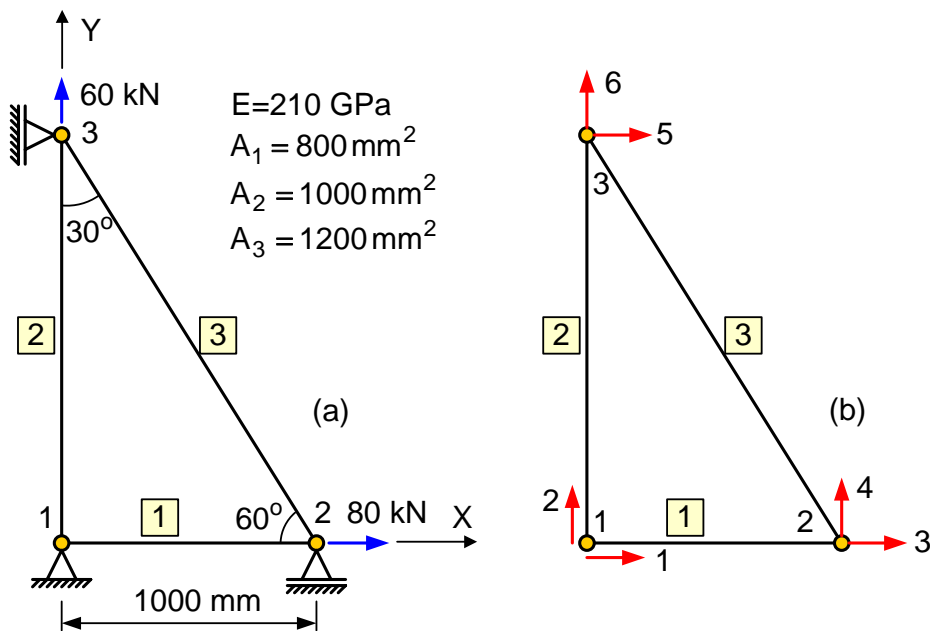


Esimerkki 2.4

Sovelletaan tasoristikon elementin teoriaa kuvan 1 (a) kahden pistevoiman kuormittamaan ristikkoon, jonka elementtiverkossa (b) on kolme solmua ja elementtiä. Elementit 1 ja 2 ovat erityistapauksia, koska ne ovat vaaka- ja pystyasennossa. Elementti 3 on vinossa asennossa XY-globaalkoordinaatistossa ja sen avulla nähdään tasoristikon elementtimenetelmän oleelliset piirteet. Kuvassa (b) on myös vapausasteiden numerointi. Elementtiverkolla on kuusi vapausastetta, joista vapausasteet 1, 2, 4 ja 5 ovat tuettuja, jolloin vastaavat solmuniirtymät ovat nollia. Käytetään yksiköitä kN ja mm, mutta niitä ei merkitä vastauksia lukuun ottamatta näkyviin.



Kuva 1. Tasoristikko ja sen elementtiverkko.

Elementtien jäykkyyismatriisien muodostamisessa tarvitaan elementtien pituudet ja suuntakulmat XY koordinaatistossa.

$$L_1 = 1000 \quad L_2 = 1732,05 \quad L_3 = 2000 \quad \alpha_1 = 0^\circ \quad \alpha_2 = 90^\circ \quad \alpha_3 = 120^\circ$$

Elementtien jousivakiot ja suuntakulmien kosinit ja sinit ovat

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{210 \cdot 800}{1000} = 168,00 & \cos \alpha_1 &= 1 & \sin \alpha_1 &= 0 \\ k_2 &= \frac{210 \cdot 1000}{1732,05} = 121,24 & \cos \alpha_2 &= 0 & \sin \alpha_2 &= 1 \\ k_3 &= \frac{210 \cdot 1200}{2000} = 126,00 & \cos \alpha_3 &= -0,5 & \sin \alpha_3 &= 0,866 \end{aligned}$$

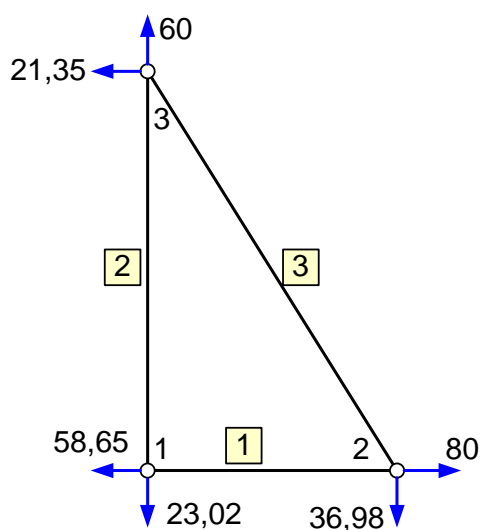
Kirjoitetaan elementtien jäykkyysmatriisit kaavasta (2.40) ja varustetaan ne osoite-numeroilla sijoittelusummausta varten.

