

8 3D-SOLIDIRAKENTEET

8.1 Johdanto

Kolmiulotteisia solidielementtejä tarvitaan kolmiulotteisten kappaleiden mallintamiseen. Tällöin tarkasteltavan kappaleen geometrialla ei ole erityispiirteitä, jotka tekisivät mahdolliseksi jonkin erityisteorian avulla kehitettyjen elementtien käyttämisen. Kolmiulotteiset elementit perustuvat yleiseen kolmiulotteisen lujuusopin teoriaan, jolloin kaikki kenttäfunktioiden (siirtymätila-, jännitystila- ja muodonmuutostilakenttä) komponentit ovat laskennassa mukana. Siirtymätilakentällä on kolme komponenttia, joten kolmiulotteisen elementin solmuilla on kolme siirtymävapausastetta. Solmujen määrä tulee varsinkin korkeamman interpolointiasteen elementeillä suureksi, mistä johtuen kolmiulotteiset elementit ja verkot ovat raskaita käsitellä.

Kolmiulotteisia elementtejä voidaan muodostaa kuvaustekniikalla emoelementtejä ja niiden interpolointifunktioita käyttäen. Näin saadaan aikaan vaihtelevan geometrisen muodon omaavia ja halutulla tavalla xyz-koordinaatistoon sijoittuvia kolmiulotteisia solidielementtejä. Perusajatuksena kuvaustekniikassa on koordinaattimuunnos, joka kuvaa emoelementin solmut kuvaelementin vastinsolmuiksi. Geometrian kuvauksen emo- ja kuvaelementin välillä on oltava kääntäen yksikäsitteinen, jotta syntyvät kuvaelementit olisivat kelvollisia. Kuvaustekniikalla saadaan aikaan sekä tasomaiset tahot omaavia että kaarevatahoisia kuvaelementtejä.

8.2 Lineaarinen nelitahoinen elementti

8.2.1 Emotetraedrin geometrinen kuvaus

Tarkastellaan kuvan 8.1 (a) lineaarista nelitahoista elementtiä, jonka solmut sijaitsevat elementin kärkipisteissä ja niiden koordinaatit ovat (x_i, y_i, z_i) $i = 1, \dots, 4$. Solmu-koordinaattien vektorit ovat tällöin

$$\{\hat{x}\} = \{x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4\} \quad \{\hat{y}\} = \{y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4\} \quad \{\hat{z}\} = \{z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4\} \quad (8.1)$$

Kuvan 8.1 (b) emoelementin lineaariset interpolointifunktiot ja geometrian kuvausmatriisi ovat

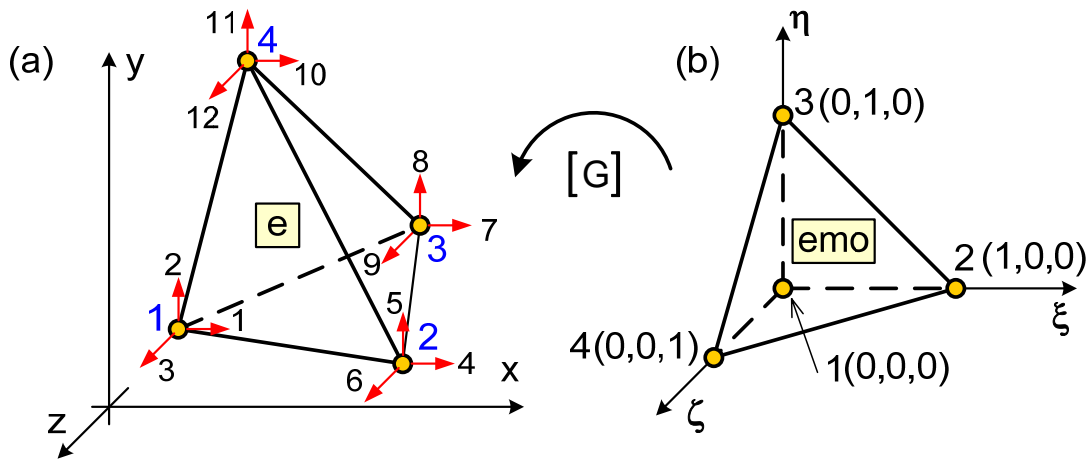
$$N_1 = 1 - \xi - \eta - \zeta \quad N_2 = \xi \quad N_3 = \eta \quad N_4 = \zeta \quad (8.2)$$

$$[G] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \quad (8.3)$$

Edellä on merkintöjen yksinkertaistamiseksi jätetty interpolointifunktioista N_1, N_2, N_3 ja N_4 sekä kuvausmatriisista $[G]$ niiden argumentit ξ, η ja ζ pois. Näin menetel-
lään jatkossa usein muidenkin suureiden yhteydessä. Lukijan on kuitenkin syytä tar-
koin hahmottaa, mitkä suureet riippuvat emoelementin koordinaateista ξ, η ja ζ .

