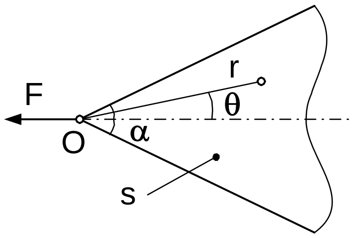


II.9. Laske napakoordinaatistossa annetusta jännitysfunktiosta $\phi(r,\theta) = Cr\theta\sin\theta$ seuraavat jännityskomponenttien σ_r, σ_θ ja $\tau_{r\theta}$ lausekkeet ja osoita, että ne toteuttavat oheisen kuvan mukaisen puoliäärettömän kiilan reunaehdot pistevoiman vaikutuspistettä O lukuun ottamatta. Määritä vakio C ottamalla vapaakappalekuvaksi r-säteinen kärkiosa kiilasta ja soveltamalla tasapainoa. Esitä periaatekuvat viivan $\theta = 0^o$ jännityskomponenttien jakaantumisesta.

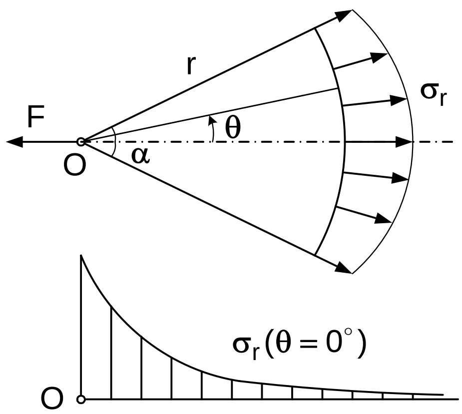
Ratkaisu:

$$\phi = Cr\theta\sin\theta \qquad\qquad \phi_{,\theta} = Cr\sin\theta + Cr\theta\cos\theta$$

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\phi_{,r} + \frac{1}{r^2}\phi_{,\theta\theta} = \frac{1}{r}C\theta\sin\theta + \frac{1}{r^2}(Cr\cos\theta + Cr\cos\theta - Cr\theta\sin\theta) \quad \Rightarrow$$

$$\sigma_r = \frac{2C\cos\theta}{r} \qquad\qquad \sigma_\theta = \phi_{,rr} \quad \Rightarrow \quad \sigma_\theta = 0$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2}\phi_{,\theta} - \frac{1}{r}\phi_{,r\theta} = \frac{1}{r^2}(Cr\sin\theta + Cr\theta\cos\theta) - \frac{1}{r}(C\sin\theta + C\theta\cos\theta) \quad \Rightarrow \quad \tau_{r\theta} = 0$$



Reunaehdot kiilan kyljillä ovat $\sigma_\theta(\pm\alpha) = 0$ sekä $\tau_{r\theta}(\pm\alpha) = 0$ ja ne toteutuvat. Lisäksi oheisesta kiilan kärjen vapaakappalekuvasta seuraa:

$$\rightarrow \quad F = \int_{-\alpha}^{\alpha} \sigma_r \cos\theta \cdot sr\,d\theta \quad \Rightarrow$$

$$F = \int_{-\alpha}^{\alpha} 2Cs\cos^2\theta\,d\theta = Cs\int_{-\alpha}^{\alpha}(1+\cos 2\theta)\,d\theta = Cs \Big/_{-\alpha}^{\alpha} \left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) =$$

$$Cs\left\{\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha - \left[-\alpha + \frac{1}{2}\sin(-2\alpha)\right]\right\} = Cs(2\alpha + \sin 2\alpha)$$

$$\Rightarrow \qquad C = \frac{F/s}{2\alpha + \sin 2\alpha}$$

Kun $\theta = 0^\circ \quad \Rightarrow \quad \sigma_r = \dfrac{2C}{r} \qquad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$.