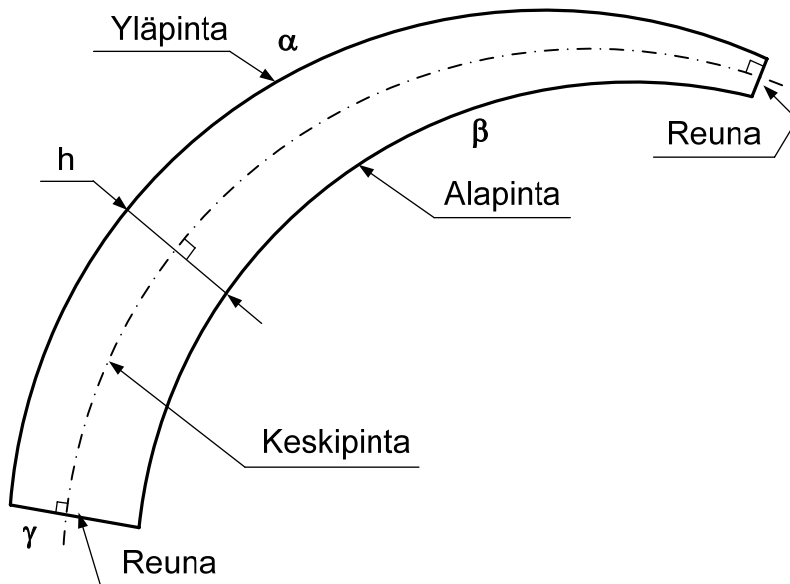


II. 2D-SOLIDIRAKENTEET

1 YLEISTÄ PINTARAKENTEISTA

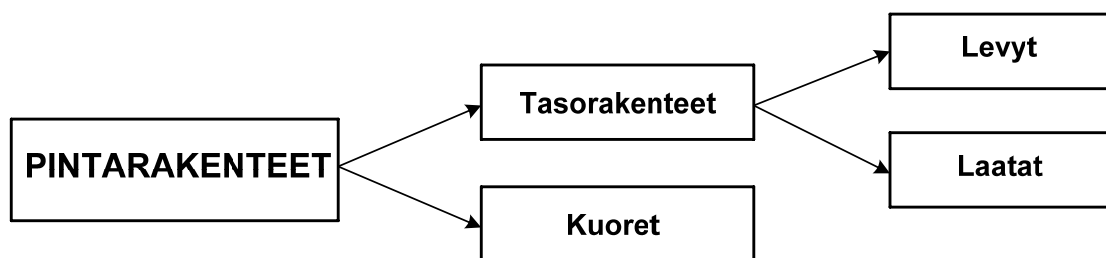
Kantavaa rakennetta, jonka materiaali on kahden toistensa lähellä olevan pinnan (α ja β) ja reunapinnan (γ) välissä, sanotaan pintarakenteeksi. Pintoja α ja β kutsutaan ylä- ja alapinnaksi tai ulko- ja sisäpinnaksi. Yhtä kaukana pinnoista α ja β sijaitsevaa pintaa sanotaan rakenteen keskipinnaksi. Pintarakenteen paksuus h on keskipinnan normaalista pintojen α ja β väliin jäävän janan pituus. Paksuus h on pieni pintarakenteen muihin mittoihin ja erityisesti keskipinnan kaarevuussäteisiin verrattuna.



Kuva 1.1 Pintarakenteen normaalileikkaus.

Pintarakenteet luokitellaan kuvan 1.2 mukaisesti. Rakenne on kuori, jos sen keskipinta on

kaareva, mutta tasorakenne, jos keskipinta on taso. Tasorakenne, jonka kuormitus ja tuenta ovat vain sen keskitasossa ja jonka keskitaso säilyy tasona muodonmuutoksen jälkeenkin, on levy. Jos kuormitusta ja tuentaa on myös tasorakenteen keskitason normaalin suunnassa ja/tai keskitaso taipuu, on kyseessä laatta.



Kuva 1.2 Pintarakenteiden luokittelu.

Levyssä on tasojännitystila (TJT) ja sen yksiulotteinen vastine on veto/puristussauva. Laattaan syntyy taivutusta ja vastaava yksiulotteinen rakenne on taivutuspalkki. Yleinen tasorakenneongelma sisältää sekä levy- että laattakuormituksia ja -tuntoja. Tällainen tehtävä voidaan jakaa levy- ja laattaongelmiin, joita sanotaan myös kalvotila- ja taivutustilaongelmiksi. Ne voidaan ratkaista toisistaan riippumatta, mikäli taipumat ovat pieniä (lineaarinen laattateoria). Kuorta vastaa yksiulotteisista rakenteista

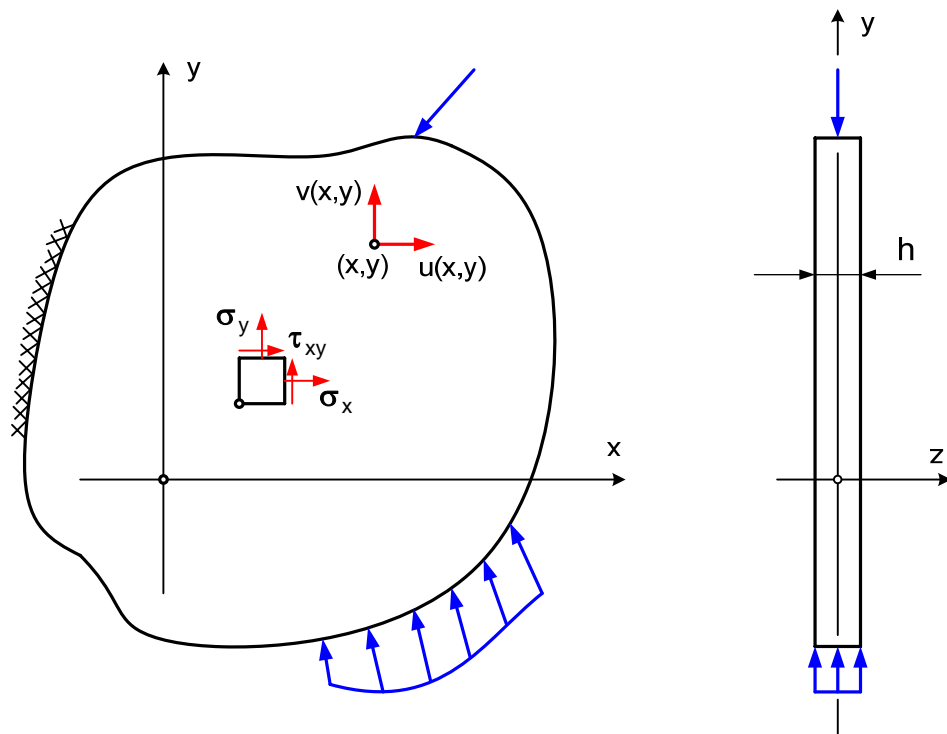
käyrä palkki. Myös kuorella on kalvo- ja taivutustilansa, mutta niitä ei voida ratkaista toisistaan riippumatta edes pienillä taipumilla, paitsi tietyin oletuksin likimääräisesti.

Pintarakenteet ovat usein tasapaksuja, jolloin paksuus h on vakio. Pintarakenteen lujuusopillinen tarkastelu riippuu suuresti käytettävästä materiaalmallista. Tässä yhteydessä rajoitutaan homogeenisen, isotrooppisen ja lineaarisesti kimmoisen materiaalin tarkasteluun, jolloin materiaaliyhtälönä on yleistetty Hooken laki.

Levyrakenteiden yhteydessä tarkastellaan usein myös pitkiä, yleisen sylinterin muotoisia kappaleita, joiden kuormitus ja tuenta ovat sellaisia, että sylinterin poikkipintaan syntyy muodonmuutoksia vain poikkipinnan tasossa. Tällöin kappaleessa on tasomuodonmuutostila (TMT). Tasomuodonmuutostilassa esiintyvät kyseisen tason suuntaiset jännityskomponentit ja lisäksi tätä tasoa vastaan kohtisuora normaalijännitys.

2 TASOJÄNNITYSTILAKENTÄN PERUSYHTÄLÖT

Kuvan 2.1 tasapaksussa levyssä on likimääräisesti tasojännitystilakenttä, jolloin voidaan olettaa, että vain xy -tason suuntaiset jännityskomponentit ovat nollasta poikkeavia. Myös paksuudeltaan vaihtelevassa levyssä on likimääräisesti keskitason suuntainen tasojännitystilakenttä ja näin on sitä tarkemmin, mitä ohuempi levy on ja mitä lievemmin sen paksuus vaihtelee. Levyrakenteen (keskipinnan) pisteessä esiintyvät siis vain jännityskomponentit σ_x , σ_y ja τ_{xy} , jotka eivät riipu koordinaatista z .