$$[k]^1 = \begin{bmatrix} 168,00 & 0 & -168,00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -168,00 & 0 & 168,00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \quad [k]^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 121,24 & 0 & -121,24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -121,24 & 0 & 121,24 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$$[k]^3 = \begin{bmatrix} 31,50 & -54,56 & -31,50 & 54,56 \\ -54,56 & 94,50 & 54,56 & -94,50 \\ -31,50 & 54,56 & 31,50 & -54,56 \\ 54,56 & -94,50 & -54,56 & 94,50 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Elementtiverkon perusyhtälöksi $[K]\{U\} = \{R\}$ tulee sijoittelusummauksella sekä otamalla huomioon siirtymien reunaehdot ja kuormitukset

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} 168,00 & 0 & -168,00 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 121,24 & 0 & 0 & 0 & -121,24 \\ -168,00 & 0 & 199,50 & -54,56 & -31,50 & 54,56 \\ 0 & 0 & -54,56 & 94,50 & 54,56 & -94,50 \\ 0 & 0 & -31,50 & 54,56 & 31,50 & -54,56 \\ 0 & -121,24 & 54,56 & -94,50 & -54,56 & 215,74 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_X^2 \\ 0 \\ 0 \\ U_Y^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_X^1 \\ F_Y^1 \\ 80 \\ F_Y^2 \\ F_X^3 \\ 60 \end{bmatrix}$$



Kuva 2. Ristikon vapaakappalekuva.

Tuntemattomat solmuisiirtymät U_X^2 ja U_Y^3 saadaan ratkaistua ryhmän kolmannesta ja kuudennessa yhtälöstä

$$\begin{cases} 199,50 U_X^2 + 54,56 U_Y^3 = 80 \\ 54,56 U_X^2 + 215,74 U_Y^3 = 60 \end{cases} \Rightarrow$$

$$U_X^2 = 0,3491 \text{ mm} \quad U_Y^3 = 0,1898 \text{ mm}$$

Tukireaktioiden F_X^1 , F_Y^1 , F_Y^2 ja F_X^3 arvot selviävät elementtiverkon perusyhtälön muista yhtälöistä, joista seuraa tulokset

$$F_X^1 = -168 \cdot 0,3491 = -58,65 \text{ kN} \quad F_Y^1 = -121,24 \cdot 0,1898 = -23,02 \text{ kN}$$

$$F_Y^2 = -54,56 \cdot 0,3491 - 94,50 \cdot 0,1898 = -36,98 \text{ kN}$$

$$F_X^3 = -31,50 \cdot 0,3491 - 54,56 \cdot 0,1898 = -21,35 \text{ kN}$$

Kuvassa 2 on ristikon vapaakappalekuva, josta voidaan todeta rakenteen olevan voima- ja momenttitasapainossa. Ratkaistaan elementtien solmuvoimavektorit käyttämällä elementin perusyhtälöä $\{f\} = [k]\{u\}$.

$$\begin{bmatrix} f_X^1 \\ f_Y^1 \\ f_X^2 \\ f_Y^2 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 168,00 & 0 & -168,00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -168,00 & 0 & 168,00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,3491 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -58,65 \\ 0 \\ 58,65 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$\begin{bmatrix} f_X^1 \\ f_Y^1 \\ f_X^2 \\ f_Y^2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 121,24 & 0 & -121,24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -121,24 & 0 & 121,24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,1898 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -23,02 \\ 0 \\ 23,02 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$\begin{bmatrix} f_X^1 \\ f_Y^1 \\ f_X^2 \\ f_Y^2 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 31,50 & -54,56 & -31,50 & 54,56 \\ -54,56 & 94,50 & 54,56 & -94,50 \\ -31,50 & 54,56 & 31,50 & -54,56 \\ 54,56 & -94,50 & -54,56 & 94,50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3491 \\ 0 \\ 0 \\ 0,1898 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21,35 \\ -36,98 \\ -21,35 \\ 36,98 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

Kuvassa 3 on edellä saatujen tulosten perusteella laaditut solmujen ja elementtien vapaakappalekuvat, joista voi todeta niiden olevan tasapainossa.

