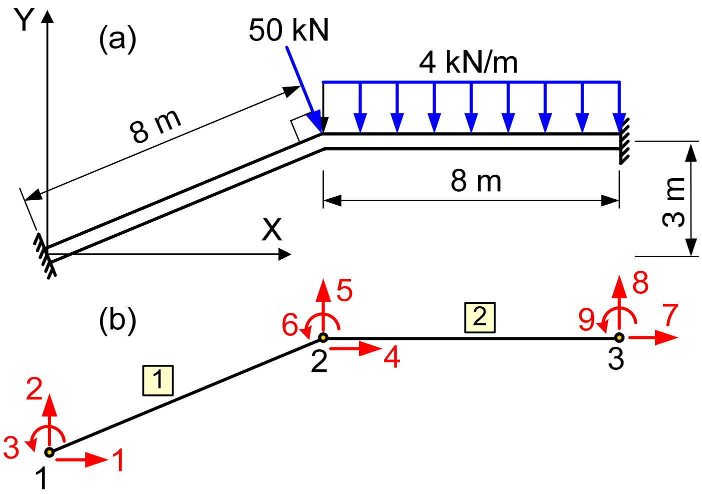
Esimerkki 3.4

Tarkastellaan kuvan 1 kehää kuuden vapausasteen palkkielementin avulla käyttäen kuvan (b) kahden elementin verkkoa, jossa tuetut vapausasteet otetaan mukaan laskentaan. Elementtien $A = 6000\,mm^2$, $I = 200\cdot 10^6\,mm^4$ ja $E = 200\,GPa$. Kuormituksena on solmuun 2 kohdistuva pistevoima ja elementillä 2 oleva tasainen kuormitus, joista jälkimmäinen otetaan huomioon ekvivalenttisten solmukuormitusten avulla.



Kuva 1. Tasokehä ja sen elementtiverkko.

Muodostetaan elementtien lokaalit jäykkyysmatriisit ja kinemaattiset matriisit ja niistä kongruenssimuunnoksella elementtien globaalit jäykkyysmatriisit. Laskuissa käytetään yksikköjärjestelmää (kN,mm), mutta yksiköitä ei merkitä välivaiheissa näkyviin. Elementille 1 saadaan kaavoista (3.11) ja (3.8) tulokset

$$\cos\alpha = 0{,}9270 \qquad \sin\alpha = 0{,}3750 \qquad k = EA/L = 200\cdot 0{,}75 \qquad \kappa = EI/L = 200\cdot 25000$$

$$[B]^1 = \begin{bmatrix} 0{,}9270 & 0{,}3750 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}3750 & 0{,}9270 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}9270 & 0{,}3750 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}3750 & 0{,}9270 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\underline{k}]^1 = 200\begin{bmatrix} 0{,}75 & 0 & 0 & -0{,}75 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}004688 & 18{,}75 & 0 & -0{,}004688 & 18{,}75 \\ 0 & 18{,}75 & 1\cdot 10^5 & 0 & -18{,}75 & 0{,}5\cdot 10^5 \\ -0{,}75 & 0 & 0 & 0{,}75 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}004688 & -18{,}75 & 0 & 0{,}004688 & -18{,}75 \\ 0 & 18{,}75 & 0{,}5\cdot 10^5 & 0 & -18{,}75 & 1\cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

Globaalikoordinaatiston jäykkyysmatriisi lasketaan edellä olevista matriiseista kaavalla (3.12). Suorittamalla tarvittavat matriisien kertolaskut saadaan jäykkyysmatriisi

$$[k]^1 = 200 \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccc} 0{,}6452 & 0{,}2591 & -7{,}0313 & -0{,}6452 & -0{,}2591 & -7{,}0313 \\ 0{,}2591 & 0{,}1095 & 17{,}3817 & -0{,}2591 & -0{,}1095 & 17{,}3817 \\ -7{,}0313 & 17{,}3817 & 1\cdot 10^5 & 7{,}0313 & -17{,}3817 & 0{,}5\cdot 10^5 \\ -0{,}6452 & -0{,}2591 & 7{,}0313 & 0{,}6452 & 0{,}2591 & 7{,}0313 \\ -0{,}2591 & -0{,}1095 & -17{,}3817 & 0{,}2591 & 0{,}1095 & -17{,}3817 \\ -7{,}0313 & 17{,}3817 & 0{,}5\cdot 10^5 & 7{,}0313 & -17{,}3817 & 1\cdot 10^5 \end{array}\right] \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \end{array}$$

