5 JÄYKÄN KAPPALEEN TASOKINEMATIIKKA

5.1 Yleistä

Jäykkä kappale on määritelmän mukaan partikkelisysteemi, jossa partikkelein väliset keskinäiset etäisyydet pysyvät muuttumattomina. Jäykän kappaleen malli on tietenkin likimääräinen, sillä kaikki todelliset kappaleet kokevat voimien vaikuttaessa muodonmuutoksia. Jos kappaleen muodonmuutokset ovat pieniä verrattuna sen liikkeisiin, tarjoaa jäykän kappaleen malli kuitenkin sopivan approksimaation kappaleen liiketilan analysointiin.

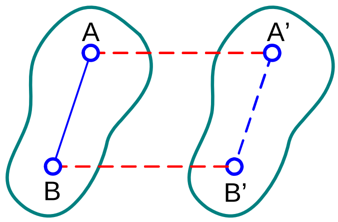
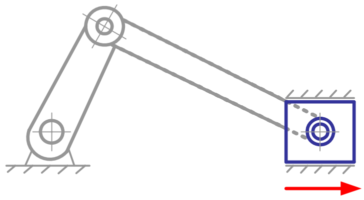
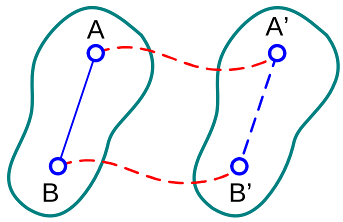
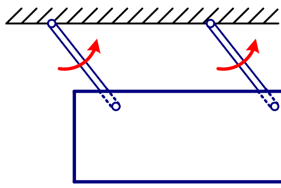
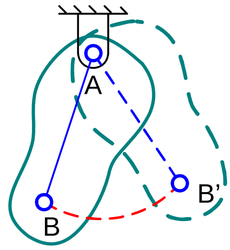
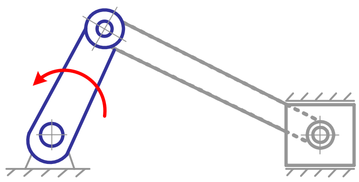
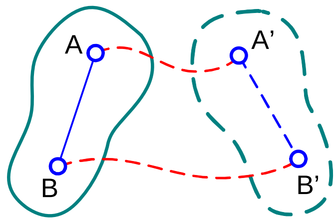
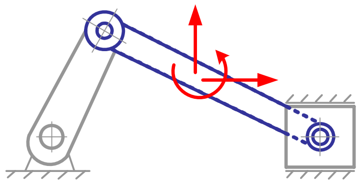
Luvussa 2 johdettiin suoraviivaisessa tai käyräviivaisessa liikkeessä olevan partikkelin kinemaattisten suureiden (asema, nopeus ja kiihtyvyys) väliset geometriset yhteydet. Saadut kaavat ovat tarpeellisia myös jäykän kappaleen kinematiikassa, mutta lisäksi on otettava huomioon kappaleen pyörimisliike, joka partikkelimallissa ei ole tarpeen, koska kappaleen ulottuvuudet ajatellaan nolliksi. Jäykän kappaleen kinematiikka sisältää siis kappaleen lineaarisen liikkeen eli translaation ja pyörimisliikkeen eli rotaation kinemaattisia suureita koskevat geometriset lait. Seuraavassa tulee esille, että pyörimisliikkeen tärkeimmät kinemaattiset suureet ovat kulma-asema, kulmanopeus ja kulmakiihtyvyys.

Jäykän kappaleen kinematiikalla on sinänsä merkitystä tiettyjä liikeratoja suorittavien mekanismien suunnittelussa eli mekanismiopissa, joka on tärkeä kinematiikan sovellusalue. Toisaalta kinematiikan hallitseminen on välttämätöntä kinetiikan tehtävien yhteydessä ratkaistaessa jäykkään kappaleeseen vaikuttavan voimasysteemin aiheuttama liiketila tai halutun liiketilan synnyttämiseen tarvittava voimasysteemi.

Yleisessä tapauksessa jäykän kappaleen pisteiden liikeradat ovat kolmiulotteisen avaruuden käyriä. Erityistapausta, jossa kappaleen kaikki pisteet liikkuvat samansuuntaisissa tasoissa, sanotaan tasoliikkeeksi. Kappaleen liiketasolla tarkoitetaan tällöin tasoa, jossa sen massakeskiö liikkuu. Tasoliikkeessä olevaa kappaletta voidaan pitää äärettömän ohuena levynä, jonka liike tapahtuu levyn määräämässä tasossa. Tasoliikkeen mallilla voidaan analysoida hyvin monia käytännön sovelluksia.

Jäykän kappaleen tasoliikettä voidaan luokitella eri tapauksiin kuvan 5.1 mukaisesti. Translaatio eli yhdensuuntaisliike tarkoittaa liikettä, jossa kappaleen mitä tahansa kahta pistettä yhdistävä jana säilyttää suuntansa liikkeen aikana. Translaatiossa kaikki kappaleen pisteet liikkuvat pitkin yhdensuuntaisia ratoja. Jos nämä radat ovat suoria, on kappale suoraviivaisessa translaatiossa. Tätä on havainnollistettu kuvassa 5.1 (a) mäntämekanismilla, jossa mäntä on suoraviivaisessa translaatioliikkeessä. Käyräviivaisessa translaatiossa kappaleen pisteet liikkuvat pitkin yhdensuuntaisia käyriä, kuten kuvan 5.1 tapauksessa (b). On helppo havaita, että translaatioliikkeessä kaikki kappaleen pisteet liikkuvat samalla tavalla eli kappaleen liiketilan tuntemiseen riittää sen yhden pisteen liiketilan tunteminen. Tästä seuraa, että jäykän kappaleen translaatioliikkeen käsittelyyn riittää partikkelin kinematiikka.

