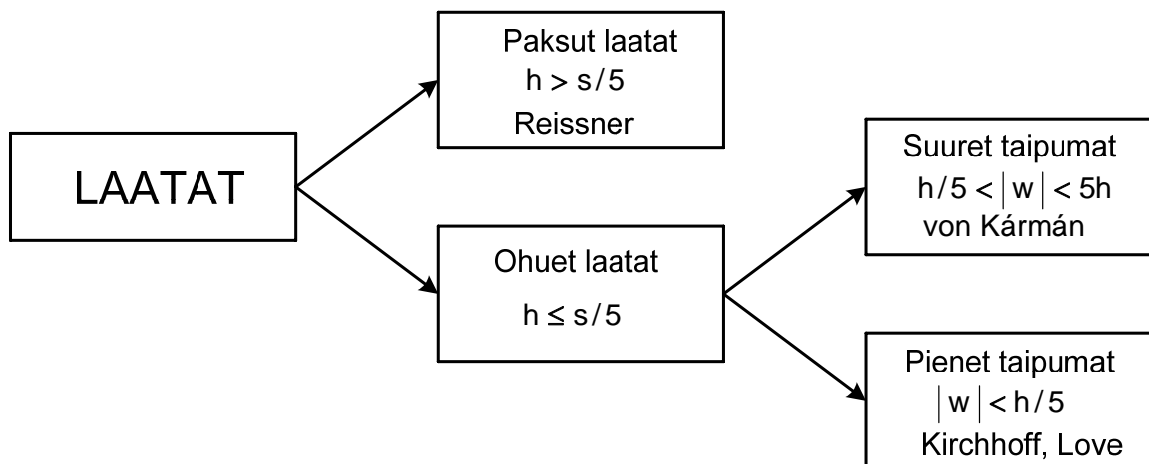


III. LAATTARAKENTEET

1 JOHDANTO

Tasopintarakenteen kuormitus voidaan jakaa keskipinnan suuntaiseen ja sitä vastaan kohtisuoraan kuormitukseen eli levy- ja laattakuormitukseen. Taipuman ollessa tarpeeksi pieni nämä kuormitustapaukset voidaan käsitellä erillisinä. Laatta on tasopintarakenne, jota kuormitetaan sen normaalin suunnassa. Tasopintarakenteen laskentamalli on sen keskipinta ja lisäksi tarvitaan rakenteen paksuus. Laatan keskipinta taipuu kuormituksen vaikutuksesta kaarevaksi pinnaksi ja taipumalla syntynyttä pintaa sanotaan laatan kimmopinnaksi. Laatta kantaa kuormituksensa pääasiassa taiputus- ja vääntörasitusten avulla, mutta siihen syntyy myös leikkausvoimarasituksia.

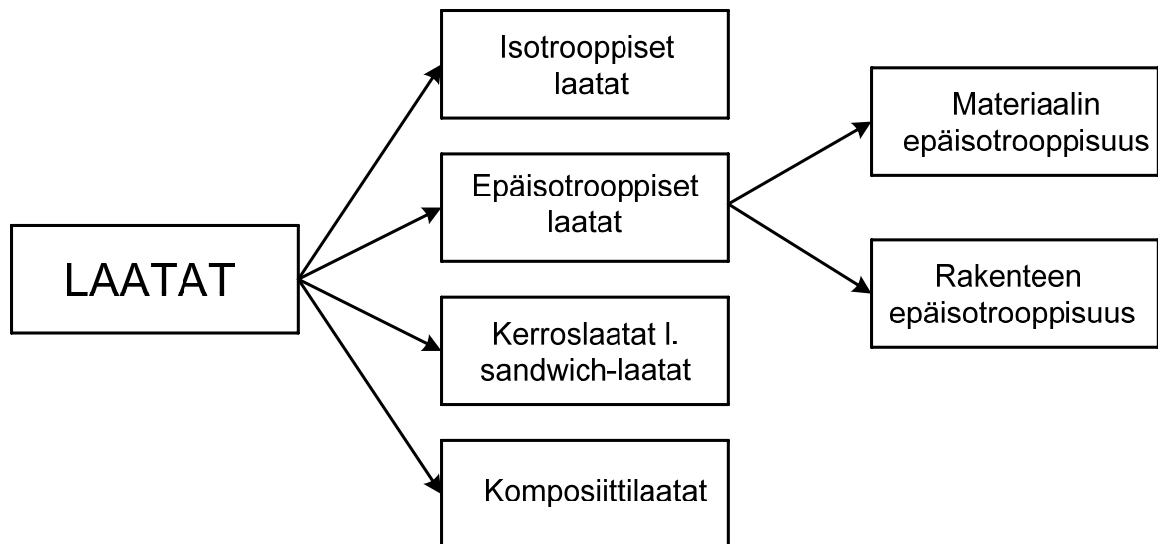
Laattarakenteiden lujuuslaskentaan on kehitetty monia erilaisiin alkuoletuksiin perustuvia teorioita. Kuvassa 1.1 on esitetty laattaongelmien karkea jaottelu, joka on tehty niiden ratkaisemiseen soveltuvien menetelmien perusteella. Laatan paksuutta on kuvassa merkitty kirjaimella h , s tarkoittaa keskitason pienintä ulottuvuutta ja $|w|$ taipuman itseisarvon maksimia.



Kuva 1.1 Laattaongelmien jaottelu.

Kuvassa 1.1 annetut rajat ovat vain suuntaa antavia ohjeita, eivätkä teoriasta seuraavia täsmällisiä arvoja. Paksuilla laatoilla leikkausmuodonmuutoksilla on merkitystä samaan tapaan kuin korkeilla palkeilla (Timoshenkon palkkiteoria). Kohtuullisen paksuuden omaavan laatan tarkasteluun sopii Reissnerin laattateoria, joka ottaa leikkausmuodonmuutoksen likimääräisesti huomioon. Ohuen ja vähän taipuneen laatan tarkastelu voidaan suorittaa klassisen laattateorian eli Kirchhoff-Love laattateorian mukaisesti. Tämä teoria vastaa suoran palkin teknistä taivutusteoriaa ja on sen kaksiulotteinen yleistys. Ohut ja runsaasti taipunut laatta käyttäytyy epälineaarisesti, sillä sen kimmopinta venyy merkittävästi jäykistäen laattaa taipumisen suhteen. Von Kármánin laattateoria tarjoaa tällaiseen tapaukseen sopivan analyyttisen ratkaisumenetelmän. Kaikkien edellä mainittujen laattaongelmien numeerisessa ratkaisemisessa voidaan soveltaa elementtimenetelmää ja käytettävissä on laaja valikoima erityyppisiä laattaelementtejä.

Laatat voidaan luokitella materiaalin perusteella kuvassa 1.2 esitetyllä tavalla. Teräslaatta käyttäytyy isotrooppisesti. Epäisotrooppisuus on usein materiaalin tai rakenteen ortotrooppisuutta (puu, jäykisteillä kohtisuorasti ristiin vahvistettu laatta). Kerros-laatassa on kevyt sydän ja ohuet pintalevyt yhdistetty toisiinsa (styrox tai uretaani ja teräs tai vaneri). Komposiittilaatassa on perusaineeseen (muovi, betoni, lasi) sijoitettu hyvin vetoa kestäviä säikeitä (hiilikuidut, terästangot, langat).



Kuva 1.2 Laattojen luokittelu materiaalin mukaan.

Tässä käsitellään vain ohuita ja vähän taipuneita laattoja, joiden materiaali on isotrooppinen, homogeeninen ja käyttäytyy lineaarisesti kimmoisesti.

2 KLASSISEN LAATTATEORIAN PERUSYHTÄLÖT

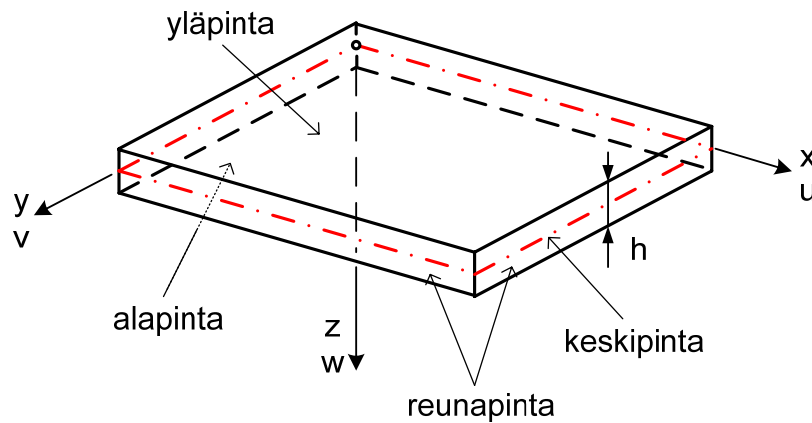
2.1 Laatan kinemaattinen malli

Seuraavassa tarkastellaan laatan teoriaa kuvan 2.1 xyz-koordinaatistossa, jonka xy-taso on laatan keskitasossa ja z-akseli on keskitason normaalin suuntaan. Jos laatan paksuus h on vakio, on laatan alapinta taso $z = +h/2$ ja yläpinta taso $z = -h/2$. Jos laatan ylä- ja alapinta ovat erisuuntaisia tasoja tai kaarevia pintoja, on laatan paksuus koordinaattien x ja y funktio. Paksuuden puolittavien pisteiden on tässäkin tapauksessa muodostettava taso, jotta rakennetta voitaisiin tarkastella laattateorialla. Laattaa rajoittavia z -akselin suuntaisia pintoja kutsutaan sen reunaksi. Siirtymäkentän komponentteja koordinaattiakseleiden suunnissa merkitään symboleilla u , v ja w lujuusopin käytännön mukaisesti. Siirtymäkomponenttia w sanotaan taipumaksi.

Klassinen laattateoria perustuu seuraaviin laatan käyttäytymistä koskeviin hypoteeseihin (Kirchhoff, Love).

1. Laatan keskipinta on neutraalipinta, jonka pientä venymistä ei oteta huomioon.
2. Keskitason normaalilla olevat laatan pisteet pysyvät tästä taipumalla syntyneen kimmopinnan normaalilla.
3. Keskitason normaalin suuntaisella venymällä ε_z ei ole merkitystä.
4. Keskitason normaalin suuntainen jännityskomponentti σ_z voidaan jättää huomiotta keskitason suuntaisten komponenttien σ_x , σ_y ja τ_{xy} rinnalla

Hypoteesia 2 vastaa palkin teknisessä taivutusteoriassa Bernoullin hypoteesi.



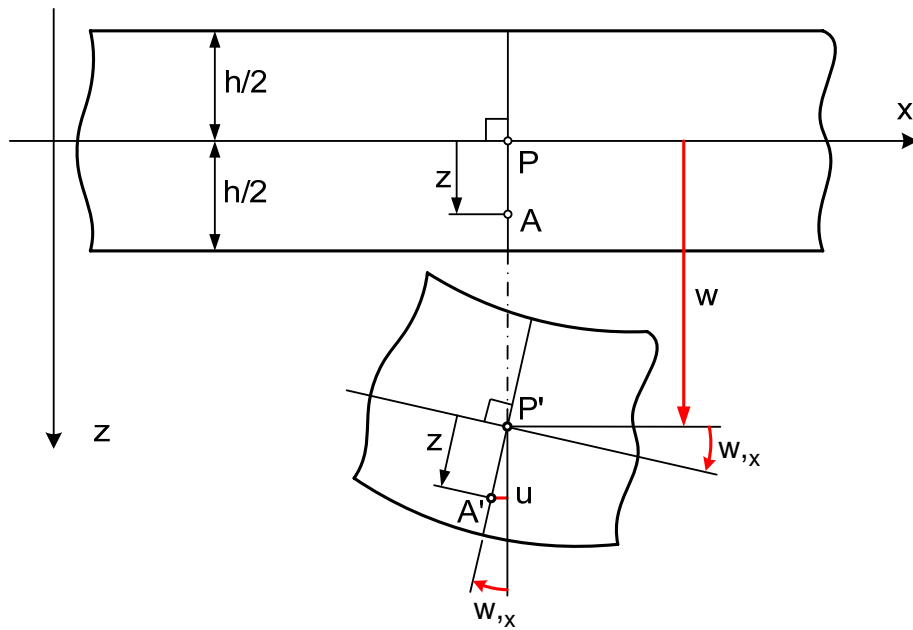
Kuva 2.1 Laatan koordinaatisto.

