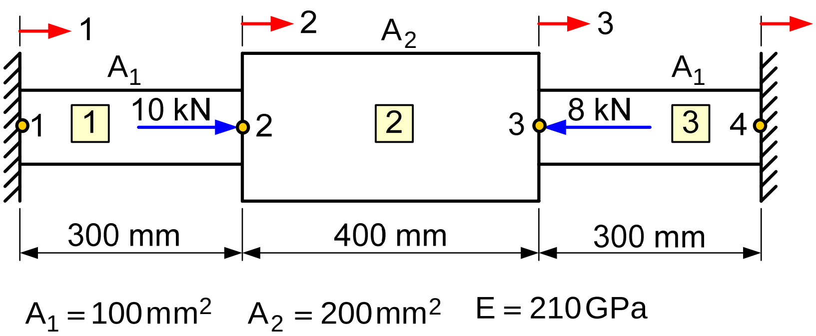
Esimerkki 2.1

Tarkastellaan kuvan 1 mukaista kahden pistevoiman kuormittamaa aksiaalista rakennetta. Elementtiverkossa on kolme elementtiä ja neljä solmua. Käytetään yksikköjärjestelmää (kN, mm), mutta laatuja ei tuloksia lukuun ottamatta merkitä näkyviin.



Kuva 1. Aksiaalinen rakenne.

Elementtien jousivakiot ja jäykkyysmatriisit ovat

$$k_1 = k_3 = \frac{EA_1}{L_1} = \frac{210 \cdot 100}{300} = 70 \qquad k_2 = \frac{EA_2}{L_2} = \frac{210 \cdot 200}{400} = 105$$

$$[k]^1 = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 70 & -70 \\ -70 & 70 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 1 & \quad 2 \end{array} & \end{array} \qquad [k]^2 = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 105 & -105 \\ -105 & 105 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 2 & \quad 3 \end{array} & \end{array} \qquad [k]^3 = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 70 & -70 \\ -70 & 70 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 3 & \quad 4 \end{array} & \end{array}$$

Elementtiverkon perusyhtälöksi $[K]\{U\} = \{R\}$ tulee sijoittelusummauksella ja ottamalla huomioon siirtymien reunaehdot ja kuormitukset

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 70 & -70 & 0 & 0 \\ -70 & 175 & -105 & 0 \\ 0 & -105 & 175 & -70 \\ 0 & 0 & -70 & 70 \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{cccc} 1 & \quad 2 & \quad 3 & \quad 4 \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ U^2 \\ U^3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^1 \\ 10 \\ -8 \\ F^4 \end{bmatrix}$$

Tuntemattomat solmusiirtymät U^2 ja U^3 ratkeavat jäykkyysyhtälöryhmän toisesta ja kolmannesta yhtälöstä, jotka ovat

$$\begin{cases} 175\,U^2 - 105\,U^3 = 10 \\ -105\,U^2 + 175\,U^3 = -8 \end{cases}$$

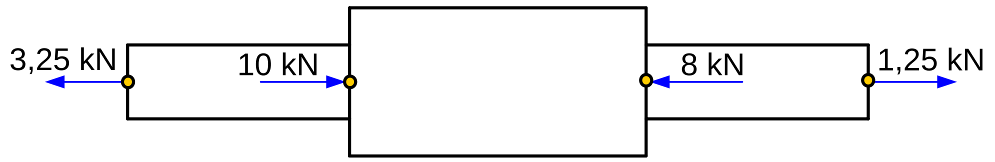
Edellä olevan yhtälöparin ratkaisu on

$$U^2 = 0{,}046429\,\text{mm} \qquad U^3 = -0{,}017857\,\text{mm}$$

Tuntemattomien tukireaktioiden arvot F^1 ja F^4 ratkeavat jäykkyysyhtälön ensimmäisestä ja neljännestä yhtälöstä, joista seuraa tulokset

$$F^1 = -70\,U^2 = -3{,}25\,\text{kN} \qquad F^4 = -70\,U^3 = 1{,}25\,\text{kN}$$

Rakenteen vapaakappalekuvasta 2 nähdään aksiaalisen voimatasapainon toteutuvan saaduilla tukireaktioiden arvoilla.