Rotaatio on pyörimisliikettä kiinteän akselin ympäri. Tätä akselia sanotaan rotaatioakseliksi. Kappaleen pisteet liikkuvat pitkin ympyrän kaaria, joiden tasot ovat kohtisuorassa rotaatioakselia vastaan ja keskipisteet rotaatioakselilla. Rotaatioakselilla olevien kappaleen pisteiden nopeus ja kiihtyvyys ovat nollia. Rotaatioakselin ja kappaleen liiketason (joka sisältää kappaleen massakeskiön) leikkauspistettä sanotaan rotaatiokeskukseksi. Rotaatiota on havainnollistettu kuvassa 5.1 (c) mäntämekanismilla, jossa kampi on rotaatiossa.

Liikkeen tyyppi		Esimerkki
(a) Suoraviivainen translaatio		
(b) Käyräviivainen translaatio		
(c) Rotaatio		
(d) Yleinen tasoliike		

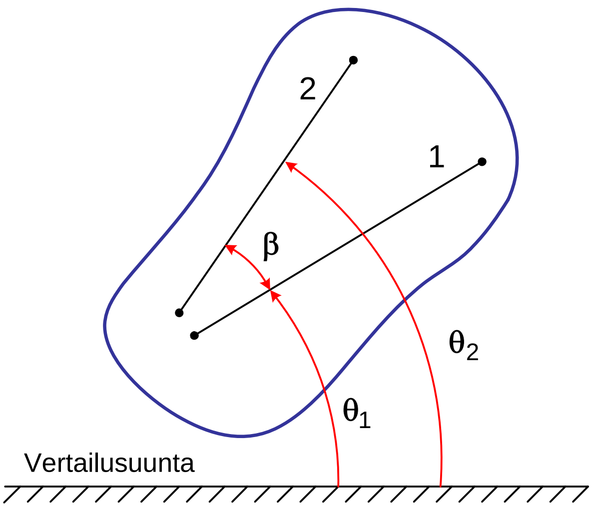
Kuva 5.1 Tasoliikkeen luokittelu.

Kappaleen sanotaan olevan yleisessä tasoliikkeessä, ellei sen liike ole puhdasta translaatiota tai rotaatiota. Voidaan osoittaa, että yleinen tasoliike on translaation ja rotaation yhdistelmä. Kuvassa 5.1 (d) on havainnollistettu yleistä tasoliikettä mäntä-mekanismilla, jolloin kiertokanki on yleisessä tasoliikkeessä.

Jäykän kappaleen tasoliikkeen käsittelyssä voidaan pyrkiä suoraan sen pisteiden absoluuttisen asemien, nopeuksien ja kiihtyvyyksien ja vastaavien rotaation kinemaattisten suureiden määrittämiseen hyödyntämällä suoraan kinemaattisten suureiden määritelmiä ja niiden välisiä matemaattisia yhteyksiä. Toinen mahdollisuus on edetä vaiheittain käyttäen hyväksi suhteellisen liikkeen periaatteita, mikä on erityisesti yleisen tasoliikkeen tapauksessa hyödyllistä. Varsinkin monista osista koostuvien mekanismien tarkastelussa jälkimmäinen tapa johtaa usein huomattavasti selkeämpään ratkaisuun. Seuraavassa tarkastellaan molempia tapoja.

5.2 Rotaatio

Jäykän kappaleen yleisen liikkeen pyörimisosuus voidaan käsitellä sen kulma-aseman avulla. Kuvassa 5.2 on tasoliikkeessä oleva jäykkä kappale, jonka liike sisältää rotaatiota. Kappaleeseen kuuluvien suorien 1 ja 2 kulma-asemat mitattuna sopivasta vertailukohdasta ovat θ_1 ja θ_2. Suorien välinen kulma β pysyy liikkeen aikana muuttumattomana. Yhtälöstä $\theta_2 = \theta_1 + \beta$ saadaan derivoimalla tulokset $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1$ ja $\ddot{\theta}_2 = \ddot{\theta}_1$, jotka pätevät kaikilla kulma-aseman muutoksilla $\Delta\theta_1 = \Delta\theta_2$. Tästä voidaan päätellä, että jäykän kappaleen tasoliikkeessä kaikilla kappaleen suorilla on sama kulma-aseman muutos, kulmanopeus ja kulmakiihtyvyys. Nähdään siis, että kappaleen ollessa yleisessä tasoliikkeessä sen jokaisen suoran pyörimisliike voidaan kuvata suoran kulma-aseman ja sen derivaattojen avulla. Huomattakoon erityisesti, että pyörimisliikkeen käsittely kulma-aseman avulla ei edellytä kiinteän rotaatioakselin olemassaoloa, vaan se sopii myös yleisen tasoliikkeen tapaukseen.



Kuva 5.2 Kulma-asema.

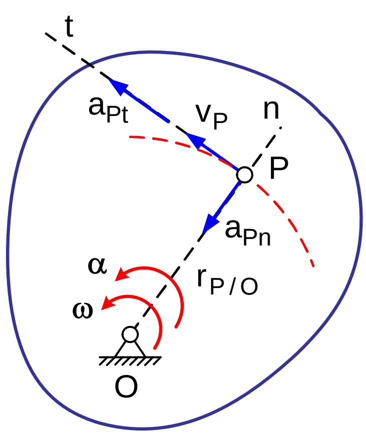
Jäykän kappaleen pyörimisliikkeen kulmanopeus $\dot{\theta} = \omega$ ja kulmakiihtyvyys $\ddot{\theta} = \dot{\omega} = \alpha$ ovat määritelmiensä mukaan kappaleen mielivaltaisen suoran kulma-aseman θ ensimmäinen ja toinen derivaatta ajan suhteen. Näistä määritelmistä seuraa kaavat

$$\boxed{\begin{aligned} &\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} \\ &\omega\, d\omega = \alpha\, d\theta \quad \text{eli} \quad \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \ddot{\theta}\, d\theta \end{aligned}} \tag{5.1}$$

Kaavojen (5.1) kolmas yhtälö on rotaation energiadifferentiaaliyhtälö, joka saadaan eliminoimalla kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä dt. Suureiden θ, ω ja α positiivinen suunta on vastapäivään. Kaavat (5.1) ovat samaa muotoa kuin suoraviivaisen liikkeen kaavat (2.1) – (2.3) suureille s, v ja a. Kohdassa 2.2 suureille s, v ja a johdetut tulokset ovat voimassa myös suureille θ, ω ja α. Tasaisesti kiihtyvälle rotaatiolle pätevät kaavat

$$\boxed{\begin{aligned} &\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0) \qquad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \\ &\theta = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2 \end{aligned}} \tag{5.2}$$