Kuvassa 2.2 tarkastellaan laatan keskitason mielivaltaista pistettä P ja sen kautta kulkevalla keskitason normaalilla etäisyydellä z olevaa pistettä A. Kuvassa näkyvät pisteen A siirtymäkomponentit u ja w xz-tason suuntaisessa leikkauksessa. Siirtymät oletetaan pieniksi ($|w| < h/5$), mutta niitä on selvyys vuoksi liioiteltu. Keskipinnan venymättömyysoletuksesta 1 seuraa, että piste P siirtyy vain z-akselin suunnassa tullen pisteeseen P'. Keskitason normaali kääntyy y-akselin ympäri kulman $w_{,x}$, joka on sama kuin keskitason kääntymiskulma, sillä perushypoteesin 2 mukaan A' on taipuneen kimmopinnan normaalilla. Perushypoteesin 3 mukaan on $\varepsilon_z = 0$, joten $PA = P'A'$ eli normaali ei veny. Tarkastelemalla samalla tavalla pisteen P kautta kulkevaa yz-tason suuntaista leikkausta nähdään, että normaali PA kääntyy x-akselin ympäri kulman $w_{,y}$. Pisteen A siirtymäkomponenteiksi saadaan näin ollen

$$u = -z w_{,x} \quad v = -z w_{,y} \quad w = w(x, y) \quad (2.1)$$

Laatan muodonmuutoskomponenteiksi saadaan kinemaattisten yhtälöiden avulla

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{,x} = -z w_{,xx} = z \kappa_x & \varepsilon_y &= v_{,y} = -z w_{,yy} = z \kappa_y \\ \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} = -2z w_{,xy} = 2z \kappa_{xy} & \varepsilon_z &= \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$



Kuva 2.2 Kinemaattinen malli.

Kaavassa (2.2) κ_x ja κ_y ovat kimmopinnan kaarevuudet x- ja y-akselien suunnissa ja κ_{xy} sen kierevyys xy-tasoon nähden tarkastelupisteessä P'. Laatan kaarevuussäteet ρ_x ja ρ_y ovat sen kaarevuuksien käänteislukuja sekä kierevyyssäde ρ_{xy} sen kierevyyden käänteisluku eli

$$1/\rho_x = \kappa_x = -w_{,xx} \quad 1/\rho_y = \kappa_y = -w_{,yy} \quad 1/\rho_{xy} = \kappa_{xy} = -w_{,xy} \quad (2.3)$$

Kaavasta (2.2) näkyy, että laatan perushypoteesien 1, 2 ja 3 mukaan laatan kaikkiin pisteisiin tulee tasomuodonmuutostila.

2.2 Materiaaliyhtälöt ja laattamomentit

Laatan materiaalin oletetaan käyttäytyvän lineaarisesti kimmoisesti, jolloin materiaaliyhtälönä on yleistetty Hooken laki. Laattateorian perushypoteesin 2 mukaan liukummat γ_{xz} ja γ_{yz} ovat nollia, joten myös leikkausjännitykset τ_{xz} ja τ_{yz} ovat nollia. Koska hypoteesin 4 mukaan myös σ_z oletetaan nolllaksi, on laatan kaikissa pisteissä tasojännitystila. Perushypoteesien mukaan laatan pisteissä on siis samanaikaisesti sekä tasomuodonmuutostila että tasojännitystila, mikä tarkkaan ottaen on mahdotonta. Kysymys on nyt likimääräisistä lähtöoletuksista, jotka kokemuksen mukaan johtavat ohuilla ja vähän taipuneilla laatoilla käyttökelpoiseen teoriaan. Myöhemmin selviää, että tasojännitystilaoletuksesta pidetään kiinni vain niin kauan, kun saadaan lausekkeet keskitason suuntaisille jännityskomponenteille σ_x , σ_y ja τ_{xy} . Tämän jälkeen saatuja lausekkeitä hyväksi käyttäen johdetaan jännityskomponenttien tasapainoeh-

doista likikaavat z-akselin suuntaisille jännityskomponenteille σ_z , τ_{xz} ja τ_{yz} . Keskitason suuntaisten jännityskomponenttien materiaaliyhtälöt ovat tasojännitystilassa

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y) \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x) \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (2.4)$$

Kun yhtälöt (2.4) ratkaistaan jännityskomponenttien suhteen, saadaan tulos

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \quad (2.5)$$

Kun yhtälöihin (2.5) sijoitetaan muodonmuutoskomponentit yhtälöistä (2.2), saadaan jännityskomponentit lausuttua taipuman w tai kaarevuuksien ja kierevyyden avulla

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(-w_{,xx} - \nu w_{,yy})z = \frac{E}{1-\nu^2}(\kappa_x + \nu \kappa_y)z \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(-w_{,yy} - \nu w_{,xx})z = \frac{E}{1-\nu^2}(\kappa_y + \nu \kappa_x)z \\ \tau_{xy} &= -\frac{E}{1+\nu}w_{,xy}z = \frac{E}{1+\nu}\kappa_{xy}z \end{aligned} \quad (2.6)$$

Kaavasta (2.6) näkyy, että jännitykset jakaantuvat laatan paksuuden suunnassa (z-suunta) lineaarisesti. Laattateoriassa kannattaa käyttää voimasuureina myös laattamomentteja M_x , M_y ja M_{xy} , jotka määritellään yhtälöillä

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_y dz \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{xy} dz \quad (2.7)$$

Integrointi määritelmässä (2.7) on laatan paksuuden yli. Laattamomentit M_x ja M_y ovat taivutusmomentin viivatiheydet laatan leikkauksissa $x = \text{vakio}$ ja $y = \text{vakio}$ vastaavasti. Laattamomentti M_{xy} on vääntömomentin viivatiheys leikkauksessa $x = \text{vakio}$ tai $y = \text{vakio}$. Kun jännityskomponentti σ_x sijoitetaan yhtälöstä (2.6) momentin M_x lausekkeeseen ja integroidaan, saadaan seuraavaa

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2}(-w_{,xx} - \nu w_{,yy})z^2 dz \\ &= \frac{E}{1-\nu^2}(-w_{,xx} - \nu w_{,yy}) \int_{-h/2}^{h/2} \frac{z^3}{3} dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(-w_{,xx} - \nu w_{,yy}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Vastaavat yhtälöt voidaan johtaa myös laattamomenteille M_y ja M_{xy} , tulokset on koottu kaavaan (2.9).

$$\begin{aligned}
 M_x &= -D(w_{,xx} + \nu w_{,yy}) = D(\kappa_x + \nu \kappa_y) \\
 M_y &= -D(w_{,yy} + \nu w_{,xx}) = D(\kappa_y + \nu \kappa_x) \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \\
 M_{xy} &= -D(1-\nu)w_{,xy} = D(1-\nu)\kappa_{xy}
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Suuretta D sanotaan laatan taivutusjäykkyydeksi. Kaavassa (2.9) on laattamomentit lausuttu taipuman w avulla. Jatkossa osoittautuu, että taipuma on klassisen laatta-teorian perussuure, jonka avulla pystytään lausumaan kaikki muut suureet ja perusongelmaksi tulee näin taipuman ratkaiseminen. Kaavasta (2.9) saadaan lausekkeet

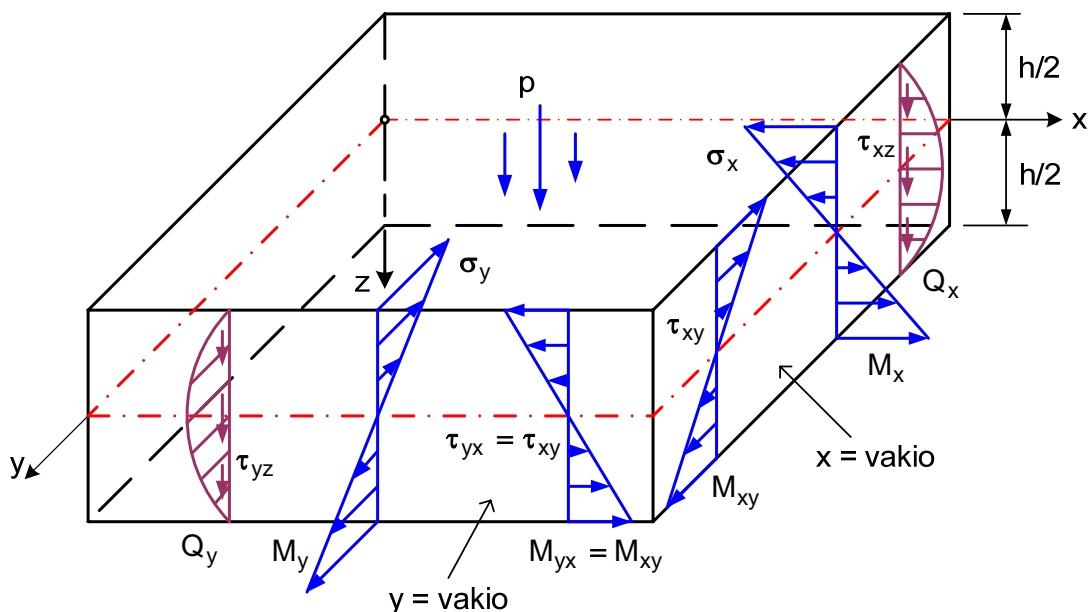
$$\kappa_x + \nu \kappa_y = M_x / D \quad \kappa_y + \nu \kappa_x = M_y / D \quad (1-\nu)\kappa_{xy} = M_{xy} / D \tag{2.10}$$

Kun lausekkeet (2.10) sijoitetaan yhtälöihin (2.6), seuraa jännityskomponenteille

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I} z \quad \sigma_y = \frac{M_y}{I} z \quad \tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{I} z \quad I = h^3 / 12 \tag{2.11}$$

jossa suure I on ykkösen levyisen laattakaistan poikkileikkauksen neliömomentti sen paksuuden puolittavan suoran suhteen. Yhtälöt (2.11) antavat laattamomenttien ja laatan keskipinnan suuntaisten jännityskomponenttien väliset yhteydet. Jännityskomponentit saavat ääriarvonsa laatan ylä- ja alapinnalla, missä $z = \pm h/2$ ja tällöin on

$$\sigma_x = \mp \frac{6M_x}{h^2} \quad \sigma_y = \mp \frac{6M_y}{h^2} \quad \tau_{xy} = \mp \frac{6M_{xy}}{h^2} \tag{2.12}$$



Kuva 2.3 Laatan jännitysjakautumat.

Kuvassa 2.3 on esitetty jännityskomponenttien σ_x , σ_y ja τ_{xy} jakaantuminen laatan paksuuden suunnassa leikkauksissa $x = \text{vakio}$ ja $y = \text{vakio}$. Siinä on esitetty myös z -akselin suuntaisten leikkausjännityskomponenttien τ_{xz} ja τ_{yz} jakaantuminen, joka saadaan myöhemmin selville jännityskomponenttien tasapainoyhtälöistä. Tässä vaiheessa on vielä voimassa perushypoteesien mukainen oletus, jonka mukaan nämä jännityskomponentit ovat nollia. Voidaan todeta, että laatan leikkauksessa taivutuksesta ja väännöstä aiheutuvat jännitykset ovat paksuussuunnassa lineaarisesti jakaantuneita siten, että keskipinnan jännitykset ovat nollia. Tämä tulos on normaalijännitysten osalta vastaava kuin teknisessä taivutusteoriassa saadaan palkin normaalijännityksen jakaantumiselle palkin korkeussuunnassa. Palkin normaalijännitysjakautuma ei muutu taivutustason normaalin suunnassa, mutta laatan normaalijännitysjakautuma esimerkiksi leikkauksessa $x = \text{vakio}$ on koordinaatin y funktio. Palkkiteoriassa käytetään voimasuureena poikkileikkauksen taivutusmomenttia, joka on palkin poikkileikkauksen normaalijännitysjakautuman aiheuttama momentti taivutusakselin suhteen. Tätä vastaa laattateoriassa tarkasteltavan koordinaattiakselin suuntaisen leikkauksen taivutusmomenttitiheys, joka on laatan paksuussuuntaan liittyvän normaalijännitysjakautuman aiheuttama momenttitiheys. Laatan vääntömomenttitiheydellä M_{xy} ei ole palkkiteoriassa vastinetta.