Elementtien 1 ja 2 solmuvoimavektoreista näkyy suoraan niiden normaalivoimien arvot, koska nämä elementit ovat globaaliakseleiden suuntaiset. Vinon elementin 3 solmuvoimavektorissa elementin suuntainen voima on jakaantuneena vaaka- ja pystykomponentteihinsa, joiden resultantista saadaan elementin normaalivoima

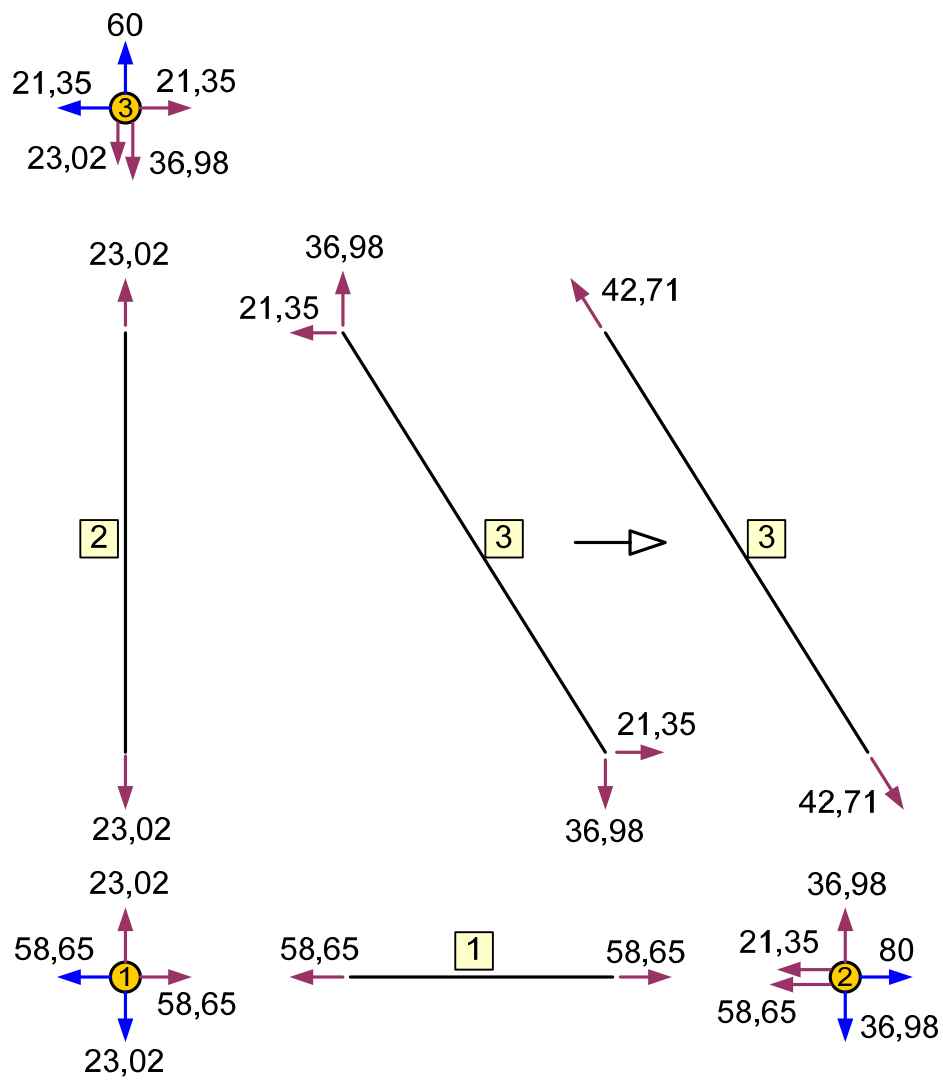
$$N = +\sqrt{21,35^2 + 36,98^2} = +42,71 \text{ kN} \quad \{f\} = \{-42,71 \quad 42,71\} \text{ kN}$$

Kuvassa 3 on myös elementin 3 lokaalikoordinaatiston solmuvoimavektori $\{f\}$. Todetaan vielä elementtien normaalivoimat ja -jännitykset

$$N^1 = 58,65 \text{ kN} \quad \sigma^1 = 58,65 \cdot 10^3 \text{ N} / 800 \text{ mm}^2 = 73,31 \text{ MPa}$$

$$N^2 = 23,02 \text{ kN} \quad \sigma^2 = 23,02 \cdot 10^3 \text{ N} / 1000 \text{ mm}^2 = 23,02 \text{ MPa}$$

$$N^3 = 42,71 \text{ kN} \quad \sigma^3 = 42,71 \cdot 10^3 \text{ N} / 1200 \text{ mm}^2 = 35,59 \text{ MPa}$$



Kuva 3. Solmujen ja elementtien vapaakappalekuvat.