Tutkitaan kappaleen rotaatiota kiinteän akselin ympäri kuvan 5.3 mukaisesti. Kun kappale pyörii akselin O ympäri, on mielivaltaisen pisteen P liikerata ympyrän kaari, jonka säde $r_{P/O} = OP$. Tästä seuraa pisteen A nopeudelle ja kiihtyvyydelle kaavat



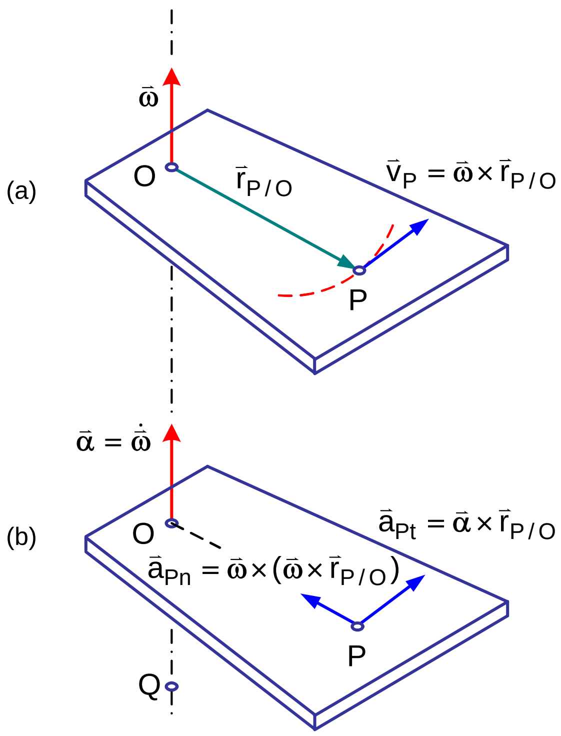
Kuva 5.3 Rotaatio.

$$\boxed{\begin{aligned} &v_P = r_{P/O}\,\omega \\ &a_{Pt} = r_{P/O}\,\alpha \\ &a_{Pn} = r_{P/O}\,\omega^2 = v^2 / r_{P/O} \end{aligned}} \tag{5.3}$$

Kaavoille (5.3) saadaan vektoreita käyttäen toinen muoto, joka varsinkin kolmiulotteisen liikkeen yhteydessä on hyödyllinen. Rotaatiossa olevan kappaleen kulmanopeus voidaan esittää vektorilla $\vec{\omega}$, joka on kohtisuorassa liiketasoa vastaan ja jonka suunta määräytyy vektoreista $\vec{r}_{P/O}$ ja $\vec{v}_P$ siten, että systeemi $\vec{\omega}, \vec{r}_{P/O}, \vec{v}_P$ on oikeakätinen kuvan 5.4 (a) mukaisesti. Tällöin pisteen P nopeusvektorille pätee

$$\boxed{\vec{v}_P = \dot{\vec{r}}_{P/O} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/O}} \tag{5.4}$$

Kaava (5.4) antaa nopeusvektorille oikean suunnan. Myös suuruus on oikea, sillä ristitulon määritelmän mukaan $v_P = \omega\, r_{P/O} \sin 90^\circ = \omega\, r_{P/O}$. Pisteen P kiihtyvyysvektori $\vec{a}_P$ saadaan kaavasta (5.4) derivoimalla, jolloin seuraa



Kuva 5.4 Rotaatio.

$$\vec{a}_P = \dot{\vec{v}}_P = \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_{P/O} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{P/O} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/O}) + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{P/O} \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{a}_P = \vec{a}_{Pn} + \vec{a}_{Pt} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/O}) + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{P/O}} \tag{5.5}$$

Edellä $\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}}$ on kappaleen kulmakiihtyvyysvektori, joka on myös liiketason normaalin suuntainen, kuten kuvassa 5.4 (b) on esitetty.

Kaavoja (5.4) ja (5.5) johdettaessa käytettiin paikkavektoria $\vec{r}_{P/O}$, jonka alkupiste on liiketason ja rotaatioakselin leikkauspiste O. Alkupisteenä voidaan käyttää mitä tahansa muutakin rotaatioakselin pistettä Q kuvan 5.4 (b) mukaisesti, sillä on voimassa

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/Q} = \vec{\omega} \times (\vec{r}_{O/Q} + \vec{r}_{P/O}) = \vec{\omega} \times \vec{r}_{O/Q} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/O} = \vec{0} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/O}$$

koska $\vec{\omega} \,||\, \vec{r}_{O/Q}$, jolloin $\vec{\omega} \times \vec{r}_{O/Q} = \vec{0}$. Samalla tavalla nähdään, että $\vec{\alpha} \times \vec{r}_{O/Q} = \vec{0}$

Kaavat (5.4) ja (5.5) ovat voimassa myös yleiselle kolmiulotteiselle liikkeelle, mutta tällöin $\vec{\omega}$ ja $\vec{\alpha}$ eivät enää ole välttämättä yhdensuuntaiset. Tämä johtuu siitä, että kolmiulotteisessa liikkeessä sekä kulmanopeusvektorin suuruus että suunta voivat muuttua ajan kuluessa, kun tasoliikkeessä vain suuruus voi muuttua.

5.3 Absoluuttinen liike

Jäykän kappaleen tasoliikkeen analysoinnissa voidaan pyrkiä suoraan sen absoluuttisten kinemaattisten suureiden ratkaisemiseen. Tätä menetelmää käytettäessä kirjoitetaan aluksi kappaleen liikettä koskevat geometriset yhteydet sopivia suureita käyttäen ja ratkaistaan sitten nopeudet ja kiihtyvyydet näitä yhteyksiä derivoimalla.

