ESIMERKKI: Kolmisivuinen lineaarinen levyelementti

$E := 210000 \cdot MPa$ $\quad \nu := 0.3$ $\quad t := 10 \cdot mm$ $\quad ORIGIN := 1$ $\quad \mu := 10^{-6}$

Solmukoordinaatit:

$x_1 := 20 \cdot mm \quad x_2 := 80 \cdot mm \quad x_3 := 40 \cdot mm$

$y_1 := 10 \cdot mm \quad y_2 := 30 \cdot mm \quad y_3 := 70 \cdot mm$

Vakiot α ja β:

$\alpha_1 := x_3 - x_2 \qquad \alpha_2 := x_1 - x_3 \qquad \alpha_3 := x_2 - x_1$

$\alpha_1 = -40\,mm \qquad \alpha_2 = -20\,mm \qquad \alpha_3 = 60\,mm$

$\beta_1 := y_2 - y_3 \qquad \beta_2 := y_3 - y_1 \qquad \beta_3 := y_1 - y_2$

$\beta_1 = -40\,mm \qquad \beta_2 = 60\,mm \qquad \beta_3 = -20\,mm$

Elementin pinta-ala: $A := \frac{1}{2} \cdot \left[(-x_1 + x_2) \cdot (-y_1 + y_3) - (-x_1 + x_3) \cdot (-y_1 + y_2) \right]$ $\qquad A = 1600\,mm^2$

Kinemaattinen matriisi:

$$B := \frac{1}{2 \cdot A} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & \alpha_2 & 0 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \alpha_3 & \beta_3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -0.0125 & 0 & 0.01875 & 0 & -0.00625 & 0 \\ 0 & -0.0125 & 0 & -0.00625 & 0 & 0.01875 \\ -0.0125 & -0.0125 & -0.00625 & 0.01875 & 0.01875 & -0.00625 \end{pmatrix} \frac{1}{mm}$$

Konstitutiivinen matriisi:

$$E_{TJT} := \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \qquad E_{TJT} = \begin{pmatrix} 230769.231 & 69230.769 & 0 \\ 69230.769 & 230769.231 & 0 \\ 0 & 0 & 80769.231 \end{pmatrix} MPa$$

Jäykkyysmatriisi: $k := B^T \cdot E_{TJT} \cdot B \cdot t \cdot A$

$$k = \begin{pmatrix} 778846.15 & 375000.00 & -764423.08 & -216346.15 & -14423.08 & -158653.85 \\ 375000.00 & 778846.15 & -158653.85 & -14423.08 & -216346.15 & -764423.08 \\ -764423.08 & -158653.85 & 1348557.69 & -281250.00 & -584134.62 & 439903.85 \\ -216346.15 & -14423.08 & -281250.00 & 598557.69 & 497596.15 & -584134.62 \\ -14423.08 & -216346.15 & -584134.62 & 497596.15 & 598557.69 & -281250.00 \\ -158653.85 & -764423.08 & 439903.85 & -584134.62 & -281250.00 & 1348557.69 \end{pmatrix} \frac{N}{mm}$$

Oletetaan, että elementtiverkon perusyhtälöstä on saatu tämän elementin solmusiirtymävektoriksi:

$$u := \begin{pmatrix} 0.0022 \\ 0.0013 \\ -0.0033 \\ 0.005 \\ -0.004 \\ -0.007 \end{pmatrix} \cdot mm$$

Muodonmuutokset ja jännitykset elementin alueessa ovat vakioita:

$$\varepsilon := B \cdot u \qquad \varepsilon = \begin{pmatrix} -64.375 \\ -178.75 \\ 39.375 \end{pmatrix} \mu \qquad \sigma := E \cdot B \cdot u \qquad \sigma = \begin{pmatrix} -13.519 \\ -37.537 \\ 8.269 \end{pmatrix} MPa$$

Interpolointifunktiot: $N_1(\xi,\eta) := 1 - \xi - \eta \qquad N_2(\xi,\eta) := \xi \qquad N_3(\xi,\eta) := \eta$

Geometrian kuvaus:

$$x(\xi,\eta) := N_1(\xi,\eta) \cdot x_1 + N_2(\xi,\eta) \cdot x_2 + N_3(\xi,\eta) \cdot x_3$$

$$y(\xi,\eta) := N_1(\xi,\eta) \cdot y_1 + N_2(\xi,\eta) \cdot y_2 + N_3(\xi,\eta) \cdot y_3$$