2.3 Laatan tasapainoyhtälöt

Koska z -akselin suuntaan liittyvät liukumien γ_{xz} ja γ_{yz} ovat perushypoteesin 2 mukaan nollia, ovat myös niitä vastaavat leikkausjännityskomponentit τ_{xz} ja τ_{yz} materiaalimallina olevan yleistetyn Hooken lain mukaan nollia. Perushypoteesi 2 on kuitenkin likimääräinen vaikkakin käyttökelpoinen, joten todellisuudessa z -akselin suuntaiset leikkausjännitykset eivät ole tarkasti nollia. Niille voidaan johtaa likimääräiset kaavat jännityskomponenttien tasapainoyhtälöiden avulla samalla tavalla kuin palkkiteoriassa johdetaan palkin leikkausjännitykselle likilauseke (Jourawskin kaava). Määritellään aluksi laatan leikkausvoimatiheydet Q_x ja Q_y poikittaisten leikkausjännityskomponenttien τ_{xz} ja τ_{yz} resultanteina seuraavasti

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \quad (2.13)$$

Jännityskomponenttien tasapainoyhtälöt ovat laatalle

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} = 0 \quad \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{yz,z} = 0 \quad \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} + f_z = 0 \quad (2.14)$$

jotka seuraavat yleisistä tasapainoyhtälöistä jättämällä pois levykuormituksiin kuuluvat tilavuusvoimakomponentit f_x ja f_y . Kertomalla ryhmän (2.14) ensimmäinen yhtälö koordinaatilla z ja integroimalla laatan paksuuden yli saadaan aluksi

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{x,x} dz + \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{xy,y} dz + \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{xz,z} dz = 0 \quad (2.15)$$

Vaihtamalla integroinnin ja derivoinnin järjestys ensimmäisessä ja toisessa integraalissa ja integroimalla kolmas osittain seuraa

$$\left(\int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz \right)_{,x} + \left(\int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{xy} dz \right)_{,y} + \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{xz} - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz = 0 \quad (2.16)$$

Sijoitustermi on nolla, sillä pintakuormituksiin ei sisälly ylä- tai alapinnalla vaikuttavia keskitason suuntaisia kuormituksia eli $\tau_{xz}(x,y,\pm h/2) = 0$ ja $\tau_{yz}(x,y,\pm h/2) = 0$. Kun otetaan huomioon määritelmät (2.7) ja (2.13), menee yhtälö (2.16) muotoon

$$M_{x,x} + M_{xy,y} = Q_x \quad (2.17)$$

Yhtälöryhmän (2.14) toisesta yhtälöstä voidaan vastaavalla tavalla johtaa tulos

$$M_{xy,x} + M_{y,y} = Q_y \quad (2.18)$$

Integroimalla ryhmän (2.14) kolmas yhtälö laatan paksuuden yli saadaan

$$\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz,x} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz,y} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{z,z} dz + \int_{-h/2}^{h/2} f_z dz = 0 \quad (2.19)$$

josta seuraa integroimalla sekä derivointi- ja integrointijärjestys vaihtamalla

$$\left(\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \right)_{,x} + \left(\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \right)_{,y} + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z + \int_{-h/2}^{h/2} f_z dz = 0 \quad (2.20)$$

Kaksi viimeistä termiä voidaan tulkita laatan normaalin suuntaisen kuormituksen (poikittaiskuormituksen) laatan keskitasoon yhdistetyksi pintatiheydeksi $p(x,y)$ eli

$$p(x,y) = \sigma_z(x,y,h/2) - \sigma_z(x,y,-h/2) + \int_{-h/2}^{h/2} f_z(x,y,z) dz \quad (2.21)$$

Määritelmien (2.13) perusteella on siis voimassa yhtälö

$$Q_{x,x} + Q_{y,y} = -p \quad (2.22)$$

Kun tulokset kootaan, saadaan kaavan (2.23) jännitysresultanttien tasapainoyhtälöt

$$\boxed{M_{x,x} + M_{xy,y} = Q_x \quad M_{xy,x} + M_{y,y} = Q_y \quad Q_{x,x} + Q_{y,y} = -p} \quad (2.23)$$

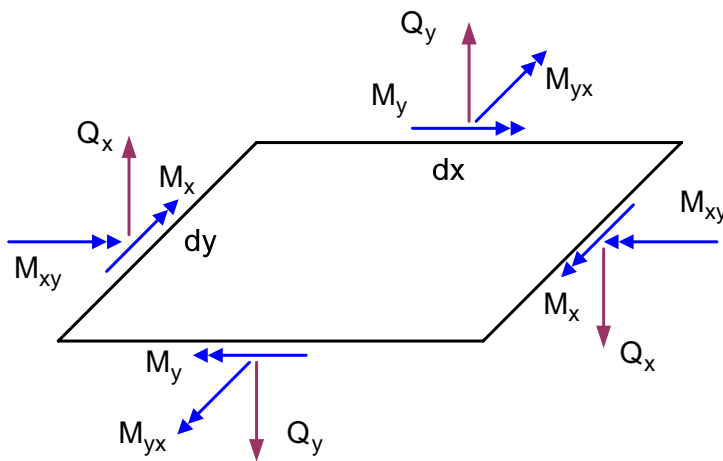
Ryhmää (2.23) vastaavat yhtälöt palkkiteoriassa ovat

$$\frac{dM_t}{dx} = Q \quad \frac{dQ}{dx} = -q \quad (2.24)$$

Kun ryhmän (2.23) kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä sijoitetaan leikkausvoimatiheydet kolmanteen yhtälöön, tulee kaavan (2.25) laattamomenttien tasapainoyhtälö

$$\boxed{M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} = -p} \quad (2.25)$$

Laattateoriassa käytetään voimasuureina jännityskomponenttien σ_x , σ_y , τ_{xy} , τ_{xz} ja τ_{yz} ohella niistä johdettuja jännitysresultantteja M_x , M_y , M_{xy} , Q_x ja Q_y . Näiden



Kuva 2.4 Laatan jännitysresultantit.

positiiviset suunnat määrittyvät jännityskomponenteille sovitusta positiivisista suunnista, kuten kuvasta 2.3 näkyy. Kuvassa 2.4 on laatan keskipinnan pintaelementti $dx dy$ ja sen reunoilla vaikuttavat jännitysresultantit positiivisten suuntien mukaisina. Kuvassa 2.4 on laattamomenttien esittämiseen käytetty kaksoisnuolta, jolloin momentin kiertosuunta on nuolen kärjestä katsottuna vastapäivään.

Leikkausvoimatiheydet Q_x ja Q_y voidaan lausua laatan taipuman w avulla sijoittamalla kaavan (2.23) kahteen ensimmäiseen yhtälöön laattamomentit kaavasta (2.9)

$$\begin{aligned} Q_x &= M_{x,x} + M_{xy,y} = -D(w_{,xx} + \nu w_{,yy})_{,x} - D(1-\nu)(w_{,xy})_{,y} \\ Q_y &= M_{xy,x} + M_{y,y} = -D(1-\nu)(w_{,xy})_{,x} - D(w_{,yy} + \nu w_{,xx})_{,y} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Edellä olevat yhtälöt sievenevät kaavassa (2.27) esitettyyn muotoon

$$\boxed{\begin{aligned} Q_x &= -D(w_{,xx} + w_{,yy})_{,x} = -D(\nabla^2 w)_{,x} \\ Q_y &= -D(w_{,xx} + w_{,yy})_{,y} = -D(\nabla^2 w)_{,y} \end{aligned}} \quad (2.27)$$

2.4 Poikittaissuuntaiset jännitykset

Johdetaan z-akselin suuntaisten leikkausjännityskomponenttien τ_{xz} ja τ_{yz} lausekkeet. Jännityskomponenttien tasapainoyhtälöryhmän (2.14) ensimmäisestä yhtälöstä seuraa kaavojen (2.11) ja (2.23) avulla ja integroimalla

$$\begin{aligned}\tau_{xz,z} = -\sigma_{x,x} - \tau_{xy,y} &= -\frac{z}{I}(M_{x,x} + M_{xy,y}) = -\frac{z}{I}Q_x \\ \Rightarrow \tau_{xz} &= \frac{Q_x}{I}[C(x,y) - z^2/2]\end{aligned}\quad (2.28)$$

Funktio $C(x,y)$ voidaan ratkaista reunaehdosta $\tau_{xz}(x,y,\pm h/2) = 0$, josta tulee

$$\frac{Q_x}{I}[C(x,y) - (\pm h/2)^2/2] = 0 \quad \Rightarrow \quad C(x,y) = (h/2)^2/2 \quad (2.29)$$

Leikkausjännityskomponentille τ_{yz} voidaan johtaa samalla tavalla lauseke ryhmän (2.14) toisesta yhtälöstä. Lopputulokseksi saadaan kaavat

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= \frac{Q_x}{2I}[(h/2)^2 - z^2] = \frac{3Q_x}{2h}\left[1 - \left(\frac{z}{h/2}\right)^2\right] \\ \tau_{yz} &= \frac{Q_y}{2I}[(h/2)^2 - z^2] = \frac{3Q_y}{2h}\left[1 - \left(\frac{z}{h/2}\right)^2\right]\end{aligned}\quad (2.30)$$

Kaavoista (2.30) nähdään, että leikkausjännitysten τ_{xz} ja τ_{yz} jakauma on laatan paksuussuunnassa parabolinen. Laatan ylä- ja alapinnalla τ_{xz} ja τ_{yz} ovat nollia, ääriarvon ne saavat keskipinnan kohdalla. Ääriarvon suuruus on 1,5-kertainen verrattuna arvoon, joka saadaan olettamalla leikkausjännitykset paksuussuunnassa tasan jakaantuneiksi. Kuvassa 2.3 on esitetty myös leikkausjännitysten τ_{xz} ja τ_{yz} jakautuminen laatan leikkauksissa $x = \text{vakio}$ ja $y = \text{vakio}$.

Perushypoteesin 4 mukaan σ_z on keskipinnan suuntaisten jännityskomponenttien rinnalla merkityksetön. σ_z ei kuitenkaan ole tarkasti nolla ja sille voidaan johtaa liki-kaava jännityskomponenttien tasapainoyhtälöistä. Tarkastellaan tapausta, jossa $f_z = 0$ ja pintakuormitus $p(x,y)$ laatan yläpinnalla $z = -h/2$. Tällöin ryhmän (2.14) kolmannelta yhtälöstä ja kaavoista (2.30) ja (2.23) seuraa

$$\begin{aligned}\sigma_{z,z} = -\tau_{xz,x} - \tau_{yz,y} &= \\ &= \frac{3}{2h}\left[1 - \left(\frac{z}{h/2}\right)^2\right](-Q_{x,x} - Q_{y,y}) = \frac{3}{2h}\left[1 - \left(\frac{z}{h/2}\right)^2\right]p(x,y)\end{aligned}\quad (2.31)$$

Kaavasta (2.31) saadaan integroimalla

$$\sigma_z = \frac{3}{2h} \left[z - \frac{z^3}{3(h/2)^2} \right] p(x, y) + C(x, y) \quad (2.32)$$

Funktio $C(x, y)$ saadaan selville alapinnan reunaehdosta $\sigma_z(x, y, h/2) = 0$

$$\frac{3}{2h} \left[\frac{h}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} \right] p(x, y) + C(x, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad C(x, y) = -p(x, y)/2 \quad (2.33)$$

Tulokseksi saadaan normaalijännitykselle σ_z likikaava

$$\sigma_z = -\frac{p(x, y)}{4} \left[2 - 3 \left(\frac{z}{h/2} \right) + \left(\frac{z}{h/2} \right)^3 \right] \quad (2.34)$$

Kaavasta (2.34) tulee laatan yläpinnalla $\sigma_z(x, y, -h/2) = -p(x, y)$, kuten pitääkin.