Kuvaus, joka muuntaa emotetraedrin xyz-koordinaatiston tetraedrielementiksi niin,
että kuvaelementin kärjet ovat pisteissä (x_i, y_i, z_i) $i = 1, \dots, 4$, on muotoa

$$\begin{aligned} x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i = [G] \{ \hat{x} \} \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i = [G] \{ \hat{y} \} \quad z = \sum_{i=1}^4 N_i z_i = [G] \{ \hat{z} \} \end{aligned} \quad (8.4)$$



Kuva 8.1 Emotetraedrin lineaarinen kuvaus xyz-koordinaatistoon.

Emotetraedrin kärkipisteet kuvautuvat kuvassa 8.1 esitetyn solmunumeroinnin mu-
kaisesti ja emoelementin tahoista tulee kuvaelementin vastintahoja. Kuvaus (8.4) on
lineaarinen, joten koordinaattitasojen $\xi = 0$, $\eta = 0$ ja $\zeta = 0$ suuntaisten tasojen kuvat
ovat tasoja ja niiden jakosuhteet säilyvät, mutta yhdensuuntaisuus ei yleensä säily.
Koska kuvaelementin tahot määräytyvät yksikäsitteisesti elementin kärkipisteiden
perusteella, liittyvät elementtiverkossa vierekkäisiksi kuvatut elementit toisiinsa ilman
aukkoja. Kuvaus (8.4) on kääntäen yksikäsitteinen, kun kuvaelementin solmut ovat
eri pisteissä ja kaikki solmut eivät ole samassa tasossa.

Kuvaus (8.4) antaa kuvaelementin koordinaatit emoelementin koordinaattien funk-
tiona eli $x = x(\xi, \eta, \zeta)$, $y = y(\xi, \eta, \zeta)$ ja $z = z(\xi, \eta, \zeta)$. Kenttäfunktion $f(x, y, z)$ osittaisderi-
vaatoiksi muuttujien ξ, η ja ζ suhteen tulee ketjusäännön mukaisesti ja matriisi-
muotoon kirjoitettuna

$$\begin{bmatrix} f_{,\xi} \\ f_{,\eta} \\ f_{,\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & z_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & z_{,\eta} \\ x_{,\zeta} & y_{,\zeta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{,x} \\ f_{,y} \\ f_{,z} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} f_{,x} \\ f_{,y} \\ f_{,z} \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

Matriisi $[J]$ on kuvauksen Jacobin matriisi. Kuvausyhtälöistä (8.4) seuraa Jacobin matriisille ja sen determinantille lausekkeet

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & z_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & z_{,\eta} \\ x_{,\zeta} & y_{,\zeta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 & -y_1 + y_2 & -z_1 + z_2 \\ -x_1 + x_3 & -y_1 + y_3 & -z_1 + z_3 \\ -x_1 + x_4 & -y_1 + y_4 & -z_1 + z_4 \end{bmatrix} \quad (8.6)$$

$$|J| = \begin{vmatrix} -x_1 + x_2 & -y_1 + y_2 & -z_1 + z_2 \\ -x_1 + x_3 & -y_1 + y_3 & -z_1 + z_3 \\ -x_1 + x_4 & -y_1 + y_4 & -z_1 + z_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 6V \quad (8.7)$$

jossa V on analyyttisen geometrian mukaan kuvaelementin tilavuus. Kaavasta (8.7) tulee $|J| > 0$, kun solmut numeroidaan kuvan 8.1 mukaisessa järjestyksessä. Kaavasta (8.5) seuraa tulos

$$\begin{bmatrix} f_{,x} \\ f_{,y} \\ f_{,z} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} f_{,\xi} \\ f_{,\eta} \\ f_{,\zeta} \end{bmatrix} = \frac{1}{6V} [J]^A \begin{bmatrix} f_{,\xi} \\ f_{,\eta} \\ f_{,\zeta} \end{bmatrix} \quad (8.8)$$

Kaavassa (8.8) $[J]^A = \text{adj}[J]$ on Jacobin matriisin adjungaatti, jonka paikassa ij oleva alkio on matriisin $[J]$ alkioita ji vastaava alideterminantti. Esimerkiksi adjungaatin paikkaan 12 tuleva alkio on

$$J_{12}^A = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -y_1 + y_2 & -z_1 + z_2 \\ -y_1 + y_4 & -z_1 + z_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

Seuraavassa on listattu kaikkien matriisin $[J]^A$ alkioden lausekkeet

$$\begin{aligned} J_{11}^A &= \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} & J_{12}^A &= - \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} & J_{13}^A &= \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \\ J_{21}^A &= - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} & J_{22}^A &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} & J_{23}^A &= - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} \\ J_{31}^A &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} & J_{32}^A &= - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} & J_{33}^A &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (8.9)$$

Tulosta (8.8) tarvitaan määritettäessä elementin kinemaattisen matriisin lauseketta. Kuvaelementin yli olevat integraalit voidaan matematiikan mukaan muuntaa emoelementin alueeseen kaavalla

$$\begin{aligned} \iiint_V F(x,y,z) dx dy dz &= \iiint_{E_{mo}} F[x(\xi,\eta,\zeta), y(\xi,\eta,\zeta), z(\xi,\eta,\zeta)] |J| d\xi d\eta d\zeta \\ &= 6V \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi-\eta} H(\xi,\eta,\zeta) d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (8.10)$$

jossa on käytetty merkintää $F[x(\xi,\eta,\zeta), y(\xi,\eta,\zeta), z(\xi,\eta,\zeta)] = H(\xi,\eta,\zeta)$.