Kuva 2.1 Tasapaksu levyrakenne.

Vastaavat muodonmuutoskomponentit ovat ϵ_x , ϵ_y ja γ_{xy} . Lisäksi syntyy v -vaikutuksesta komponentti ϵ_z (levyn paksuus muuttuu), mutta sen vaikutus voidaan tarkastella erikseen. Levyrakenteen pisteen siirtymäkomponentit ovat u ja v . Taso-jännitystilakentän perusyhtälöt saadaan yleisistä yhtälöistä laittamalla niissä $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = f_z = 0$ ja ottamalla huomioon, että suureet eivät riipu z -koordinaatista. Tällöin on myös $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ja yleisistä yhtälöistä tulee seuraavaa.

Tasapainoyhtälöt

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + f_x = 0 \quad \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + f_y = 0 \quad (2.1)$$

Materiaaliyhtälöt

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y) & \epsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \epsilon_z &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) & \gamma_{xy} &= \tau_{xy} / G & G &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_y + \nu \epsilon_x) \quad \tau_{xy} = G \gamma_{xy} \quad (2.3)$$

Kinemaattiset yhtälöt

$$\epsilon_x = u_{,x} \quad \epsilon_y = v_{,y} \quad \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} \quad (2.4)$$

Yhteensopivuusyhtälöt

$$\epsilon_{x,yy} + \epsilon_{y,xx} = \gamma_{xy,xy} \quad \epsilon_{z,yy} = 0 \quad \epsilon_{z,xx} = 0 \quad (2.5)$$

Levytehtävän ratkaiseminen merkitsee sitä, että yhtälöistä (2.1) - (2.5) ratkaistaan jännitys-, muodonmuutos- ja siirtymäkomponentit, kun levyn geometrian ja materiaaliominaisuuksien lisäksi tunnetaan sen kuormitukset ja tuennat. Reunakuormituksista ja tuennoista seuraa laskettaville suureille reunaehtoja, jotka niiden tulee toteuttaa. Mahdolliset reunaehtotapaukset ovat

- Reunan pisteessä tunnetaan siirtymät u ja v eli $u = \tilde{u}$ ja $v = \tilde{v}$.
- Reunan pisteessä tunnetaan pintakuormitukset t_x ja t_y , jolloin jännityskomponenttien tulee toteuttaa ehdot $t_x = \sigma_x a + \tau_{xy} b$ ja $t_y = \tau_{xy} a + \sigma_y b$.
- Reunan pisteessä tunnetaan u ja t_y tai v ja t_x (sekareunaehdot).
- Vinot reunaehdot tarkoittavat tilannetta, jossa reunaehdot on annettava x - ja y -suunnista poikkeavissa suunnissa. Ne voidaan käsitellä edellisten kohtien mukaisesti, kun lisäksi käytetään koordinaatiston kiertoa.

3 PERUSYHTÄLÖIDEN RATKAISEMINEN

3.1 Ratkaisumenetelmistä

Levytehtävä voidaan ratkaista analyyttisesti kolmella periaatteeltaan erilaisella tavalla. Voimamenetelmässä pyritään ratkaisemaan ensin jännitykset, siirtymämenetelmässä siirtymät ja sekamenetelmässä käytetään tapauskohtaisesti sopivaa ratkaisujärjestystä. Tarkka analyyttinen ratkaisu on mahdollista löytää vain, jos rakenteen geometria, tuenta ja kuormitukset ovat riittävän yksinkertaiset. Tavallisten perustapausten ratkaisut löytyvät alan kirjallisuudesta. Analyyttisen ratkaisun löytämiseksi joudutaan usein käyttämään melko vaativaa matematiikkaa yksinkertaisissakin tapauksissa. Käytännössä joudutaan usein tyytymään numeeriseen ratkaisuun, jolloin tehtävä ratkaistaan likimääräisesti esimerkiksi elementtimenetelmällä.

Tässä tyydytään voimamenetelmän tarkasteluun ja sitäkin ei käsitellä tyhjentävästi, vaan rajoitutaan tutkimaan Airyn jännitysfunktion käyttöä.

3.2 Voimamenetelmä

Levytehtävän voimamenetelmä ratkaisussa pyritään ratkaisemaan ensin jännityskomponentit σ_x , σ_y ja τ_{xy} . Koska tasapainoyhtälöitä (2.1) on kaksi, täytyy niiden rinnalle muodostaa lisäyhtälö. Tämä saadaan yhteensopivuusyhtälöistä (2.5), joista kaksi viimeistä jätetään huomioonottamatta. Tästä seuraa yhteensopivuuden loukkaamista, mutta tehty virhe on ohuilla levyillä pieni. Kaavan (2.5) ensimmäinen yhtälö lausutaan jännityskomponenttien avulla materiaaliyhtälöitä käyttäen. Tällöin saadaan

$$\frac{1}{E}(\sigma_{x,yy} - \nu \sigma_{y,yy}) + \frac{1}{E}(-\nu \sigma_{x,xx} + \sigma_{y,xx}) = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy,xy} \quad (3.1)$$

Saatua tulosta voidaan vielä muokata tasapainoehtojen avulla. Derivoimalla saadaan

$$\tau_{xy,xy} = -\sigma_{x,xx} - f_{x,x} \quad \tau_{xy,xy} = -\sigma_{y,yy} - f_{y,y} \quad (3.2)$$

joista seuraa edelleen

$$\begin{aligned} \sigma_{x,yy} - \nu \sigma_{y,yy} - \nu \sigma_{x,xx} + \sigma_{y,xx} &= -(1+\nu)(\sigma_{x,xx} + f_{x,x} + \sigma_{y,yy} + f_{y,y}) \\ \Rightarrow (\sigma_{x,xx} + \sigma_{x,yy}) + (\sigma_{y,xx} + \sigma_{y,yy}) &= -(1+\nu)(f_{x,x} + f_{y,y}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Käyttämällä merkintää $\nabla^2(\) = (\)_{,xx} + (\)_{,yy}$ saadaan lopuksi tulos

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\nu)(f_{x,x} + f_{y,y}) \quad (3.4)$$

Voimamenetelmän perusyhtälöryhmä (Michell-Beltrami yhtälöt) on siis

$$\begin{cases} \sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + f_x = 0 \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + f_y = 0 \\ \nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\nu)(f_{x,x} + f_{y,y}) \end{cases} \quad (3.5)$$

Ryhmää (3.5) ratkaistaessa on otettava huomioon tuennasta ja kuormituksesta seuraavat reunaehdot.

3.3 Siirtymämenetelmä

Siirtymämenetelmäratkaisussa määritetään ensin siirtymäkomponentit u ja v . Näiden ratkaisemiseen saadaan kaksi yhtälöä lausumalla jännityskomponenttien tasapainoyhtälöt siirtymäkomponenttien avulla, jolloin saadaan Navierin yhtälöt. Kinemaattisten ja materiaaliyhtälöiden avulla saadaan aluksi

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(u_{,x} + \nu v_{,y}) & \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\nu u_{,x} + v_{,y}) \\ \tau_{xy} &= G(u_{,y} + v_{,x}) = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{1-\nu}{2}(u_{,y} + v_{,x}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Yhtälöistä (3.6) saadaan derivoimalla tulokset

$$\begin{aligned} \sigma_{x,x} &= \frac{E}{1-\nu^2}(u_{,xx} + \nu v_{,yx}) & \sigma_{y,y} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\nu u_{,xy} + v_{,yy}) \\ \tau_{xy,x} &= G(u_{,yx} + v_{,xx}) & \tau_{xy,y} &= G(u_{,yy} + v_{,xy}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Sijoittamalla kaavan (2.1) ensimmäiseen yhtälöön tulee

$$\frac{E}{1-\nu^2}(u_{,xx} + \nu v_{,xy}) + \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{1-\nu}{2}(u_{,yy} + v_{,xy}) + f_x = 0 \quad (3.8)$$

joka saadaan sievennettyä muotoon

$$u_{,xx} + v_{,xy} + \frac{1-\nu}{1+\nu}(u_{,xx} + u_{,yy}) + \frac{2(1-\nu)}{E}f_x = 0 \quad (3.9)$$

Ottamalla suhteellisen tilavuuden muutoksen määritelmä $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y = u_{,x} + v_{,y}$ huomioon ja käyttämällä lyhennysmerkintää ∇^2 saadaan ensimmäinen kaavan (3.10) Navierin yhtälöistä. Toinen seuraa samalla tavalla kaavan (2.1) toisesta yhtälöstä.

$$\begin{cases} e_{,x} + \frac{1-\nu}{1+\nu} \nabla^2 u + \frac{2(1-\nu)}{E} f_x = 0 \\ e_{,y} + \frac{1-\nu}{1+\nu} \nabla^2 v + \frac{2(1-\nu)}{E} f_y = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Navierin yhtälöt ovat siirtymämenetelmän perusyhtälöt. Kun siirtymät ratkaistaan yhtälöistä (3.10), on tuennasta ja kuormituksesta seuraavat reunaehdot otettava huomioon. Tässä yhteydessä ei tarkastella Navierin yhtälöiden ratkaisemista.

