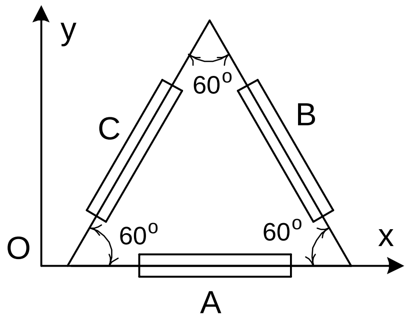
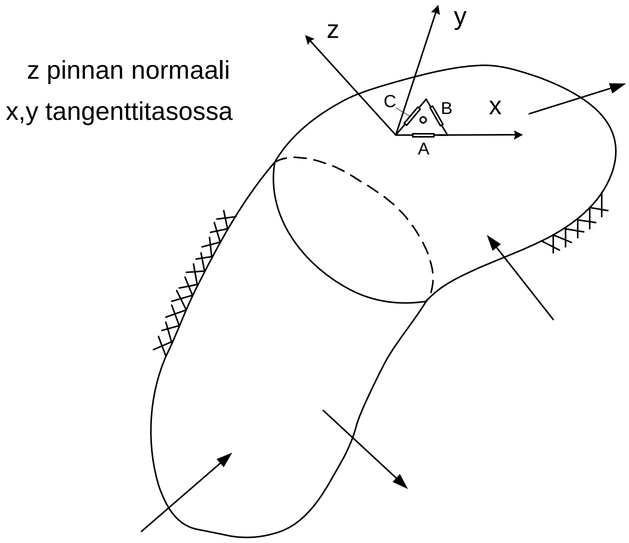


I.10. Kuvan mukaisella venymäliuskarusetilla mitataan kappaleen ulkopinnasta venymät suuntiin A, B ja C ($\varepsilon_A, \varepsilon_B, \varepsilon_C$). a) Johda kaavat, joilla päävenymät, pääsuunnat ja pääjännitykset voidaan laskea mitatuista venymistä. b) Sovella kaavoja tapaukseen $E = 210$ GPa, $\nu = 0{,}3$, $\varepsilon_A = -1100\,\mu$, $\varepsilon_B = 900\,\mu$ ja $\varepsilon_C = 400\,\mu$.

Ratkaisu:

Kappaleen ulkopinnan kuormittamattomassa kohdassa on <u>tasojännitystila</u> $\Rightarrow \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Kaavasta (3.10) seuraa tällöin $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ja $\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$.



Kaavasta (2.25) $\varepsilon_n = \varepsilon_x a^2 + \varepsilon_y b^2 + \varepsilon_z c^2 + \gamma_{xy} ab + \gamma_{yz} bc + \gamma_{xz} ac$ saadaan:

Liuska A: $a = \cos 0^0 = 1$ $\quad b = \cos 90^0 = 0$ $\quad c = \cos 90^0 = 0$

$$\varepsilon_A = \varepsilon_x \tag{1}$$

Liuska B: $a = \cos 120^0 = -\frac{1}{2}$ $\quad b = \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad c = \cos 90^0 = 0$

$$\varepsilon_B = \frac{1}{4}\varepsilon_x + \frac{3}{4}\varepsilon_y - \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} \tag{2}$$

Liuska C: $a = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$ $\quad b = \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad c = \cos 90^0 = 0$

$$\varepsilon_C = \frac{1}{4}\varepsilon_x + \frac{3}{4}\varepsilon_y + \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} \tag{3}$$

(3) - (2) $\Rightarrow \quad \varepsilon_C - \varepsilon_B = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} \quad \Rightarrow \quad \gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}}(\varepsilon_C - \varepsilon_B)$

(2)&(1) $\Rightarrow \quad \varepsilon_B = \frac{1}{4}\varepsilon_A + \frac{3}{4}\varepsilon_y - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}(\varepsilon_C - \varepsilon_B) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_y = \frac{1}{3}[2(\varepsilon_B + \varepsilon_C) - \varepsilon_A]$

Rusettikaavat xy-tason muodonmuutoskomponenteille ovat:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_A \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{3}[2(\varepsilon_B + \varepsilon_C) - \varepsilon_A] \qquad \gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}}(\varepsilon_C - \varepsilon_B) \tag{4}$$

