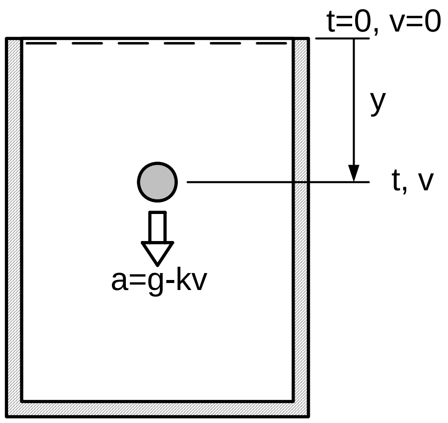
2.3 Pieni kappale päästetään levosta putoamaan öljyä sisältävään astiaan. Kappaleen kiihtyvyys alaspäin on $a = g - kv$, missä g on putoamiskiihtyvyys, k on öljyn viskositeetista ja kappaleen muodosta riippuva vakio ja v on kappaleen nopeus. Määritä kappaleen nopeus v ja asema y pystysuunnassa ajan t funktiona, kun pudotushetkellä $t = 0$ asema $y = 0$.

Ratkaisu:



Kiihtyvyys on nopeuden funktio $a = g - kv$. Kiihtyvyyden määritelmästä seuraa

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dv}{dt} = g - kv$$

Erottamalla muuttujat saadaan $\dfrac{dv}{g - kv} = dt$

Integroimalla alkuhetken $t = 0, v = 0$ ja mielivaltaisen hetken t, v välillä saadaan

$$\int_0^v \frac{dv}{g - kv} = \int_0^t dt \qquad \Rightarrow \qquad \Big/_0^v -\frac{1}{k}\ln(g - kv) = \Big/_0^t t \qquad \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{k}\ln(g - kv) + \frac{1}{k}\ln g = t \qquad \Rightarrow \qquad \ln\frac{g - kv}{g} = -kt \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad g - kv = ge^{-kt} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})}$$

Nopeuden määritelmästä saadaan $v = \dfrac{dy}{dt} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{g}{k}(1 - e^{-kt})$

Erottamalla muuttujat saadaan $dy = \dfrac{g}{k}(1 - e^{-kt})dt$

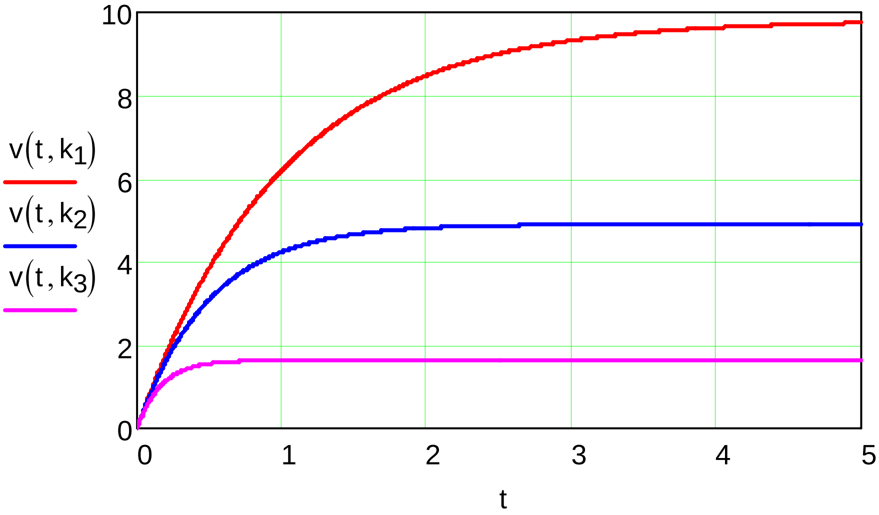
Integroimalla alkuhetken $y = 0, t = 0$ ja mielivaltaisen hetken y, t välillä saadaan

$$\int_0^y dy = \int_0^t \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})dt \qquad \Rightarrow \qquad \Big/_0^y y = \Big/_0^t \frac{g}{k}(t + \frac{1}{k}e^{-kt}) \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad y = \frac{g}{k}\left[(t + \frac{1}{k}e^{-kt}) - \frac{1}{k}\right] \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{y = \frac{g}{k}\left[t - \frac{1}{k}(1 - e^{-kt})\right]}$$

$$g := 9.81 \cdot \frac{m}{s^2} \qquad k_1 := 1 \cdot \frac{1}{s} \qquad k_2 := 2 \cdot \frac{1}{s} \qquad k_3 := 6 \cdot \frac{1}{s}$$

$$v(t,k) := \frac{g}{k} \cdot \left(1 - e^{-k \cdot t}\right)$$



$$y(t,k) := \frac{g}{k} \cdot \left[t - \frac{1}{k}\left(1 - e^{-k \cdot t}\right)\right]$$