4 AIRYN JÄNNITYSFUNKTIO

Tarkastellaan voimamenetelmän perusyhtälöiden (3.5) ratkaisemista. Oletetaan, että tilavuusvoimakenttä on konservatiivinen, jolloin sillä on potentiaali $V(x,y)$ siten, että

$$f_x = -V_{,x} \quad f_y = -V_{,y} \quad (4.1)$$

Olkoon $\phi = \phi(x,y)$ funktio, joka toteuttaa ehdot

$$\sigma_x = \phi_{,yy} + V \quad \sigma_y = \phi_{,xx} + V \quad \tau_{xy} = -\phi_{,xy} \quad (4.2)$$

Funktiota ϕ sanotaan Airyn jännitysfunktioksi. Kaavan (3.5) tasapainoyhtälöt toteutuvat tällä tavoin lasketuilla jännityskomponenteilla identtisesti, sillä

$$\phi_{,yyx} + V_{,x} - \phi_{,xyy} + f_x = 0 \quad -\phi_{,xyx} + \phi_{,xxy} + V_{,y} + f_y = 0$$

Jäljelle jäävät vielä kaavan (3.5) yhteensopivuusyhtälö ja reunaehdot. Yhteensopivuudesta seuraa

$$(\phi_{,yy} + V + \phi_{,xx} + V)_{,xx} + (\phi_{,yy} + V + \phi_{,xx} + V)_{,yy} = -(1+\nu)(-V_{,xx} - V_{,yy}) \quad (4.3)$$

josta saadaan edelleen sievennyksen jälkeen

$$\phi_{,xxxx} + 2\phi_{,xxyy} + \phi_{,yyyy} = (-1+\nu)(V_{,xx} + V_{,yy}) \quad (4.4)$$

Käyttämällä lyhennysmerkintöjä $\nabla^4 = (\)_{,xxxx} + 2(\)_{,xxyy} + (\)_{,yyyy}$ ja ∇^2 , voidaan yhteensopivuusyhtälö kirjoittaa muotoon

$$\nabla^4 \phi = (-1+\nu) \nabla^2 V \quad (4.5)$$

Jos V on harmoninen eli $\nabla^2 V = 0$, menee yhteensopivuusvaatimus muotoon

$$\nabla^4 \phi = 0$$

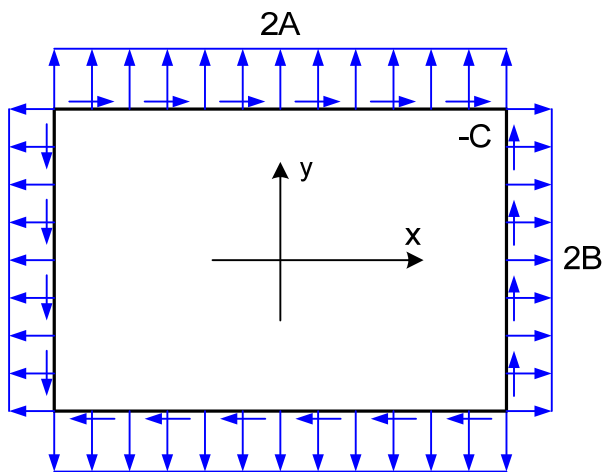
(4.6)

eli ϕ on biharmoninen. Jokainen biharmoninen funktio antaa tasapainossa olevan ja yhteensopivan jännitystilakentän kaavojen (4.2) mukaisesti lasketuilla jännityskomponenteilla, kun V on harmoninen. Biharmonisia funktioita on helppo löytää, vaikeaa on saada juuri tietyt reunaehdot toteutumaan. Airyn jännitysfunktion käyttö on käännteinen menetelmä, jolloin ensin keksitään ratkaisu (biharmoninen funktio) ja sitten tutkitaan millaiset reunaehdot se saadaan toteuttamaan eli selvitetään minkä tehtävän ratkaisu on kyseessä. Usein reunaehdot saadaan toteuttamaan vain likimääräisesti Saint Venantin periaatteen mukaisesti.

4.1 Polynomimuotoisia jännitysfunktioita

Oletetaan seuraavassa, että $\nabla^4 \phi = 0$ ja $V = 0$, mikä on usein käytännön tapauksissa voimassa. Monia levytehtäviä voidaan ratkaista käyttämällä polynomimuotoisia jännitysfunktioita xy -koordinaatistossa. Tarkastellaan muutamia perustapauksia.

a) Ensimmäisen asteen polynomi $\phi = Ax + By + C$ toteuttaa ehdon $\nabla^4 \phi = 0$ kaikilla vakioiden A , B ja C arvoilla, mutta siitä seuraavat jännityskomponentit $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$, joten ensimmäisen asteen lausekkeella ei ole merkitystä.



Kuva 4.1 Homogeeninen jännitystilakenttä.

b) Toisen asteen polynomi $\phi = Ax^2 + By^2 + Cxy$ on biharmoninen kaikilla vakioiden A , B ja C arvoilla. Siitä saadaan jännityskomponentit

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \phi_{,yy} = 2B \\ \sigma_y &= \phi_{,xx} = 2A \\ \tau_{xy} &= -\phi_{,xy} = -C\end{aligned}\quad (4.7)$$

Tämä ratkaisu esittää homogeenista jännitystilakenttää eli levyn kaikissa pisteissä on samat jännityskomponentit. Ratkaisu sopii kuvan 4.1 suorakulmiolevylle, jonka reuna-kuormitukset ovat vakioita.

c) Kolmannen asteen polynomi $\phi = Ax^3 + By^3 + Cx^2y + Dxy^2 + Ex^2 + Fy^2 + Gxy$ on myös biharmoninen ja siitä saadaan lineaarisesti muuttuvat jännityskomponentit

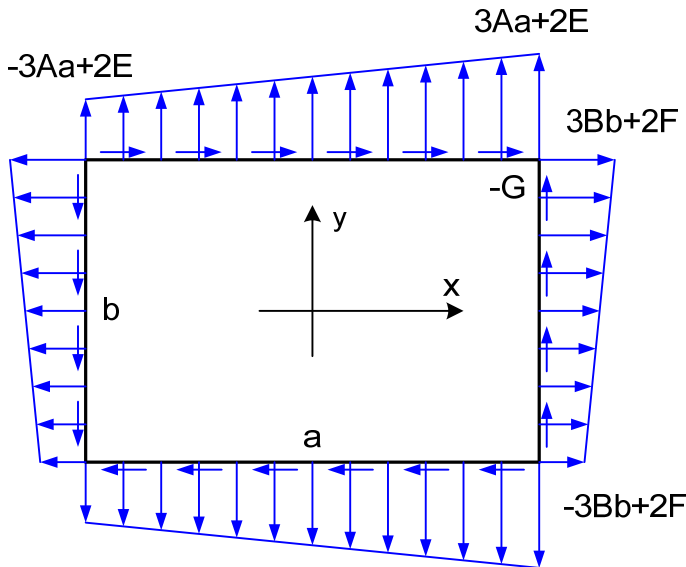
$$\sigma_x = 6By + 2Dx + 2F \quad \sigma_y = 6Ax + 2Cy + 2E \quad \tau_{xy} = -2Cx - 2Dy - G \quad (4.8)$$

Ratkaisu (4.8) sopii suorakulmiolevylle, jonka reunakuormitukset muuttuvat sivun suunnassa lineaarisesti. Rajoitutaan tutkimaan tapausta, jossa leikkauskuormitus on vakio. Tällöin on $C = D = 0$,

josta seuraa jännityskomponenteille lausekkeet

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 6By + 2F \\ \sigma_y &= 6Ax + 2E \\ \tau_{xy} &= -G \end{aligned} \quad (4.9)$$

eli σ_x on x-suunnassa ja σ_y y-suunnassa vakio. Kun suorakulmiolevyn sivujen pituudet ovat a ja b sekä origo sijoitetaan levyn keskipisteseen, ovat vastaavat reunakuormitukset kuvan 4.2 mukaiset. Levyn mielivaltaisen pisteen jännityskomponentit



Kuva 4.2 Reunakuormitukset.

ovat samat kuin vastaavalla kohdalla vaikuttavat reunakuormitukset.