2.5 Perusdifferentiaaliyhtälö

Sijoittamalla laattamomenttien tasapainoyhtälöön (2.25) momenttien lausekkeet kaavoista (2.9) seuraa

$$-D(w_{,xx} + \nu w_{,yy})_{,xx} - 2D(1-\nu)(w_{,xy})_{,xy} - D(w_{,yy} + \nu w_{,xx})_{,yy} = -p(x, y) \quad (2.35)$$

josta saadaan sieventämällä klassisen laattateorian perusdifferentiaaliyhtälö

$$w_{,xxxx} + 2w_{,xxyy} + w_{,yyyy} = p(x, y)/D \quad (2.36)$$

Yhtälö (2.36) voidaan vielä esittää tiiviimmin muodossa

$$\nabla^4 w = p(x, y)/D \quad (2.37)$$

Klassisen laattateorian perusongelma on kaavan (2.37) biharmonisen differentiaaliyhtälön ratkaiseminen annetuilla reunaehdoilla. Osittaisdifferentiaaliyhtälö (2.37) on neljättä kertalukua, joten sen analyttinen ratkaiseminen ei onnistu helposti. Säännöllisten tapausten ratkaisuja tunnetaan melko runsaasti. Esimerkiksi suorakulmio- ja ympyrä(rengas)laatalle tunnetaan tavallisten kuormitus- ja tuentatapausten analyttiset ratkaisut. Kun laatan perustuntematon w on ratkaistu annetuilla reunaehdoilla yhtälöstä (2.37), voidaan muut suureet määrittää niille edellä esitetyistä kaavoista. Laattamomentit saadaan kaavoista (2.9) ja leikkausvoimatiheydet kaavoista (2.27) sekä jännitykset vastaavasti kaavoista (2.11) ja (2.30).

3 SUORAKULMIOLAATTA

3.1 Puhdas taivutus

Tarkastellaan ensin erityistapausta, jossa laatan pintakuormitus $p(x,y) = 0$, jolloin kuormituksia on vain laatan reunalla. Laatan perusyhtälö on tässä tapauksessa

$$w_{,xxxx} + 2w_{,xxyy} + w_{,yyyy} = 0 \quad (3.1)$$

ja sillä on esimerkiksi polynomiratkaisu (kertoimet $C_1 \dots C_6$ ovat vakioita)

$$w(x,y) = C_1 + C_2 x + C_3 y + C_4 x^2 + C_5 xy + C_6 y^2 \quad (3.2)$$

kuten yhtälöön (3.1) sijoittamalla voi helposti todeta. Jännitysresultanttien lausekkeiksi saadaan kaavojen (2.9) ja (2.27) perusteella

$$\begin{aligned} M_x &= -2D(C_4 + \nu C_6) & M_y &= -2D(C_6 + \nu C_4) \\ M_{xy} &= -(1-\nu)DC_5 & Q_x &= Q_y = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

joista näkyy, että kyseessä on tasainen momenttikenttä ja leikkausvoimia ei ole. Taipuman lausekkeen lineaarinen alkiosa $C_1 + C_2 x + C_3 y$ edustaa keskitason jäykän kappaleen liikettä eikä vaikuta momentteihin, joten se voidaan jättää pois jatkotarkasteluista. Tällöin taipumat mitataan kimmopinnan origoon sijoitetusta tangenttitasosta lähtien. Kun kertoimet C_4 , C_5 ja C_6 ratkaistaan momenttien lausekkeista ja sijoitetaan taipuman lausekkeeseen, saadaan tulokseksi

$$w(x,y) = -\frac{1}{2(1-\nu^2)D} \left[(M_x - \nu M_y) x^2 + 2(1+\nu)M_{xy} xy + (-\nu M_x + M_y) y^2 \right] \quad (3.4)$$

Kun tarkastellaan vain taivuttavaa reunakuormitusta, on $M_{xy} = 0$ ja kimmopinnan lausekkeeksi tulee tällöin

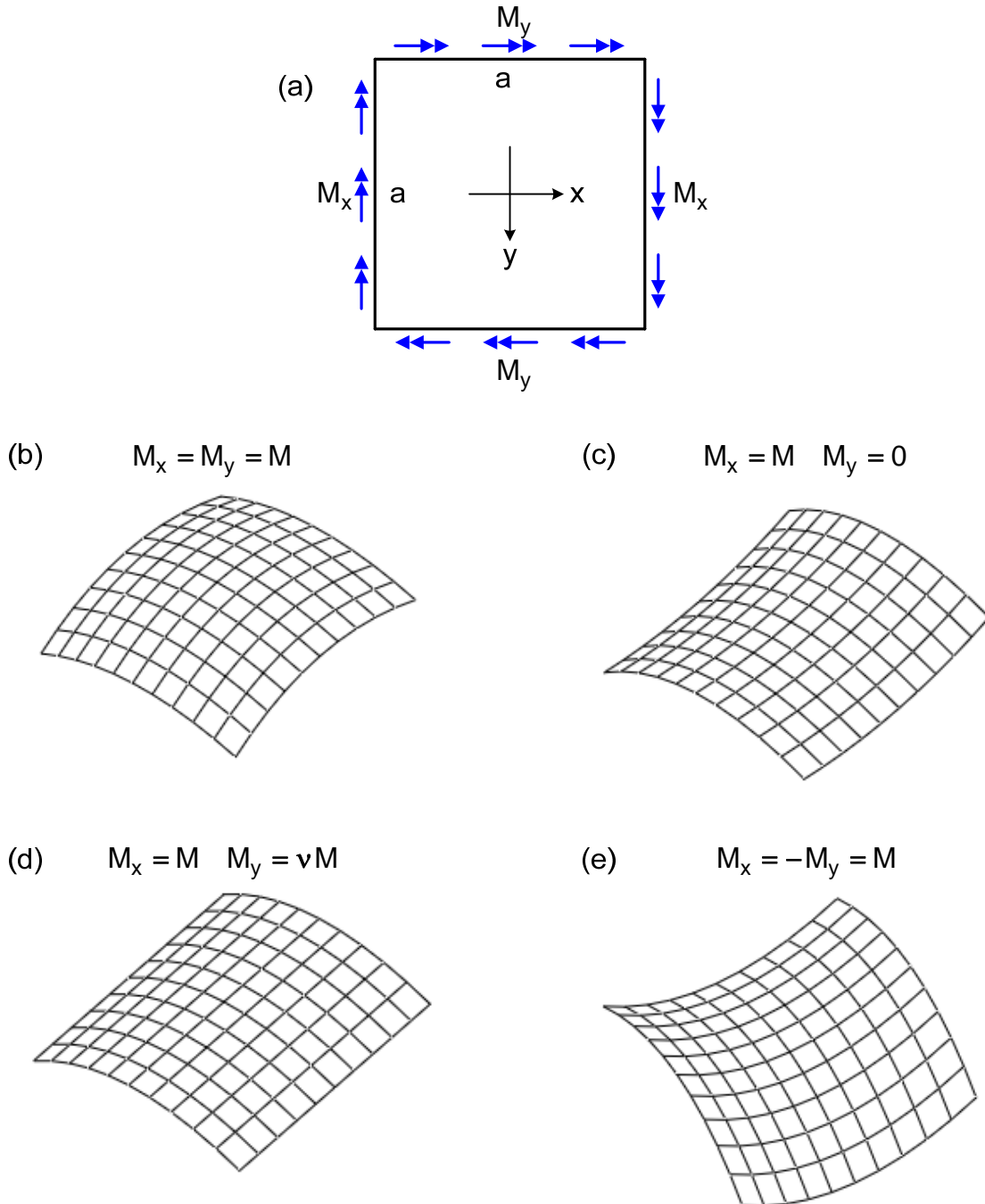
$$w(x,y) = -\frac{1}{2(1-\nu^2)D} \left[(M_x - \nu M_y) x^2 + (-\nu M_x + M_y) y^2 \right] \quad (3.5)$$

Tarkastellaan seuraavaksi taivuttavia reunakuormituksia neliölaatan tapauksessa.

1. Kun $M_x = M_y = M$, tulee kimmopinnan lausekkeeksi

$$w(x,y) = -\frac{M}{2(1+\nu)D} (x^2 + y^2) \quad (3.6)$$

joka on pyörähdysparaboloidin yhtälö. Kyseessä on isotrooppinen ja homogeeninen momenttikenttä, jolloin taivutusmomentit ovat yhtä suuria kaikissa laatan leikkauksissa ja vääntömomenttia ei esiinny missään leikkauksessa. Kuvassa 3.1 (b) on esitetty tätä kuormitustapausta vastaava kimmopinta.



Kuva 3.1 Neliölaatan reunamomenttikuormitus.

2. Tapauksessa $M_x = M$ ja $M_y = 0$ kimmopinnan lauseke on

$$w(x, y) = -\frac{M}{2(1-\nu^2)D} (x^2 - \nu y^2) \quad (3.7)$$

ja vastaavat kaarevuudet ovat $\kappa_x = M/[(1-\nu^2)D]$ ja $\kappa_y = -\nu\kappa_x$. Kyseessä on hyperbolinen paraboloidi eli satulapinta, jonka kuvaaja on esitetty kuvassa 3.1 (c). Kun laattaa taivutetaan tietyssä suunnassa, muodostaa se ν -vaikutuksen takia myös taivutussuuntaa vastaan kohtisuorassa suunnassa vastakkaismerkkisen kaarevuuden.

3. Kun kuormituksena ovat $M_x = M$ ja $M_y = \nu M$, ovat kimmopinta ja kaarevuudet

$$w(x,y) = -\frac{M}{2D}x^2 \quad \kappa_x = M/D \quad \kappa_y = 0 \quad (3.8)$$

Kimmopinnan lauseke on parabolinen sylinteri, ja sen kuvaaja on kuvassa 3.1 (d).

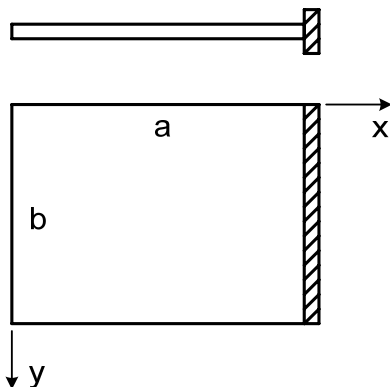
4. Kuormitusten ollessa $M_x = M$ ja $M_y = -M$ saadaan ratkaisuksi

$$w(x,y) = -\frac{M}{2(1-\nu)D}(x^2 - y^2) \quad \kappa_x = -\kappa_y = M/[(1-\nu)D] \quad (3.9)$$

Kimmopinta on tasasivuinen hyperbolinen paraboloidi, joka on kuvassa 3.1 (e). x -akselin suuntainen suora $y = \text{vakio}$ taipuu ylöspäin aukeavaksi paraabeliksi ja y -akselin suuntainen suora $x = \text{vakio}$ alaspäin aukeavaksi paraabeliksi. Suorat $y = \pm x$ eli koordinaattiakselien välisten suorien kulmien puolittajat pysyvät paikallaan.