Materiaaliyhtälöt tasojännitystilassa ovat kaavan (3.11) mukaan:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \qquad \sigma_y = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \qquad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \tag{5}$$

Sijoittamalla kaavoihin (5) muodonmuutoskomponentit yhtälöstä (4) saadaan seuraavat rusettikaavat xy-tason jännityskomponenteille.

$$\sigma_x = \frac{E}{3(1-\nu^2)}[(3-\nu)\varepsilon_A + 2\nu(\varepsilon_B + \varepsilon_C)] \qquad \tau_{xy} = \frac{2G}{\sqrt{3}}(\varepsilon_C - \varepsilon_B)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{3(1-\nu^2)}[(3\nu-1)\varepsilon_A + 2(\varepsilon_B + \varepsilon_C)] \tag{6}$$

Muodonmuutoskomponentille ε_z tulee materiaaliyhtälöstä kaava:

$$\varepsilon_z = -\frac{2\nu}{3(1-\nu)}(\varepsilon_A + \varepsilon_B + \varepsilon_C) \tag{7}$$

Päävenymät ε_1 ja ε_2 saadaan kaavasta (2.27) ja $\varepsilon_3 = \varepsilon_z$. Kaavassa (2.27) on

$$\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = \frac{1}{3}(\varepsilon_A + \varepsilon_B + \varepsilon_C) \qquad \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} = \frac{1}{3}(2\varepsilon_A - \varepsilon_B - \varepsilon_C)$$

$$\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{9}[(\varepsilon_A - \varepsilon_B)^2 + (\varepsilon_B - \varepsilon_C)^2 + (\varepsilon_C - \varepsilon_A)^2]}$$

Päävenymien rusettikaavat ovat siis

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{3}(\varepsilon_A + \varepsilon_B + \varepsilon_C) \pm \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_A - \varepsilon_B)^2 + (\varepsilon_B - \varepsilon_C)^2 + (\varepsilon_C - \varepsilon_A)^2}$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{2\nu}{3(1-\nu)}(\varepsilon_A + \varepsilon_B + \varepsilon_C) \tag{8}$$

xy-tason päävenymien (ja samalla pääjännityksien) suuntakulmille saadaan rusettikaavat kaavasta (2.28)

$$\tan 2\theta = \frac{\sqrt{3}(\varepsilon_C - \varepsilon_B)}{2\varepsilon_A - \varepsilon_B - \varepsilon_C} \quad \Rightarrow \quad \theta_1 , \theta_2 \qquad \gamma_{xy} \cdot \sin 2\theta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 \tag{9}$$

Pääjännitykset σ_1 ja σ_2 saadaan materiaaliyhtälöistä (5) sijoittamalla niihin päävenymät kaavasta (8) ja pääjännitys $\sigma_3 = 0$. Pääjännityksien σ_1 ja σ_2 rusettikaavoiksi tulee

$$\sigma_{1,2} = \frac{E}{3}\left[\frac{\varepsilon_A + \varepsilon_B + \varepsilon_C}{1-\nu} \pm \frac{\sqrt{2}}{1+\nu}\sqrt{(\varepsilon_A - \varepsilon_B)^2 + (\varepsilon_B - \varepsilon_C)^2 + (\varepsilon_C - \varepsilon_A)^2}\right]$$

Sovellusesimerkki:

$MPa := \frac{N}{mm^2}$ $\qquad \mu := 10^{-6}$

$E := 210 \cdot 10^3 \cdot MPa$ $\qquad \nu := 0.3$ $\qquad G := \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$ $\qquad G = 80769.231\ MPa$

$\varepsilon_A := -1100 \cdot \mu$ $\qquad \varepsilon_B := 900 \cdot \mu$ $\qquad \varepsilon_C := 400 \cdot \mu$

Muodonmuutoskomponentit:

$\varepsilon_x := \varepsilon_A$ $\qquad \varepsilon_y := \frac{1}{3} \cdot \left[2 \cdot (\varepsilon_B + \varepsilon_C) - \varepsilon_A\right]$ $\qquad \gamma_{xy} := \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (\varepsilon_C - \varepsilon_B)$