Absoluuttisten liikesuureiden määritys perustuu kaavojen (2.1) – (2.3) ja (5.1) – (5.3) suoraan soveltamiseen ja edellyttää näin ollen liikkeen geometriaa kuvaavan matematiikan perusteellista hallitsemista. Oikeisiin tuloksiin pääseminen vaatii johdonmukaisuutta esimerkiksi kinemaattisten suureiden merkkisääntöjen suhteen.

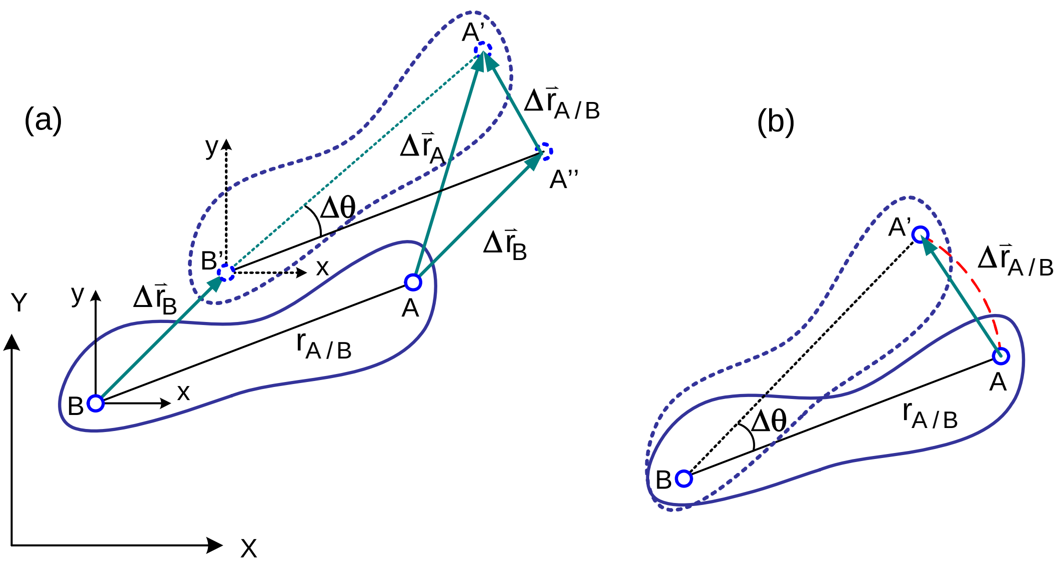
Jäykän kappaleen absoluuttisten liikesuureiden suora määritys on yleensä melko selväpiirteistä edellyttäen, että liikkeen geometriset yhteydet eivät ole kovin mutkikkaita. Hankalissa tapauksissa on tavallisesti edullisempaa hyödyntää suhteellisen liikkeen periaatteita, kuten myöhemmin tulee esille.

5.4 Suhteellinen nopeus

Jäykän kappaleen tasoliikkeen tutkimisessa voidaan käyttää hyväksi suhteellisen liikkeen kaavoja. Kohdassa 2.8 saatiin kahden partikkelin A ja B nopeuksien välille kaava

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B} \tag{5.6}$$

jolloin $\vec{v}_{A/B}$ tarkoittaa partikkelin A nopeutta partikkelin B mukana translaatiossa olevassa koordinaatistossa. Valitaan nyt A ja B siten, että ne ovat saman jäykän kappaleen kaksi pistettä. Tästä seuraa, että partikkelien välinen etäisyys ei voi muuttua ja pisteen A liike pisteeseen B nähden voi olla vain rotaatiota. Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 5.5 (a), joka esittää jäykän kappaleen tasoliikettä aikavälillä Δt, jona aikana pisteet A ja B liikkuvat asemiin A' ja B'. Tämän liikkeen voidaan tulkita tapah-



Kuva 5.5 Jäykän kappaleen yleinen tasoliike.

tuvan kahdessa vaiheessa. Kappale kokee ensin pisteen B siirtymän mukaisen translaation $\Delta\vec{r}_B$ siten, että jana AB siirtyy asemaan A''B' ja sitten tapahtuu rotaatio $\Delta\theta$ pisteen B' ympäri niin, että piste A'' siirtyy asemaan A'. Pisteen B mukana liikkuvassa pyörimättömässä xy-koordinaatistossa jälkimmäinen osaliike on rotaatio kiinteän pisteen B ympäri. Tästä aiheutuu pisteelle A ympyräliike pisteen B ympäri, jota vastaava siirtymä $\Delta\vec{r}_{A/B}$ on esitetty kuvassa 5.5 (b). Tasoliikkeen rotaatio-osuus voidaan siis käsitellä ympyräliikkeen kaavojen (5.3) tai (5.4) ja (5.6) avulla.

Kun B on vertailupisteenä, voidaan pisteen A absoluuttiselle siirtymälle kirjoittaa

$$\Delta\vec{r}_A = \Delta\vec{r}_B + \Delta\vec{r}_{A/B} \tag{5.7}$$

jossa suhteellisen siirtymävektorin $\Delta\vec{r}_{A/B}$ pituus lähestyy arvoa $r_{A/B}\Delta\theta$, kun $\Delta\theta \to 0$. Suhteellinen translaatiosiirtymä $\Delta\vec{r}_{A/B}$ aiheutuu siis kappaleen absoluuttisesta kulmaliikkeestä $\Delta\theta$. Jakamalla vektorin $\Delta\vec{r}_A$ lauseke vastaavalla aikavälin pituudella Δt ja ottamalla raja-arvo $\Delta t \to 0$, saadaan pisteen A nopeudelle kaava

$$\boxed{\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}} \tag{5.8}$$

Kaava (5.8) on täsmälleen sama kuin kaava (5.6), mutta nyt pisteiden A ja B välinen etäisyys $r_{A/B}$ on vakio. Suhteellisen nopeuden $\vec{v}_{A/B}$ suuruus on

$$v_{A/B} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}_{A/B}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r_{A/B}\,\Delta\theta}{\Delta t} = r_{A/B} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = r_{A/B}\,\dot{\theta} \tag{5.9}$$