3.2 Suorakulmiolaatan reunaehdot

Kuten kohdassa 2.5 tuli esille, on klassisen laattateorian perusongelma taipuman w ratkaiseminen biharmonisesta differentiaaliyhtälöstä (2.37) laatan tuennasta seuraavilla reunaehdoilla. Yleisesti ottaen laatan reunaviiva voi olla yleinen xy -tason käyrä ja reunaehdot liittyvät sen tangentin ja normaalin suuntiin. Tässä tarkastellaan kuitenkin vain koordinaattiakselien suuntaisia reunaviivoja eli rajoitutaan suorakulmiolaattaan. Tuennan oletetaan seuraavassa sijaitsevan laatan y -akselin suuntaisella reunalla $x = a$. Muilla reunoilla olevat tuennat voidaan käsitellä analogisesti.



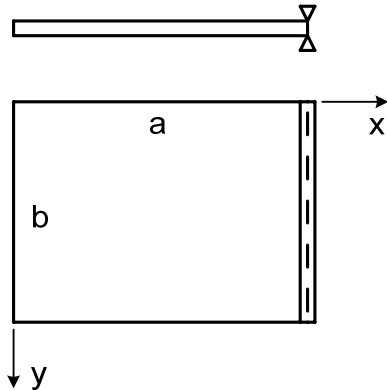
Kuva 3.2 Jäykkä tuenta.

1. Jäykkä tuenta (kuva 3.2). Kun laatan reuna $x = a$ on jäykästi kiinnitetty, ovat taipuma ja kimmopinnan kaltevuuskulma x -suunnassa nollia reunan kaikissa pisteissä. Reunaehdoiksi tulevat näin ollen

$$w(a,y) = 0 \quad w_{,x}(a,y) = 0 \quad (3.10)$$

Kumpikin reunaehto on luonteeltaan kinemaattinen eli koskee taipumaa. Kaavan (3.10) jäl-

kimmäisestä ehdosta ja kaavasta (2.9) seuraa, että jäykälle tuelle on lisäksi voimassa $M_{xy}(a, y) = 0$.



Kuva 3.3 Niveltuenta.

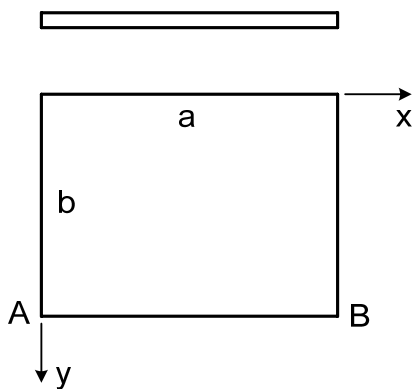
2. Niveltuenta (kuva 3.3). Laatan reunan $x = a$ ollessa niveltuettu on taipuma estetty reunan kaikissa pisteissä, mutta reuna pääsee vapaasti kiertymään tukisuoran ympäri, joten tämän suoran ympäri taivuttavan taivutusmomenttitiheyden $M_x(a, y)$ tulee olla nolla. Reunaehdoiksi tulevat näin ollen

$$w(a, y) = 0 \quad M_x(a, y) = 0 \quad (3.11)$$

Momenttitiheyttä M_x koskeva reunaehto on luonteeltaan kineettinen eli koskee voimasuuretta. Kaavan (3.11) toinen reunaehto voidaan lausua taipuman w avulla käyttämällä hyväksi yhtälöä (2.9), josta seuraa ehto $w_{,xx}(a, y) + \nu w_{,yy}(a, y) = 0$. Koska $w(a, y) = 0$, on myös $w_{,y}(a, y) = w_{,yy}(a, y) = 0$. Reunaehdot (3.11) voidaan siis antaa myös muodossa

$$w(a, y) = 0 \quad w_{,xx}(a, y) = 0 \quad (3.12)$$

Niveltuella laatan kaltevuuskulma $w_{,x}(a, y) \neq 0$, joten voi olla myös $w_{,xy}(a, y) \neq 0$. Kaavasta (2.9) seuraa, että niveltuennan vääntömomenttitiheys $M_{xy}(a, y)$ ei ole identtisesti nolla. Yleensä kuitenkin ajatellaan niveltuennan olevan sellainen, että se ei ota vastaan vääntömomenttitiheyttä. Mahdollinen nollasta poikkeava vääntömomenttitiheys $M_{xy}(a, y)$ yhdistetään tällöin leikkausvoimatiheyden $Q_x(a, y)$ kanssa ns. korvikeleikkausvoimatiheydeksi, kuten jatkossa tulee esille. Samalla ratkeaa niveltuentaan tuleva tukivoimatiheys.

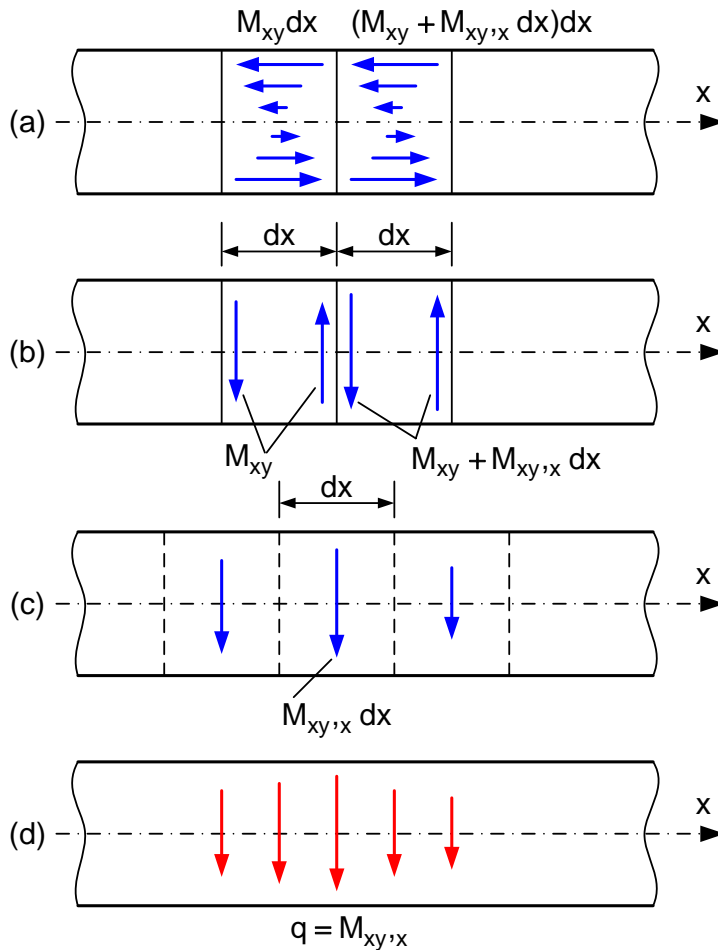


Kuva 3.4 Vapaa reuna.

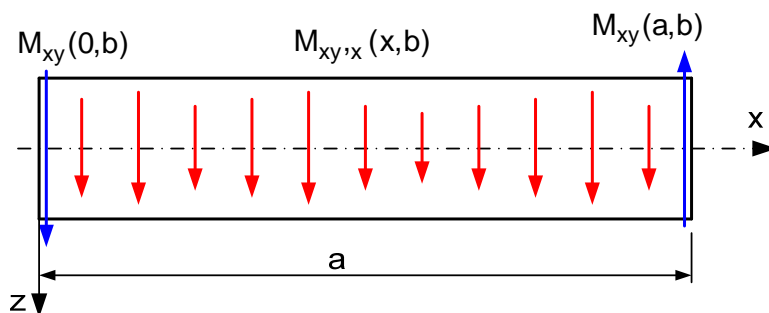
3. Vapaa reuna (kuva 3.4). Tässä tapauksessa reunalle tulee vain kineettisiä reunaehtoja. Esimerkiksi kuvan 2.3 perusteella voisi helposti ajatella, että vapaalla reunalla $x = a$ on kolme kineettistä reunaehto eli taivutusmomenttitiheys $M_x(a, y) = 0$, vääntömomenttitiheys $M_{xy}(a, y) = 0$ ja leikkausvoimatiheys $Q_x(a, y) = 0$. Näin ei kuitenkaan voi olla, sillä perusdifferentiaaliyhtälö (2.37) on taipuman neljännen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälö, jolla voi olla vain kaksi reunaehto reunan pisteissä. Ristiriita johtuu käyttöön otetusta likimääräisestä kinemaattisesta mallista, joka ei ota huomioon leikkausmuodonmuutosta

eikä siis tunne laatan leikkausvoimia. Tämän ristiriidan selvitti ensimmäisenä Kirch-

hoff v. 1850 osoittamalla, että kinemaattinen malli vaatii vääntömomentti- ja leikkausvoimatiheyden korvaamista reunalla ns. korvikeleikkausvoimatiheyden yhdellä reunaehdolla.



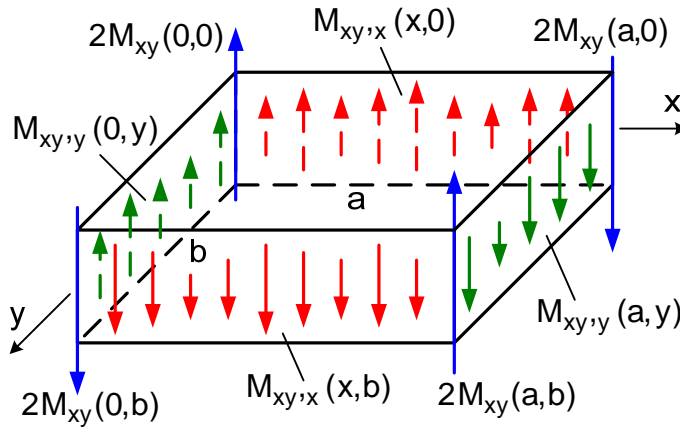
Kuva 3.5 Reunan $y = b$ vääntömomentin korvike.



Kuva 3.6 Vääntömomentin korvike.

Korvikeleikkausvoimatiheyden lausekkeen johtamiseksi tarkastellaan laatan vapaata reunaa $y = b$ (AB kuvassa 3.4). Siinä vaikuttaa vääntömomenttitiheys $M_{xy}(x,b)$, joka muodostuu keskitason suuntaisista leikkausjännityksistä τ_{xy} kuvan 3.5 (a) mukaisesti. Kuvassa 3.5 (b) on staattisesti samantarvoinen systeemi, joka muodostuu keskitasoa vastaan kohtisuorista voimapareista. Kuvien 3.5 (a) ja (b) rasitusten aiheuttamat jännitystilakentät eroavat toisistaan vain reunan välittömässä läheisyydessä Saint Venantin periaatteen mukaisesti. Kuvan 3.5 (b) voimapariketjusta jää resultantiksi kuvan 3.5 (c) pistevoimaketju, joka voidaan tulkita kuvan 3.5 (d) mukaisesti jatkuvaksi poikittaiseksi reuna voimatiheydeksi $q = M_{xy,x}$.

Reunan alkupäässä $x = 0$ ja loppupäässä $x = a$ ei kuvan 3.5 (b) voimapareilla ole viereistä voimaparia, jotka osittain kumoaisivat niitä. Nurkkiin jäävät näin ollen kuvan 3.6 pistevoimat $M_{xy}(0,b)$ ja $M_{xy}(a,b)$.



Kuva 3.7 Korvaussysteemi.

Edellä esitetty vääntömomenttitiheyden korvaus voidaan tehdä laatan kaikilla reunoilla. Tällöin saadaan kuvan 3.7 staattisesti samanarvoinen korvaussysteemi, jossa on reuna-voimatiheydet $M_{xy,x}(x,0)$, $M_{xy,x}(x,b)$, $M_{xy,y}(0,y)$ ja $M_{xy,y}(a,y)$ sekä lisäksi nurkkavoimat $2M_{xy}(0,0)$, $2M_{xy}(0,b)$, $2M_{xy}(a,0)$ ja $2M_{xy}(a,b)$.