$\varepsilon_z := -\frac{2 \cdot \nu}{3 \cdot (1 - \nu)} \cdot (\varepsilon_A + \varepsilon_B + \varepsilon_C)$

$\varepsilon_x = -1100\ \mu$ $\qquad \varepsilon_y = 1233.333\ \mu$ $\qquad \gamma_{xy} = -577.350\ \mu$ $\qquad \varepsilon_z = -57.143\ \mu$

Jännityskomponentit:

$\sigma_x := \frac{E}{3 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left[(3 - \nu) \cdot \varepsilon_A + 2 \cdot \nu \cdot (\varepsilon_B + \varepsilon_C)\right]$ $\qquad \tau_{xy} := \frac{2 \cdot G}{\sqrt{3}} \cdot (\varepsilon_C - \varepsilon_B)$

$\sigma_y := \frac{E}{3 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left[(3 \cdot \nu - 1) \cdot \varepsilon_A + 2 \cdot (\varepsilon_B + \varepsilon_C)\right]$

$\sigma_x = -168.462\ MPa$ $\qquad \sigma_y = 208.462\ MPa$ $\qquad \tau_{xy} = -46.632\ MPa$

Päävenymät:

$$\varepsilon_1 := \frac{1}{3}\cdot(\varepsilon_A + \varepsilon_B + \varepsilon_C) + \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{(\varepsilon_A - \varepsilon_B)^2 + (\varepsilon_B - \varepsilon_C)^2 + (\varepsilon_C - \varepsilon_A)^2}$$

$$\varepsilon_3 := \varepsilon_z$$

$$\varepsilon_2 := \frac{1}{3}\cdot(\varepsilon_A + \varepsilon_B + \varepsilon_C) - \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{(\varepsilon_A - \varepsilon_B)^2 + (\varepsilon_B - \varepsilon_C)^2 + (\varepsilon_C - \varepsilon_A)^2}$$

$\varepsilon_1 = 1268.517\ \mu$ $\varepsilon_2 = -1135.184\ \mu$ $\varepsilon_3 = -57.143\ \mu$

Pääsuunnat:

$$\theta_r := \frac{1}{2}\cdot\operatorname{atan}\left[\frac{\left[\sqrt{3}\cdot(\varepsilon_C - \varepsilon_B)\right]}{2\cdot\varepsilon_A - \varepsilon_B - \varepsilon_C}\right]\cdot\mathrm{rad}$$

$\theta_r = 0.121\ \mathrm{rad}$ $\gamma_{xy}\cdot\sin(2\cdot\theta_r) = -138.675\ \mu$

Edellä olevasta seuraa pääsuunniksi:

$$\theta_1 := \frac{180\cdot\mathrm{deg}}{\pi\cdot\mathrm{rad}}\cdot\left(\theta_r + \frac{\pi}{2}\cdot\mathrm{rad}\right)$$

$\theta_1 = 96.949\ \mathrm{deg}$

$$\theta_2 := \theta_1 + 90\cdot\mathrm{deg}$$

$\theta_2 = 186.949\ \mathrm{deg}$

Pääjännitykset:

$$\sigma_1 := \frac{E}{3}\cdot\left[\frac{(\varepsilon_A + \varepsilon_B + \varepsilon_C)}{1-\nu} + \frac{\sqrt{2}}{1+\nu}\cdot\sqrt{(\varepsilon_A - \varepsilon_B)^2 + (\varepsilon_B - \varepsilon_C)^2 + (\varepsilon_C - \varepsilon_A)^2}\right]$$

$$\sigma_2 := \frac{E}{3}\cdot\left[\frac{(\varepsilon_A + \varepsilon_B + \varepsilon_C)}{1-\nu} - \frac{\sqrt{2}}{1+\nu}\cdot\sqrt{(\varepsilon_A - \varepsilon_B)^2 + (\varepsilon_B - \varepsilon_C)^2 + (\varepsilon_C - \varepsilon_A)^2}\right]$$

$\sigma_1 = 214.145\ \mathrm{MPa}$ $\sigma_2 = -174.145\ \mathrm{MPa}$