Esimerkki 6.1

Tarkastellaan esimerkkinä yksiulotteisesta Gauss-Legendre integroinnista lauseketta

$$I=\int_2^5 \frac{x+1}{x^2+x-2}dx=\int_2^5 \frac{x+1}{(x-1)(x+2)}dx$$

Lasketaan ensin vertailua varten integraalin tarkka arvo. Jakamalla integrandi osamurtoihin saadaan

$$I=\frac{1}{3}\int_2^5 \left(\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+2}\right)dx=\frac{1}{3}\Big/_2^5[2\ln(x-1)+\ln(x+2)]=\frac{1}{3}(2\ln4+\ln7-2\ln1-\ln4)$$
$$=\frac{1}{3}\ln\frac{16\cdot7}{4}=\frac{1}{3}\ln28\approx1{,}11073484$$

Muunnetaan integraali numeerista integrointia varten standardimuotoon sijoituksella

$$x=\frac{1}{2}(1-\xi)\cdot2+\frac{1}{2}(1+\xi)\cdot5=\frac{1}{2}(7+3\xi) \quad\Rightarrow\quad dx=\frac{3}{2}d\xi$$
$$\frac{x+1}{x^2+x-2}=\frac{\frac{1}{2}(7+3\xi)+1}{\frac{1}{4}(7+3\xi)^2+\frac{1}{2}(7+3\xi)-2}=\frac{6\xi+18}{9\xi^2+48\xi+55} \qquad\Rightarrow$$

$$I=\frac{3}{2}\int_{-1}^1 \frac{6\xi+18}{9\xi^2+48\xi+55}d\xi$$

Yhden pisteen integroinnilla saadaan likiarvoksi

$$I_1\approx2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{18}{55}=\frac{54}{55}\approx0{,}98181818$$

Kahden pisteen integroinnilla saadaan vastaavasti

$$I_2\approx1\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{6/\sqrt{3}+18}{9/3+48/\sqrt{3}+55}+1\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{-6/\sqrt{3}+18}{9/3-48/\sqrt{3}+55}\approx1{,}0955316$$

Kolmen pisteen integroinnista seuraa tulos

$$I_3\approx\frac{5}{9}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{6\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}+18}{9\cdot\frac{3}{5}+48\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}+55}+\frac{8}{9}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{18}{55}+\frac{5}{9}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{-6\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}+18}{9\cdot\frac{3}{5}-48\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}+55}\approx1{,}1089856$$