Kun merkitään $\dot{\theta} = \omega$, saadaan tulos

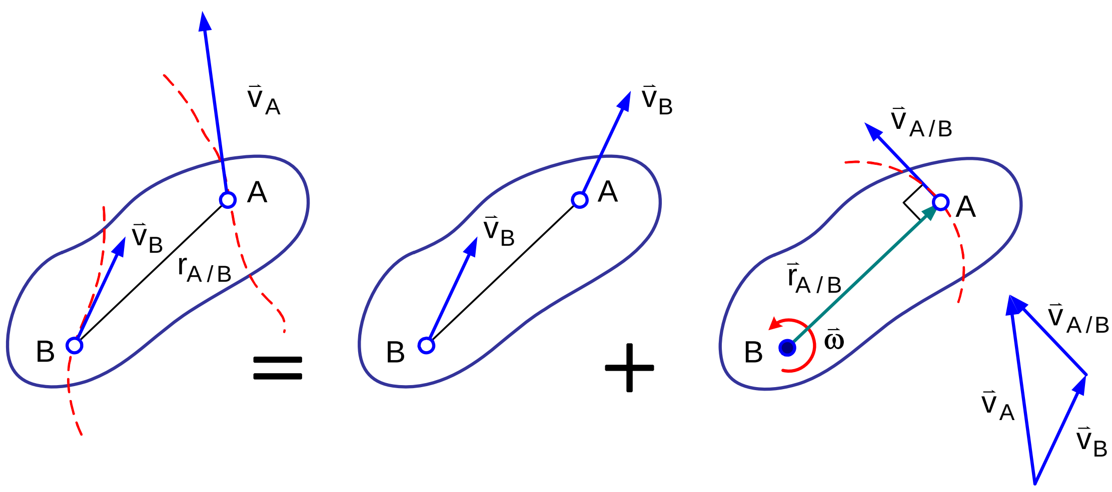
$$\boxed{v_{A/B} = r_{A/B}\,\omega} \tag{5.10}$$

Kaava (5.10) voidaan kirjoittaa vektorimuotoon suhteellisen paikkavektorin $\vec{r}_{A/B}$ ja kulmanopeusvektorin $\vec{\omega}$ avulla, jolloin seuraa tulos

$$\boxed{\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B} = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}} \tag{5.11}$$

Kuvan 5.5 (b) perusteella on ilmeistä, että suhteellinen nopeusvektori $\vec{v}_{A/B}$ on aina kohtisuorassa pisteitä A ja B yhdistävää janaa AB vastaan.

Kuvassa 5.6 on vielä havainnollistettu kaavaa (5.11), jonka mukaan tasoliike voidaan tulkita translaation ja rotaation summaksi. Piste B on vertailupiste ja pisteen A nopeus on translaationopeuden $\vec{v}_B$ ja rotaationopeuden $\vec{v}_{A/B} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}$ summa. Rotaationopeus on kohtisuorassa janaa AB vastaan ja sen suuruus on $v_{A/B} = r_{A/B}\,\omega$, jossa ω on kappaleen kulmanopeuden suuruus.

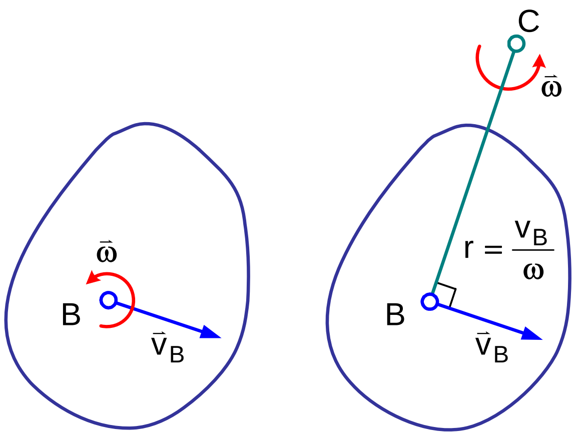


Kuva 5.6 Suhteellinen nopeus.

Kaavaa (5.11) voidaan käyttää jäykän kappaleen tasoliikkeessä kappaleen pisteiden nopeuksien ja kappaleen kulmanopeuden laskentaan, kun osa kaavan suureista tunnetaan. Analysoitaessa useasta jäykästä kappaleesta koostuvia mekanismeja on usein käytännöllistä edetä vaiheittain sopivia vertailupisteitä käyttäen, jolloin vertailupisteen tunnettujen suureiden avulla ratkaistaan tarkasteltavan kappaleen suureita, joita voidaan edelleen jatkossa käyttää hyväksi. Vektoriyhtälö (5.11) sisältää kaksi komponenttiyhtälöä, joten sen avulla voidaan ratkaista enintään kaksi tuntematonta suuretta. Tuntemattomina voivat olla esimerkiksi yhden vektorin suunta ja toisen vektorin suuruus. Yhtälö (5.11) voidaan ratkaista vektorimatematiikalla, trigonometrisesti tai graafisesti. Valittiinpa ratkaisutapa miten tahansa, tilanteesta kannattaa aina piirtää kuvan 5.6 mukainen vektorikolmio, joka havainnollistaa ratkaisua huomattavasti.