<u>Tilavuusvoimakuormitus:</u> Rotaatio z-akselin ympäri. $\rho := 7850 \cdot \frac{kg}{m^3} \qquad \omega := 200 \cdot \frac{rad}{s}$

$$f_x(\xi,\eta) := \rho \cdot \omega^2 \cdot x(\xi,\eta) \qquad f_y(\xi,\eta) := \rho \cdot \omega^2 \cdot y(\xi,\eta)$$

$$r_1 := 2 \cdot A \cdot t \cdot \int_0^1 \int_0^{1-\eta} N_1(\xi,\eta) \cdot f_x(\xi,\eta) \, d\xi \, d\eta \qquad r_2 := 2 \cdot A \cdot t \cdot \int_0^1 \int_0^{1-\eta} N_1(\xi,\eta) \cdot f_y(\xi,\eta) \, d\xi \, d\eta$$

$$r_3 := 2 \cdot A \cdot t \cdot \int_0^1 \int_0^{1-\eta} N_2(\xi,\eta) \cdot f_x(\xi,\eta) \, d\xi \, d\eta \qquad r_4 := 2 \cdot A \cdot t \cdot \int_0^1 \int_0^{1-\eta} N_2(\xi,\eta) \cdot f_y(\xi,\eta) \, d\xi \, d\eta$$

$$r_5 := 2 \cdot A \cdot t \cdot \int_0^1 \int_0^{1-\eta} N_3(\xi,\eta) \cdot f_x(\xi,\eta) \, d\xi \, d\eta \qquad r_6 := 2 \cdot A \cdot t \cdot \int_0^1 \int_0^{1-\eta} N_3(\xi,\eta) \cdot f_y(\xi,\eta) \, d\xi \, d\eta$$

$$r = \begin{pmatrix} 66.986667 \\ 50.240000 \\ 92.106667 \\ 58.613333 \\ 75.360000 \\ 75.360000 \end{pmatrix} N$$

Pintavoimakuormitus: Sivulla 12 lineaariset pintakuormitukset.

$p_{x1} := 1\cdot MPa \qquad p_{y1} := 1.5\cdot MPa \qquad p_{x2} := 2\cdot MPa \qquad p_{y2} := 3.5\cdot MPa$

$$p_x(\xi) := p_{x1} + \frac{p_{x2} - p_{x1}}{x_2 - x_1}\cdot\left(x(\xi,0) - x_1\right) \qquad p_y(\xi) := p_{y1} + \frac{p_{y2} - p_{y1}}{y_2 - y_1}\cdot\left(y(\xi,0) - y_1\right)$$

$$s_{12} := \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2} \qquad s_{12} = 63.246\,mm$$

$$n_1(\xi) := N_1(\xi,0) \qquad n_2(\xi) := N_2(\xi,0) \qquad n_3(\xi) := N_3(\xi,0)$$

$$r_1 := t\cdot s_{12}\cdot\int_0^1 n_1(\xi)\cdot p_x(\xi)\,d\xi \qquad r_2 := t\cdot s_{12}\cdot\int_0^1 n_1(\xi)\cdot p_y(\xi)\,d\xi \qquad r_3 := t\cdot s_{12}\cdot\int_0^1 n_2(\xi)\cdot p_x(\xi)\,d\xi$$

$$r_4 := t\cdot s_{12}\cdot\int_0^1 n_2(\xi)\cdot p_y(\xi)\,d\xi \qquad r_5 := t\cdot s_{12}\cdot\int_0^1 n_3(\xi)\cdot p_x(\xi)\,d\xi \qquad r_6 := t\cdot s_{12}\cdot\int_0^1 n_3(\xi)\cdot p_y(\xi)\,d\xi$$

$$r = \begin{pmatrix} 421.637021 \\ 685.160160 \\ 527.046277 \\ 895.978670 \\ 0.000000 \\ 0.000000 \end{pmatrix} N$$

Esijännitystilakenttä: x-suunnassa lineaarinen esijännitysvektori.

$$\sigma_0(\xi,\eta) := \begin{pmatrix} 0.0042 \\ -0.0023 \\ -0.0031 \end{pmatrix}\cdot\frac{MPa}{mm}\cdot x(\xi,\eta) + \begin{pmatrix} 11 \\ -20 \\ 14 \end{pmatrix}\cdot MPa \qquad i := 1 .. 6$$

$$r_i := -2\cdot A\cdot t\cdot\int_0^1\int_0^{1-\eta}\left(B^T\cdot\sigma_0(\xi,\eta)\right)_i\,d\xi\,d\eta \qquad r = \begin{pmatrix} 5010.266667 \\ -1250.400000 \\ -1973.266667 \\ -6167.333333 \\ -3037.000000 \\ 7417.733333 \end{pmatrix} N$$