8.2.2 Siirtymäkentän interpolointi

Kuvan 8.1 (a) elementin solmuilla on kolme vapausastetta, siirtymät x- y- ja z-suunnissa, joten elementillä on 12 vapausastetta. Kun vapausastenumerointi valitaan solmuittain eteneväksi, tulee elementin solmusiirtymävektoriksi

$$\{u\} = \{u^1 \quad v^1 \quad w^1 \mid u^2 \quad v^2 \quad w^2 \mid u^3 \quad v^3 \quad w^3 \mid u^4 \quad v^4 \quad w^4\} \quad (8.11)$$

Elementin alueessa tuntemattomana kenttäfunktiona on siirtymäkenttä

$$\{d(x,y,z)\} = \{u(x,y,z) \quad v(x,y,z) \quad w(x,y,z)\} \quad (8.12)$$

joka sisältää elementin alueen pisteiden (x,y,z) x-, y- ja z-suuntaiset siirtymät $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ ja $w(x,y,z)$. Siirtymäkenttä $\{d\}$ interpoloidaan elementin alueessa solmuarvoistaan. Interpoloinnissa käytetään samoja interpolointifunktioita (8.2) kuin elementin geometrian kuvauksessa. Siirtymäkentän komponenteille saadaan näin

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= (1-\xi-\eta-\zeta) u^1 + \xi u^2 + \eta u^3 + \zeta u^4 \\ v(x,y,z) &= (1-\xi-\eta-\zeta) v^1 + \xi v^2 + \eta v^3 + \zeta v^4 \\ w(x,y,z) &= (1-\xi-\eta-\zeta) w^1 + \xi w^2 + \eta w^3 + \zeta w^4 \end{aligned} \quad (8.13)$$

Määritellään elementin interpolointimatriisi $[N]$ seuraavasti

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (8.14)$$

jolloin kenttäfunktion interpolointi (8.13) voidaan kirjoittaa tiiviimpään muotoon

$$\{d\} = [N] \{u\} \quad (8.15)$$

Koska interpolointifunktiot $N_i = N_i(\xi, \eta, \zeta)$ määritettiin emoelementin koordinaattien ξ , η ja ζ avulla, antaa kaava (8.15) elementin siirtymäkentän niiden funktiona. Siirtymäkentän interpolointi on elementtien rajapinnoilla C^0 -jatkuva.

8.2.3 Muodonmuutostilakenttä

3D-solidirakenteilla muodonmuutoskomponenttien vektori $\{\epsilon\}$ on muotoa

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}\} \quad (8.16)$$

Kinemaattiset yhtälöt ovat yleisessä kolmiulotteisessa tapauksessa

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= u_{,x} & \epsilon_y &= v_{,y} & \epsilon_z &= w_{,z} \\ \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} & \gamma_{xz} &= u_{,z} + w_{,x} & \gamma_{yz} &= v_{,z} + w_{,y} \end{aligned} \quad (8.17)$$

Kaavasta (8.17) seuraa vektorin $\{\epsilon\}$ ja siirtymäkentän $\{d\}$ yhteydeksi tulos

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = [D] \{d\} \quad (8.18)$$

jossa on määritelty kinemaattinen differentiaalioperaattori $[D]$ seuraavasti

$$[D] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \end{bmatrix} \quad (8.19)$$

Kaavoista (8.18) ja (8.15) saadaan muodonmuutosvektorille $\{\epsilon\}$ solmusiirtymien avulla esitetty likilauseke

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{D}]\{\mathbf{d}\} = [\mathbf{D}][\mathbf{N}]\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{u}\} \quad (8.20)$$

jossa kinemaattisen matriisin $[\mathbf{B}] = [\mathbf{D}][\mathbf{N}]$ lausekkeeksi tulee

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{B}]_1 & [\mathbf{B}]_2 & [\mathbf{B}]_3 & [\mathbf{B}]_4 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{B}]_i = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,z} \\ N_{i,y} & N_{i,x} & 0 \\ N_{i,z} & 0 & N_{i,x} \\ 0 & N_{i,z} & N_{i,y} \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, 4 \quad (8.21)$$