Kun tavallinen leikkausvoimatiheys Q_x tai Q_y ja vääntömomenttitiheydestä saatu korvaava leikkausvoimatiheys lasketaan yhteen, saadaan laatan reunan korvikeleikkausvoimatiheydet V_x tai V_y . Korvikeleikkausvoimatiheydet suorakulmiolaatan reunoilla ovat näin ollen

$$\begin{aligned}
 x=0: \quad V_x(0,y) &= Q_x(0,y) + M_{xy,y}(0,y) \\
 x=a: \quad V_x(a,y) &= Q_x(a,y) + M_{xy,y}(a,y) \\
 y=0: \quad V_y(x,0) &= Q_y(x,0) + M_{xy,x}(x,0) \\
 y=b: \quad V_y(x,b) &= Q_y(x,b) + M_{xy,x}(x,b)
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Korvikeleikkausvoimatiheyksillä on tavallisten leikkausvoimatiheyksien merkkisopimukset. Nurkkavoimien positiiviset suunnat ovat kuvan 3.7 mukaiset.

Jos kuvan 3.4 laatan reuna $x=a$ on vapaa, ovat korvikeleikkausvoima- ja taivutusmomenttitiheys nolliä tällä reunalla ja reunaehdot ovat näin ollen

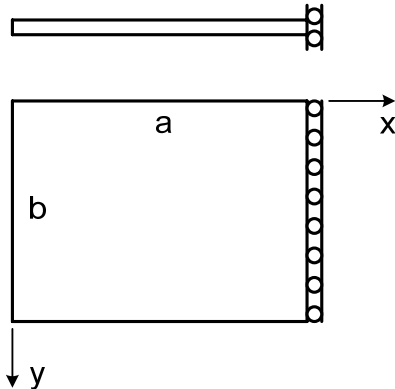
$$V_x(a,y) = 0 \quad M_x(a,y) = 0 \tag{3.14}$$

Kineettiset reunaehdot (3.14) voidaan kirjoittaa taipuman w avulla kaavoja (2.9) ja (2.27) hyödyntämällä, jolloin saadaan reunaehdot

$$w_{,xx}(a,y) + \nu w_{,yy}(a,y) = 0 \quad w_{,xxx}(a,y) + (2-\nu)w_{,xyy}(a,y) = 0 \tag{3.15}$$

Jos molemmilla suorakulmiolaatan nurkkaan liittyvillä sivuilla on niveltuenta tai toisella on niveltuenta ja toinen on vapaa, syntyy edellä kuvattu nurkkavoima. Kun molemmat nurkkaan liittyvät sivut ovat vapaita ja nurkka kuormittamaton, on nurkkavoiman oltava nolla. Tästä seuraa kaavan (2.9) perusteella, että taipuman on toteutettava lisäehto $w_{,xy} = 0$ eli vapaassa kuormittamattomassa nurkassa kierevyys on nolla.

4. Luistituenta. Kun reunalla $x = a$ on luistituenta, on kimmopinnan kaltevuuskulma $w_{,x}(a,y)$ nolla. Koska reuna pääsee vapaasti siirtymään z -suunnassa, on korvikeleikkausvoimatiheyden $V_x(a,y)$ oltava nolla. Reunaehdoiksi tulevat siis



Kuva 3.8 Luistituenta.

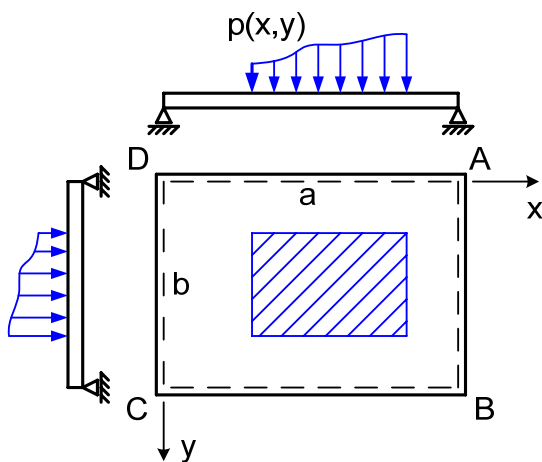
$$w_{,x}(a,y) = 0 \quad V_x(a,y) = 0 \quad (3.16)$$

Koska $w_{,x}(a,y) = 0$, on myös $w_{,xy}(a,y) = 0$, joten kaavan (2.9) mukaan vääntömomenttitiheys $M_{xy}(a,y) = 0$, joten toinen reunaehto on itse asiassa $Q_x(a,y) = 0$. Kaltevuuskulmaa koskeva reunaehto on kinemaattinen ja (korvike)leikkausvoimatiheyttä koskeva kineettinen. Kun kineettinen reunaehto lausutaan taipuman w avulla kaavaa (2.27) käyttäen, saadaan reunaehdot

$$w_{,x}(a,y) = 0 \quad w_{,xxx}(a,y) = 0 \quad (3.17)$$

Edellä kohdissa 1-4 tutkitut reunaehdot ovat homogeenisia reunaehtoja, koska niissä oletettiin reunan suureiden tunnetut arvot nolliksi. Epähomogeenisissa reunaehdoissa niiden tunnetut arvot eivät ole nollia, jolloin tarkastellaan tunnettuja tukisiirtymiä tai reunakuormituksia. Reunaehdot ovat kuitenkin periaatteessa samat kuin edellä, yhtälöissä korvataan vain oikeiden puolien nollat vastaavilla tunnetuilla arvoilla.

3.3 Navierin ratkaisu



Kuva 3.9 Niveltuettu laatta.

Navierin ratkaisumenetelmä sopii mieltävaltaisesti kuormitetun suorakulmiolaatan käsittelyyn, kun se on kaikilta reunoiltaan niveltuettu kuvan 3.9 mukaisesti. Laatan reunaehdot ovat tällöin

$$\begin{aligned} DA : w(x,0) &= 0 & w_{,yy}(x,0) &= 0 \\ BC : w(x,b) &= 0 & w_{,yy}(x,b) &= 0 \\ CD : w(0,y) &= 0 & w_{,xx}(0,y) &= 0 \\ AB : w(a,y) &= 0 & w_{,xx}(a,y) &= 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Taipumaa $w(x,y)$ etsitään äärettömän Fourier-kaksoissinisarjan muodossa, jolloin sen lauseke on muotoa

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \quad \alpha_m = m\pi/a \quad \beta_n = n\pi/b \quad (3.19)$$

jossa taipuman Fourier-kertoimet w_{mn} ovat tuntemattomia vakioita. On selvää, että muotoa (3.19) oleva ratkaisu toteuttaa reunaehdot (3.18) automaattisesti, sillä sen jokainen termi toteuttaa ne erikseen. Taipuman Fourier-kertoimet w_{mn} riippuvat laatan kuormitusjakaumasta $p(x,y)$. Kertoimien w_{mn} määrittämiseksi kehitetään myös kuormitus Fourier-kaksoissinisarjaksi. Kuormituksen Fourier-kertoimille käytetään seuraavassa merkintää p_{mn} ja sen sarjakehitelmä on muotoa

$$p(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \quad (3.20)$$

Kun yhtälön (3.20) molemmat puolet kerrotaan tekijällä $\sin(\alpha_j x) \sin(\beta_k y)$ ja integroidaan laatan keskitason yli, termejä järjestelemällä seuraa tulos

$$\int_0^a \int_0^b p(x,y) \sin(\alpha_j x) \sin(\beta_k y) dx dy = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \int_0^a \sin(\alpha_m x) \sin(\alpha_j x) dx \int_0^b \sin(\beta_n y) \sin(\beta_k y) dy \quad (3.21)$$

Sinifunktioiden ortogonaalisuusominaisuuden

$$\int_0^a \sin(\alpha_m x) \sin(\alpha_j x) dx = \begin{cases} 0 & , m \neq j \\ a/2 & , m = j \end{cases} \quad (3.22)$$

nojalla edellä olevasta kaksoissummasta tulee tulokseksi $p_{jk} \cdot ab/4$, joten Fourier-kertoimen p_{mn} lausekkeeksi tulee

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x,y) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) dx dy \quad (3.23)$$

Kun sarjat (3.20) ja (3.22) sijoitetaan laatan perusdifferentiaaliyhtälöön (2.37), tulee

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D w_{mn} (\alpha_m^4 + 2\alpha_m^2 \beta_n^2 + \beta_n^4) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \quad (3.24)$$

Yhtälön (3.24) pitää toteutua termeittäin, josta seuraa Fourier-kertoimille w_{mn} kaava

$$w_{mn} = \frac{p_{mn}}{D(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} = \frac{p_{mn}}{D\pi^4 \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^2} \quad (3.25)$$

Kun annetun kuormituksen $p(x,y)$ sinisarjan kertoimet (3.23) on laskettu, saadaan taipuman $w(x,y)$ sinisarjan (3.19) kertoimet kaavasta (3.25). Kun taipuman sarja tunnetaan, voidaan muiden laatan suureiden sarjat laskea siitä laattateorian peruskaavoilla. Käytännössä ei suureita sarjoista laskettaessa voida ottaa mukaan ääretöntä määrää termejä. Sarjat suppenevat kuitenkin melko nopeasti ja yleensä laskentatarkkuuden kannalta riittää, kun otetaan sarjojen alkupäästä muutamia termejä.

3.3.1 Tasaisen kuormituksen Navierin ratkaisu

Kun kaikilta reunoiltaan niveltuetulla suorakulmiolaatalla on tasainen kuormitus $p(x,y) = p_0$, seuraa kaavasta (3.23) kuormituksen sinisarjan kertoimiksi

$$p_{mn} = \frac{4p_0}{ab} \left[\int_0^a \frac{1}{\alpha_m} \cos(\alpha_m x) dx \right] \left[\int_0^b \frac{1}{\beta_n} \cos(\beta_n y) dy \right] = \frac{4p_0}{\pi^2 mn} [1 - (-1)^m] [1 - (-1)^n]$$

$$\Rightarrow p_{mn} = \begin{cases} \frac{16p_0}{\pi^2 mn} & , \text{kun } m \text{ ja } n \text{ ovat parittomia} \\ 0 & , \text{muulloin} \end{cases} \quad (3.26)$$

Laatan taipuman kaksoissinisarjaksi (2.48) tulee näin ollen

$$w(x,y) = \frac{16p_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{mn[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.27)$$

Tasaisesti kuormitetun ja niveltuetun suorakulmiolaatan kimmopinta on symmetrinen laatan symmetria-akselien suhteen. Tästä johtuu, että taipuman ratkaisussa (3.27) ovat mukana vain kaksoissymmetriset sinikuplat (m ja n pariton). Laatan suurin taipuma on sen keskipisteessä $x = a/2, y = b/2$, jolle kaavasta (3.27) seuraa lauseke

$$w_{\max} = \frac{16p_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m+n)/2-1}}{mn[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \quad (3.28)$$

sillä $\sin \frac{m\pi}{2} = (-1)^{(m-1)/2}$. Laattamomenttien sarjat saadaan sijoittamalla taipuman sarja kaavaan (2.9), josta seuraa tulokset

$$\begin{aligned}
 M_x(x,y) &= \frac{16p_0}{\pi^4} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(m/a)^2 + \nu(n/b)^2}{mn[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\
 M_y(x,y) &= \frac{16p_0}{\pi^4} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\nu(m/a)^2 + (n/b)^2}{mn[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\
 M_{xy}(x,y) &= -\frac{16(1-\nu)p_0}{\pi^4 ab} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}
 \end{aligned}
 \tag{3.29}$$

Laatan leikkausvoimatiheyksien sarjoiksi tulee kaavasta (2.27)

$$\begin{aligned}
 Q_x(x,y) &= \frac{16p_0}{\pi^3 a} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(m/a)^2 + (n/b)^2}{n[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\
 Q_y(x,y) &= \frac{16p_0}{\pi^3 b} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(m/a)^2 + (n/b)^2}{m[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}
 \end{aligned}
 \tag{3.30}$$