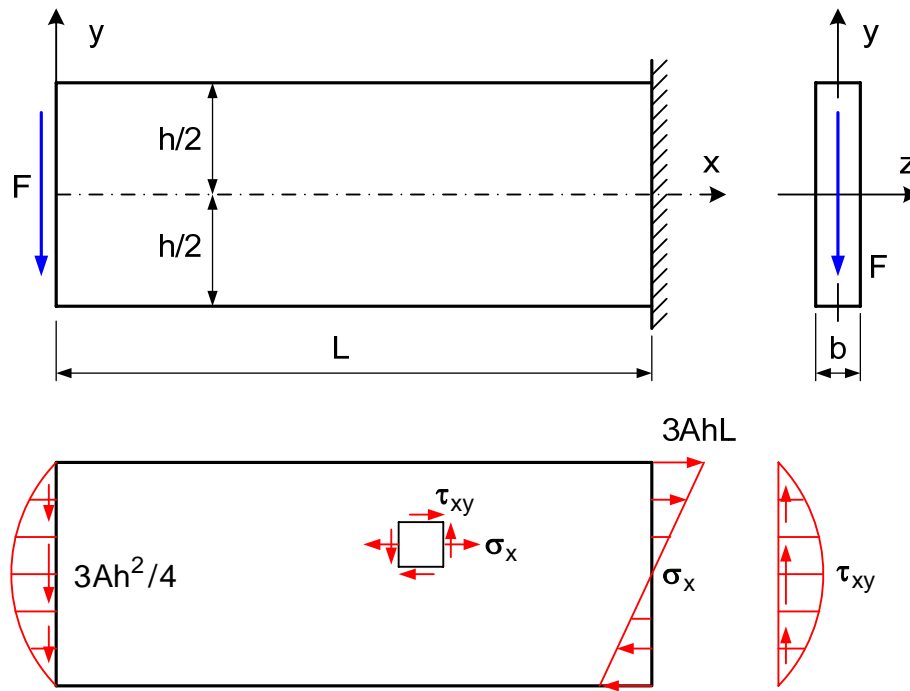
d) Neljännen asteen polynomi ei rajoituksetta kelpaa Airyn jännitysfunktioksi, mutta esimerkiksi funktiot $\phi = A(x^4 - y^4)$ ja $\phi = A(x^4 - 3x^2y^2)$ ovat biharmonisia.

e) Tarkastellaan esimerkkinä Saint Venantin periaatteen soveltamisesta funktiota $\phi = A(xy^3 - 3h^2xy/4)$ (A on vakio) kuvan 4.3 levyulokkeen yhteydessä. ϕ on biharmoninen ja siitä seuraa jännityskomponenteiksi

$$\sigma_x = 6Axy \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = 3A[(h/2)^2 - y^2] \quad (4.10)$$

Näistä seuraa kuvan 4.3 mukaiset reunakuormitukset. Saatu ratkaisu on tarkka vain silloin, kun reunakuormitus F jakaantuu pystysuunnassa parabolisesti ja tukireaktiot kuvan 4.3 esittämällä tavalla. Jos näin ei ole, voidaan vedota Saint Venantin periaatteen ja todeta ratkaisun olevan voimassa päiden lähellä olevaa aluetta lukuun ottamatta. Ratkaisussa oleva vakio A voidaan määrittää, kun vaaditaan reunakuormituksen resultantin olevan F .

$$\begin{aligned} F &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} b dy = \int_{-h/2}^{h/2} 3A[(h/2)^2 - y^2] b dy = 3Ab \int_{-h/2}^{h/2} [(h/2)^2 y - y^3/3] dy \\ &\Rightarrow F = Abh^3/2 \quad \Rightarrow A = 2F/bh^3 \end{aligned} \quad (4.11)$$



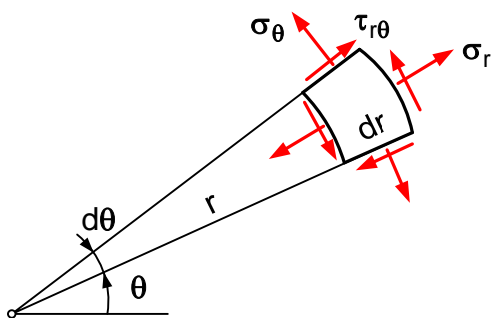
Kuva 4.3 Levylokkeen ratkaisu.

Jännityskomponenttien lausekkeet voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{Fx}{bh^3/12} \cdot y = \frac{M_t(x)}{I_z} \cdot y & \sigma_y &= 0 \\ \tau_{xy} &= \frac{3F}{2bh} [1 - (2y/h)^2] = \frac{3}{2} \frac{Q(x)}{bh} [1 - (2y/h)^2]\end{aligned}\quad (4.12)$$

josta nähdään ratkaisun olevan täysin teknisen taivutusteorian mukainen.

5 PERUSYHTÄLÖT NAPAKOORDINAATISTOSSA



Kuva 5.1 Napakoordinaatisto.

Napakoordinaatistoa käytettäessä jännityskomponentit ovat säteittäinen normaalijännitys σ_r , kehän suuntainen normaalijännitys σ_θ ja leikkausjännitys $\tau_{r\theta}$ säteen ja kehän suuntien välillä. Vastaavat muodonmuutoskomponentit ovat ϵ_r , ϵ_θ ja $\gamma_{r\theta}$. Siirtymäkomponentit ovat säteittäissiirtymä u_r ja kehän suuntainen siirtymä u_θ . Tasojännitystilän perusyhtälöt muunnetaan napakoordinaatistoon käyttämällä yhteyksiä $x = r \cos \theta$ ja $y = r \sin \theta$. Lopputulokseksi saadaan yhtälöt (todistus sivuutetaan)

Tasapainoyhtälöt

$$\sigma_{r,r} + \frac{1}{r} \tau_{r\theta,\theta} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) + f_r = 0 \quad \frac{1}{r} \sigma_{\theta,\theta} + \tau_{r\theta,r} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} + f_\theta = 0 \quad (5.1)$$

Materiaaliyhtälöt

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) & \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E} (\sigma_r + \sigma_\theta) & \gamma_{r\theta} &= \tau_{r\theta} / G & G &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta) \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r) \quad \tau_{r\theta} = G \gamma_{r\theta} \quad (5.3)$$

Kinemaattiset yhtälöt

$$\varepsilon_r = u_{r,r} \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r} u_{\theta,\theta} \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} u_{r,\theta} + u_{\theta,r} - \frac{1}{r} u_\theta \quad (5.4)$$

Reunaehtotapaukset ovat kuten xy-koordinaatistossa, mutta koskevat r- ja θ -suuntia.

Voimamenetelmän perusyhtälöt

Michell-Beltrami-yhtälöt napakoordinaatistossa ovat

$$\begin{aligned} \sigma_{r,r} + \frac{1}{r} \tau_{r\theta,\theta} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) + f_r &= 0 & \frac{1}{r} \sigma_{\theta,\theta} + \tau_{r\theta,r} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} + f_\theta &= 0 \\ \nabla^2 (\sigma_r + \sigma_\theta) &= -(1+\nu) (f_{r,r} + \frac{1}{r} f_{\theta,\theta}) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Kaavassa (5.5) oleva lyhennysmerkintä ∇^2 on napakoordinaatistossa muotoa

$$\nabla^2 () = ()_{,rr} + \frac{1}{r} ()_{,r} + \frac{1}{r^2} ()_{,\theta\theta} \quad (5.6)$$

Siirtymämenetelmän perusyhtälöt

Navierin yhtälöt napakoordinaatistossa ovat

$$e_{,r} + \frac{1-\nu}{1+\nu} \nabla^2 u_r + \frac{2(1-\nu)}{E} f_r = 0 \quad \frac{1}{r} e_{,\theta} + \frac{1-\nu}{1+\nu} \nabla^2 u_\theta + \frac{2(1-\nu)}{E} f_\theta = 0 \quad (5.7)$$

jossa suure $e = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta = u_{r,r} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r} u_{\theta,\theta}$ on suhteellinen tilavuuden muutos.