Interpolointifunktioiden derivaatat voidaan laskea kaavan (8.8) avulla, josta saadaan esimerkiksi derivaatalle $N_{2,y}$ lauseke

$$6VN_{2,y} = J_{21}^A \cdot 1 + J_{22}^A \cdot 0 + J_{23}^A \cdot 0 = J_{21}^A = - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

Muutkin derivaatat saadaan samalla periaatteella ja ne on esitetty kaavassa (8.22)

$$\begin{aligned} 6VN_{1,x} &= - \begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = \gamma_1 & 6VN_{1,y} &= \begin{vmatrix} 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} = \beta_1 & 6VN_{1,z} &= - \begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} = \alpha_1 \\ 6VN_{2,x} &= \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = \gamma_2 & 6VN_{2,y} &= - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} = \beta_2 & 6VN_{2,z} &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} = \alpha_2 \\ 6VN_{3,x} &= - \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = \gamma_3 & 6VN_{3,y} &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} = \beta_3 & 6VN_{3,z} &= - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} = \alpha_3 \\ 6VN_{4,x} &= \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \gamma_4 & 6VN_{4,y} &= - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} = \beta_4 & 6VN_{4,z} &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \alpha_4 \end{aligned} \quad (8.22)$$

Kinemaattiseksi matriisiksi $[\mathbf{B}]$ tulee edellä olevan perusteella seuraava vakiomatriisi

$$[B] = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & \gamma_2 & 0 & 0 & \gamma_3 & 0 & 0 & \gamma_4 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 & 0 & \beta_2 & 0 & 0 & \beta_3 & 0 & 0 & \beta_4 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \gamma_1 & 0 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 & \beta_3 & \gamma_3 & 0 & \beta_4 & \gamma_4 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & \gamma_1 & \alpha_2 & 0 & \gamma_2 & \alpha_3 & 0 & \gamma_3 & \alpha_4 & 0 & \gamma_4 \\ 0 & \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 & 0 & \alpha_3 & \beta_3 & 0 & \alpha_4 & \beta_4 \end{bmatrix} \quad (8.23)$$

Kaavan (8.20) mukaan muodonmuutosvektori on elementin alueessa vakio ja siksi lineaarista nelitahoista elementtiä kutsutaan vakio venymän tetraedrielementiksi.

8.2.4 Jännitystilakenttä

3D-solidirakenteilla jännityskomponenttien vektori $\{\sigma\}$ on muotoa

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}\} \quad (8.24)$$

Vektoreiden $\{\epsilon\}$ ja $\{\sigma\}$ välinen yhteys saadaan materiaaliyhtälöistä, jotka lineaarisesti kimmoisen materiaalin tapauksessa ovat muotoa

$$\{\sigma\} = [E] \{\epsilon\} \quad (8.25)$$

Konstitutiivinen matriisi $[E]$ on yleisessä tapauksessa seuraavan kaavan mukainen

$$[E] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\nu} \end{bmatrix} \quad (8.26)$$

jossa E on kimmomoduuli, ν Poissonin vakio ja $\bar{\nu} = (1-2\nu)/2$. Kaavojen (8.25) ja (8.20) avulla saadaan jännityskomponenttien vektori lausuttua solmusiirtymien avulla

$$\{\sigma\} = [E] \{\epsilon\} = [E] [B] \{u\} \quad (8.27)$$

Kaavasta (8.27) näkyy, että myös jännityskomponentit ovat lineaarisen nelitahoisen elementin alueessa vakiota. Tällä elementillä saatavat muodonmuutos- ja jännityskomponentit ovat elementtien rajapinnoilla yleensä epäjatkuvia ja riittävän tarkkojen tulosten saaminen edellyttää melko tiheän elementtiverkon käyttöä.

8.2.5 Jäykkyysmatriisi

Elementin jäykkyysmatriisi saadaan jälleen määritettyä tilavuusintegraalista

$$[k] = \iiint_{V_e} [B]^T [E] [B] dV \quad (8.28)$$

Kaavojen (8.23) ja (8.26) matriisien $[B]$ ja $[E]$ tapauksessa lausekkeen (8.28) integrandi on vakio ja integrointi voidaan suorittaa tarkasti tuloksen ollessa

$$[k] = [B]^T [E] [B] V \quad (8.29)$$

Lineaarisen nelitahoisen elementin jäykkyysmatriisi voidaan laskea ilman numeerista integrointia kaavasta (8.29).

8.2.6 Ekvivalenttiset solmukuormitukset

Elementin ekvivalenttiset solmukuormitukset saadaan kaavan (4.1) integraaleista.

