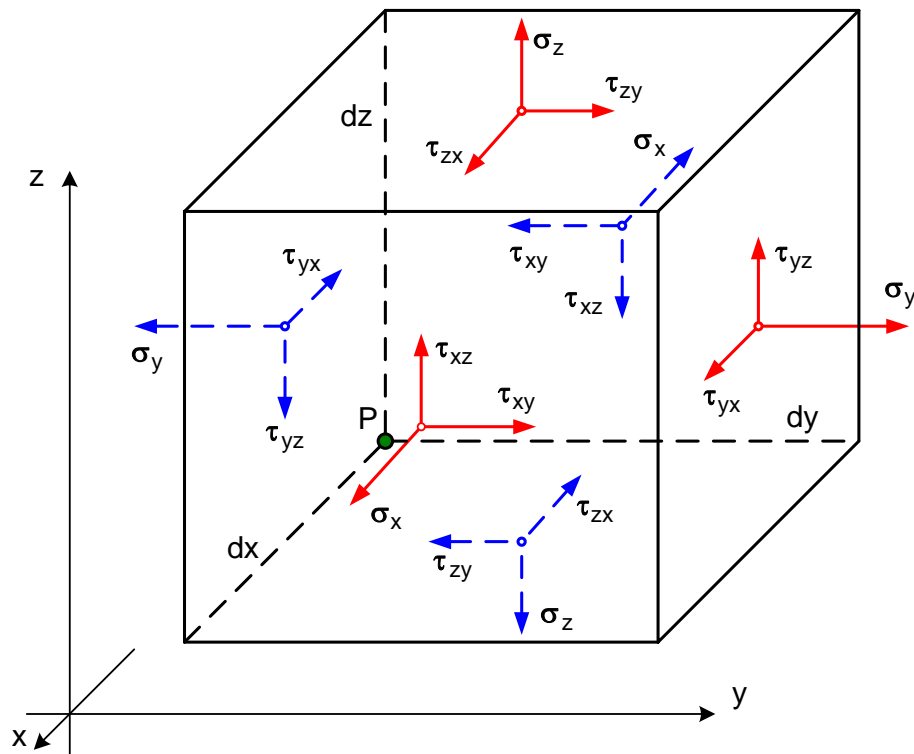
$$\begin{aligned}
\bar{p}_{-x} &= -\sigma_x \bar{i} - \tau_{xy} \bar{j} - \tau_{xz} \bar{k} \\
\bar{p}_{-y} &= -\tau_{yx} \bar{i} - \sigma_y \bar{j} - \tau_{yz} \bar{k} \\
\bar{p}_{-z} &= -\tau_{zx} \bar{i} - \tau_{zy} \bar{j} - \sigma_z \bar{k}
\end{aligned}
\tag{1.4}$$

Kaavassa (1.4) on käytetty merkintätapaa, jossa ensimmäinen alaindeksi ilmaisee pintaelementin normaalin suunnan ja leikkausjännityskomponenteissa toinen alaindeksi ilmaisee jännityskomponentin suunnan.

Pistettä P mielivaltaisen lähellä olevan pisteen P' jännitystilaa voidaan hallita käyttämällä kuvan 1.3 mukaisia pintaelementtejä dA'_x , dA'_y ja dA'_z , joiden normaalit ovat koordinaattiakselien positiivisiin suuntiin. Näiden pintaelementtien jännitysvektorit ovat kuvan 1.3 mukaan

$$\begin{aligned}
\bar{p}'_x &= \sigma'_x \bar{i} + \tau'_{xy} \bar{j} + \tau'_{xz} \bar{k} \\
\bar{p}'_y &= \tau'_{yx} \bar{i} + \sigma'_y \bar{j} + \tau'_{yz} \bar{k} \\
\bar{p}'_z &= \tau'_{zx} \bar{i} + \tau'_{zy} \bar{j} + \sigma'_z \bar{k}
\end{aligned}
\tag{1.5}$$

Kun piste P' lähestyy pistettä P, voiman ja vastavoiman periaatteesta seuraa, että $\bar{p}'_x \rightarrow \bar{p}_x = -\bar{p}_{-x}$, $\bar{p}'_y \rightarrow \bar{p}_y = -\bar{p}_{-y}$ ja $\bar{p}'_z \rightarrow \bar{p}_z = -\bar{p}_{-z}$, ts. $\sigma'_x \rightarrow \sigma_x$, $\tau'_{xy} \rightarrow \tau_{xy}$, jne.



Kuva 1.4 Jännityselementti.

Pisteen P jännitystilän havainnollistamiseen voidaan käyttää kuvan 1.4 mukaista differentiaalisuuntaissärmiötä, jonka sivujen pituudet ajatellaan äärettömän pieniksi. Tällöin särmiön vastakkaisten sivujen vastinjännityskomponentit ovat yhtä suuria ja vastakkaissuuntaisia. Pisteen P kautta kulkevia tahoja sanotaan negatiivisiksi tahoiksi ja muita positiivisiksi tahoiksi. Nimitykset johtuvat normaalien suunnista. Itse särmiötä sanotaan jännityselementiksi.

Kuvasta 1.4 ilmenee myös jännityskomponenttien merkkisopimus. Positiivisen tahon jännityskomponentti on positiivinen, jos se on koordinaattiakselin positiiviseen suuntaan, mutta negatiivisen tahon jännityskomponentti on positiivinen, jos se on koordinaattiakselin negatiiviseen suuntaan.

Pisteen jännitystila on tunnettu, kun tunnetaan sitä vastaavan jännityselementin positiivisten tahojen jännityskomponentit. Nämä voidaan järjestää kolmiriviseksi neliömatriisiksi $[S]$, jota sanotaan jännitysmatriisiksi. Jännitysmatriisin kukin vaakarivi sisältää yhden tahon jännityskomponentit ja sen lauseke on

$$[S] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{sivun normaali} \\ x \\ y \\ z \end{array} \quad (1.6)$$

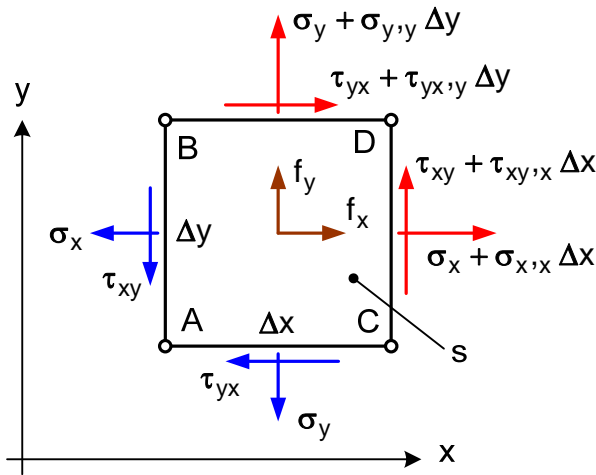
1.2 Jännityskomponenttien tasapainoyhtälöt

Yleensä kuormitetun kappaleen jännitystila on erilainen sen eri pisteissä. Näin oletettiin kuvassa 1.3 pisteille P ja P'. Siirryttäessä kappaleen pisteestä sen lähinaapuripisteeseen ei jännitystilän vaihtelu voi olla täysin mielivaltaista, vaan sen on tapahduttava statiikan sääntöjen mukaisesti. Tästä seuraa, että jännityskomponenttien on toteutettava kappaleen pisteissä tietyt osittaisdifferentiaaliyhtälöt, joita sanotaan jännityskomponenttien tasapainoyhtälöiksi.

1.2.1 Tasojännitystila

Johdetaan tasapainoyhtälöt ensin tasojännitystilän tapauksessa, jolloin vain xy-tason suuntaiset jännitys- ja tilavuusvoimakomponentit ovat nollasta poikkeavia ja lisäksi z-koordinaatista riippumattomia. Tällöin voidaan tarkastella kuvan 1.5 mukaista kappaleen osaa, jonka sivujen pituudet ovat Δx ja Δy sekä paksuus s . Koska Δx ja Δy oletetaan hyvin pieniksi (ja lopulta $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$), jännityskomponentit voidaan olettaa vakioiksi kullakin kuvan 1.5 alkion sivulla. Näitä edustavat sivujen keskipisteisiin piirretyt jännityskomponentit. Siirryttäessä sivulta AB sivulle CD saa komponentti σ_x lisäyksen $\Delta\sigma_x$, jota approksimoidaan differentiaalilla eli $\Delta\sigma_x = \sigma_{x,x} \Delta x$, jossa pilkun

jälkeen merkitty alaindeksi tarkoittaa derivointia kyseisen suureen suhteen. Sivun CD x-suuntainen normaalijännitys on siis $\sigma_x + \sigma_{x,x} \Delta x$. Vastaavasti saadaan kuvan 1.5



Kuva 1.5 Tasojännitystilän tasapainoyhtälöt.

muut jännityskomponentit. Elementtiin vaikuttavat lisäksi x- ja y-akselin suuntaiset tilavuusvoimat f_x ja f_y . Tilavuusvoimat voivat aiheutua esimerkiksi painovoimasta tai kappaleen pyörimisestä. Jos painovoima vaikuttaa y-akselin negatiiviseen suuntaan, on $f_x = 0$ ja $f_y = -\rho g$, jossa ρ on kappaleen materiaalin tiheys.

Koska tarkasteltava kappale on tasapainossa, on myös sen jokainen osa tasapainossa. Tämä pätee myös kuvan 1.5 alkioon. Tasapaino tasossa merkitsee sitä, että voima-

tasapaino toteutuu x- ja y-suunnissa ja pisteen A suhteen toteutuu momenttitasapaino. Momenttitasapainoyhtälö pisteen A suhteen on

$$\begin{aligned} & \sigma_x \Delta y \frac{\Delta y}{2} \cdot s - (\sigma_x + \sigma_{x,x} \Delta x) \Delta y \frac{\Delta y}{2} \cdot s + (\tau_{xy} + \tau_{xy,x} \Delta x) \Delta y \Delta x \cdot s - \sigma_y \Delta x \frac{\Delta x}{2} \cdot s + \\ & (\sigma_y + \sigma_{y,y} \Delta y) \Delta x \frac{\Delta x}{2} \cdot s - (\tau_{yx} + \tau_{yx,y} \Delta y) \Delta x \Delta y \cdot s - f_x \Delta x \Delta y \frac{\Delta y}{2} \cdot s + f_y \Delta x \Delta y \frac{\Delta x}{2} \cdot s = 0 \\ \Rightarrow & -\sigma_{x,x} \frac{\Delta y}{2} + \tau_{xy} + \tau_{xy,x} \Delta x + \sigma_{y,y} \frac{\Delta x}{2} - \tau_{yx} + \tau_{yx,y} \Delta y - f_x \frac{\Delta y}{2} + f_y \frac{\Delta x}{2} = 0 \end{aligned}$$

Kun $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ saadaan tulokseksi leikkausjännitysten parittainen yhtäsuuruus eli

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (1.7)$$

Voimatasapaino x-suunnassa antaa

$$-\sigma_x \Delta y \cdot s + (\sigma_x + \sigma_{x,x} \Delta x) \Delta y \cdot s - \tau_{yx} \Delta x + (\tau_{yx} + \tau_{yx,y} \Delta y) \Delta x \cdot s + f_x \Delta x \Delta y \cdot s = 0$$