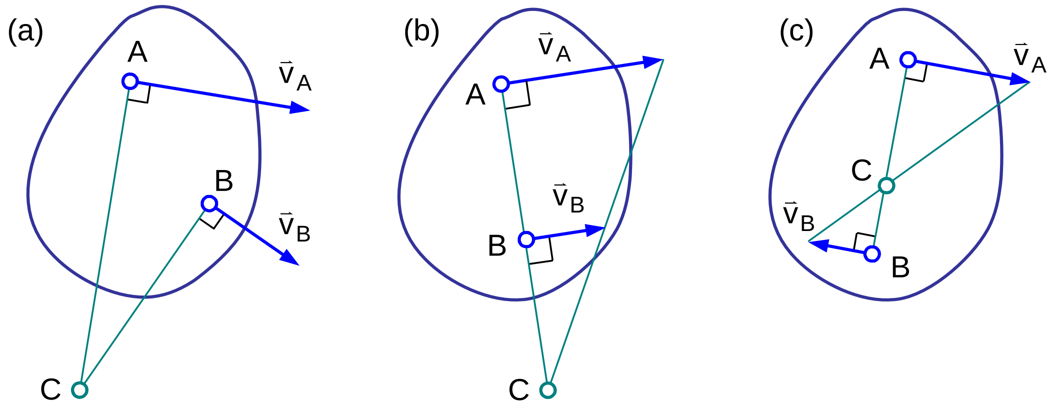
5.5 Nopeusnapa

Edellä nähtiin, että tasoliike voidaan jokaisella hetkellä tulkita mielivaltaisen vertailupisteen B translaation ja tämän ympäri tapahtuvan rotaation yhdistelmäksi. Translaatiosta aiheutuvan nopeuden määrää vertailupisteen nopeus $\vec{v}_B$ ja rotaatiosta aiheutuvan nopeuden kulmanopeus $\vec{\omega}$. Suureet $\vec{v}_B$ ja $\vec{\omega}$ määräävät siis täysin kappaleen kaikkien pisteiden nopeudet. Pisteen B nopeus olisi edelleen sama $\vec{v}_B$, jos kappale olisi rotaatiossa kulmanopeudella $\vec{\omega}$ sellaisen pisteen C ympäri, joka sijaitsee vektorin $\vec{v}_B$ normaalilla etäisyydellä $r = v_B / \omega$ pisteestä B kuvan 5.7 mukaisesti. Näin ollen myös kaikkien muiden kappaleen pisteiden nopeudet saadaan ajattelemalla sen olevan rotaatiossa pisteen C ympäri kulmanopeudella $\vec{\omega}$. Pistettä C sanotaan hetkelliseksi nopeusnavaksi. Jos edellä $\vec{v}_\mathbf{B} = \vec{0}$, on piste B itse nopeusnapa ja jos $\vec{\omega} = \vec{0}$, on kaikilla kappaleen pisteillä sama nopeus eli se on hetkellisessä translaatiossa.



Kuva 5.7 Nopeusnapa.

Nopeusnapa voidaan määrittää myös kuvassa 5.8 esitetyillä tavoilla. Tapauksessa (a) tunnetaan kappaleen kahden pisteen A ja B nopeuksien suunnat, jolloin nopeusnapa on näiden suuntien normaalien leikkauspisteessä. Tapauksissa (b) ja (c) tunnetaan janaa AB vastaan kohtisuorien nopeusvektoreiden suuruudet v_A ja v_B. Nopeusnapa on suunnan AB sekä vektoreiden $\vec{v}_A$ ja $\vec{v}_B$ kärkien määräämän suunnan leikkauspisteessä. Jos $\vec{v}_A$ ja $\vec{v}_B$ ovat yhdensuuntaiset tapauksessa (a) tai jos tapauksessa (b) $v_A = v_B$, on nopeusnapa äärettömän kaukana ja $\omega = 0$ eli kappale on hetkellisessä translaatiossa.



Kuva 5.8 Nopeusnavan määritys.

Nopeusnapa voi olla jokin kappaleen pisteen kohdalla tai kappaleen ulkopuolella sen ajatellulla jatkeella. Nopeusnavan kohdalla olevan kappaleen tai sen jatkeen pisteen nopeus on tarkasteluhetkellä nolla. Hetken t nopeusnavan kohdalla oleva piste ei kuitenkaan ole yleensä hetken $t+\Delta t$ nopeusnavan kohdalla, joten sen nopeus ei ole nolla hetkellä $t+\Delta t$ eli sillä on nollasta poikkeava kiihtyvyys hetkellä t. Tästä seuraa, että kappaleen pisteiden kiihtyvyyksiä ei voi laskea ajattelemalla sen olevan rotaatiossa nopeusnavan ympäri.

5.6 Suhteellinen kiihtyvyys

Kohdassa 2.7 johdettiin kahden partikkelin A ja B kiihtyvyyksien välille kaava

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B} \tag{5.12}$$

jossa $\vec{a}_{A/B}$ on partikkelin A kiihtyvyys partikkelin B mukana translaatiossa olevassa koordinaatistossa. Kun A ja B ovat saman jäykän kappaleen kaksi pistettä, ei niiden etäisyys voi muuttua ja pisteen A liike pisteen B suhteen on rotaatiota. Tästä seuraa, että suhteellisella kiihtyvyydellä $\vec{a}_{A/B}$ on komponentti $\vec{a}^t_{A/B}$ kohtisuoraan janaa AB vastaan ja komponentti $\vec{a}^n_{A/B}$ janan AB suunnassa kohti pistettä B. Käyttämällä näitä komponentteja seuraa tulos

$$\boxed{\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}^t_{A/B} + \vec{a}^n_{A/B}} \tag{5.13}$$

Suhteellisen kiihtyvyyden $\vec{a}_{A/B}$ komponenttien suuruuksille ovat voimassa kaavat

$$\boxed{a^t_{A/B} = \dot{v}_{A/B} = r_{A/B}\,\alpha \qquad a^n_{A/B} = v^2_{A/B}/r_{A/B} = r_{A/B}\,\omega^2} \tag{5.14}$$

jossa $r_{A/B}$ on pisteiden A ja B välinen etäisyys, α kappaleen kulmakiihtyvyyden suuruus ja ω kulmanopeuden suuruus. Kaavat (5.14) voidaan muuntaa vektorimuotoon suhteellisen paikkavektorin $\vec{r}_{A/B}$, kulmakiihtyvyysvektorin $\vec{\alpha}$ ja kulmanopeusvektorin $\vec{\omega}$ avulla, jolloin seuraa kaava

$$\boxed{\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}^t_{A/B} + \vec{a}^n_{A/B} = \vec{a}_B + \vec{\alpha}\times\vec{r}_{A/B} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{A/B})} \tag{5.15}$$