Tuloksesta (3.29) nähdään, että M_x ja M_y ovat nollia laatan reunoilla $x = 0$, $x = a$ ja $y = 0$, $y = b$, mutta M_{xy} ei ole nolla laatan reunoilla eikä kulmissa. Koska niveltuenta ei ota vastaan vääntöä, on M_{xy} yhdistettävä reunaan liittyvän leikkausvoiman (Q_x tai Q_y) kanssa korvikeleikkausvoimaksi (V_x tai V_y). x-akselin suuntaisilla reunoilla korvikeleikkausvoiman lauseke on $V_x = Q_x + M_{xy,y}$, josta tulee reunalla $x = a$

$$V_x(a,y) = -\frac{16p_0}{\pi^3 a} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(m/a)^2 + (2-\nu)(n/b)^2}{n[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \sin \frac{n\pi y}{b}
 \tag{3.31}$$

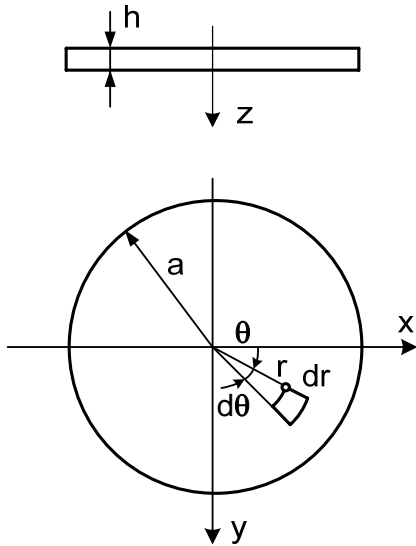
Korvikeleikkausvoimien lausekkeet muilla reunoilla voidaan johtaa vastaavasti. Korvikeleikkausvoimien lisäksi momentista M_{xy} syntyvät kuvan 3.7 mukaiset nurkkavoimat. Tuloksen (3.29) mukaan M_{xy} on negatiivinen nurkissa B ja D sekä positiivinen nurkissa A ja C, joten kuvan 3.7 perusteella kaikki nurkkavoimat ovat alaspäin eli z-akselin positiiviseen suuntaan. Nurkkavoiman suuruudeksi tulee

$$R = \frac{32(1-\nu)p_0}{\pi^4 ab} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2}
 \tag{3.32}$$

Niveltuentoihin liittyvät z-suuntaiset tukivoimatiheydet saadaan sivujen korvikeleikkausvoimatiheyksistä ja lisäksi on otettava huomioon nurkkavoimat. Korvikeleikkausvoimaan perustuva likiratkaisu ei anna aivan ideaalista niveltuenta vastavaa tulosta, mutta Saint Venantin periaatteen mukaan virhe rajoittuu reunan läheisyyteen kaapealle alueelle. Laattamomenteista aiheutuville keskitason suuntaisille jännityksille saadaan sarjat kaavasta (2.11) ja laatan leikkausvoimista aiheutuville poikittaisille leikkausjännityksille sarjat kaavasta (2.30).

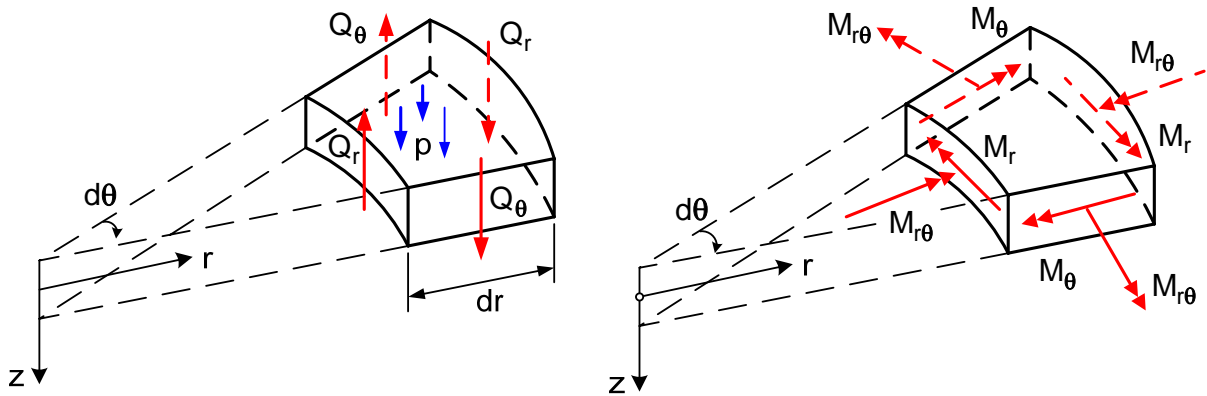
4 YMPYRÄ- JA RENGASLAATTA

4.1 Perusyhtälöt napakoordinaatistossa



Kuva 4.1 Ympyrälaatta.

Ympyrälaattalla tarkoitetaan laattaa, jonka keskipinnan reunaviiva on ympyrä. Ympyrärengaslaatan keskipinnan reunaviivoina ovat kaksi samankeskistä ympyrää. Geometriansa takia näitä on paras käsitellä sylinterikoordinaatistossa (napakoordinaatisto ja z-akseli). Tämä edellyttää laattasuureiden määrittelemistä sylinterikoordinaatistossa ja perusyhtälöiden muuntamista tähän koordinaatistoon. Kun xyz- ja rθz-koordinaatiston origo sijoitetaan laatan keskipisteeseen kuvan 4.1 mukaisesti, on koordinaattien välinen yhteys $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Kuvassa 4.1 on myös keskipinnan drdθ-differentiaalelementti ja kuvassa 4.2 on siihen liittyvät laattamomentit M_r , M_θ ja $M_{r\theta}$ sekä laatan leikkausvoimatehiheydet Q_r ja Q_θ .



Kuva 4.2 Laattaelementin jännitysresultantit.

Napakoordinaatistossa operaattori ∇^2 on muotoa

$$\nabla^2 w = w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} \quad (4.1)$$

joten perusdifferentiaaliyhtälö voidaan kirjoittaa sylinterikoordinaatistossa muotoon

$$\nabla^4 w = \left[\left(\cdot \right)_{,rr} + \frac{1}{r} \left(\cdot \right)_{,r} + \frac{1}{r^2} \left(\cdot \right)_{,\theta\theta} \right] \left(w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} \right) = p(r, \theta) / D \quad (4.2)$$

Laattamomenteille, leikkausvoima- ja korvikeleikkausvoimatiheyksille tulee taipuman w avulla esitetyt lausekkeet

$$\begin{aligned} M_r &= D(\kappa_r + \nu \kappa_\theta) = -D \left[w_{,rr} + \nu \left(\frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} \right) \right] \\ M_\theta &= D(\nu \kappa_r + \kappa_\theta) = -D \left[\nu w_{,rr} + \left(\frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} \right) \right] \\ M_{r\theta} &= D(1-\nu) \kappa_{r\theta} = -D(1-\nu) \left(\frac{1}{r} w_{,\theta} \right)_{,r} \end{aligned} \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.3)$$

$$Q_r = -D(\nabla^2 w)_{,r} \quad Q_\theta = -D(\nabla^2 w)_{,\theta} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} V_r &= Q_r + \frac{1}{r} M_{r\theta,\theta} = -D \left[(\nabla^2 w)_{,r} + (1-\nu) \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} w_{,\theta} \right)_{,r\theta} \right] \\ V_\theta &= Q_\theta + M_{r\theta,r} = -D \left[\frac{1}{r} (\nabla^2 w)_{,\theta} + (1-\nu) \left(\frac{1}{r} w_{,\theta} \right)_{,rr} \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Laatan jännitysresultanttien tasapainoehtoiksi tulee

$$\begin{aligned} (rM_r)_{,r} + M_{r\theta,\theta} - M_\theta &= rQ_r \\ M_{\theta,\theta} + (rM_{r\theta})_{,r} + M_{r\theta} &= rQ_\theta \\ (rQ_r)_{,r} + Q_{\theta,\theta} &= -rp(r,\theta) \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$(rM_r)_{,rr} + \frac{2}{r}(rM_{r\theta})_{,r\theta} - M_{\theta,r} + \frac{1}{r}M_{\theta,\theta\theta} = -rp(r,\theta) \quad (4.7)$$

Jännityskomponenttien lausekkeet ovat

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{M_r}{I} z & \sigma_\theta &= \frac{M_\theta}{I} z & \tau_{r\theta} &= \frac{M_{r\theta}}{I} z & I &= h^3/12 \\ \tau_{rz} &= \frac{3Q_r}{2h} \left[1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^2 \right] & \tau_{\theta z} &= \frac{3Q_\theta}{2h} \left[1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

4.2 Laattayhtälön ratkaiseminen

Laattateorian perusongelmana on taipuman w ratkaiseminen. Se saadaan perusyhtälöstä (4.2) ja reunaehdoista, jonka jälkeen muut suureet voidaan laskea kaavoista (4.3), (4.4), (4.5) ja (4.8). Perusyhtälön ratkaisu on homogeenisen differentiaaliyhtälön $\nabla^4 w = 0$ yleisen ratkaisun $w_h(r, \theta)$ ja täydellisen yhtälön $\nabla^4 w = p/D$ yksityisratkaisun $w_y(r, \theta)$ summa eli $w(r, \theta) = w_h(r, \theta) + w_y(r, \theta)$. Homogeenisen yhtälön ratkaisut ovat biharmonisia funktioita. Homogeenisen yhtälön ratkaisuja voidaan etsiä esimerkiksi muuttujien erottamiskeinolla (vrt. jännitysfunktio ϕ levyteoriassa) muodossa

$$w_{hn} = R_n(r) \begin{cases} \sin(n\theta) \\ \cos(n\theta) \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \Rightarrow \quad (4.9)$$

$$w_{h0}(r) = a_0 + b_0 \ln r + c_0 r^2 + d_0 r^2 \ln r$$

$$w_{h1}(r, \theta) = (a_1 r + b_1/r + c_1 r^3 + d_1 r \ln r) \begin{cases} \sin \theta \\ \cos \theta \end{cases} \quad (4.10)$$

$$w_{hn}(r, \theta) = (a_n r^n + b_n r^{-n} + c_n r^{2+n} + d_n r^{2-n}) \begin{cases} \sin(n\theta) \\ \cos(n\theta) \end{cases}, \quad n \geq 2$$

Kertoimille a_n, b_n, c_n , ja d_n saadaan arvot laatan reunaehdoista. Rengaslaatatalla ehtoja on kaksi kummallakin reunaympyrällä. Ympyrälaatatalla ei ole sisäreunaa ja sille toinen reunaehdopari tulee vaatimuksista $w(0) \neq \infty$ $M_r(0) \neq \infty$, josta seuraa $b_n = d_n = 0$ $n = 0, 1, 2, \dots$. Reunan $r = a$ tavallisimmat tukimallit ovat kulmasta θ riippumattomia ja niihin liittyvät reunaehdot ovat

- | | | |
|----|-------------------|---------------------------------|
| a) | Jäykkä kiinnitys: | $w(a) = 0$ ja $w_{,r}(a) = 0$ |
| b) | Nivelkiinnitys: | $w(a) = 0$ ja $M_r(a) = 0$ |
| c) | Luistikiinnitys: | $w_{,r}(a) = 0$ ja $V_r(a) = 0$ |
| d) | Vapaa reuna: | $M_r(a) = 0$ ja $V_r(a) = 0$ |

Edellä olevissa reunaehdoissa laattamomentin M_r ja korvikeleikkausvoiman V_r ehdot voidaan lausua taipuman w avulla kaavoja (4.3) ja (4.5) käyttäen.