Koska elementti 2 on vaaka-asennossa, on $[k]^2 = [\underline{k}]^2$ ja $\{r\}^2 = \{\underline{r}\}^2$, joista seuraa kaavan (3.8) ja kuvan 3.3 avulla tulokset

$$[k]^2 = 200 \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccc} 0{,}75 & 0 & 0 & -0{,}75 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}004688 & 18{,}75 & 0 & -0{,}004688 & 18{,}75 \\ 0 & 18{,}75 & 1\cdot 10^5 & 0 & -18{,}75 & 0{,}5\cdot 10^5 \\ -0{,}75 & 0 & 0 & 0{,}75 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}004688 & -18{,}75 & 0 & 0{,}004688 & -18{,}75 \\ 0 & 18{,}75 & 0{,}5\cdot 10^5 & 0 & -18{,}75 & 1\cdot 10^5 \end{array}\right] \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \end{array}$$

$$\{r\}^2 = \begin{array}{c} \left\{\begin{array}{cccccc} 0 & -16 & -21333{,}33 & 0 & -16 & 21333{,}33 \end{array}\right\} \\ \begin{array}{cccccc} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \end{array}$$

Elementtiverkon solmukuormitusvektori on

$$\{F\} = \left\{ F_X^1 \quad F_Y^1 \quad M^1 \quad 18{,}750 \quad -46{,}351 \quad 0 \quad F_X^3 \quad F_Y^3 \quad M^3 \right\}$$

Elementtiverkon perusyhtälöksi tulee sijoittelusummauksella

$$200\begin{bmatrix} 0{,}64521 & 0{,}2591 & -7{,}0313 & -0{,}6452 & -0{,}2591 & -7{,}0313 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2591 & 0{,}1095 & 17{,}3817 & -0{,}2591 & -0{,}1095 & 17{,}3817 & 0 & 0 & 0 \\ -7{,}0313 & 17{,}3817 & 1\cdot 10^5 & 7{,}0313 & -17{,}3817 & 0{,}5\cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}6452 & -0{,}2591 & 7{,}0313 & 1{,}3952 & 0{,}2591 & 7{,}0313 & -0{,}75 & 0 & 0 \\ -0{,}2591 & -0{,}1095 & -17{,}3817 & 0{,}2591 & 0{,}1142 & 1{,}3683 & 0 & -0{,}00469 & 18{,}75 \\ -7{,}0313 & 17{,}3817 & 0{,}5\cdot 10^5 & 7{,}0313 & 1{,}3683 & 2\cdot 10^5 & 0 & -18{,}75 & 0{,}5\cdot 10^5 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}75 & 0 & 0 & 0{,}75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}00469 & -18{,}75 & 0 & 0{,}00469 & -18{,}75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18{,}75 & 0{,}5\cdot 10^5 & 0 & -18{,}75 & 1\cdot 10^5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_X^2 \\ U_Y^2 \\ \Phi^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_X^1 \\ F_Y^1 \\ M^1 \\ 18{,}750 \\ -62{,}351 \\ -21333{,}33 \\ F_X^3 \\ F_Y^3 \\ M^3 + 21333{,}33 \end{bmatrix}$$

Vapaita solmusiirtymiä vastaavat yhtälöt ovat

$$200\begin{bmatrix} 1{,}3952 & 0{,}2591 & 7{,}0313 \\ 0{,}2591 & 0{,}1142 & 1{,}3683 \\ 7{,}0313 & 1{,}3683 & 2\cdot 10^5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_X^2 \\ U_Y^2 \\ \Phi^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18{,}750 \\ -62{,}351 \\ -21333{,}33 \end{bmatrix}$$

Ratkaisemalla edellä oleva yhtälöryhmä saadaan tulokset

$$U_X^2 = 0{,}9950\,\text{mm} \qquad U_Y^2 = -4{,}9816\,\text{mm} \qquad \Phi^2 = -5{,}3423\cdot 10^{-4}$$

Elementtiverkon perusyhtälön lopuista yhtälöistä ratkeavat tukireaktiot

$$F_X^1 = 130{,}50\,\text{kN} \qquad F_Y^1 = 55{,}68\,\text{kN} \qquad M^1 = 13{,}375\,\text{kNm} \qquad F_X^3 = -149{,}25\,\text{kN} \qquad F_Y^3 = 22{,}67\,\text{kN} \qquad M^3 = -45{,}359\,\text{kNm}$$

Elementtien solmuvoimavektorit globaalikoordinaatistossa saadaan elementin perusyhtälöstä $\{f\} = [k]\{u\} - \{r\}$, josta seuraa