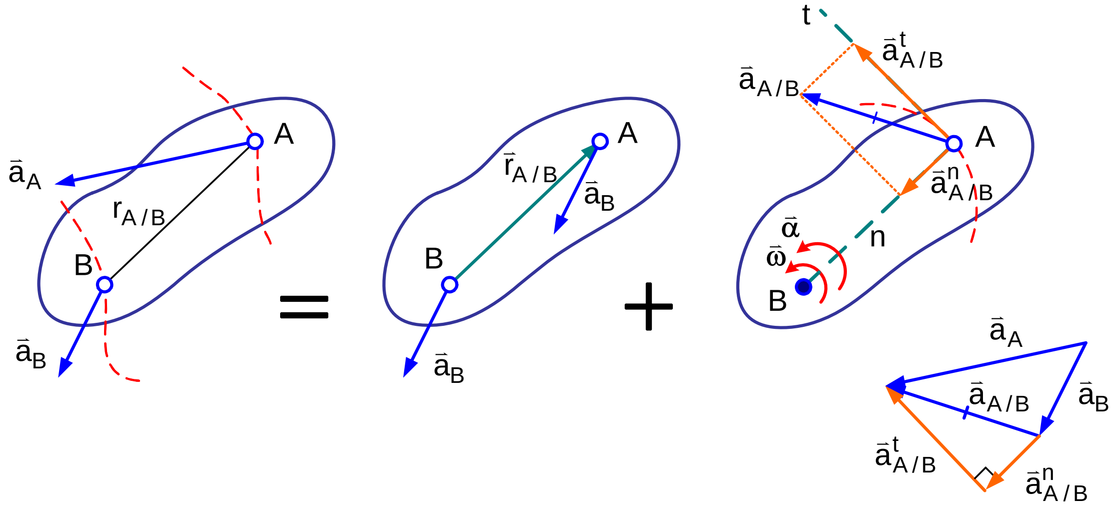
Vektorikolmitulon kehityskaavaa soveltamalla voidaan vielä kirjoittaa

$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{A/B}) = (\vec{\omega}\cdot\vec{r}_{A/B})\vec{\omega} - (\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})\vec{r}_{A/B} = -\omega^2\,\vec{r}_{A/B}$$

sillä tasoliikkeessä $\vec{\omega}\perp\vec{r}_{A/B}$, jolloin $\vec{\omega}\cdot\vec{r}_{A/B} = 0$. Kaavalle (5.15) tulee toinen muoto

$$\boxed{\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}^t_{A/B} + \vec{a}^n_{A/B} = \vec{a}_B + \vec{\alpha}\times\vec{r}_{A/B} - \omega^2\,\vec{r}_{A/B}} \tag{5.16}$$

Kuvassa 5.9 on havainnollistettu kaavaa (5.16), jonka mukaan voidaan tulkita translaation ja rotaation yhdistelmäksi. Piste B on vertailupiste ja pisteen A kiihtyvyys on translaatiokiihtyvyyden $\vec{a}_B$ ja rotaatiokiihtyvyyden $\vec{a}_{A/B}$ summa. Rotaatiokiihtyvyys jaetaan normaalikomponenttiin $\vec{a}^n_{A/B}$ ja tangentin suuntaiseen komponenttiin $\vec{a}^t_{A/B}$.



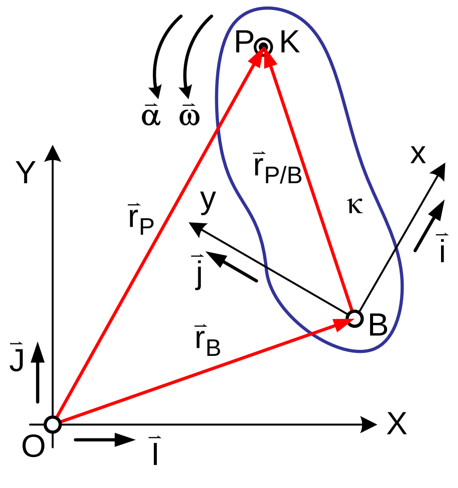
Kuva 5.9 Suhteellinen kiihtyvyys.

Kaavaa (5.16) voidaan käyttää kappaleen pisteiden kiihtyvyyksien ja kappaleen kulmakiihtyvyyden laskemiseen, kun osa kappaleen suureista tunnetaan. Vektoriyhtälö (5.16) sisältää kaksi komponenttiyhtälöä, joten sen avulla voidaan ratkaista korkeintaan kaksi suuretta. Nähdään myös, että kappaleen pisteiden kiihtyvyyksiä laskettaessa on tunnettava kappaleen kulmanopeus, mikä edellyttää nopeuksien tarkastelua. Yhtälö (5.16) voidaan ratkaista vektorimatematiikalla, trigonometrisesti tai graafisesti. Ratkaisun yhteydessä kannattaa aina laatia tilanteesta kuvan 5.9 mukainen vektorinelikulmio, joka helpottaa huomattavasti ratkaisua.

Todettakoon vielä, että nopeusnavan kiihtyvyys ei ole nolla. Nopeusnapaa ei näin ollen voi käyttää kiihtyvyyksien laskennassa, ellei sen kiihtyvyyttä oteta huomioon. Tasoliikkeellä on kylläkin olemassa ns. hetkellinen kiihtyvyysnapa, jonka kiihtyvyys on nolla. Hetkellisen kiihtyvyysnavan käyttöä ei tässä kuitenkaan tarkastella.