8.2.6.1 Tilavuusvoimakuormitus

Tilavuusvoimakuormitusta vastaavat ekvivalenttiset solmukuormitukset voidaan laskea kaavan (4.21) keskimmäisestä tilavuusintegraalista

$$\{r\} = \iiint_{V_e} [N]^T \{f\} dV \quad (8.30)$$

Tilavuusvoimien vektorilla $\{f\}$ on komponentit x -, y - ja z -suunnassa eli

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_x & f_y & f_z \end{Bmatrix} \quad (8.31)$$

Komponentit f_x , f_y ja f_z voivat olla mielivaltaisia koordinaattien x , y ja z funktioita. Kun integrointi muunnetaan emotetraedrin alueeseen kaavan (8.10) mukaisesti, on tilavuusvoimakomponentit lausuttava emon koordinaattien avulla. Tämä onnistuu sijoittamalla niihin x , y ja z kuvausyhtälöistä (8.4). Merkitään sijoituksen jälkeen saatavaa tilavuusvoimien vektoria ja sen komponentteja seuraavasti

$$\{\bar{f}\} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_x & \bar{f}_y & \bar{f}_z \end{Bmatrix} \quad (8.32)$$

Integraali (8.30) menee kaavan (8.10) perusteella muotoon

$$\{r\} = 6V \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi-\eta} [N]^T \{\bar{f}\} d\xi d\eta d\zeta \quad (8.33)$$

Lausekkeen (8.33) integrandi $[N]^T \{\bar{f}\}$ on pystyvektori

$$\left\{ N_1 \bar{f}_x \quad N_1 \bar{f}_y \quad N_1 \bar{f}_z \mid N_2 \bar{f}_x \quad N_2 \bar{f}_y \quad N_2 \bar{f}_z \mid N_3 \bar{f}_x \quad N_3 \bar{f}_y \quad N_3 \bar{f}_z \mid N_4 \bar{f}_x \quad N_4 \bar{f}_y \quad N_4 \bar{f}_z \right\} \quad (8.34)$$

Nähdään, että tilavuusvoimakomponentit aiheuttavat solmukuormituksia vain oman suuntansa vapausasteisiin. Tilavuusvoimat voidaan muuntaa solmukuormituksiksi integraalin (8.33) avulla numeerisella integroinnilla. Jos $\{f\} = \{f_0\} = \{f_{x0} \quad f_{y0} \quad f_{z0}\}$ on vakiovektori, voidaan integrointi suorittaa tarkasti, jolloin tulee seuraavaa

$$\{r\} = 6V \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi-\eta} \begin{bmatrix} (1-\xi-\eta-\zeta)f_{x0} \\ (1-\xi-\eta-\zeta)f_{y0} \\ (1-\xi-\eta-\zeta)f_{z0} \\ \hline \xi f_{x0} \\ \xi f_{y0} \\ \xi f_{z0} \\ \hline \eta f_{x0} \\ \eta f_{y0} \\ \eta f_{z0} \\ \hline \zeta f_{x0} \\ \zeta f_{y0} \\ \zeta f_{z0} \end{bmatrix} d\xi d\eta d\zeta = \frac{V}{4} \begin{bmatrix} f_{x0} \\ f_{y0} \\ f_{z0} \\ \hline f_{x0} \\ f_{y0} \\ f_{z0} \\ \hline f_{x0} \\ f_{y0} \\ f_{z0} \\ \hline f_{x0} \\ f_{y0} \\ f_{z0} \end{bmatrix} \quad (8.35)$$

Kunkin suunnan tilavuusvoima jakaantuu solmuille samansuuruisiksi pistevoimiksi.

8.2.6.2 Pintavoimakuormitus

Pintavoimakuormitusta vastaa kaavan (4.21) viimeinen integraali

$$\{r\} = \iint_{A_e} [N]^T \{p\} dA \quad (8.36)$$

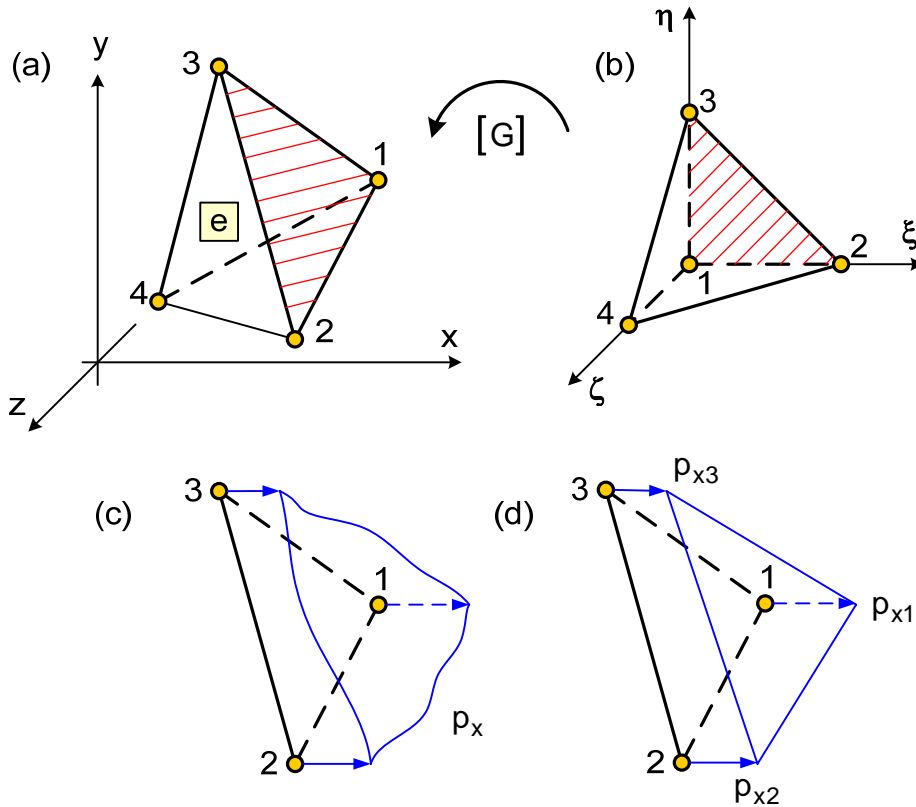
jossa integrointi on elementtiverkon reunapintaan kuuluvan elementin tahon yli. Pintavoimien vektorilla on komponentit x-, y- ja z-suunnassa eli