6 ROTAATIOSYMMETRINEN RATKAISU

Jos rakenteen geometria, kuormitus ja tuenta ovat rotaatiosymmetrisiä, on edellisen kohdan yhtälöissä $\tau_{r\theta} = 0$, $\gamma_{r\theta} = 0$, $u_\theta = 0$ ja $f_\theta = 0$. Jäljelle jäävät suureet σ_r , σ_θ , ε_r , ε_θ , ε_z , u_r ja f_r eivät riipu kulmasta θ . Perusyhtälöt yksinkertaistuvat muotoon

Tasapainoyhtälö

$$\sigma_{r,r} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + f_r = 0 \quad (6.1)$$

Materiaaliyhtälöt

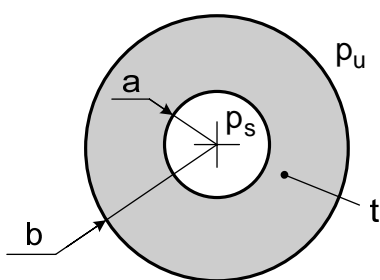
$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_r + \sigma_\theta) \quad (6.2)$$

Kinemaattiset yhtälöt

$$\varepsilon_r = u_{r,r} \quad \varepsilon_\theta = u_r / r \quad (6.3)$$

Edellä olevalle ryhmälle voidaan löytää ratkaisu suljetussa muodossa muutamalle reunaehto- ja säteittäiskuormitustapaukselle. Seuraavassa näistä tarkastellaan sisä- ja ulkopuolisen paineen alaista paksuseinäistä sylinteriputkea ja vakio kulmanopeudella pyörivää tasapaksua laikkua.

6.1 Ympyrärengaslevy ja sylinteriputki



Kuva 6.1 Ympyrärengaslevy.

Tutkitaan rotaatiosymmetristä ratkaisua kuvan 6.1 sisä- ja ulkopuolelta tasaisen reunapaineen (p_s ja p_u) kuormittaman tasapaksun ympyrärengaslevyn tapauksessa. Myöhemmin osoitetaan, että saatava ratkaisu on voimassa levyn paksuudesta riippumatta eli se pätee myös paksuseinäiselle sylinteriputkelle. Kun kuormituksena on vain sisäpuolinen paine p_s ja ulkopuolinen paine p_u , on säteittäinen tilavuusvoima $f_r = 0$.

Kaavoista (6.2) ja (6.3) seuraa suurelle $u_{r,r}$ kaksi esitysmuotoa

$$\begin{aligned} u_{r,r} &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) \\ u_r &= \frac{r}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) \quad \Rightarrow \quad u_{r,r} = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) + \frac{r}{E}(\sigma_{\theta,r} - \nu\sigma_{r,r}) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Merkitsemällä suureen $u_{r,r}$ esitykset yhtä suuriksi seuraa sieventelyjen jälkeen tulos

$$\sigma_{\theta,r} - \nu \sigma_{r,r} + \frac{1+\nu}{r} (\sigma_{\theta} - \sigma_r) = 0 \quad (6.5)$$

Kaavasta (6.1) seuraa tapauksessa $f_r = 0$ tulokset

$$\sigma_{\theta} - \sigma_r = r \sigma_{r,r} \quad \sigma_{\theta,r} = 2 \sigma_{r,r} + r \sigma_{r,rr} \quad (6.6)$$

Kun nämä sijoitetaan kaavaan (6.5), saadaan komponentille σ_r differentiaaliyhtälö

$$\sigma_{r,rr} + \frac{3}{r} \sigma_{r,r} = 0 \quad (6.7)$$

Yhtälön (6.7) yleinen ratkaisu on muotoa $\sigma_r = A + B/r^2$, missä A ja B ovat vakioita. Ne saadaan selville reunaehdoista $\sigma_r(a) = -p_s$ ja $\sigma_r(b) = -p_u$, joista seuraa tulokset

$$A = \frac{a^2 p_s - b^2 p_u}{b^2 - a^2} \quad B = -\frac{a^2 b^2 (p_s - p_u)}{b^2 - a^2} \quad (6.8)$$

Sijoittamalla vakiot A ja B jännityskomponentin σ_r lausekkeeseen saadaan kaavan (6.9) ensimmäinen tulos. Kaavasta (6.1) voidaan ratkaista sitten jännityskomponentti σ_{θ} ja lopuksi kaavoista (6.2) ja (6.3) vielä säteittäissiirtymä u_r . Näiden lausekkeet ovat kaavan (6.9) toinen ja kolmas tulos.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{a^2 p_s - b^2 p_u}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2 (p_s - p_u)}{r^2 (b^2 - a^2)} \\ \sigma_{\theta} &= \frac{a^2 p_s - b^2 p_u}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2 (p_s - p_u)}{r^2 (b^2 - a^2)} \\ u_r &= \frac{1}{E} \left[(1-\nu) \frac{a^2 p_s - b^2 p_u}{b^2 - a^2} r + (1+\nu) \frac{a^2 b^2 (p_s - p_u)}{r (b^2 - a^2)} \right] \end{aligned} \quad (6.9)$$

Venymälle ε_z saadaan kaavojen (6.2) ja (6.9) avulla lauseke

$$\varepsilon_z = -\frac{2\nu}{E} \cdot \frac{a^2 p_s - b^2 p_u}{b^2 - a^2} = \text{vakio} \quad (6.10)$$

Koska ε_z on vakio levyn jokaisessa pisteessä, säilyvät levyn poikkileikkaukset tasoina muodonmuutosten jälkeen eli yhteensopivuus levyn paksuussuunnassa toteutuu tarkasti. Kaavat (6.9) ovat siis voimassa paksuudesta riippumatta, joten niitä voidaan soveltaa myös paksuseinäiselle sylinteriputkelle.

Putken pituuden L muutos ΔL on, kun se pääsee vapaasti aksiaalisuunnassa lyhenemään tai pitenemään

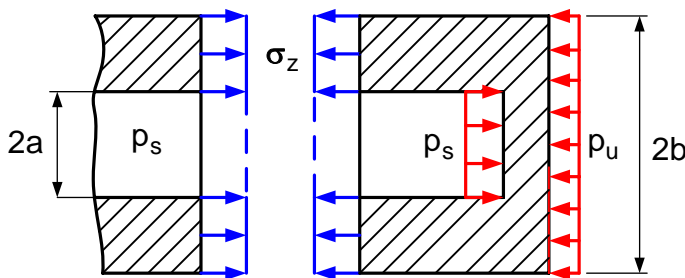
$$\Delta L = L\varepsilon_z = -\frac{2\nu L}{E} \cdot \frac{a^2 p_s - b^2 p_u}{b^2 - a^2} \quad (6.11)$$

Jos putken pituuden muutos estetään, tarvitaan siihen jännitys

$$\sigma_z = -E\varepsilon_z = 2\nu \cdot \frac{a^2 p_s - b^2 p_u}{b^2 - a^2} \quad (6.12)$$

Kaavan (6.9) σ_r ja σ_θ eivät tästä muutu, mutta säteittäissiirtymään tulee kaavan (6.3) perusteella lisätermi $r\nu\varepsilon_z$, ja sen lausekkeeksi tulee

$$u_{r1} = \frac{(1+\nu)}{E} \left[(1-2\nu) \frac{a^2 p_s - b^2 p_u}{b^2 - a^2} r + \frac{a^2 b^2 (p_s - p_u)}{r(b^2 - a^2)} \right] \quad (6.13)$$



Kuva 6.2 Suljettu putki.

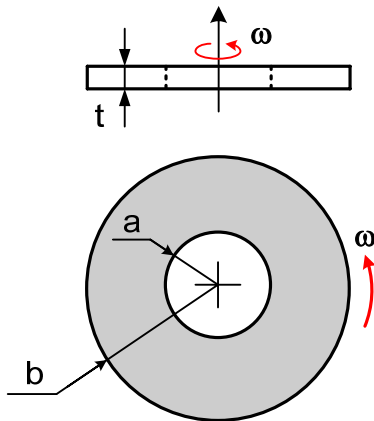
Jos putken päät suljetaan kannella (pituuden muutosta ei estetä), syntyy putkessa pituussuuntainen normaalijännitys σ_z . Sen lauseke saadaan tasapainoehdosta kuvan 6.2 vapaakappalekuvan avulla.

$$\rightarrow p_s \cdot \pi a^2 - p_u \cdot \pi b^2 - \sigma_z \cdot \pi(b^2 - a^2) = 0 \Rightarrow \sigma_z = \frac{a^2 p_s - b^2 p_u}{b^2 - a^2} \quad (6.14)$$

Tämä σ_z on riittävän kaukana putken päistä tasan jakaantunut poikkileikkaukseen, kuten kuvassa 6.2 on oletettu. Kaavan (6.9) jännityskomponentit σ_r ja σ_θ ovat voimassa myös suljetulle putkelle.