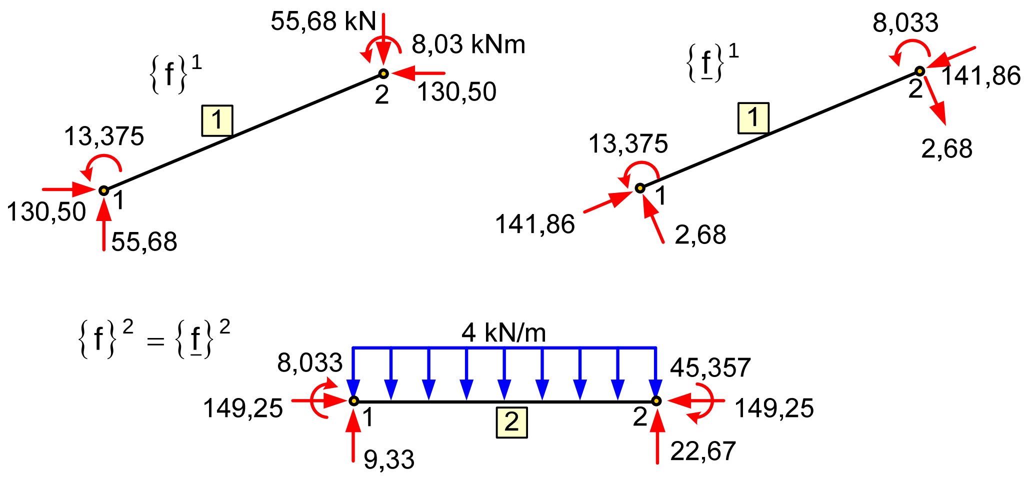
$$\begin{Bmatrix} f_X^1 \\ f_Y^1 \\ m^1 \\ f_X^2 \\ f_Y^2 \\ m^2 \end{Bmatrix}^1 = 200 \begin{bmatrix} 0{,}6452 & 0{,}2591 & -7{,}0313 & -0{,}6452 & -0{,}2591 & -7{,}0313 \\ 0{,}2591 & 0{,}1095 & 17{,}3817 & -0{,}2591 & -0{,}1095 & 17{,}3817 \\ -7{,}0313 & 17{,}3817 & 1\cdot 10^5 & 7{,}0313 & -17{,}3817 & 0{,}5\cdot 10^5 \\ -0{,}6452 & -0{,}2591 & 7{,}0313 & 0{,}6452 & 0{,}2591 & 7{,}0313 \\ -0{,}2591 & -0{,}1095 & -17{,}3817 & 0{,}2591 & 0{,}1095 & -17{,}3817 \\ -7{,}0313 & 17{,}3817 & 0{,}5\cdot 10^5 & 7{,}0313 & -17{,}3817 & 1\cdot 10^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}9950 \\ -4{,}9816 \\ -5{,}3423\cdot 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 130{,}5014 \\ 55{,}6771 \\ 13374{,}8 \\ -130{,}5014 \\ -55{,}6771 \\ 8032{,}5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_X^1 \\ f_Y^1 \\ m^1 \\ f_X^2 \\ f_Y^2 \\ m^2 \end{Bmatrix}^2 = 200 \begin{bmatrix} 0{,}75 & 0 & 0 & -0{,}75 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}004688 & 18{,}75 & 0 & -0{,}004688 & 18{,}75 \\ 0 & 18{,}75 & 1\cdot 10^5 & 0 & -18{,}75 & 0{,}5\cdot 10^5 \\ -0{,}75 & 0 & 0 & 0{,}75 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}004688 & -18{,}75 & 0 & 0{,}004688 & -18{,}75 \\ 0 & 18{,}75 & 0{,}5\cdot 10^5 & 0 & -18{,}75 & 1\cdot 10^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}9950 \\ -4{,}9816 \\ -5{,}3423\cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -16 \\ -21333{,}33 \\ 0 \\ 16 \\ 21333{,}33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 149{,}2515 \\ 9{,}3263 \\ -8032{,}5 \\ -149{,}2515 \\ 22{,}6737 \\ -45356{,}8 \end{bmatrix}$$

Elementille 2 on voimassa $\{\underline{f}\}^2 = \{f\}^2$, mutta elementin 1 lokaalikoordinaatiston solmuvoimavektori on vielä laskettava kaavasta $\{\underline{f}\}^1 = [B]^1\{f\}^1$, josta tulee

$$\begin{Bmatrix} \underline{f}_x^1 \\ \underline{f}_y^1 \\ \underline{m}^1 \\ \underline{f}_x^2 \\ \underline{f}_y^2 \\ \underline{m}^2 \end{Bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 0{,}9270 & 0{,}3750 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}3750 & 0{,}9270 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}9270 & 0{,}3750 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}3750 & 0{,}9270 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 130{,}5014 \\ 55{,}6771 \\ 13374{,}8 \\ -130{,}5014 \\ -55{,}6771 \\ 8032{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 141{,}85 \\ 2{,}68 \\ 13374{,}8 \\ -141{,}86 \\ -2{,}68 \\ 8032{,}5 \end{bmatrix}$$

Kuvassa 2 on esitetty elementtien globaalit ja lokaalit solmuvoimavektorit vapaakappalekuvina.



Kuva 2. Solmuvoimavektorit.