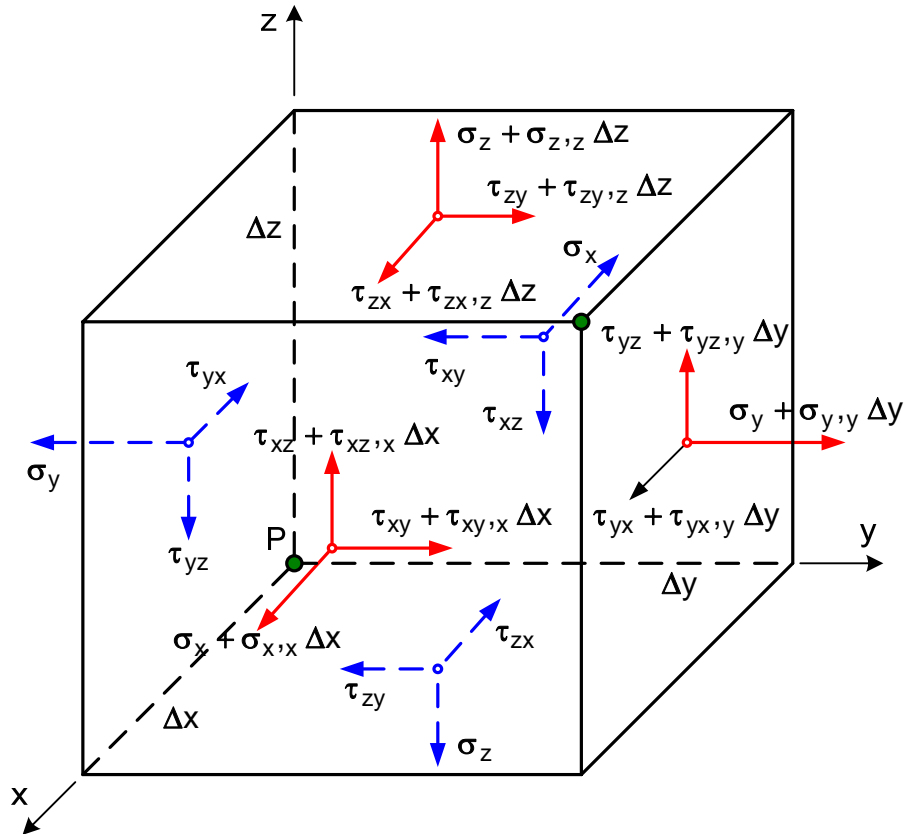
josta seuraa yhtälön (1.7) avulla kaavan (1.8) ensimmäinen yhtälö. Voimatasapainoyhtälöstä y-suunnassa saadaan vastaavalla tavalla kaavan (1.8) toinen yhtälö.

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + f_x = 0 \quad \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + f_y = 0 \quad (1.8)$$

Yhtälöt (1.8) ovat jännityskomponenttien tasapainoyhtälöt tasojännitystilassa.

1.2.2 Yleinen jännitystila

Yleisessä kolmiulotteisessa tapauksessa tarkastellaan kuvan 1.6 mukaista suorakulmaisen särmiön muotoista materiaaliälykiötä, johon vaikuttavat tilavuusvoimat x- ja y- ja z-suunnissa ovat f_x , f_y ja f_z .



Kuva 1.6 Tasapainoyhtälöt yleisessä tapauksessa.

Momenttiyhtälöistä x-, y- ja z-akselien suhteen seuraavat leikkausjännitysten parittaiset yhtäsuuruudet

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (1.9)$$

Jännitysmatriisi on symmetrinen ja sille voidaan kirjoittaa lauseke

$$[S] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Voimatasapainoista x-, y- ja z-akselien suunnissa saadaan jännityskomponenttien tasapainoyhtälöt

$$\begin{aligned}
 \sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} + f_x &= 0 \\
 \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{yz,z} + f_y &= 0 \\
 \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} + f_z &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1.11}$$

Kappaleen jännitystilakenttä on siis statiikan kannalta mahdollinen vain, jos se toteuttaa osittaisdifferentiaaliyhtälöt (1.11).

1.3 Jännityskomponenttien transformointi

Kuten kohdassa 1.1 esitettiin, riittää pisteen P jännitystilan hallitsemiseen kolmen siihen liittyvän toisiaan vastaan kohtisuoran pintaelementin jännitysvektorien \bar{p} tunteminen. Tämä merkitsee jännityselementin positiivisten tahojen yhdeksän jännityskomponentin tuntemista. Kohdassa 1.2 näytettiin leikkausjännitysten parittainen yhtäsuuruus, joten tarvitaan vain kuusi jännityskomponenttia. Seuraavassa näytetään, miten pisteeseen P liittyvän mielivaltaisen pintaelementin jännityskomponentit voidaan määrittää, kun nämä kuusi jännityskomponenttia tunnetaan.

1.3.1 Tasojännitystila

Tutkitaan aluksi kuvan 1.7 tasojännitystilaa xy-tasossa. Määritetään jännityskomponentit pintaelementissä BC, jonka normaali \bar{n} on x'-akselin suuntaan, kun jännityskomponentit σ_x , σ_y ja τ_{xy} tunnetaan. Pintaelementin BC yksikkönormaali olkoon

$$\bar{n} = a\bar{i} + b\bar{j} \tag{1.12}$$

jossa $a = \cos(\bar{n}, x) = \cos\theta$ ja $b = \cos(\bar{n}, y) = \sin\theta$. Elementin BC jännitysvektori on

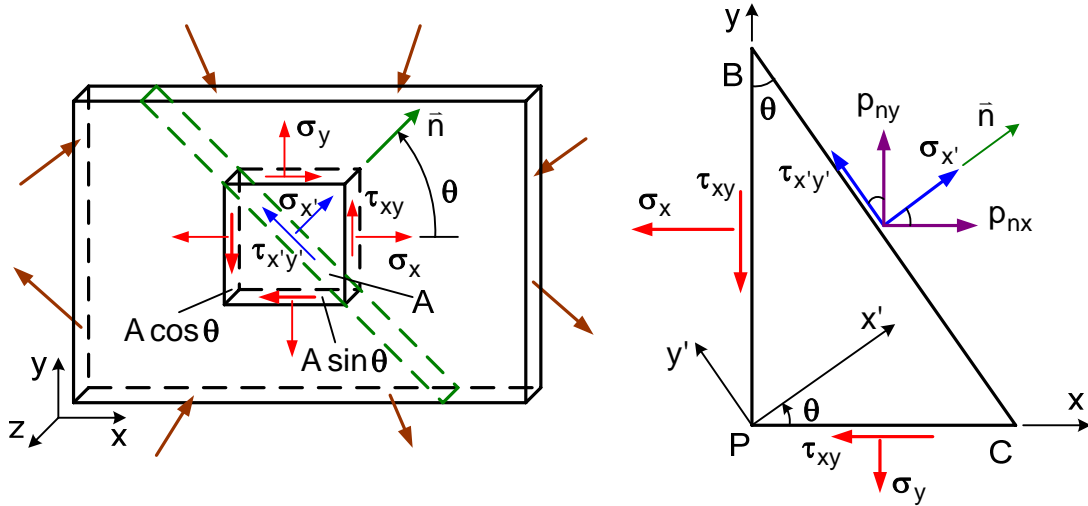
$$\bar{p}_n = p_{nx}\bar{i} + p_{ny}\bar{j} \tag{1.13}$$

Kun pintaelementin BC alaa merkitään A, ovat pintaelementtien PC ja PB alat $A \sin\theta$ ja $A \cos\theta$. Kuvan 1.7 kolmioelementin tasapainosta x- ja y-suunnissa saadaan

$$\begin{aligned}
 p_{nx} \cdot A - \sigma_x \cdot A \cos\theta - \tau_{xy} \cdot A \sin\theta &= 0 \\
 p_{ny} \cdot A - \tau_{xy} \cdot A \cos\theta - \sigma_y \cdot A \sin\theta &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1.14}$$

joista ratkeaa jännitysvektorin vaaka- ja pystykomponentille lausekkeet

$$\begin{aligned}
 p_{nx} &= \sigma_x \cos\theta + \tau_{xy} \sin\theta = \sigma_x a + \tau_{xy} b \\
 p_{ny} &= \tau_{xy} \cos\theta + \sigma_y \sin\theta = \tau_{xy} a + \sigma_y b
 \end{aligned}
 \tag{1.15}$$



Kuva 1.7 Jännityskomponenttien transformointi.

Kaavojen (1.13) ja (1.15) perusteella suunnan \bar{n} jännitysvektoriksi saadaan

$$\bar{p}_n = (\sigma_x a + \tau_{xy} b) \bar{i} + (\tau_{xy} a + \sigma_y b) \bar{j} \quad (1.16)$$

Kaavassa (1.16) mielivaltaisen suunnan \bar{n} jännitysvektori \bar{p}_n on lausuttu jännityskomponenttien σ_x , σ_y ja τ_{xy} sekä vektorin \bar{n} suuntakosinien a ja b avulla. Kuvasta 1.7 saadaan lisäksi pintaelementin BC normaali- ja leikkausjännitys $\sigma_{x'}$ ja $\tau_{x'y'}$

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= p_{nx} \cos \theta + p_{ny} \sin \theta = p_{nx} a + p_{ny} b \\ \tau_{x'y'} &= -p_{nx} \sin \theta + p_{ny} \cos \theta = -p_{nx} b + p_{ny} a \end{aligned} \quad (1.17)$$

Sijoittamalla p_{nx} ja p_{ny} kaavasta (1.15) kaavaan (1.17) saadaan tulos

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= \sigma_x a^2 + 2\tau_{xy} ab + \sigma_y b^2 \\ \tau_{x'y'} &= (\sigma_y - \sigma_x) ab + \tau_{xy} (a^2 - b^2) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Käyttämällä kaavoja $a^2 = \cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$, $ab = \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$ ja $b^2 = \sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$ voidaan yhtälöt (1.18) kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_{x'y'} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \\ \sigma_{y'} &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \end{aligned} \quad (1.19)$$

jossa $\sigma_{y'}$ on saatu sijoittamalla komponentin $\sigma_{x'}$ lausekkeeseen kulman θ paikalle kulma $\theta + \pi/2$. Kaavat (1.19) ovat tasojännitystilän jännityskomponenttien transformointikaavat, joilla voidaan laskea jännityskomponentit kulman θ kiertyneessä $x'y'$ -koordinaatistossa, kunhan xy -koordinaatiston komponentit tunnetaan.

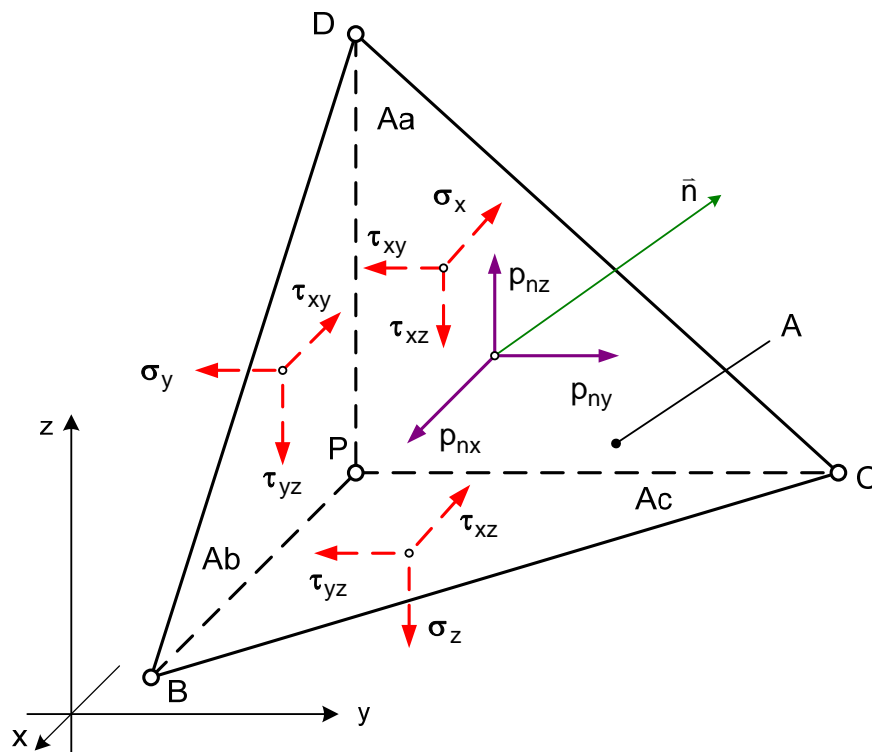
1.3.2 Yleinen jännitystila

Tarkastellaan yleistä kolmiulotteista tapausta. Kuvan 1.7 kolmioelementin sijasta käytetään kuvan 1.8 kappaleesta pisteen P kohdalta leikattua tetraedrielementtiä, jolloin tunnetaan sen koordinaattitasojen suuntaisten pintaelementtien PCD, PBD ja PBC jännityskomponentit ja määritetään xyz-koordinaatistoon nähden vinossa asennossa olevan pintaelementin BCD jännitysvektori. Pintaelementin BCD yksikkönormaali on

$$\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \quad (1.20)$$

jossa $a = \cos(\vec{n}, x)$, $b = \cos(\vec{n}, y)$ ja $c = \cos(\vec{n}, z)$ sekä

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \quad (1.21)$$



Kuva 1.8 Jännityskomponenttien transformointi.