Edellä esitetystä saadaan erityistapauksina pelkästään sisäpuolisen tai ulkopuolisen paineen kuormittaman paksuseinäisen putken kaavat. Edelleen putken seinämän-paksuudelle voidaan johtaa mitoituskaavoja soveltamalla jotakin lujuushypoteesia putken rasitetuimmassa kohdassa. Hypoteesien lukuisuudesta johtuen aihe on varsin laaja, joten tässä tarkastella sitä.

6.2 Pyörivä tasapaksu ympyrärengaslevy



Kuva 6.3 Ympyrärengaslevy.

Tarkastellaan rotaatiosymmetristä ratkaisua kuvan 6.3 kulmanopeudella ω pyörivän tasapaksun ympyrärengaslevyn tapauksessa. Kun materiaalin tiheys on ρ , on pyörimisestä aiheutuva säteittäinen tilavuusvoima $f_r = \rho \omega^2 r$. Kaava (6.5) on edelleen voimassa, mutta kaavasta (6.1) seuraa nyt tulokset

$$\begin{aligned}\sigma_\theta - \sigma_r &= r \sigma_{r,r} + \rho \omega^2 r^2 \\ \sigma_{\theta,r} &= 2 \sigma_{r,r} + r \sigma_{r,rr} + 2 \rho \omega^2 r\end{aligned}\quad (6.15)$$

Kun nämä sijoitetaan kaavaan (6.5), tulee komponentin σ_r ratkaisemiseen differentiaaliyhtälö

$$\sigma_{r,rr} + \frac{3}{r} \sigma_{r,r} + (3 + \nu) \rho \omega^2 = 0 \quad (6.16)$$

Yhtälön (6.16) ratkaisu saadaan yhdistämällä homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu $A + B/r^2$ ja täydellisen yhtälön yksityisratkaisu $-(3 + \nu) \rho \omega^2 r^2 / 8$. Tästä seuraa, että

$$\sigma_r = A + B/r^2 - (3 + \nu) \rho \omega^2 r^2 / 8 \quad (6.17)$$

Vakiot A ja B selviävät reunaehdoista $\sigma_r(a) = 0$ ja $\sigma_r(b) = 0$, joista seuraa tulokset

$$A = (a^2 + b^2)(3 + \nu) \rho \omega^2 / 8 \quad B = -a^2 b^2 (3 + \nu) \rho \omega^2 / 8 \quad (6.18)$$

Sijoittamalla nämä jännityskomponentin σ_r lausekkeeseen (6.17) saadaan kaavan (6.19) ensimmäinen tulos. Kaavasta (6.1) voidaan ratkaista sitten jännityskomponentti σ_θ ja lopuksi kaavoista (6.2) ja (6.3) vielä säteittäissiirtymä u_r . Näiden lausekkeet ovat kaavan (6.19) toinen ja kolmas tulos.

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 (a^2 + b^2 - a^2 b^2 / r^2 - r^2) \\ \sigma_\theta &= \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 (a^2 + b^2 + a^2 b^2 / r^2 - \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu} r^2) \\ u_r &= \frac{3 + \nu}{8E} \rho \omega^2 \left[(1 - \nu)(a^2 + b^2)r + (1 + \nu)a^2 b^2 / r - \frac{1 - \nu^2}{3 + \nu} r^3 \right]\end{aligned}\quad (6.19)$$

Määritetään seuraavaksi kaavan (6.19) jännityskomponentin σ_r ääriarvo, jonka ehdoksi tulee

$$\sigma_{r,r} = 0 \Rightarrow 2a^2b^2/r^3 - 2r = 0 \Rightarrow r = \sqrt{ab} \quad (6.20)$$

Ääriarvo on siis kohdassa $r = \sqrt{ab}$ ja sen suuruus on

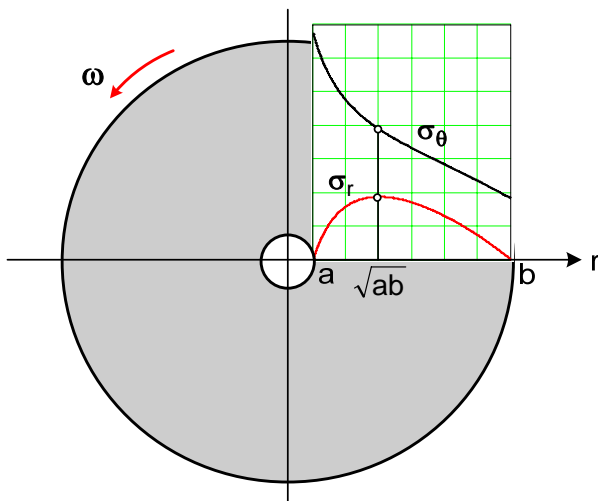
$$\max \sigma_r = \frac{(3+\nu)}{8} \rho \omega^2 (b-a)^2 \quad (6.21)$$

Tämän kohdan kehäjännitys σ_θ on

$$\sigma_\theta(r = \sqrt{ab}) = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \left[(b-a)^2 + \frac{8}{3+\nu} ab \right] = \max \sigma_r + \rho \omega^2 ab \quad (6.22)$$

Kehäjännityksen ääriarvot ovat laikan reunoilla $r = a$ ja $r = b$.

$$\begin{aligned} \max \sigma_\theta = \sigma_\theta(r = a) &= \frac{3+\nu}{4} \rho \omega^2 \left[\frac{1-\nu}{3+\nu} a^2 + b^2 \right] \\ \min \sigma_\theta = \sigma_\theta(r = b) &= \frac{3+\nu}{4} \rho \omega^2 \left[a^2 + \frac{1-\nu}{3+\nu} b^2 \right] \end{aligned} \quad (6.23)$$



Kuva 6.4 Ympyrärengaslevy.

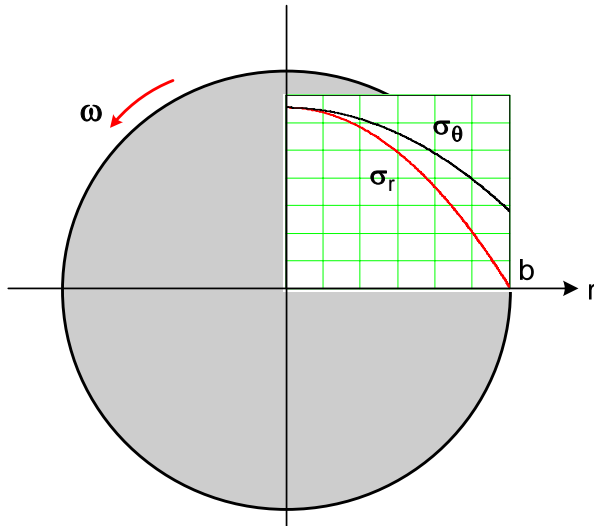
Kuvassa 6.4 on esitetty komponenttien σ_r ja σ_θ vaihtelu säteen r funktiona. Kuvaajista nähdään, että $\sigma_\theta > \sigma_r \geq 0$ kaikkialla. Tästä seuraa, että laikan mitoitus MLJH:n mukaan tapahtuu sisäreunan kehäjännityksen $\max \sigma_\theta$ perusteella.

Ratkaisu (6.19) ei automaattisesti päde reiättömälle laikalle, koska reunaehto $\sigma_r(a) = 0$ ei tällöin ole voimassa, vaan se on korvattava ehdolla $\sigma_r(a) \neq \infty$. Kaavasta (6.17) seuraa tällöin vakioille arvot $B = 0$ ja $A = (3+\nu) \rho \omega^2 b^2 / 8$. Kaavojen

(6.17), (6.1), (6.2) ja (6.3) perusteella ratkaisuksi tulee

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (b^2 - r^2) & \sigma_\theta &= \frac{1}{8} \rho \omega^2 [(3+\nu)b^2 - (1+3\nu)r^2] \\ u_r &= \frac{1-\nu}{8E} \rho \omega^2 [(3+\nu)b^2 r - (1+\nu)r^3] \end{aligned} \quad (6.24)$$

Kaavan (6.24) tulokset saadaan myös kaavasta (6.19) sijoittamalla siihen $a = 0$. Sekä säteittäisjännityksen σ_r että kehäjännityksen σ_θ maksimiarvo on levyn keskipis-



Kuva 6.5 Ympyrälevy.

teessä ja ne ovat yhtä suuret eli

$$\max \sigma_{\theta} = \max \sigma_r = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 b^2 \quad (6.19)$$

Kehäjännityksen σ_{θ} pienin arvo on reunalla $r = b$ ja se on

$$\min \sigma_{\theta} = \frac{1-\nu}{4} \rho \omega^2 b^2 \quad (6.20)$$

Kuvassa 6.5 on esitetty kaavan (6.24) jännitysten vaihtelu säteen r funktiona. Kuvaajista nähdään, että kaikkialla on voimassa $\sigma_{\theta} \geq \sigma_r \geq 0$.