$$\{p\} = \{p_x \quad p_y \quad p_z\} \quad (8.37)$$

Komponentit p_x , p_y ja p_z voivat olla mielivaltaisia koordinaattien x , y ja z funktioita.

Oletetaan pintakuormituksen olevan emon tahon 123 kuvataholla, jonka solmut ovat 1, 2 ja 3 kuvien 8.2 (a) ja (b) mukaisesti. Kuvassa 8.2 (c) on esitetty taholla 123 vaiuttava yleinen ja kuvassa (d) lineaarinen pintakuormituksen komponentti p_x . Emon taholla 123 on $\zeta = 0$, joten kuvausyhtälöistä (8.4) tulee

$$\begin{aligned} x &= (1-\xi-\eta)x_1 + \xi x_2 + \eta x_3 & dx &= (x_2 - x_1)d\xi + (x_3 - x_1)d\eta \\ y &= (1-\xi-\eta)y_1 + \xi y_2 + \eta y_3 & dy &= (y_2 - y_1)d\xi + (y_3 - y_1)d\eta \\ z &= (1-\xi-\eta)z_1 + \xi z_2 + \eta z_3 & dz &= (z_2 - z_1)d\xi + (z_3 - z_1)d\eta \end{aligned} \quad (8.38)$$



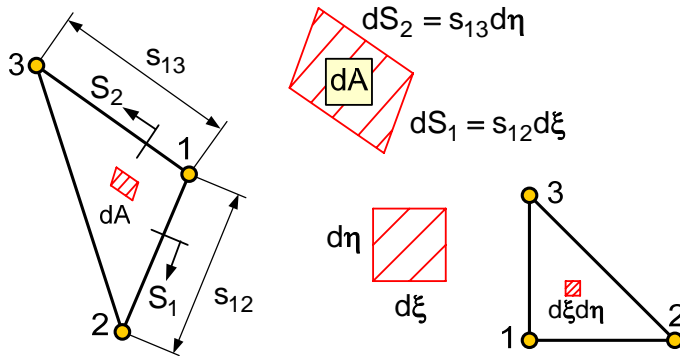
Kuva 8.2 Pintakuormitus elementin taholla 123.

Otetaan käyttöön kuvaelementin sivuja 12 ja 13 pitkin mitatut koordinaatit S_1 ja S_2 kuvan 8.3 mukaisesti. Koska emon särmällä 12 on $\eta = 0 \Rightarrow d\eta = 0$ ja särmällä 13 $\xi = 0 \Rightarrow d\xi = 0$, saadaan differentiaaleille dS_1 ja dS_2 lausekkeet

$$dS_1 = \left(\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \right)_{d\eta=0} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} d\xi = s_{12} d\xi$$

$$dS_2 = \left(\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \right)_{d\xi=0} = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2} d\eta = s_{13} d\eta$$
(8.39)

Kaavassa (8.39) s_{12} ja s_{13} ovat kuvaelementin särmien 12 ja 13 pituudet. Kuvaele-



Kuva 8.3 Pintaelementin kuvautuminen.

mentin tahon 123 pintaelementti dA lausutaan emoelementin tahon 123 pintaelementin $d\xi d\eta$ avulla laskemalla ristitulovektorin $d\vec{A} = d\vec{S}_1 \times d\vec{S}_2$ pituus $|d\vec{A}|$.

Edellä on $d\vec{S}_1 = s_{12} d\xi \vec{e}_{12}$ ja $d\vec{S}_2 = s_{13} d\eta \vec{e}_{13}$, jossa \vec{e}_{12} ja \vec{e}_{13} ovat kuvaelementin sivujen 12 ja 13 suuntaiset yksikkövektorit

$$\vec{e}_{12} = [(x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}] / s_{12}$$

$$\vec{e}_{13} = [(x_3 - x_1)\vec{i} + (y_3 - y_1)\vec{j} + (z_3 - z_1)\vec{k}] / s_{13}$$
(8.40)

Laskemalla dA edellä esitetyllä tavalla, saadaan tulos

$$dA = |d\vec{A}| = 2A_{123} d\xi d\eta$$
(8.41)

jossa A_{123} on kuvaelementin tahon 123 pinta-ala. Tuloksen (8.41) mukaan pintaelementtien alojen suhde on sama kuin tahojen alojen suhde.