Pintaelementin BCD jännitysvektori on komponenttimuodossa

$$\vec{p}_n = p_{nx} \vec{i} + p_{ny} \vec{j} + p_{nz} \vec{k} \quad (1.22)$$

Kun elementin BCD alaa merkitään A, ovat pintaelementtien PCD, PBD ja PBC alat vastaavasti Aa, Ab ja Ac. Tetraedrin tasapainoyhtälöistä x-, y- ja z-suunnissa seuraa

$$\begin{aligned} p_{nx} \cdot A - \sigma_x \cdot Aa - \tau_{xy} \cdot Ab - \tau_{xz} \cdot Ac &= 0 \\ p_{ny} \cdot A - \tau_{xy} \cdot Aa + \sigma_y \cdot Ab + \tau_{yz} \cdot Ac &= 0 \\ p_{nz} \cdot A - \tau_{xz} \cdot Aa + \tau_{yz} \cdot Ab + \sigma_z \cdot Ac &= 0 \end{aligned} \quad (1.23)$$

joista ratkeaa jännitysvektorin komponentille lausekkeet

$$p_{nx} = \sigma_x a + \tau_{xy} b + \tau_{xz} c \quad p_{ny} = \tau_{xy} a + \sigma_y b + \tau_{yz} c \quad p_{nz} = \tau_{xz} a + \tau_{yz} b + \sigma_z c \quad (1.24)$$

Kaavojen (1.20) ja (1.24) perusteella saadaan jännitysvektorille \bar{p}_n lauseke

$$\bar{p}_n = (\sigma_x a + \tau_{xy} b + \tau_{xz} c) \bar{i} + (\tau_{xy} a + \sigma_y b + \tau_{yz} c) \bar{j} + (\tau_{xz} a + \tau_{yz} b + \sigma_z c) \bar{k} \quad (1.25)$$

joten mielivaltaisen suunnan \bar{n} jännitysvektori \bar{p}_n on lausuttu xyz-koordinaatiston jännityskomponenttien ja vektorin \bar{n} suuntakosinien a, b ja c avulla.

Ottamalla käyttöön matriisimerkinnät kaava (1.25) voidaan esittää muodossa

$$\bar{p}_n = \{p_n\} = \begin{bmatrix} p_{nx} \\ p_{ny} \\ p_{nz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x a + \tau_{xy} b + \tau_{xz} c \\ \tau_{xy} a + \sigma_y b + \tau_{yz} c \\ \tau_{xz} a + \tau_{yz} b + \sigma_z c \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

Tämä voidaan edelleen tulkita matriisituloksi

$$\{p_n\} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = [S] \{n\} \quad (1.27)$$

jossa $[S]$ on tarkastelupisteeseen liittyvä jännitysmatriisi ja $\{n\} = \bar{n}$ tarkasteltavan vinon suunnan normaalin suuntainen yksikkövektori, joka on materiaalista ulospäin.

Vektorin \bar{p}_n komponentti normaalin \bar{n} suuntaan on

$$\sigma_n = \bar{p}_n \cdot \bar{n} = \sigma_x a^2 + \sigma_y b^2 + \sigma_z c^2 + 2(\tau_{xy} ab + \tau_{yz} bc + \tau_{xz} ac) \quad (1.28)$$

ja tason ABC suuntainen leikkausjännityskomponentti

$$\begin{aligned} \tau_n^2 &= \bar{p}_n \cdot \bar{p}_n - \sigma_n^2 \\ &= (\sigma_x a + \tau_{xy} b + \tau_{xz} c)^2 + (\tau_{xy} a + \sigma_y b + \tau_{yz} c)^2 + (\tau_{xz} a + \tau_{yz} b + \sigma_z c)^2 - \sigma_n^2 \end{aligned} \quad (1.29)$$

Valitsemalla $x'y'z'$ -koordinaatisto siten, että x' -akseli on vektorin \bar{n} suuntaan sekä y' - ja z' -akseli ovat pintaelementin BCD määräämässä tasossa, voidaan merkitä $\sigma_{x'} = \sigma_n$. Leikkausjännitykset $\tau_{x'y'}$ ja $\tau_{x'z'}$ saadaan jakamalla τ_n komponentteihin y' - ja z' -akseleiden suunnissa. Yllä esitetyllä tavalla voidaan laskea muutkin $x'y'z'$ -koordinaatiston jännityskomponentit $\sigma_{y'}$, $\sigma_{z'}$ ja $\tau_{y'z'}$. Ne voidaan kuitenkin laskea systemaattisemmin, kun käytetään apuna koordinaatiston kiertomatriisia

$$[Q] = \begin{bmatrix} \cos(x, x') & \cos(x, y') & \cos(x, z') \\ \cos(y, x') & \cos(y, y') & \cos(y, z') \\ \cos(z, x') & \cos(z, y') & \cos(z, z') \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

Voidaan todistaa (sivuutetaan), että on voimassa

$$[S]' = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{x'z'} & \tau_{y'z'} & \sigma_{z'} \end{bmatrix} = [Q]^T [S] [Q] \quad (1.31)$$

jolloin $[S]'$ on $x'y'z'$ -koordinaatiston jännitysmatriisi.

1.4 Pääjännitykset ja -suunnat

Edellä johdettiin mielivaltaisen suunnan normaalijännitykselle lausekkeet (1.19) (tasojännitystila) ja (1.28) (yleinen jännitystila). Näiden avulla voidaan tutkia normaalijännityksen ääriarvoja eli pääjännityksiä ja niiden esiintymissuuntia eli pääsuuntia. Osoittautuu lisäksi, että pääsuunnissa leikkausjännitys on nolla.

1.4.1 Tasojännitystila

Tarkastellaan aluksi tasojännitystilaa, jolloin ääriarvon ehdoksi tulee kaavasta (1.19)

$$\sigma_{x',\theta} = 0 \Rightarrow -(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta + 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0 \Rightarrow \quad (1.32)$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (1.33)$$

Koska $\tan 2\theta = \tan(2\theta + \pi)$, tulee kaavasta (1.33) kaksi ääriarvokohtaa

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad \text{ja} \quad \theta_2 = \theta_1 + \pi/2 \quad (1.34)$$

Normaalijännityksellä on kaksi ääriarvoa, jotka esiintyvät toisiaan vastaan kohtisuorissa suunnissa. Näitä suuntia sanotaan pääsuunniksi. Kaavoista (1.19) ja (1.32) seuraa, että leikkausjännitys $\tau_{x'y'}$ on pääsuunnissa nolla. Pääsuuntien normaalijännitykset ovat pääjännitykset, jotka saadaan kaavasta (1.19) sijoittamalla siihen tulos (1.33). Kaavasta (1.19) seuraa järjestelemällä

$$\sigma_{x'} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta \left(1 + \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \tan 2\theta \right) \quad (1.35)$$

josta saadaan kaavan (1.33) avulla pääjännitykset. Trigonometrian mukaan on voimassa tulos $\cos 2\theta = \pm 1 / \sqrt{1 + \tan^2 2\theta}$, josta seuraa

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\theta}} (\sigma_x - \sigma_y) (1 + \tan^2 2\theta) \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sqrt{1 + \tan^2 2\theta} \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sqrt{1 + \frac{4\tau_{xy}^2}{(\sigma_x - \sigma_y)^2}} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (1.36)$$

Pääjännitys σ_1 esiintyy siinä kaavasta (1.34) saatavassa suunnassa θ , joka toteuttaa ehdon $\tau_{xy} \sin 2\theta \geq 0$.

Kaavasta (1.19) voidaan vastaavalla tavalla löytää leikkausjännityksen $\tau_{x'y'}$ ääriarvot τ_1 ja τ_2 sekä niiden esiintymissuunnat. Tulokseksi saadaan (johto sivuutetaan)

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \text{kun} \quad \theta = \theta_1 - \pi/4 \\ \tau_2 &= -\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \text{kun} \quad \theta = \theta_1 + \pi/4 \end{aligned} \quad (1.37)$$

1.4.2 Yleinen jännitystila

Tutkitaan sitten yleisen kolmiulotteisen tapauksen n-akselin suuntaista normaalijännitystä σ_n , joka on yhtälön (1.28) mukaan

$$\sigma_n = \sigma_x a^2 + \sigma_y b^2 + \sigma_z c^2 + 2(\tau_{xy}ab + \tau_{yz}bc + \tau_{xz}ac) \quad (1.38)$$

Tavoitteena on tämän jännityksen ääriarvojen löytäminen, kun tutkitaan sen vaihtelua suuntakosinien a , b ja c funktiona. Ääriarvoja etsittäessä on otettava huomioon, että a , b ja c eivät ole riippumattomia muuttujia, vaan niitä sitoo yhtälö (1.21). Olkoot seuraavassa a ja b riippumattomat muuttujat, jolloin ääriarvoehdoksi tulee

$$\sigma_{n,a} = 0 \quad \text{ja} \quad \sigma_{n,b} = 0 \quad (1.39)$$

Edellä olevasta tulevat vaatimukset

$$\begin{cases} 2\sigma_x a + 2\sigma_z c c_{,a} + 2(\tau_{xy}b + \tau_{yz}bc_{,a} + \tau_{xz}c + \tau_{xz}ac_{,a}) = 0 \\ 2\sigma_y b + 2\sigma_z c c_{,b} + 2(\tau_{xy}a + \tau_{yz}c + \tau_{yz}bc_{,b} + \tau_{xz}ac_{,b}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (1.40)$$

$$\begin{cases} \sigma_x a + \tau_{xy}b + \tau_{xz}c + (\tau_{xz}a + \tau_{yz}b + \sigma_z c)c_{,a} = 0 \\ \tau_{xy}a + \sigma_y b + \tau_{yz}c + (\tau_{xz}a + \tau_{yz}b + \sigma_z c)c_{,b} = 0 \end{cases} \quad (1.41)$$

Yhtälön (1.24) perusteella tästä seuraa

$$p_{nx} + p_{nz}c_{,a} = 0 \quad \text{ja} \quad p_{ny} + p_{nz}c_{,b} = 0 \quad (1.42)$$

Koska $c^2 = 1 - a^2 - b^2 \Rightarrow 2cc_{,a} = -2a \Rightarrow c_{,a} = -a/c$. Samalla tavalla saadaan $c_{,b} = -b/c$, joten kaavasta (1.42) tulevat ehdot

$$\frac{p_{nx}}{a} = \frac{p_{ny}}{b} = \frac{p_{nz}}{c} \quad (1.43)$$

joka merkitsee sitä, että pääjännitysvektori \bar{p}_n on normaalin \bar{n} suuntainen ja siis pääsuunnan leikkausjännitys on nolla. Näytetään, että jokaisella jännitystilalla on ainakin kolme pääsuuntaa. Merkitään pääjännitystä σ_p , jolloin pääsuunnalle pätee

$$\bar{p}_n = \sigma_p \bar{n} = p_{nx} \bar{i} + p_{ny} \bar{j} + p_{nz} \bar{k} \quad \Rightarrow \quad (1.44)$$

$$\begin{aligned} \sigma_p (a \bar{i} + b \bar{j} + c \bar{k}) = \\ (\sigma_x a + \tau_{xy}b + \tau_{xz}c) \bar{i} + (\tau_{xy}a + \sigma_y b + \tau_{yz}c) \bar{j} + (\tau_{xz}a + \tau_{yz}b + \sigma_z c) \bar{k} \end{aligned} \quad (1.45)$$