4.3 Rotaatiosymmetrinen ratkaisu

Kun kuormitus ja tuenta ovat rotaatiosymmetrisiä, eivät laattasuureet riipu kulmasta θ , jolloin kaikki derivaatat muuttujan θ suhteen ovat nollija. Tällöin on voimassa

$$\nabla^2 w = w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} = \frac{1}{r} (r w_{,r})_{,r} \quad \nabla^4 w = w_{,rrrr} + \frac{2}{r} w_{,rrr} - \frac{1}{r^2} w_{,rr} + \frac{1}{r^3} w_{,r} \quad (4.11)$$

Laatan perusdifferentiaaliyhtälö menee muotoon

$$\nabla^4 w = \frac{1}{r} \left\{ r \left[\frac{1}{r} (r w_{,r})_{,r} \right]_{,r} \right\}_{,r} = p(r)/D \quad (4.12)$$

josta seuraa peräkkäisillä integroinneilla

$$r \left[\frac{1}{r} (r w_{,r})_{,r} \right]_{,r} = c_1 + \int \frac{r p}{D} dr$$

$$\frac{1}{r} (r w_{,r})_{,r} = c_2 + c_1 \ln r + \int \left(\frac{1}{r} \int \frac{r p}{D} dr \right) dr$$

$$r w_{,r} = c_3 + \frac{1}{2} c_2 r^2 + c_1 \left(\frac{r^2}{2} \ln r - \frac{r^2}{4} \right) + \int \left[r \int \left(\frac{1}{r} \int \frac{r p}{D} dr \right) dr \right] dr$$

$$w = c_4 + c_3 \ln r + \frac{1}{4} c_2 r^2 + c_1 \left(\frac{r^2}{4} \ln r - \frac{r^2}{4} \right) + \int \left\{ \frac{1}{r} \int \left[r \int \left(\frac{1}{r} \int \frac{r p}{D} dr \right) dr \right] dr \right\} dr$$

Ympyrä- ja rengaslaatan perusdifferentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu rotaatiosymmetrisen tuennan ja kuormituksen tapauksessa on siis muotoa

$$w(r) = a_0 + b_0 \ln r + c_0 r^2 + d_0 r^2 \ln r + \int \left\{ \frac{1}{r} \int \left[r \int \left(\frac{1}{r} \int \frac{r p}{D} dr \right) dr \right] dr \right\} dr \quad (4.13)$$

Kaavassa (4.13) ratkaisun osa $w_{h0} = a_0 + b_0 \ln r + c_0 r^2 + d_0 r^2 \ln r$ on homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu ja osa $w_y = \int \left\{ \frac{1}{r} \int \left[r \int \left(\frac{1}{r} \int \frac{r p}{D} dr \right) dr \right] dr \right\} dr$ täydellisen yhtälön yksityisratkaisu. Vakiot a_0, b_0, c_0, d_0 saadaan määritettyä laatan reunaehdoista. Laatan jännitysresultanteille tulee edelleen kaavoista (4.3), (4.4) ja (4.5) sieventämällä seuraavat lausekkeet

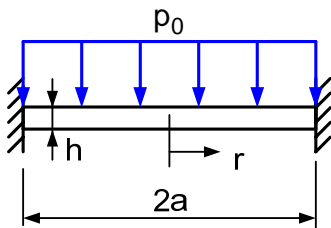
$$\begin{aligned} M_r &= -D \left(w_{,rr} + \frac{v}{r} w_{,r} \right) & M_\theta &= -D \left(v w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} \right) & M_{r\theta} &= 0 \\ Q_r &= -D \left(w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} \right)_{,r} & Q_\theta &= 0 & V_r &= Q_r & V_\theta &= 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

4.3.1 Tasaisesti kuormitettu ja jäykästi tuettu ympyrälaatta

Tarkastellaan kuvan 4.3 tasaisesti kuormitettua ja reunaltaan jäykästi tuettua ympyrälaattaa. Etsitään aluksi yksityisratkaisu kaavan (4.13) integraalin avulla, kun $p = p_0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \int \frac{r p_0}{D} dr &= \frac{1}{r} \cdot \frac{r^2 p_0}{2D} = \frac{r p_0}{2D} & r \int \frac{r p_0}{2D} dr &= r \cdot \frac{r^2 p_0}{4D} = \frac{r^3 p_0}{4D} \\ \frac{1}{r} \int \frac{r^3 p_0}{4D} dr &= \frac{1}{r} \cdot \frac{r^4 p_0}{16D} = \frac{r^3 p_0}{16D} & \int \frac{r^3 p_0}{16D} dr &= \frac{r^4 p_0}{64D} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Taipuman w lauseke on kaavan (4.13) mukaan



$$w = a_0 + c_0 r^2 + \frac{p_0}{64D} r^4 \quad (4.16)$$

sillä ehtojen $w(0) \neq \infty$ ja $M_r(0) \neq \infty$ perusteella on $b_0 = d_0 = 0$. Kaltevuuskulman $w_{,r}$ lausekkeeksi saadaan derivoimalla

Kuva 4.3 Jäykästi tuettu ympyrälaatta.

$$w_{,r} = 2c_0 r + \frac{p_0}{16D} r^3 \quad (4.17)$$

Reunan $r = a$ ehdoista $w(a) = 0$ ja $w_{,r}(a) = 0$ seuraa vakioille a_0 ja c_0 yhtälöpari

$$\begin{cases} a_0 + c_0 a^2 + \frac{p_0}{64D} a^4 = 0 \\ 2c_0 a + \frac{p_0}{16D} a^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_0 = \frac{p_0 a^4}{64D} \quad c_0 = -\frac{2p_0 a^2}{64D} \quad (4.18)$$

Taipuman lausekkeeksi tulee vakioiden sijoittamisen jälkeen

$$w(r) = \frac{p_0 a^4}{64D} \left[1 - 2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 + \left(\frac{r}{a} \right)^4 \right] = \frac{p_0 a^4}{64D} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]^2 \quad (4.19)$$

Maksimi taipuma on laatan keskipisteessä ja sen arvo on

$$w_{\max} = w(0) = \frac{p_0 a^4}{64D} \quad (4.20)$$

Jännitysresultanttien kaavoissa (4.14) tarvittavat derivaatat ovat

$$w_{,r} = \frac{p_0 a^2}{16D} \left(-r + \frac{r^3}{a^2} \right) \quad w_{,rr} = \frac{p_0 a^2}{16D} \left(-1 + \frac{3r^2}{a^2} \right) \quad (4.21)$$

Sijoittamalla lausekkeet (4.21) kaavoihin (4.14) saadaan tulokset

$$\begin{aligned} M_r &= -\frac{p_0 a^2}{16} \left(-1 + \frac{3r^2}{a^2} - \nu + \nu \frac{r^2}{a^2} \right) = \frac{p_0 a^2}{16} \left[(1 + \nu) - (3 + \nu) \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \\ M_\theta &= -\frac{p_0 a^2}{16} \left(-\nu + \nu \frac{3r^2}{a^2} - 1 + \frac{r^2}{a^2} \right) = \frac{p_0 a^2}{16} \left[(1 + \nu) - (1 + 3\nu) \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \\ Q_r &= -\frac{p_0 a^2}{16} \left(-1 + \frac{3r^2}{a^2} - 1 + \frac{r^2}{a^2} \right)_{,r} = -\frac{p_0 r}{2} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Laatan keskipisteessä $r = 0$ laattamomenteilla M_r ja M_θ on sama arvo

$$M_r(0) = M_\theta(0) = (1 + \nu) p_0 a^2 / 16 \quad (4.23)$$

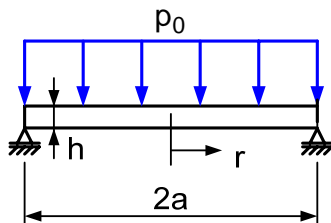
Laatan reunalla $r = a$ laattamomenttien M_r ja M_θ arvot ovat

$$M_r(a) = -2p_0 a^2 / 16 \quad M_\theta(a) = -2\nu p_0 a^2 / 16 \quad (4.24)$$

Suurin laattamomentin itseisarvo on siis reunan säteittäismomentin itseisarvo $|M_r|_{\max} = p_0 a^2 / 8$, josta seuraa suurimmaksi normaalijännityksen itseisarvoksi

$$|\sigma_r|_{\max} = \frac{6}{h^2} p_0 a^2 / 8 = \frac{3}{4} \left(\frac{a}{h} \right)^2 p_0 \quad (4.25)$$

4.3.2 Tasaisesti kuormitettu ja niveltuettu ympyrälaatta



Kuva 4.4 Niveltuettu ympyrälaatta.

Tutkitaan kuvan 4.4 tasaisesti kuormitettua ja reunaltaan niveltuettua ympyrälaattaa. Edellisen kohdan yksityisratkaisu kelpaa tässäkin ja keskipisteen reunaehdot ovat myös samat, joten taipuma ja sen derivaatat ovat

$$\begin{aligned} w &= a_0 + c_0 r^2 + \frac{p_0}{64D} r^4 \quad w_{,r} = 2c_0 r + \frac{p_0}{16D} r^3 \\ w_{,rr} &= 2c_0 + \frac{3p_0}{16D} r^2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Laattamomentin M_r lausekkeeksi tulee kaavasta (4.14)

$$M_r = -2D(1+\nu)c_0 - (3+\nu)p_0 r^2 / 16 \quad (4.27)$$

Reunan $r = a$ ehdoista $w(a) = 0$ ja $M_r(a) = 0$ seuraa yhtälöpari vakioille a_0 ja c_0

$$\begin{cases} a_0 + c_0 a^2 + \frac{p_0}{64D} a^4 = 0 \\ -2D(1+\nu)c_0 - (3+\nu)\frac{p_0}{16}a^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_0 = \frac{5+\nu}{1+\nu} \frac{p_0 a^4}{64D} \quad c_0 = -\frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{p_0 a^2}{32D} \quad (4.28)$$

Taipumaksi tulee vakioiden a_0 ja c_0 sijoittamisen jälkeen

$$w(r) = \frac{p_0 a^4}{64D} \left[\frac{5+\nu}{1+\nu} - 2\frac{3+\nu}{1+\nu} \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \left(\frac{r}{a}\right)^4 \right] = \frac{p_0 a^4}{64D} \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right] \left[\frac{5+\nu}{1+\nu} - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right] \quad (4.29)$$

Maksimi taipuma on laatan keskipisteessä ja sen arvo on

$$w_{\max} = w(0) = \frac{5+\nu}{1+\nu} \frac{p_0 a^4}{64D} \quad (4.30)$$

joka on $(5+\nu)/(1+\nu)$ -kertainen verrattuna jäykästi tuetun laatan suurimpaan taipumaan verrattuna. Kun $\nu = 0,3$, kerroin on noin 4,08. Kaltevuuskulmaksi $w_{,r}$ laatan reunalla $r = a$ tulee kaavasta (4.26)

$$w_{,r}(a) = -\frac{p_0 a^3}{8(1+\nu)D} \quad (4.31)$$

Jännitysresultanteille saadaan kaavasta (4.14) seuraavat lausekkeet

$$\begin{aligned} M_r &= \frac{(3+\nu)p_0 a^2}{16} \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right] & Q_r &= -\frac{p_0 r}{2} \\ M_\theta &= \frac{p_0 a^2}{16} \left[(3+\nu) - (1+3\nu)\left(\frac{r}{a}\right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.32)$$

Laatan keskipisteessä $r = 0$ laattamomenteilla M_r ja M_θ on sama arvo

$$M_r(0) = M_\theta(0) = (3+\nu)p_0 a^2 / 16 \quad (4.33)$$

joka on samalla kummankin laattamomentin itseisarvon maksimi. Suurimmaksi normaali-jännityksen itseisarvoksi tulee näin ollen

$$|\sigma_r|_{\max} = |\sigma_\theta|_{\max} = \frac{6}{h^2} (3 + \nu) p_0 a^2 / 16 = \frac{3(3 + \nu)}{8} \left(\frac{a}{h} \right)^2 p_0 \quad (4.34)$$

joka on $(3 + \nu)/2$ -kertainen verrattuna jäykästi tuetun laatan suurimpaan normaali-jännityksen itseisarvoon verrattuna. Kun $\nu = 0,3$, kerroin on 1,65.

Edellä olevia tuloksia sovellettaessa on syytä muistaa, että todellisissa rakenteissa tuenta on harvoin täysin jäykkä tai ideaalinen nivel, vaan todellinen tuenta on tavallisesti niiden välimuoto.