Interpolointimatriisi $[N]$ menee emotetraedrin taholla 123 muotoon

$$[N_{123}] = \begin{bmatrix} 1-\xi-\eta & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\xi-\eta & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\xi-\eta & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
(8.42)

Pintavoimien vektori (8.37) saadaan lausuttua emon koordinaattien ξ ja η avulla sijoittamalla x , y ja z kuvausyhtälöistä (8.38). Merkitään sijoituksen jälkeen saatavaa pintavoimien vektoria ja sen komponentteja seuraavasti

$$\{\bar{p}\} = \{\bar{p}_x \quad \bar{p}_y \quad \bar{p}_z\}$$
(8.43)

Kun integraali (8.36) muunnetaan emotetraedrin tahon 123 yli olevaksi, saadaan se tulosten (8.41), (8.42) ja (8.43) perusteella muotoon

$$\{r\} = 2A_{123} \int_0^1 \int_0^{1-\eta} [N_{123}]^T \{\bar{p}\} d\xi d\eta \quad (8.44)$$

Kaavan (8.44) integrandi on auki kirjoitettuna

$$[N_{123}]^T \{\bar{p}\} = \begin{bmatrix} 1-\xi-\eta & 0 & 0 \\ 0 & 1-\xi-\eta & 0 \\ 0 & 0 & 1-\xi-\eta \\ \hline \xi & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & \xi \\ \hline \eta & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & \eta \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_x \\ \bar{p}_y \\ \bar{p}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\xi-\eta)\bar{p}_x \\ (1-\xi-\eta)\bar{p}_y \\ (1-\xi-\eta)\bar{p}_z \\ \hline \xi\bar{p}_x \\ \xi\bar{p}_y \\ \xi\bar{p}_z \\ \hline \eta\bar{p}_x \\ \eta\bar{p}_y \\ \eta\bar{p}_z \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.45)$$

josta näkyy, että pintakuormituksesta tulee ekvivalenttisia solmukuormituksia vain sen vaikutustahon solmuihin ja lisäksi kukin kuormituskomponentti vaikuttaa vain oman suuntansa vapausasteisiin. Integraali (8.44) voidaan laskea kaikilla pintakuormituksilla ainakin numeerisesti.

Jos pintakuormitus on tarpeeksi yksinkertainen, voidaan integrointi (8.44) suorittaa tarkastikin. Tarkastellaan esimerkkinä tästä kuvan 8.2 (d) mukaista lineaarisesti vaihtelevaa x-akselin suuntaista pintakuormitusta p_x . Koska p_x vaihtelee lineaarisesti, sen lauseke on muotoa $p_x(x,y) = a + bx + cy$, missä a , b ja c ovat vakioita. Nämä vakiot saadaan solmuista tulevista ehdoista $p_x(x_1, y_1) = p_{x1}$, $p_x(x_2, y_2) = p_{x2}$ ja $p_x(x_3, y_3) = p_{x3}$, jolloin kuormituksen lausekkeiksi tulee

$$p_x = \frac{1}{2A_{xy}} \left(\begin{vmatrix} p_{x1} & x_1 & y_1 \\ p_{x2} & x_2 & y_2 \\ p_{x3} & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & p_{x1} & y_1 \\ 1 & p_{x2} & y_2 \\ 1 & p_{x3} & y_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & p_{x1} \\ 1 & x_2 & p_{x2} \\ 1 & x_3 & p_{x3} \end{vmatrix} y \right), \quad 2A_{xy} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (8.46)$$

Suure A_{xy} on kuvaelementin tahon 123 xy-tasolla olevan projektion pinta-ala, joten kaava (8.46) ei ole voimassa, jos kuvataho 123 on z-akselin suuntaisessa tasossa.

Kun yllä olevaan lausekkeeseen sijoitetaan koordinaatit x ja y kuvausyhtälöistä (8.38), saadaan sievennyksen jälkeen tulokseksi

$$\bar{p}_x = p_{x1} + (p_{x2} - p_{x1})\xi + (p_{x3} - p_{x1})\eta = p_{x1} + \Delta p_{21}\xi + \Delta p_{31}\eta \quad (8.47)$$