Kaavan (1.45) yksikkövektoreiden kertoimista saadaan yhtälöt

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_p)a + \tau_{xy}b + \tau_{xz}c = 0 \\ \tau_{xy}a + (\sigma_y - \sigma_p)b + \tau_{yz}c = 0 \\ \tau_{xz}a + \tau_{yz}b + (\sigma_z - \sigma_p)c = 0 \end{cases} \quad (1.46)$$

Yhtälöt (1.45) ovat suuntakosinien a , b ja c homogeeninen yhtälöryhmä. Koska $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, ei triviaaliratkaisu $a = b = c = 0$ kelpaa. Ei-triviaaleja ratkaisuja on olemassa vain, jos ryhmän (1.44) kerroindeterminantti on nolla eli

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_p & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_p \end{vmatrix} = 0 \quad (1.47)$$

Kehittämällä determinantti (1.38) päädytään yhtälöön

$$\sigma_p^3 - I_1 \sigma_p^2 + I_2 \sigma_p - I_3 = 0 \quad (1.48)$$

jossa on merkitty

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z & I_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 \\ I_3 &= \det[S] = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1.49)$$

Yhtälön (1.48) juuret σ_1 , σ_2 ja σ_3 ovat pääjännitykset. Kutakin pääjännitystä vastaa yhtälöiden (1.46) mukaisesti pääsuunta. Kaavasta (1.47) näkyy, että pääjännitykset ovat jännitysmatriisin $[S]$ ominaisarvot. Koska $[S]$ on reaalinen ja symmetrinen matriisi, on sillä reaaliset ominaisarvot eli pääjännitykset ovat reaaliset (todistus si- vuutetaan). Ne voivat erityistapauksissa olla keskenään yhtä suuria. Voidaan osoit- taa, että symmetrisen matriisin ominaisvektorit ovat ortogonaaliset eli pääsuunnat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Pääjännitykset ovat riippumattomia siitä, minkä koordinaatiston jännityskomponen- teista ne on laskettu. Tästä seuraa, että kertoimet I_1 , I_2 ja I_3 eivät riipu käytettävästä koordinaatistosta. Näitä kertoimia sanotaan jännitysmatriisin pääinvariantteiksi.

Kun pääjännitykset on laskettu, saadaan pääsuunnat yhtälöistä (1.46) ja (1.21). Jos pääjännitykset ovat eri suuria, vastaa kutakin pääjännitystä yksikäsitteinen pääsuun- ta. Jos kaksi pääjännitystä on yhtä suuria, saadaan kolmatta pääjännitystä vastaava pääsuunta yksikäsitteisesti määräytyksi ja kaikki tätä vastaan kohtisuorat suunnat ovat myös pääsuuntia. Tätä tapausta sanotaan sylinterimäiseksi jännitystilaksi. Jos kaikki kolme pääjännitystä ovat yhtä suuria, ovat kaikki suunnat pääsuuntia eikä leikkaus- jännitystä esiinny missään suunnassa. Kyseessä on pallomainen jännitystila.

Kun pääjännitykset σ_1 , σ_2 ja σ_3 järjestetään algebralliseen suuruusjärjestykseen (etumerkki otetaan huomioon), käytetään merkinnöissä roomalaisia alaindeksejä eli σ_I , σ_{II} ja σ_{III} , jolloin σ_I on suurin pääjännitys.

Leikkausjännityksen τ_n ääriarvot ja niiden esiintymissuunnat saadaan vastaavalla tavalla kaavasta (1.29). Ääriarvoiksi tulee (todistus sivuutetaan)

$$\pm \tau_1 = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad \pm \tau_2 = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \quad \pm \tau_3 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (1.50)$$

ja ne esiintyvät pääsuuntien puolella välissä. Ääriarvoista suurin esiintyy I- ja III-suunnan puolella välissä ja se on

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \quad (1.51)$$

1.5 Jännityskomponenttien reunaehdot

Tarkastellaan jännityskomponenttien ja kappaleen reunapinnalla vaikuttavien tunnettujen pintavoimien yhteyttä. Kappaleen sisäpisteissä on jännityskomponenttien tasapainoyhtälöiden oltava voimassa, kuten kohdassa 1.2 esitettiin. Näiden yhtälöiden toteuttamisen lisäksi kappaleen jännitystilakentän on oltava reunan pisteissä tasapainossa pintakuormitusten kanssa. Tästä vaatimuksesta seuraavien yhtälöiden johtamiseksi tarkastellaan vielä kuvan 1.8 kappaleesta leikattua tetraedrielementtiä olettaen kuitenkin, että taho BCD yhtyy kappaleen ulkopintaan. Oletetaan lisäksi, että tahon BCD pintavoimavektori \vec{t} tunnetaan eli

$$\vec{t} = t_x \vec{i} + t_y \vec{j} + t_z \vec{k} \quad (1.52)$$

Kuvan 1.8 tetraedrin tasapainoehtoista koordinaattiakselien suunnissa saadaan analogisesti kaavojen (1.24) kanssa

$$t_x = \sigma_x a + \tau_{xy} b + \tau_{xz} c \quad t_y = \tau_{xy} a + \sigma_y b + \tau_{yz} c \quad t_z = \tau_{xz} a + \tau_{yz} b + \sigma_z c \quad (1.53)$$

Kun tetraedriä pienennetään rajatta niin, että taho BCD pysyy kappaleen ulkopinnalla, tulee piste P kappaleen reunalle ja yhtälöt (1.53) koskevat näin ollen reunan pisteen jännityskomponentteja. xy-tason suuntaisessa tasojännitystilassa yhtälöt (1.53) yksinkertaistuvat muotoon

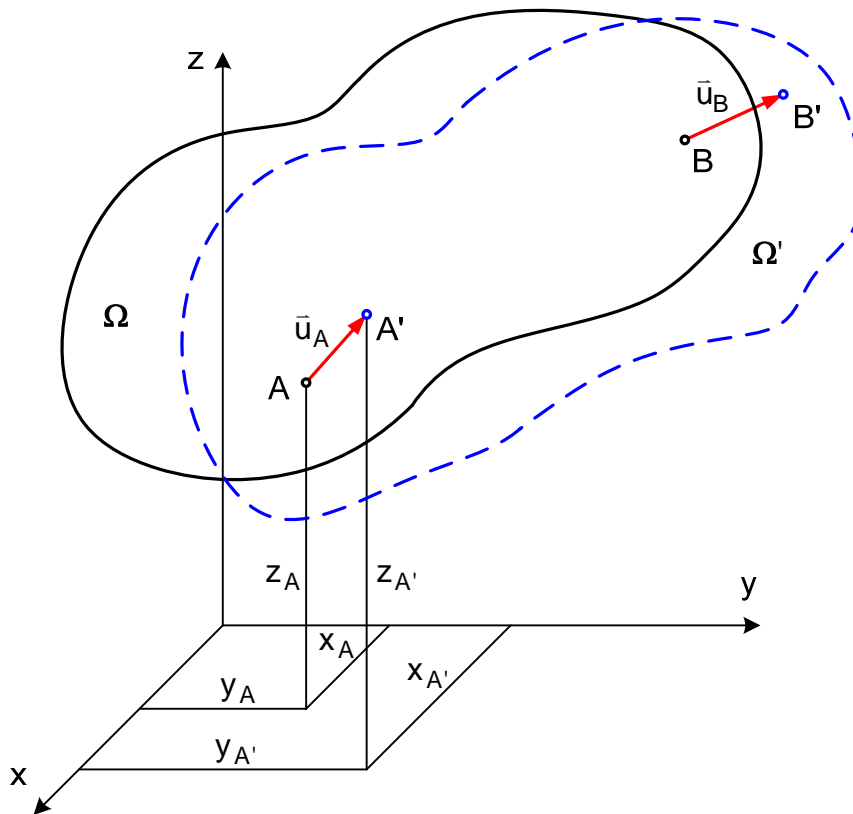
$$t_x = \sigma_x a + \tau_{xy} b \quad t_y = \tau_{xy} a + \sigma_y b \quad (1.54)$$

Yhtälöt (1.53) ovat jännityskomponenttien reunaehdot, jotka kappaleen jännitystilakentän on toteutettava niissä kappaleen ulkopinnan pisteissä, joissa vaikuttavia pintavoimia tunnetaan.

2 MUODONMUUTOSTILA

2.1 Siirtymän käsite ja komponentit

Tarkastellaan kuvan 2.1 kappaletta Ω , jonka pisteet siirtyvät ulkoisen kuormituksen johdosta siten, että siirtymien tapahduttua ne muodostavat kappaleen Ω' . Esimerkiksi



Kuva 2.1 Siirtymävektori.

si piste A siirtyy asemaan A' ja piste B asemaan B'. Siirtymät voivat aiheutua jäykän kappaleen liikkeestä (translaatio ja rotaatio) ja/tai kappaleen muodon muuttumisesta. Jäykän kappaleen liikkeessä kappaleen pisteiden asemat toisiinsa nähden eivät muutu. Kappaleen muodon muuttuessa sen pisteet siirtyvät toisiinsa nähden. Seuraavassa tutkitaan vain muodon muuttumisesta aiheutuvia siirtymiä.

Kuvan 2.1 pisteen A koordinaatit ovat alkutilassa (x_A, y_A, z_A) ja lopputilassa $(x_{A'}, y_{A'}, z_{A'})$. Pisteen A siirtymävektori on

$$\bar{u}_A = (x_{A'} - x_A) \bar{i} + (y_{A'} - y_A) \bar{j} + (z_{A'} - z_A) \bar{k} \quad (2.1)$$

Pisteen A siirtymäkomponentit koordinaattiakseleiden suunnissa ovat

$$u_A = x_{A'} - x_A \quad v_A = y_{A'} - y_A \quad w_A = z_{A'} - z_A \quad (2.2)$$

Kappaleen kaikkien pisteiden siirtymävektorit muodostavat sen siirtymäkentän

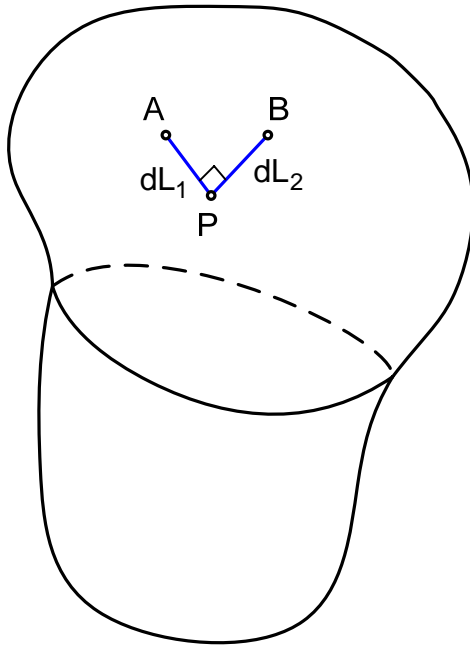
$$\bar{u}(x, y, z) = u(x, y, z) \bar{i} + v(x, y, z) \bar{j} + w(x, y, z) \bar{k} \quad (2.3)$$

jossa siirtymäkentän komponentit $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ ja $w(x, y, z)$ sisältävät kappaleen

kaikkien pisteiden koordinaattiakseleiden suuntaiset siirtymät.

Tavanomaisen lineaarisen lujuusopin tehtävissä tarkastellaan vain pieniä siirtymiä. Kuvassa 2.1 on siirtymiä havainnollisuussyistä suuresti liioiteltu.