Kuva 2. Rakenteen vapaakappalekuva.

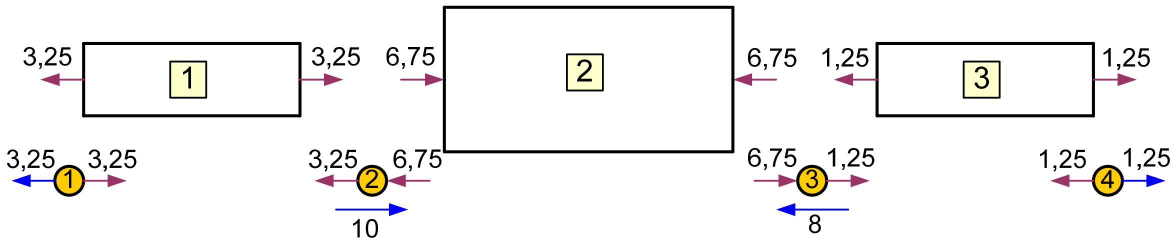
Ratkaistaan seuraavaksi elementtien solmuvoimavektorit elementin perusyhtälöstä $\{f\} = [k]\{u\}$. Tulokseksi saadaan vektorit

$$\begin{bmatrix} f^1 \\ f^2 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 70 & -70 \\ -70 & 70 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}046429 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3{,}25 \\ 3{,}25 \end{bmatrix} \text{kN}$$

$$\begin{bmatrix} f^1 \\ f^2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 105 & -105 \\ -105 & 105 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}046429 \\ -0{,}017857 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}75 \\ -6{,}75 \end{bmatrix} \text{kN}$$

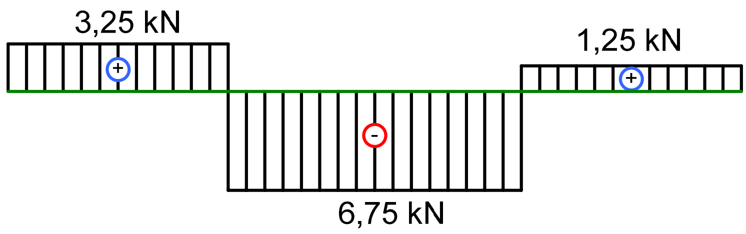
$$\begin{bmatrix} f^1 \\ f^2 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 70 & -70 \\ -70 & 70 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}017857 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}25 \\ 1{,}25 \end{bmatrix} \text{kN}$$

Kuvassa 3 on elementtien ja solmujen vapaakappalekuvat, joista voidaan todeta kaikkien solmujen ja elementtien olevan tasapainossa.



Kuva 3. Elementtien ja solmujen vapaakappalekuvat.

Elementtien vapaakappalekuvien perusteella voidaan laatia rakenteelle normaalivoimakuva, joka on kuvassa 4.



Kuva 4. Normaalivoimakuva.

Elementtien normaalijännitykset ovat

$$\sigma^1 = 3{,}25 \cdot 10^3\,\mathrm{N}/100\,\mathrm{mm}^2 = 32{,}50\,\mathrm{MPa}$$

$$\sigma^2 = 6{,}75 \cdot 10^3\,\mathrm{N}/200\,\mathrm{mm}^2 = 33{,}75\,\mathrm{MPa}$$

$$\sigma^3 = 1{,}25 \cdot 10^3\,\mathrm{N}/100\,\mathrm{mm}^2 = 12{,}50\,\mathrm{MPa}$$

Elementin 2 keskikohdan siirtymäksi tulee kaavasta (2.22)

$$u(200\,\mathrm{mm}) = \frac{400-200}{400} \cdot 0{,}046429\,\mathrm{mm} + \frac{200}{400} \cdot (-0{,}017857\,\mathrm{mm}) = 0{,}014286\,\mathrm{mm}$$

