

Esimerkki 5.1

Tarkastellaan emojanaelementin alueessa määritellyn funktion $f(\xi) = \frac{\xi+1}{\xi^2+2}$ interpolointia. Laske kohdassa $\xi = \frac{1}{2}$ funktion tarkka arvo sekä likiarvot lineaarisella, kvadraattisella ja kuutiollisella Lagrangen interpoloinnilla.

Ratkaisu:

Tarkka arvo:
$$f(1/2) = \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}+2} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{9}{4}} = \frac{2}{3} \approx 0,6666667$$

Lineaarinen interpolointi: $k = 2$

Funktion solmuarvot: $f_1 = f(-1) = 0$ $f_2 = f(+1) = 2/3$

Interpolointifunktioiden arvot kohdassa $\xi = \frac{1}{2}$: $N_1(1/2) = 1/4$ $N_2(1/2) = 3/4$

$$\Rightarrow f(1/2) \approx \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2} = 0,5000000$$

Kvadraattinen interpolointi: $k = 3$

Funktion solmuarvot: $f_1 = f(-1) = 0$ $f_2 = f(0) = 1/2$ $f_3 = f(+1) = 2/3$

Interpolointifunktioiden arvot kohdassa $\xi = \frac{1}{2}$:

$$N_1(1/2) = -1/8 \quad N_2(1/2) = 6/8 \quad N_3(1/2) = 3/8$$

$$\Rightarrow f(1/2) \approx -\frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{6}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{8} = 0,6250000$$

Kuutiollinen interpolointi: $k = 4$

Funktion solmuarvot:

$$f_1 = f(-1) = 0 \quad f_2 = f(-1/3) = 6/19 \quad f_3 = f(+1/3) = 12/19 \quad f_4 = f(+1) = 2/3$$

Interpolointifunktioiden arvot kohdassa $\xi = \frac{1}{2}$:

$$N_1(1/2) = 5/128 \quad N_2(1/2) = -27/128 \quad N_3(1/2) = 135/128 \quad N_4(1/2) = 15/128$$

$$\Rightarrow f(1/2) \approx \frac{5}{128} \cdot 0 - \frac{27}{128} \cdot \frac{6}{19} + \frac{135}{128} \cdot \frac{12}{19} + \frac{15}{128} \cdot \frac{2}{3} = \frac{103}{152} \approx 0,6776316$$