2.2 Muodonmuutostilan käsite ja komponentit

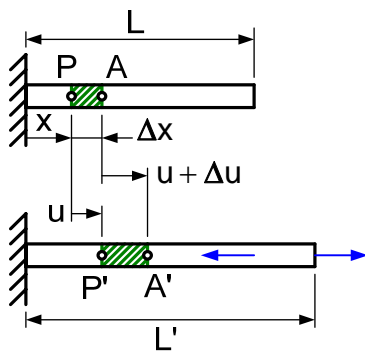


Kuva 2.2 Muodonmuutostila.

Kuten edellä mainittiin, kappaleen muodon muuttuessa sen pisteiden keskinäiset asemat muuttuvat. Tällöin kappaleen pisteiden väliset etäisyydet ja sen pisteitä yhdistävien janojen väliset kulmat muuttuvat muodonmuutosten seurauksena. Muodonmuutosten tarkastelemiseksi määritellään kappaleen pisteen P muodonmuutostila niin, että se sisältää kaikkien pisteistä P sen lähinaapuripisteisiin (A,B,...) piirrettyjen viivaelementtien (dL_1, dL_2, \dots) venymät ja kaikkien pisteestä P alkavien kohtisuorien viivaelementtiparien (dL_1 ja dL_2, \dots) välisten suorien kulmien liukumät. Näitä venymiä ja liukumia on ääretön määrä. Kuten myöhemmin osoitetaan, riittää pisteen muodonmuutostilan hallitsemiseen kuitenkin koordinaattiakseleiden suuntaisten viivaelementtiparien venymien ja niiden

välisten liukumien tunteminen. Kappaleen kaikkien pisteiden muodonmuutostilat muodostavat sen muodonmuutostilakentän.

2.2.1 Aksiaalinen muodonmuutostila



Kuva 2.3 Venymä.

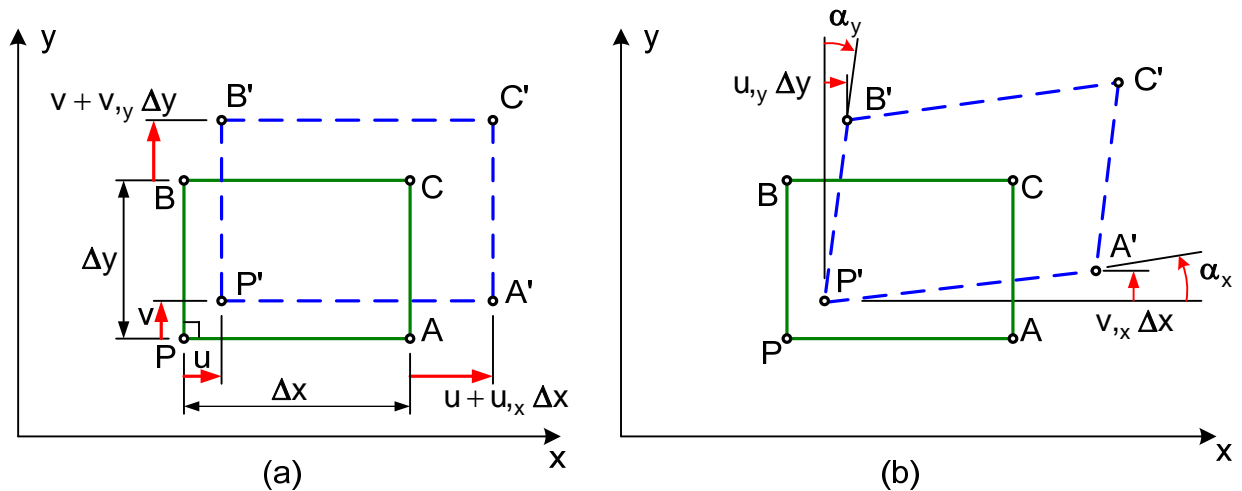
Tutkitaan aluksi kuvan 2.3 yksiulotteista tapausta, jossa pisteestä P alkavan viivaelementin PA pituus ennen muodonmuutosta on Δx . kuormituksen seurauksena piste P siirtyy asemaan P' ja A asemaan A' siirtymäkomponenttien ollessa x-suunnassa u ja $u + \Delta u$ vastaavasti. Viivaelementin pituus on muuttunut määrän Δu ja sen suhteellinen pituuden muutos on $\Delta u / \Delta x$. Tällöin x-akselin suuntainen venymä ϵ_x pisteessä P on määritelmän mukaan

$$\epsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_{,x} \Delta x}{\Delta x} = u_{,x} \quad (2.4)$$

jossa $\Delta x \rightarrow 0$ siten, että piste $P \rightarrow A$. Kaava (2.4) on kinemaattinen yhtälö, joka antaa venymän ja siirtymän välisen yhteyden.

2.2.2 Tasomuodonmuutostila

Tarkastellaan seuraavaksi yleisen muodonmuutostilan erityistapausta, jossa muodonmuutoksia on vain xy-tasossa eli tasomuodonmuutostilaa. Huomattakoon, että kyseessä ei ole tasojännitystilä. Muodonmuutoskomponenttien lausekkeiden johtamiseksi tutkitaan kuvan 2.4 mukaisia tarkastelupisteistä P alkavia koordinaattiakselien suuntaisia viivaelementtejä Δx ja Δy .



Kuva 2.4 Tasomuodonmuutostila.

Kun pisteen P siirtymäkomponentteja x- ja y-suunnissa merkitään u ja v, ovat pisteiden A ja B siirtymäkomponentit vastaavasti

$$A: u + u_{,x} \Delta x \text{ ja } v + v_{,x} \Delta x \quad B: u + u_{,y} \Delta y \text{ ja } v + v_{,y} \Delta y \quad (2.5)$$

jossa siirtymien muutoksia on approksimoitu differentiaaleilla. Siirtymistä aiheutuvat muodonmuutokset voidaan jakaa kahteen osaan kuvan 2.4 mukaisesti. Koska pisteet P ja A siirtyvät x-suunnassa erisuuret matkat, aiheutuu tästä viivaelementin Δx venymä x-suunnassa. Samoin pisteet P ja B siirtyvät y-suunnassa erisuuret matkat, joten viivaelementtiin Δy syntyy venymä y-suunnassa. Kuvassa 2.4 (a) on siirtymäeroista syntyvät viivaelementtien venymät. Näin saadaan x- ja y-akselien suuntaisiksi venymäkomponenteiksi ϵ_x ja ϵ_y pisteessä P analogisesti kaavan (2.4) kanssa

$$\epsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_{,x} \Delta x}{\Delta x} = u_{,x} \quad \epsilon_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} = \frac{v_{,y} \Delta y}{\Delta y} = v_{,y} \quad (2.6)$$

Pisteet P ja A siirtyvät myös y-suunnassa eri matkat, josta aiheutuu viivaelementin Δx kääntyminen kuvan 2.4 (b) mukaisesti. Samoin pisteet P ja B siirtyvät x-suunnassa eri matkat ja tästä aiheutuu viivaelementin Δy kääntyminen. Viivaelementtien Δx ja Δy kääntymisestä aiheutuu niiden välisen suoran kulman APB muutos, jota sanotaan x- ja y-akselien väliseksi liukumaksi γ_{xy} . Koska kulma α_x kuvassa 2.4 (b) on todellisuudessa hyvin pieni, voidaan käyttää arviota $\alpha_x \approx \tan \alpha_x$. Myös venymä ϵ_x on hyvin pieni, joten voidaan käyttää myös arviota $PA \approx P'A'$. Näistä oletuksista seuraa

$$\alpha_x \approx \tan \alpha_x \approx \frac{v_{,x} \Delta x}{\Delta x} = v_{,x} \quad (2.7)$$

Vastaavalla tavalla saadaan tulos $\alpha_y \approx u_{,y}$. Voidaan näin ollen kirjoittaa tulos

$$\gamma_{xy} = \alpha_x + \alpha_y = u_{,y} + v_{,x} \quad (2.8)$$

Näin saadaan tasomuodonmuutostilalle kinemaattiset yhtälöt, jotka antavat muodonmuutos- ja siirtymäkomponenttien välisen yhteyden.

$$\boxed{\epsilon_x = u_{,x} \quad \epsilon_y = v_{,y} \quad \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x}} \quad (2.9)$$

Tasomuodonmuutostilassa pisteen muodonmuutoskomponentit ovat x- ja y-akselin suuntaisten viivaelementtien venymät ϵ_x ja ϵ_y sekä näiden viivaelementtien välisen suoran kulman liukuma γ_{xy} . Myöhemmin osoitetaan, että näiden avulla voidaan laskea kaikkien tarkastelupisteestä alkavien viivaelementtien venymät ja minkä tahansa siitä alkavan kohtisuoran viivaelementtiparin välisen suoran kulman liukuma. Komponentit ϵ_x , ϵ_y ja γ_{xy} riittävät pisteen tasomuodonmuutostilan hallitsemiseen.

2.2.3 Yleinen muodonmuutostila

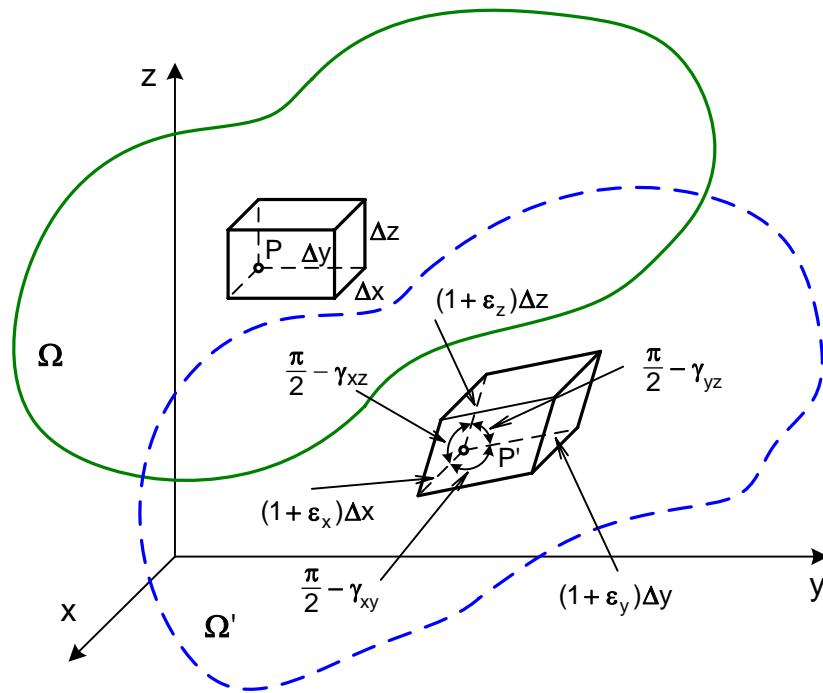
Yleisessä kolmiulotteisessa tapauksessa pisteen muodonmuutostilaa voidaan tarkastella kuvan 2.5 tarkastelupisteestä P alkavien koordinaattiakselien suuntaisten viivaelementtien Δx , Δy ja Δz avulla. Muodonmuutoksessa viivaelementit venyvät venymien ollessa ϵ_x , ϵ_y ja ϵ_z . Samalla viivaelementit kääntyvät niin, että niiden väliset suorien kulmien liukumasta ovat γ_{xy} , γ_{xz} ja γ_{yz} , jossa alaindeksit ilmaisevat, minkä kahden viivaelementin välisen suoran kulman liukumasta on kysymys. Yleisessä tapauksessa pisteen muodonmuutoskomponentit ovat venymät ϵ_x , ϵ_y ja ϵ_z sekä liukumasta γ_{xy} , γ_{xz} ja γ_{yz} . Myöhemmin osoitetaan, että nämä kuusi komponenttia riittävät pisteen muodonmuutostilan hallitsemiseen.