Kaavasta (8.44) tulee seuraava lauseke ekvivalenttisille solmukuormituksille

$$\{r\} = 2A_{123} \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \begin{bmatrix} (1-\xi-\eta)(p_{x1} + \Delta p_{21}\xi + \Delta p_{31}\eta) \\ 0 \\ 0 \\ \hline \xi(p_{x1} + \Delta p_{21}\xi + \Delta p_{31}\eta) \\ 0 \\ 0 \\ \hline \eta(p_{x1} + \Delta p_{21}\xi + \Delta p_{31}\eta) \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d\xi d\eta = \frac{A_{123}}{12} \begin{bmatrix} 2p_{x1} + p_{x2} + p_{x3} \\ 0 \\ 0 \\ \hline p_{x1} + 2p_{x2} + p_{x3} \\ 0 \\ 0 \\ \hline p_{x1} + p_{x2} + 2p_{x3} \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.48)$$

8.2.6.3 Esijännitystilakenttä

Kaavan (4.21) ensimmäinen integraali

$$\{r\} = - \iiint_{V_e} [B]^T \{\sigma_0\} dV \quad (8.49)$$

muuntaa esijännitystilakentän ekvivalenttisiksi solmukuormituksiksi. Kuormituksena esijännitystilakenttä

$$\{\sigma_0\} = \left\{ \sigma_{x0} \quad \sigma_{y0} \quad \sigma_{z0} \quad \tau_{xy0} \quad \tau_{xz0} \quad \tau_{yz0} \right\} \quad (8.50)$$

jonka komponentit voivat riippua koordinaateista x , y ja z . Kun kenttä (8.50) lausutaan yhtälöiden (8.4) avulla koordinaattien ξ , η ja ζ avulla, saadaan kuormitus

$$\{\bar{\sigma}_0\} = \left\{ \bar{\sigma}_{x0} \quad \bar{\sigma}_{y0} \quad \bar{\sigma}_{z0} \quad \bar{\tau}_{xy0} \quad \bar{\tau}_{xz0} \quad \bar{\tau}_{yz0} \right\} \quad (8.51)$$

Muuntamalla integraali (8.49) kaavan (8.10) mukaisesti emotetraedrin yli lasketuksi saadaan

$$\{r\} = -6V \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi-\eta} [B]^T \{\bar{\sigma}_0\} d\xi d\eta d\zeta \quad (8.52)$$

Kaikki esijännitysvektorit voidaan muuntaa ekvivalenttisiksi solmukuormituksiksi integraalin (8.52) avulla ainakin numeerista integrointia käyttäen.

Jos $\{\sigma_0\}$ on vakiovektori, voidaan integrointi suorittaa tarkasti, sillä $[B]$ on kaavan (8.23) vakiomatriisi. Koska emotetraedrin tilavuus on $1/6$, saadaan tulokseksi

$$\{r\} = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & \beta_1 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 & \gamma_1 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & \gamma_1 & \beta_1 \\ \hline \gamma_2 & 0 & 0 & \beta_2 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & \gamma_2 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & \gamma_2 & \beta_2 \\ \hline \gamma_3 & 0 & 0 & \beta_3 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & \beta_3 & 0 & \gamma_3 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & \gamma_3 & \beta_3 \\ \hline \gamma_4 & 0 & 0 & \beta_4 & \alpha_4 & 0 \\ 0 & \beta_4 & 0 & \gamma_4 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & \alpha_4 & 0 & \gamma_4 & \beta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{x0} \\ \sigma_{y0} \\ \sigma_{z0} \\ \tau_{xy0} \\ \tau_{xz0} \\ \tau_{yz0} \end{bmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} \gamma_1 \sigma_{x0} + \beta_1 \tau_{xy0} + \alpha_1 \tau_{xz0} \\ \beta_1 \sigma_{y0} + \gamma_1 \tau_{xy0} + \alpha_1 \tau_{yz0} \\ \alpha_1 \sigma_{z0} + \gamma_1 \tau_{xz0} + \beta_1 \tau_{yz0} \\ \hline \gamma_2 \sigma_{x0} + \beta_2 \tau_{xy0} + \alpha_2 \tau_{xz0} \\ \beta_2 \sigma_{y0} + \gamma_2 \tau_{xy0} + \alpha_2 \tau_{yz0} \\ \alpha_2 \sigma_{z0} + \gamma_2 \tau_{xz0} + \beta_2 \tau_{yz0} \\ \hline \gamma_3 \sigma_{x0} + \beta_3 \tau_{xy0} + \alpha_3 \tau_{xz0} \\ \beta_3 \sigma_{y0} + \gamma_3 \tau_{xy0} + \alpha_3 \tau_{yz0} \\ \alpha_3 \sigma_{z0} + \gamma_3 \tau_{xz0} + \beta_3 \tau_{yz0} \\ \hline \gamma_4 \sigma_{x0} + \beta_4 \tau_{xy0} + \alpha_4 \tau_{xz0} \\ \beta_4 \sigma_{y0} + \gamma_4 \tau_{xy0} + \alpha_4 \tau_{yz0} \\ \alpha_4 \sigma_{z0} + \gamma_4 \tau_{xz0} + \beta_4 \tau_{yz0} \end{bmatrix} \quad (8.53)$$