Mitoitus MLJHlla tapahtuu siis kaavan (6.19) maksimiarvon perusteella.

7 AIRYN JÄNNITYSFUNKTIO NAPAKOORDINAATISTOSSA

Airy'n jännitysfunktiota voidaan käyttää napakoordinaatistossa aivan yleisessä muodossakin, mutta tässä oletetaan tilavuusvoimakomponentit f_r ja f_{θ} nolliksi. Tällöin yhteensopivuusvaatimuksesta (4.6) seuraa napakoordinaatiston jännitysfunktiolle $\phi(r, \theta)$ ehto $\nabla^4 \phi = \nabla^2 (\nabla^2 \phi) = 0$, josta seuraa

$$\nabla^4 \phi = \left[\left(\cdot \right)_{,rr} + \frac{1}{r} \left(\cdot \right)_{,r} + \frac{1}{r^2} \left(\cdot \right)_{,\theta\theta} \right] \left(\phi_{,rr} + \frac{1}{r} \phi_{,r} + \frac{1}{r^2} \phi_{,\theta\theta} \right) = 0 \quad (7.1)$$

Jännityskomponenttien laskukaavat (4.2) menevät napakoordinaatistossa tilavuusvoimien ollessa nollia muotoon

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \phi_{,r} + \frac{1}{r^2} \phi_{,\theta\theta} \quad \sigma_{\theta} = \phi_{,rr} \quad \tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \phi_{,\theta} - \frac{1}{r} \phi_{,r\theta} \quad (7.2)$$

Biharmonisen yhtälön $\nabla^4 \phi = 0$ ratkaisuja on napakoordinaatistossakin helppo löytää, hankalampaa on saada halutut reunaehdot toteutumaan.

7.1 Muuttujien erottaminen

Yhtälölle $\nabla^4 \phi = 0$ voidaan etsiä ratkaisuja esimerkiksi muuttujien erotusmenetelmällä tulomuodossa (toisena kertoimena on joko sin- tai cos-funktio)

$$\phi_n(r, \theta) = R_n(r) \cdot \begin{cases} \sin(n \cdot \theta) \\ \cos(n \cdot \theta) \end{cases}, \quad n \text{ on kokonaisluku} \quad (7.3)$$

Kun ratkaisuyrite (7.3) sijoitetaan osittaisdifferentiaaliyhtälöön (7.1), saadaan sieven-
telyjen jälkeen tulokseksi vaatimus

$$\left(R_{n,rrrr} + \frac{2}{r} R_{n,rrr} - \frac{1+2n^2}{r^2} R_{n,rr} + \frac{1+2n^2}{r^3} R_{n,r} + \frac{n^4+4n^2}{r^4} R_n \right) \cdot \begin{cases} \sin(n \cdot \theta) \\ \cos(n \cdot \theta) \end{cases} = 0 \quad (7.4)$$

Yhtälö (7.4) toteutuu, kun siinä oleva sulkulauseke on nolla. Tämä on neljännen ker-
taluvun tavallinen differentiaaliyhtälö, joka ratkeaa helposti. Ratkaisu on erilainen ta-
pauksissa $n = 0$, $n = 1$ ja $n \geq 2$. Ratkaisut ovat (todistus sivuutetaan)

$$\begin{aligned} R_0(r) &= A_0 + B_0 \ln r + C_0 r^2 + D_0 r^2 \ln r & R_1(r) &= A_1 r + B_1 / r + C_1 r^3 + D_1 r \ln r \\ R_n(r) &= A_n r^n + B_n r^{-n} + C_n r^{2+n} + D_n r^{2-n}, \quad n \geq 2 \end{aligned} \quad (7.5)$$

joissa kertoimet A, B, C ja D ovat vakioita. Vastaavat jännitysfunktiot saadaan kaa-
vasta (7.3) ja jännitykset kaavasta (7.2). Jännityksiksi tulee

$$\begin{aligned} n=0: \quad \sigma_r &= B_0 / r^2 + 2C_0 + D_0 (1 + 2 \ln r) \\ \sigma_\theta &= -B_0 / r^2 + 2C_0 + D_0 (3 + 2 \ln r) & \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} n=1: \quad \sigma_r &= (-2B_1 / r^3 + 2C_1 r + D_1 / r) \cdot \begin{cases} \sin \theta \\ \cos \theta \end{cases} \\ \sigma_\theta &= (2B_1 / r^3 + 6C_1 r + D_1 / r) \cdot \begin{cases} \sin \theta \\ \cos \theta \end{cases} \\ \tau_{r\theta} &= (-2B_1 / r^3 + 2C_1 r + D_1 / r) \cdot \begin{cases} -\cos \theta \\ \sin \theta \end{cases} \end{aligned} \quad (7.7)$$

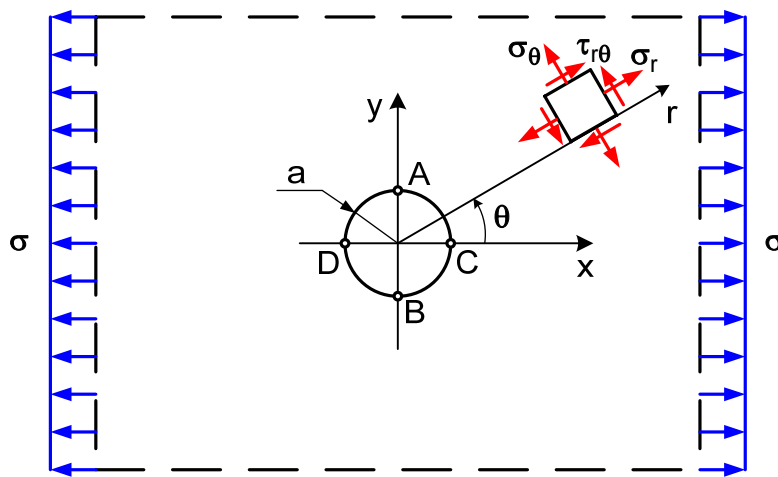
$$\begin{aligned} n \geq 2: \\ \sigma_r &= [A_n(n-n^2)r^{n-2} - B_n(n+n^2)r^{-n-2} + C_n(2+n-n^2)r^n + D_n(2-n-n^2)r^{-n}] \cdot \begin{cases} \sin(n \cdot \theta) \\ \cos(n \cdot \theta) \end{cases} \\ \sigma_\theta &= [A_n(n^2-n)r^{n-2} + B_n(n+n^2)r^{-n-2} + C_n(2+3n+n^2)r^n + D_n(2-3n+n^2)r^{-n}] \cdot \begin{cases} \sin(n \cdot \theta) \\ \cos(n \cdot \theta) \end{cases} \\ \tau_{r\theta} &= [A_n(n^2-n)r^{n-2} - B_n(n+n^2)r^{-n-2} + C_n(n+n^2)r^n + D_n(n-n^2)r^{-n}] \cdot \begin{cases} -\cos(n \cdot \theta) \\ \sin(n \cdot \theta) \end{cases} \end{aligned} \quad (7.8)$$

Jännitysten lausekkeista saadaan yhtälöillä (6.2) muodonmuutoskomponentit ε_r , ε_θ
ja $\gamma_{r\theta}$, joista seuraa yhtälöistä (6.3) integroimalla siirtymäkomponentit u_r ja u_θ .

Ratkaisuista (7.6) - (7.8) saadaan monen säännöllisen geometrian ja reunakuormituksen omaavan levytehtävän ratkaisu, kun vakiot A, B, C ja D määrätään tarkasteltavan levyn reunaehdoista. Tapaus $n = 0$ edustaa rotaatiosymmetristä (kulmasta θ riippumatonta) ratkaisua, joten kaikkien tällaisten tehtävien ratkaisut on saatavissa kaavasta (7.6) (kun tilavuusvoimat ovat nollia). Esimerkiksi kohdan 6.1 ympyrälevyn ja sylinteriputken ratkaisu sisältyy kaavaan (7.6), kuten kaavoja (6.9) ja (7.6) vertailemalla voi todeta. Seuraavassa kohdassa sovelletaan ratkaisuja (7.6) ja (7.8) tapauksessa $n = 2$ Kirschin ongelman ratkaisemiseen.