Siirtymäkomponenttien yhteys muodonmuutoskomponentteihin löydetään, kun suori-

tetaan tasomuodonmuutostilan yhteydessä esitetty tarkastelu kaikissa kolmessa koordinaattitasossa. Tulokseksi saadaan yhtälöt

$$\begin{array}{lll} \epsilon_x = u_{,x} & \epsilon_y = v_{,y} & \epsilon_z = w_{,z} \\ \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} & \gamma_{xz} = u_{,z} + w_{,x} & \gamma_{yz} = v_{,z} + w_{,y} \end{array} \quad (2.10)$$

Yhtälöitä (2.10) sanotaan kinemaattisiksi yhtälöiksi. Ne ilmaisevat näiden suureiden välisen geometrisen yhteyden, mutta eivät sisällä mitään tietoa siitä, mistä nämä suu-reet aiheutuvat.



Kuva 2.5 Yleinen muodonmuutostila.

Liukumien γ_{xy} , γ_{xz} ja γ_{yz} sijasta käytetään myös muodonmuutoskomponentteja ϵ_{xy} , ϵ_{xz} ja ϵ_{yz} , jotka määritellään yhtälöillä

$$\epsilon_{xy} = \gamma_{xy} / 2 \quad \epsilon_{xz} = \gamma_{xz} / 2 \quad \epsilon_{yz} = \gamma_{yz} / 2 \quad (2.11)$$

Muodonmuutoskomponentit voidaan järjestää muodonmuutosmatriisiksi $[V]$, jonka kukin vaakarivi sisältää samaan viivaelementtiin liittyvät komponentit eli

$$[V] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

2.3 Muodonmuutoskomponenttien yhteensopivuusyhtälöt

Tasomuodonmuutostilan kolme muodonmuutoskomponenttia ε_x , ε_y ja γ_{xy} saadaan kinemaattisten yhtälöiden (2.9) mukaan laskettua kahdesta siirtymäkomponentista u ja v . Näin ollen on ilmeistä, että muodonmuutoskomponentit eivät ole toisistaan riippumattomia, vaan niiden välille on johdettavissa yhteys. Kaavoista (2.9) seuraa

$$\varepsilon_{x,yy} = u_{,xyy} \quad \varepsilon_{y,xx} = v_{,xxy} \quad \gamma_{xy,xy} = u_{,xyy} + v_{,xxy} \quad (2.13)$$

joten on oltava voimassa

$$\varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx} = \gamma_{xy,xy} \quad (2.14)$$

Yhtälö (2.14) on muodonmuutoskomponenttien yhteensopivuusyhtälö tasomuodonmuutostilassa. Yhtälön (2.14) toteutuminen takaa, että kappale selviytyy ehjänä muodonmuutoksesta eli kuvan 2.4 mukaiset muotoansa muuttaneet suorakulmioelementit PACB muodostavat yhtenäisen kappaleen muodonmuutoksen jälkeenkin.

Yleisessä kolmiulotteisessa tapauksessa kuusi muodonmuutoskomponenttia ε_x , ε_y , ε_z , γ_{xy} , γ_{xz} ja γ_{yz} saadaan kinemaattisten yhtälöiden (2.10) mukaan kolmesta siirtymäkomponentista u , v , ja w . Taaskin on ilmeistä, että muodonmuutoskomponentit eivät ole toisistaan riippumattomia, vaan niiden välille voidaan johtaa kolme yhteensopivuusyhtälöä. Nämä saadaan käsittelemällä kaavoja (2.10) samaan tapaan kuin edellä. Tulos voidaan esittää kahdessa vaihtoehdoisessa muodossa

| | | |
|---|---|--------|
| $\varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx} = \gamma_{xy,xy}$ | $2\varepsilon_{x,yz} = (-\gamma_{yz,x} + \gamma_{xz,y} + \gamma_{xy,z})_{,x}$ | (2.15) |
| $A: \quad \varepsilon_{y,zz} + \varepsilon_{z,yy} = \gamma_{yz,yz}$ | $B: \quad 2\varepsilon_{y,xz} = (\gamma_{yz,x} - \gamma_{xz,y} + \gamma_{xy,z})_{,y}$ | |
| $\varepsilon_{z,xx} + \varepsilon_{x,zz} = \gamma_{xz,xz}$ | $2\varepsilon_{z,xy} = (\gamma_{yz,x} + \gamma_{xz,y} - \gamma_{xy,z})_{,z}$ | |

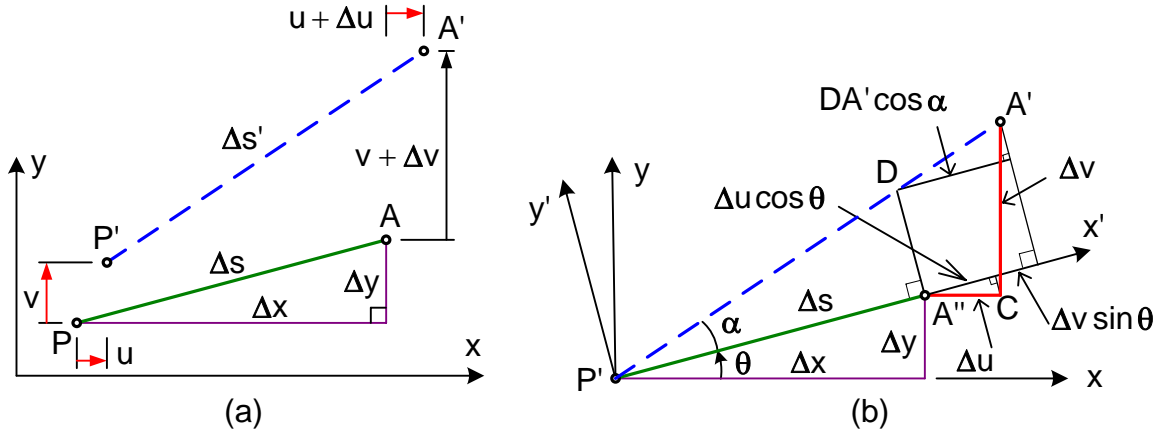
2.4 Muodonmuutoskomponenttien transformointi

2.4.1 Tasomuodonmuutostila

Kohdassa 2.2 todettiin, että pisteen tasomuodonmuutostila hallitaan muodonmuutoskomponenttien ε_x , ε_y ja γ_{xy} avulla. Seuraavassa esitetään, miten tämä tapahtuu. Tarkastellaan kuvan 2.6 mukaista viivaelementtiä PA, jonka pituus on ennen muodonmuutosta Δs ja koordinaattiakseleiden suuntaiset projektiot Δx ja Δy . Muodonmuutoksen seurauksena PA tulee asemaan P'A', jossa sen pituus on $\Delta s'$. Pisteen P siirtymäkomponentit ovat u ja v sekä pisteen A siirtymäkomponentit $u + \Delta u$ ja $v + \Delta v$. Lisäyksille Δu ja Δv käytetään approksimaatioita

$$\Delta u \approx u_{,x} \Delta x + u_{,y} \Delta y \quad \Delta v \approx v_{,x} \Delta x + v_{,y} \Delta y \quad (2.16)$$

Kuvassa 2.6 (b) viivaelementti PA on siirretty suuntansa säilyttäen niin, että pisteet P ja P' yhtyvät eli PA on asemassa P'A''. Silloin $\Delta u = A''C$ ja $\Delta v = CA'$. Tavoitteena on löytää kuvan 2.6 (b) x'y'-koordinaatiston muodonmuutoskomponentit $\epsilon_{x'}$, $\epsilon_{y'}$ ja $\gamma_{x'y'}$.



Kuva 2.6 Muodonmuutoskomponenttien transformointi.

Määritetään ensin venymäkomponentti $\epsilon_{x'}$. Koska kulma α on hyvin pieni, voidaan käyttää arviota $DA' \cos \alpha \approx DA'$, jolloin saadaan

$$DA' \approx DA' \cos \alpha = \Delta u \cos \theta + \Delta v \sin \theta \quad (2.17)$$

Venymä $\epsilon_{x'}$ on määritelmänsä ja kaavojen (2.16) ja (2.17) mukaan

$$\epsilon_{x'} = \frac{DA'}{\Delta s} = \left(u_{,x} \frac{\Delta x}{\Delta s} + u_{,y} \frac{\Delta y}{\Delta s} \right) \cos \theta + \left(v_{,x} \frac{\Delta x}{\Delta s} + v_{,y} \frac{\Delta y}{\Delta s} \right) \sin \theta \quad (2.18)$$

Kun kaavaan (2.18) sijoitetaan $\Delta x / \Delta s = \cos \theta$ ja $\Delta y / \Delta s = \sin \theta$ sekä otetaan lisäksi huomioon yhtälö (2.9), saadaan tulos

$$\epsilon_{x'} = \epsilon_x \cos^2 \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (2.19)$$

Venymä $\epsilon_{y'}$ saadaan kaavasta (2.19) sijoittamalla kulman θ paikalle $\theta + \pi/2$. Laskeaan vielä liukuman $\gamma_{x'y'}$ lauseke. x'-akselin suuntaisen viivaelementin kääntymiskulma on α . Kuvan 2.6 (b) perusteella saadaan

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{A''D}{\Delta s} \quad \text{ja} \quad A''D = \Delta v \cos \theta - \Delta u \sin \theta - DA' \sin \alpha \quad (2.20)$$

jossa $DA' \sin \alpha \approx \epsilon_{x'} \Delta s \cdot \alpha \approx 0$. Yhtälön (2.16) avulla saadaan tulokseksi

$$\alpha = -(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin \theta \cos \theta + v_{,x} \cos^2 \theta - u_{,y} \sin^2 \theta \quad (2.21)$$

y' -akselin suuntaisen viivaelementin kääntymiskulma β saadaan kulman α lausekkeesta sijoittamalla kulman θ paikalle $\theta + \pi/2$. Tällöin seuraa tulos

$$\beta = +(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin \theta \cos \theta + \epsilon_{xy} \sin^2 \theta - \epsilon_{yx} \cos^2 \theta \quad (2.22)$$

Liukuma $\gamma_{x'y'}$ on $\alpha - \beta$, joten

$$\gamma_{x'y'} = -2(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin \theta \cos \theta + \gamma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (2.23)$$

Käyttämällä trigonometrian kaavoja ja liukuman puolikasta ϵ_{xy} saadaan transformointikaavat muotoon

$$\begin{aligned} \epsilon_{x'} &= \frac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y) + \frac{1}{2}(\epsilon_x - \epsilon_y) \cos 2\theta + \epsilon_{xy} \sin 2\theta \\ \epsilon_{x'y'} &= -\frac{1}{2}(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin 2\theta + \epsilon_{xy} \cos 2\theta \\ \epsilon_{y'} &= \frac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y) - \frac{1}{2}(\epsilon_x - \epsilon_y) \cos 2\theta - \epsilon_{xy} \sin 2\theta \end{aligned} \quad (2.24)$$

Vertaamalla saatuja transformointiyhtälöitä tasojännitystilan jännityskomponenttien vastaaviin yhtälöihin havaitaan niiden olevan täsmälleen samaa muotoa.

2.4.2 Yleinen muodonmuutostila

Edellä saatu vastaavuus jännitystilan ja muodonmuutostilan välillä on voimassa myös yleisessä kolmiulotteisessa tapauksessa. Tämä merkitsee sitä, että kappaleessa 1 jännityksille johdetuista tuloksista saadaan vastintulokset muodonmuutoksille korvaamalla kaavoissa jännityskomponentit vastaavilla muodonmuutoskomponenteilla. Esimerkiksi vektorin $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ suuntaisen viivaelementin venymäksi ϵ_n saadaan kaavan (1.28) perusteella

$$\epsilon_n = \epsilon_x a^2 + \epsilon_y b^2 + \epsilon_z c^2 + 2(\epsilon_{xy} ab + \epsilon_{yz} bc + \epsilon_{xz} ac) \quad (2.25)$$

Vastaavasti $x'y'z'$ -koordinaatiston muodonmuutoskomponentit voidaan laskea xyz-koordinaatiston komponenteista kaavan (1.31) perusteella seuraavasti

$$[V]' = \begin{bmatrix} \epsilon_{x'} & \epsilon_{x'y'} & \epsilon_{x'z'} \\ \epsilon_{x'y'} & \epsilon_{y'} & \epsilon_{y'z'} \\ \epsilon_{x'z'} & \epsilon_{y'z'} & \epsilon_{z'} \end{bmatrix} = [Q]^T [V] [Q] \quad (2.26)$$

jossa $[Q]$ on kiertomatriisi (1.30) ja $[V]$ muodonmuutosmatriisi (2.12).

2.5 Päävenymät ja -suunnat

Jännitystilan ja muodonmuutostilan analogiasta seuraa, että muodonmuutostilalle voidaan esittää pääjännityksiä ja -suuntia vastaavat käsitteet.

2.5.1 Tasomuodonmuutostila

Tasomuodonmuutostilassa venymäkomponentilla $\epsilon_{x'}$ on kaksi ääriarvoa ϵ_1 ja ϵ_2 , jotka esiintyvät toisiaan vastaan kohtisuorissa suunnissa θ_1 ja θ_2 . Päävenymät ϵ_1 ja ϵ_2 ovat kaavan (1.36) nojalla

$$\epsilon_{1,2} = \frac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y) \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \epsilon_{xy}^2} \quad (2.27)$$

Vastaavat pääsuunnat ovat yhtälön (1.34) perusteella

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\epsilon_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \quad \text{ja} \quad \theta_2 = \theta_1 + \pi/2 \quad (2.28)$$

ϵ_1 on venymäkomponentin $\epsilon_{x'}$ suurin arvo ja ϵ_2 sen pienin arvo. Pääsuuntien välinen liukuma on nolla. Pääsuuntien viivaelementit säilyttävät muodonmuutoksessa suuntansa eli pysyvät kohtisuorassa toisiaan vastaan, ne ainoastaan venyvät tai kutistuvat pituussuunnassa.

2.5.2 Yleinen muodonmuutostila

Yleisessä kolmiulotteisessa tapauksessa muodonmuutostilalla on kolme päävenymää toisiaan vastaan kohtisuorissa pääsuunnissa eli pääsuuntien väliset liukumat ovat nollia. Päävenymät saadaan kaavan (1.48) perusteella yhtälöstä

$$\epsilon_p^3 - J_1 \epsilon_p^2 + J_2 \epsilon_p - J_3 = 0 \quad (2.29)$$

jossa kaavan (1.49) mukaisesti

$$\begin{aligned} J_1 &= \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z & J_2 &= \epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_y \epsilon_z + \epsilon_z \epsilon_x - \epsilon_{xy}^2 - \epsilon_{yz}^2 - \epsilon_{xz}^2 \\ J_3 &= \det[V] = \begin{vmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Pääsuunnat saadaan kaavan (1.46) mukaisesti ratkaisemalla kutakin päävenymää vastaava yhtälöryhmä

$$\begin{cases} (\epsilon_x - \epsilon_p) a + \epsilon_{xy} b + \epsilon_{xz} c = 0 \\ \epsilon_{xy} a + (\epsilon_y - \epsilon_p) b + \epsilon_{yz} c = 0 \\ \epsilon_{xz} a + \epsilon_{yz} b + (\epsilon_z - \epsilon_p) c = 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

jossa lisäksi $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Päävenymät ovat muodonmuutosmatriisin $[V]$ ominaisarvot ja pääsuunnat sen ominaisvektorit. Koska $[V]$ on reaalinen ja symmetrinen matriisi, ovat päävenymät reaaliset. Yhtälön (2.29) kertoimet J_1 , J_2 ja J_3 ovat muodonmuutostilan pääinvariantit, jotka eivät riipu käytettävästä koordinaatistosta.

Jos kaikki päävenymät ovat erisuuria, saadaan ryhmästä (2.31) kutakin päävenymää vastaava yksikäsitteinen pääsuunta. Jos kaksi päävenymistä on yhtä suuria, saadaan kolmatta päävenymää vastaava pääsuunta yksikäsitteisesti määrätyn ja kaikki tätä vastaan kohtisuorat suunnat ovat myös pääsuuntia. Kyseessä on sylinterimäinen muodonmuutostilatilatila. Jos kaikki päävenymät ovat yhtä suuria, ovat kaikki suunnat pääsuuntia ja liukumaa ei esiinny minkään suuntien välillä. Tällaista tapausta sanotaan pallomaiseksi muodonmuutostilaksi.

2.6 Siirtymäkomponenttien reunaehdot

Jos kappaleen pinnan pisteessä tunnetaan pintavoimavektori \vec{t} , on jännityskomponenttien reunaehtojen (1.53) oltava voimassa. Toinen mahdollisuus on, että tunnetaan reunan pisteessä sen siirtymävektori. Tästä seuraa tarkastelupisteen P siirtymäkomponenteille reunaehdot

$$u = \tilde{u} \quad v = \tilde{v} \quad w = \tilde{w} \quad (2.32)$$

jossa \tilde{u} , \tilde{v} ja \tilde{w} ovat tunnetut siirtymäkomponentit. Siirtymäkomponenttien reunaehdot liittyvät tavallisesti kappaleen tuentaan ja usein on $\tilde{u} = \tilde{v} = \tilde{w} = 0$.

Kolmannen reunaehtotapauksen muodostavat sekareunaehdot, jolloin kappaleen pinnan pisteessä on kunkin koordinaattiakselin suunnassa annettu joko pintavoimakomponentti tai siirtymäkomponentti. Tarkastelupisteen reunaehtoyhtälöiksi tulee tällöin yhdistelmä yhtälöistä (1.53) ja (2.32). Tietyn koordinaattiakselin suuntaan ei voida antaa sekä siirtymä- että pintavoimakomponenttia vaan jompikumpi niistä.

Edellä oletettiin reunaehtojen liittyvän xyz-koordinaatiston akseleiden suuntiin. Yleisessä tapauksessa reunaehdot liittyvät kussakin reunan pisteessä xyz-koordinaatistoon nähden kiertyneeseen $x'y'z'$ -koordinaatistoon. Tällaiset vinot reunaehdot voidaan muuntaa xyz-koordinaatistoon koordinaatiston kierrolla.

3 JÄNNITYS- JA MUODONMUUTOSTILAN YHTEYS

3.1 Materiaalimalleista

Jännitys- ja muodonmuutostila ovat kytkennässä toisiinsa ja kytkennän antavia yhtälöitä sanotaan materiaaliyhtälöiksi eli konstitutiivisiksi yhtälöiksi. Materiaaliyhtälöt on etsittävä kokeellisesti ja ne ovat todellisilla aineilla mutkikkaita. Tästä johtuen lujuusopissa käytetään materiaalimalleja, joiden konstitutiiviset yhtälöt ovat yksinkertaisia ja analyttisesti esitettävissä, mutta sisältävät aineiden tärkeimmät ominaisuudet.

Materiaalille oletetaan kontinuumimalli, jolloin aineen ajatellaan jakaantuvan jatkuvasti kappaleeseen. Kontinuumi on homogeeninen, jos sen materiaaliyhtälöt ovat samat kaikissa pisteissä ja isotrooppinen, jos materiaaliyhtälöt ovat suunnasta riippumattomat. Epäisotrooppisia ja epähomogeenisia materiaaleja ovat mm. puu, valsattu teräs ja lasikuituvahvisteinen muovi.

Jos konstitutiivisissa yhtälöissä on aika mukana, on materiaali ajasta riippuva. Ajasta riippuvia materiaaleja ovat esimerkiksi nesteet, muovit, asfaltti, lakat, tekstiilikuidut, yleensä orgaaniset aineet ja metallit korkeissa lämpötiloissa. Ajasta riippumattomat materiaalit voidaan jakaa niihin syntyvän muodonmuutoksen perusteella jäykkiin, kimmoisiin ja plastisiin materiaaleihin. Jäykässä materiaalissa ei ole muodonmuutoksia. Kimmoisen materiaalin muodonmuutokset palautuvat, mutta plastisen materiaalin muodonmuutoksista ainakin osa jää palautumatta, kun kuormitukset poistetaan.

Materiaali on lineaarinen, jos konstitutiiviset yhtälöt ovat jännitys- ja muodonmuutostilan suureiden välisiä lineaarisia yhtälöitä.

3.2 Kimmoteoria

Tarkastellaan lineaarisesti kimmoista materiaalia, jolloin materiaaliyhtälöt ovat ajasta riippumattomia jännitys- ja muodonmuutoskomponenttien välisiä lineaarisia yhtälöitä. Kun lämpötilan vaikutusta ei oteta huomioon, materiaaliyhtälöt ovat tällöin muotoa

$$\begin{cases} \sigma_x = E_{11}\epsilon_x + E_{12}\epsilon_y + E_{13}\epsilon_z + E_{14}\gamma_{xy} + E_{15}\gamma_{yz} + E_{16}\gamma_{xz} \\ \sigma_y = E_{21}\epsilon_x + E_{22}\epsilon_y + E_{23}\epsilon_z + E_{24}\gamma_{xy} + E_{25}\gamma_{yz} + E_{26}\gamma_{xz} \\ \sigma_z = E_{31}\epsilon_x + E_{32}\epsilon_y + E_{33}\epsilon_z + E_{34}\gamma_{xy} + E_{35}\gamma_{yz} + E_{36}\gamma_{xz} \\ \tau_{xy} = E_{41}\epsilon_x + E_{42}\epsilon_y + E_{43}\epsilon_z + E_{44}\gamma_{xy} + E_{45}\gamma_{yz} + E_{46}\gamma_{xz} \\ \tau_{yz} = E_{51}\epsilon_x + E_{52}\epsilon_y + E_{53}\epsilon_z + E_{54}\gamma_{xy} + E_{55}\gamma_{yz} + E_{56}\gamma_{xz} \\ \tau_{xz} = E_{61}\epsilon_x + E_{62}\epsilon_y + E_{63}\epsilon_z + E_{64}\gamma_{xy} + E_{65}\gamma_{yz} + E_{66}\gamma_{xz} \end{cases} \quad (3.1)$$

jossa on otettu huomioon jännitys- ja muodonmuutosmatriisin symmetrisyys. Kun

materiaali oletetaan homogeeniseksi, ovat kertoimet E_{ij} yhtälössä (3.1) materiaalille ominaisia vakioita. Yhtälöissä (3.1) on 36 materiaalivakiota, joista vain 21 on erilaista, sillä voidaan osoittaa, että $E_{ij} = E_{ji}$. Jos materiaalilla on symmetriaominaisuuksia, pienenee toisistaan riippumattomien materiaalivakioiden lukumäärä. Yksinkertaisinta tapausta edustaa isotrooppinen materiaali, jolla materiaaliominaisuudet ovat suunnasta riippumattomat. Seurauksena on, että isotrooppisella materiaalilla on vain kaksi vapaata materiaalivakiota. Teknillisessä kirjallisuudessa näiksi valitaan tavallisesti kimmomoduuli E ja Poissonin vakio ν , jotka on helppo mitata. Usein käytetään apuna myös liukumoduulia $G = E/[2(1+\nu)]$. Toinen sovelluskelpoinen materiaali on ortotrooppinen materiaali, jolla on kolmessa toisiaan vastaan kohtisuorassa suunnassa erilaiset ominaisuudet eli kullakin suunnalla on oma kimmomoduuli ja kullakin suuntatavalla oma liukumoduuli ja Poissonin vakio, jolloin materiaalivakioita on yhdeksän.