7.2 Kirschin ongelma

Tutkitaan edellä esitettyjen jännitysfunktioiden käyttöä kuvan 7.1 mukaisen Kirschin ongelman yhteydessä.



Kuva 7.1 Kirschin ongelma.

Äärettömän suuressa levyssä on a-säteinen ympyräreikä. Kaukana reiästä on aksiaalinen jännitystilakenttä, jonka x-akselin suuntainen pääjännitys on σ . Levy on tasapaksu ja sen materiaali noudattaa yleistettyä Hooken lakia. Kaukana reiästä on $\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = 0$ ja $\tau_{xy} = 0$. Vastaava xy-koordinaatiston jännitysfunktio on $\sigma y^2 / 2$. Tästä

seuraa jännitysfunktiolle napakoordinaatistoesitys

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{2} \sigma r^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{4} \sigma r^2 (1 - \cos 2\theta) \quad (7.9)$$

josta derivoimalla kaavojen (7.2) mukaisesti tulee jännityskomponenteille lausekkeet

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{2} (1 + \cos 2\theta) \quad \sigma_\theta = \frac{\sigma}{2} (1 - \cos 2\theta) \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\theta \quad (7.10)$$

Saint Venantin periaatteen mukaan Kirschin ongelman ratkaisun tulee lähestyä ratkaisua (7.10), kun $r \rightarrow \infty$. Reiän reunalla on reunaehtoina $\sigma_r(a, \theta) = 0$ $\tau_{r\theta}(a, \theta) = 0$. Yritetään löytää nämä vaatimukset täyttävä ratkaisu käyttämällä jännitysfunktiota $\phi(r, \theta) = \phi_0(r) + \phi_2(r, \theta)$, jossa kaavojen (7.3) ja (7.5) perusteella

$$\begin{aligned}\phi_0(r) &= A_0 + B_0 \ln r + C_0 r^2 + D_0 r^2 \ln r \\ \phi_2(r) &= (A_2 r^2 + B_2 r^{-2} + C_2 r^4 + D_2) \cos 2\theta\end{aligned}\quad (7.11)$$

Kaavoista (7.6) ja (7.8) tulee jännityskomponenteiksi

$$\begin{aligned}\sigma_r &= B_0/r^2 + 2C_0 + D_0(1+2\ln r) + (-2A_2 - 6B_2 r^{-4} - 4D_2 r^{-2}) \cos 2\theta \\ \sigma_\theta &= -B_0/r^2 + 2C_0 + D_0(3+2\ln r) + (2A_2 + 6B_2 r^{-4} + 12C_2 r^2) \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= (2A_2 - 6B_2 r^{-4} + 6C_2 r^2 - 2D_2 r^{-2}) \sin 2\theta\end{aligned}\quad (7.12)$$

Raja-arvovaatimuksista $r \rightarrow \infty$ seuraa

$$D_0 = 0 \quad 2C_0 = \sigma/2 \quad -2A_2 = \sigma/2 \quad C_2 = 0 \quad (7.13)$$

Reiän reunan reunaehdoista seuraa

$$\begin{aligned}B_0/a^2 + 2C_0 &= 0 \quad -2A_2 - 6B_2/a^4 - 4D_2/a^2 = 0 \\ 2A_2 - 6B_2/a^4 - 2D_2/a^2 &= 0\end{aligned}\quad (7.14)$$

Saaduista ehdoista ratkeavat vakioille arvot

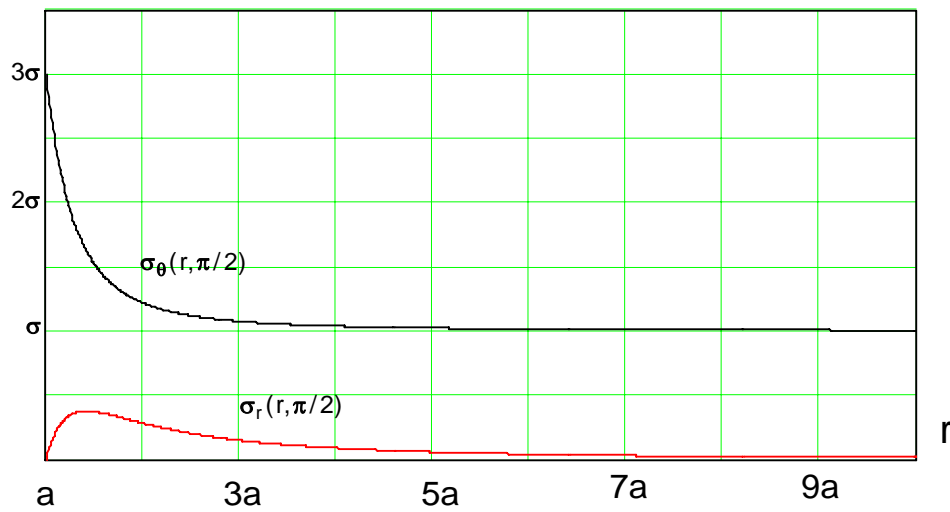
$$\begin{aligned}B_0 &= -a^2\sigma/2 \quad C_0 = \sigma/4 \quad D_0 = 0 \\ A_2 &= -\sigma/4 \quad B_2 = -a^4\sigma/4 \quad C_2 = 0 \quad D_2 = a^2\sigma/2\end{aligned}\quad (7.15)$$

Sijoittamalla nämä jännityskomponenttien lausekkeisiin saadaan lopullinen ratkaisu

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\sigma}{2} \left[\left(1 - (a/r)^2\right) + \left(1 - 4(a/r)^2 + 3(a/r)^4\right) \cos 2\theta \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{\sigma}{2} \left[\left(1 + (a/r)^2\right) - \left(1 + 3(a/r)^4\right) \cos 2\theta \right] \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\sigma}{2} \left(1 + 2(a/r)^2 - 3(a/r)^4\right) \sin 2\theta\end{aligned}\quad (7.16)$$

Kaavoista (7.16) voidaan todeta, että itseisarvoltaan suurin jännityskomponentti esiintyy pisteissä A ja B (kuva 7.1), jossa $\sigma_\theta(a, \pm\pi/2) = 3\sigma$. Suuren levyn keskellä oleva pieni ympyräreikä aiheuttaa siis aksiaaliseen jännitystilakenttään häiriön, jonka loven muotoluku on 3.

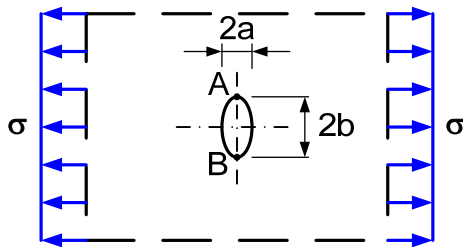
Kuvassa 7.2 on esitetty funktioiden $\sigma_r(r, \pi/2)$ ja $\sigma_\theta(r, \pi/2)$ kuvaajat. Voidaan havaita, että etäisyydellä $r = 9a$ on äärettömyysratkaisu $\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ jo melko tarkasti voimassa, sillä $\sigma_\theta(9a, \pi/2) \approx 1,006\sigma$ ja $\sigma_r(9a, \pi/2) \approx 0,018\sigma$.



Kuva 7.2 Jännityskomponenttien vaihtelu.

Siirtymät saadaan ratkaistua kaavojen (5.2) ja (5.4) avulla. Kun jäykän kappaleen liike poistetaan sopimalla, että $u_\theta(r, 0) = 0$ ja $u_\theta(r, \pi/2) = 0$, saadaan tulos

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\sigma r}{2E} \left[\left((1-\nu) + (1+\nu)(a/r)^2 \right) + \left((1+\nu) + 4(a/r)^2 - (1+\nu)(a/r)^4 \right) \cos 2\theta \right] \\ u_\theta &= -\frac{\sigma r}{2E} \left((1+\nu) + 2(1-\nu)(a/r)^2 + (a/r)^4 \right) \sin 2\theta \end{aligned} \quad (7.17)$$



Kuva 7.3 Ellipsireikä levyssä.

Jos ympyräreiän asemasta levyssä on kuvan 7.3 ellipsireikä, on ratkaisu huomattavasti mutkikkaampi. Sen mukaan ellipsin huipuissa A ja B on kehäjännitys

$$\sigma_{\theta A} = \sigma_{\theta B} = (1 + 2b/a)\sigma \quad (7.18)$$