Rajoitetaan isotrooppisen materiaalin tarkasteluun, jolloin materiaaliyhtälöt ovat

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_x + \nu(\epsilon_y + \epsilon_z)] & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_y + \nu(\epsilon_x + \epsilon_z)] & \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} \\ \sigma_z &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_z + \nu(\epsilon_x + \epsilon_y)] & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Yhtälöistä (3.2) saadaan jännityskomponentit, kun muodonmuutoskomponentit tunnetaan. Muodonmuutoskomponenttien suhteen ratkaistut materiaaliyhtälöt ovat

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \tau_{xy}/G \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] & \gamma_{xz} &= \tau_{xz}/G \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] & \gamma_{yz} &= \tau_{yz}/G \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ryhmää (3.2) tai (3.3) sanotaan yleistetyksi Hooken laiksi. Materiaaliyhtälöistä näkyy, että isotrooppisessa materiaalissa jännitys- ja muodonmuutostilojen pääsuunnat yhtyvät. Näin ei ole epäisotrooppisessa materiaalissa.

Yhtälöt (3.2) voidaan laittaa muotoon

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\epsilon_x + \lambda e & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= 2G\epsilon_y + \lambda e & \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} & e &= \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \\ \sigma_z &= 2G\epsilon_z + \lambda e & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} & \lambda &= \nu E / [(1+\nu)(1-2\nu)] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Liukumoduuli G ja λ ovat Lamén vakiot, joita käytetään vakioiden E ja ν asemesta.

Suurelle e saadaan tulkinta tarkastelemalla kuvan 2.5 differentiaalisärmiön muodonmuutoksesta johtuvaa tilavuuden muutosta. Alkutilassa tilavuus on $V_0 = \Delta x \Delta y \Delta z$ ja muodonmuutostilassa $V_m = (1 + \epsilon_x) \Delta x (1 + \epsilon_y) \Delta y (1 + \epsilon_z) \Delta z$. Saadaan siis

$$V_m = V_0 + \Delta V = (1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z + \epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_x \epsilon_z + \epsilon_y \epsilon_z + \epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z) V_0 \quad (3.5)$$

$$\Rightarrow V_m \approx (1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) V_0 = V_0 + e V_0 \quad \Rightarrow \quad (3.6)$$

$$e = \frac{V_m - V_0}{V_0} = \frac{\Delta V}{V_0} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad (3.7)$$

joten e on suhteellinen tilavuuden muutos. Se voidaan lausua jännityskomponenttien avulla sijoittamalla venymäkomponentit yhtälöstä (3.3), jolloin saadaan

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (3.8)$$

Kun tarkastellaan jännityselementtiä, jonka tahoihin kohdistuu hydrostaattinen paine, eli $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$ ja $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, saadaan yhtälöstä (3.8)

$$e = -3(1 - 2\nu)p/E \quad \Rightarrow \quad K = -\frac{p}{e} = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (3.9)$$

Vakiota K sanotaan materiaalin puristusmoduuliksi. Jos materiaali on kokoonpuristumatonta eli sen $e = 0$, on kaavan (3.8) mukaan silloin $\nu = 0,5$. Koska toisaalta $K > 0$, kun $e \neq 0$, saadaan lisäksi ehto $\nu \leq 0,5$ ja edelleen $0 \leq \nu \leq 0,5$.

3.2.1 Tasojännitystila

Tasojännitystilan (TJT) konstitutiiviset yhtälöt saadaan yhtälöistä (3.3) sijoittamalla $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, jolloin tasojännitystila on xy -tasossa. Tulokseksi saadaan

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) & \gamma_{xy} &= \tau_{xy} / G \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) & \gamma_{xz} &= 0 \\ \epsilon_z &= -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) & \gamma_{yz} &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Kaavasta (3.10) saadaan muodonmuutoskomponentit, kun jännityskomponentit tunnetaan. Ratkaisemalla yhtälöt (3.10) jännityskomponenttien suhteen saadaan

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_x + \nu\epsilon_y) & \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_y + \nu\epsilon_x) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} & \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.2.2 Tasomuodonmuutostila

Tasomuodonmuutostilan (TMT) konstitutiiviset yhtälöt saadaan yhtälöistä (3.2) ottamalla huomioon, että $\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$, jolloin tasomuodonmuutostila on xy-tason suuntainen. Tulokseksi saadaan

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\epsilon_x + \nu\epsilon_y] & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\epsilon_y + \nu\epsilon_x] & \tau_{xz} &= 0 \\ \sigma_z &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\epsilon_x + \epsilon_y) & \tau_{yz} &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Kaavasta (3.12) saadaan jännityskomponentit, kun muodonmuutoskomponentit tunnetaan. Ratkaisemalla yhtälöt (3.12) muodonmuutoskomponenttien suhteen saadaan

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y] & \epsilon_y &= \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x] \\ \gamma_{xy} &= \tau_{xy}/G & \epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

4 YHTEENVETO

Edellä esitetyssä lineaarisen lujuusopin perusteoriassa käytettävät tuntemattomat funktiot ovat

Jännityskomponentit $\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}$ 6 kpl

Muodonmuutoskomponentit $\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}$ 6 kpl

Siirtymäkomponentit $u \quad v \quad w$ 3 kpl

joiden ratkaiseminen on lujuusopin tavoitteena. Tuntemattomien ratkaisemiseksi ovat käytettävissä seuraavat riippumattomat osittaisdifferentiaaliyhtälöt ja yhtälöt

Jännityskomponenttien tasapainoyhtälöt

3 kpl

$$\begin{aligned}\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} + f_x &= 0 \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{yz,z} + f_y &= 0 \\ \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} + f_z &= 0\end{aligned}$$

Kinemaattiset yhtälöt

6 kpl

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= u_{,x} & \epsilon_y &= v_{,y} & \epsilon_z &= w_{,z} \\ \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} & \gamma_{xz} &= u_{,z} + w_{,x} & \gamma_{yz} &= v_{,z} + w_{,y}\end{aligned}$$

Materiaaliyhtälöt

6 kpl

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \tau_{xy} / G \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] & \gamma_{xz} &= \tau_{xz} / G \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] & \gamma_{yz} &= \tau_{yz} / G\end{aligned}$$

Yhteensä 15 kpl

Yhtälöitä ja tuntemattomia on siis sama määrä. Kun tilavuusvoimat sekä pintakuormitukset ja tuennat on annettu, on tehtävä matemaattisesti yksikäsitteinen. Kappaleen reunan pisteissä kysymykseen tulevat reunaehdot ovat

Pintavoimavektori on annettu. \Rightarrow Jännityskomponenttien reunaehdot.

Siirtymävektori on annettu. \Rightarrow Siirtymäkomponenttien reunaehdot.

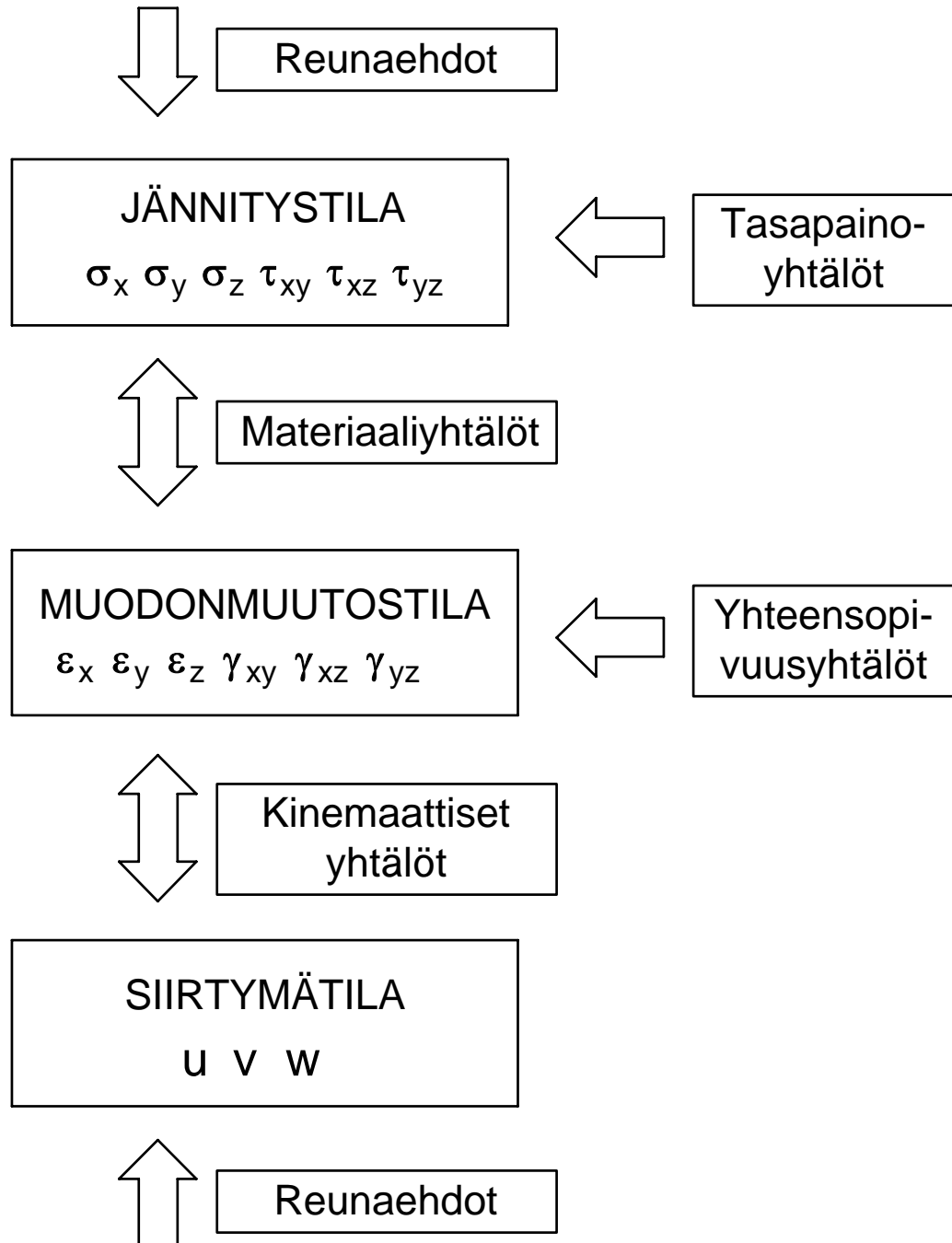
Sekareunaehdot. \Rightarrow Yhdistelmä jännitys- ja siirtymäkomponenttien reunaehtoja.

Kuvassa 4.1 on esitetty kaavio lujuusopin perussuureista sekä niitä koskevista ja kytkevistä yhtälöistä.

Voidaan osoittaa, että jokaisella lineaarisen lujuusopin tehtävällä on aina olemassa yksikäsitteinen ratkaisu. Sen löytäminen analyyttisesti on kuitenkin usein hyvin vaikeaa, mutta onnistuu tavallisesti likimääräisesti numeerisilla menetelmillä, joista tärkein on elementtimenetelmä (FEM).

Lineaarisen lujuusopin ongelmassa on aina pohjimmiltaan kysymys edellä kuvatun yhtälöjärjestelmän reuna-arvot tehtävän ratkaisemisesta. Sovellettaessa lujuusoppia eri rakennetyyppeihin kannattaa ottaa huomioon näiden erityispiirteet. Näin saadaan tiettyihin rakennetyyppeihin soveltuvia lujuusopin teorioita (palkkiteoria, laattateoria, kuoriteoria), joissa edellä esitettyjä perusyhtälöitä on kehitelty tarkoituksenmukaiseen muotoon, käytössä voi olla perustuntemattomista johdettuja suureita (taivutusmomentti, jännitysresultantti, suuntakulma) tai osa tuntemattomista on merkityksettömi-

nä oletettu nolliksi. Nämä lujuusopin erityisteoriat eivät ulkoiselta olemukseltaan välttämättä muistuta enää kovinkaan paljon tässä käsiteltyjä perusyhtälöitä, mutta on hyvä muistaa, että niissä on joka tapauksessa sisään rakennettuna perusyhtälöiden mukaiset fysikaaliset ja geometriset lainalaisuudet.



Kuva 4.1 Lujuusopin yhtälöjärjestelmä.