5.7 Partikkelin liike liikkuvassa kappaleessa

Edellä luvuissa 5.4 ja 5.6 tarkasteltiin suhteellisen liikkeen periaatteita kahden saman jäykän kappaleen partikkelin A ja B välillä. Tällöin voitiin ajatella, että vertailupisteen B mukana liikkuva koordinaatisto on translaatiossa ja tarkastelupisteen A suhteellinen nopeus $\vec{v}_{A/B}$ ja suhteellinen kiihtyvyys $\vec{a}_{A/B}$ on mitattu tässä koordinaatistossa ja ne aiheutuvat tarkasteltavan kappaleen rotaatiosta. Sovelluksissa esiintyy kuitenkin usein tilanteita, joissa pitää tarkastella kahdesta eri kappaleesta valittujen partikkelien välistä suhteellista liikettä. Esimerkiksi mekanismeissa osia on usein liitetty toisiinsa siten, että ensimmäisessä kappaleessa oleva niveltappi on sidottu liikkumaan pitkin toisessa kappaleessa oleva johdetta. Tällöin niveltapilla voi olla muutakin kuin rotaatiosta johtuvaa suhteellista nopeutta ja kiihtyvyyttä toisen kappaleen suhteen. Periaatteessa kysymys on tällöin siitä, että on tarkasteltava yleisessä liikkeessä olevassa jäykässä kappaleessa liikkuvan partikkelin kinematiikkaa. Nämä tarkastelut sujuvat parhaiten käyttämällä hyväksi kyseiseen jäykkään kappaleeseen kiinnitettyä ja sen mukana liikkuvaa koordinaatistoa, jota sanotaan seuraavassa kappalekoordinaatistoksi, jotta se erottuisi kiinteästä koordinaatistosta. Kappalekoordinaatisto voi siis olla sekä translaatiossa että rotaatiossa kiinteän koordinaatiston suhteen. Kappalekoordinaatiston avulla partikkelin absoluuttista liikettä voidaan tarkastella kahdessa osassa, jolloin se muodostuu yhdistämällä kappalekoordinaatistossa havaittu liike ja kappalekoordinaatiston liike.



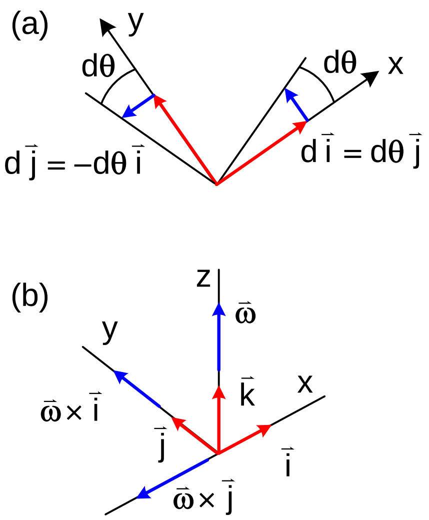
Kuva 5.10 Partikkelin liike liikkuvassa kappaleessa.

Tarkastellaan kuvan 5.10 kappaletta κ, joka on yleisessä tasoliikkeessä kulmanopeuden ollessa $\vec{\omega}$ ja kulmakiihtyvyyden $\vec{\alpha}$. Pisteeseen B on kiinnitetty xy-kappalekoordinaatisto, jonka akseleiden suuntaiset yksikkövektorit ovat $\vec{i}$ ja $\vec{j}$. Kiinteän XY-koordinaatiston akseleiden suuntaiset yksikkövektorit ovat vastaavasti $\vec{I}$ ja $\vec{J}$. Partikkeli P on kappaleeseen κ kuulumaton ja voi siis liikkua sen suhteen. Piste K on se kappaleen κ piste, jonka kohdalla partikkeli P on tarkasteluhetkellä. Pistettä K sanotaan kuljetuspisteeksi.

Partikkelin P absoluuttiselle paikkavektorille $\vec{r}_P$ voidaan kirjoittaa lauseke

$$\vec r_P = \vec r_B + \vec r_{P/B} = \vec r_B + (x\,\vec i + y\,\vec j) \tag{5.17}$$

jossa x ja y ovat pisteen P koordinaatit xy-koordinaatistossa. Partikkelin P absoluuttisen nopeuden $\vec v_P$ ja absoluuttisen kiihtyvyyden $\vec a_P$ laskeminen edellyttää sen absoluuttisen paikkavektorin $\vec r_P$ derivoimista ajan suhteen. Tällöin on erityisesti huomattava, että yksikkövektorit $\vec i$ ja $\vec j$ pyörivät xy-koordinaatiston mukana, eivätkä siis ole kiinteässä XY-koordinaatistossa vakiovektoreita, vaan niiden suunta muuttuu ajan kuluessa. Tästä seuraa, että yksikkövektoreiden $\vec i$ ja $\vec j$ aikaderivaatat eivät ole nollia. Nämä derivaatat saadaan selville kuvan 5.11 (a) avulla. Ajassa dt xy-koordinaatisto kiertyy kulman $d\theta = \omega\, dt$, mistä aiheutuu yksikkövektorin $\vec i$ muutos $d\,\vec i$, jonka suuruus on $d\theta$ ja suunta $\vec j$ eli $d\,\vec i = d\theta\,\vec j$. Samalla tavalla saadaan tulos $d\,\vec j = -d\theta\,\vec i$. Jakamalla muutokset aikavälillä dt saadaan kaavat



Kuva 5.11 Yksikkövektorien derivaatat.

$$\dot{\vec i} = \omega\,\vec j \qquad \dot{\vec j} = -\omega\,\vec i \tag{5.18}$$

Kuvan 5.11 (b) mukaan $\vec\omega \times \vec i = \omega\,\vec j$ ja $\vec\omega \times \vec j = -\omega\,\vec i$, joten yksikkövektoreiden derivaatat ovat

$$\boxed{\dot{\vec i} = \vec\omega \times \vec i \qquad \dot{\vec j} = \vec\omega \times \vec j} \tag{5.19}$$

Derivoimalla kaavassa (5.17) puolittain saadaan partikkelin P absoluuttinen nopeus

$$\vec v_P = \dot{\vec r}_B + (x\,\dot{\vec i} + y\,\dot{\vec j}) + (\dot x\,\vec i + \dot y\,\vec j) \tag{5.20}$$

Termi $\dot{\vec r}_B = \vec v_B$ on pisteen B absoluuttinen nopeus, termi $\dot x\,\vec i + \dot y\,\vec j = \vec v_{rel}$ on partikkelin P *xy*-kappalekoordinaatistossa havaittu nopeus ja kaavan (5.19) perusteella viimeinen termi menee muotoon $x\,\dot{\vec i} + y\,\dot{\vec j} = x\,\vec\omega \times \vec i + y\,\vec\omega \times \vec j = \vec\omega \times (x\,\vec i + y\,\vec j) = \vec\omega \times \vec r_{P/B}$. Partikkelin P absoluuttiselle nopeudelle saadaan näin ollen lauseke

$$\boxed{\vec v_P = \vec v_B + \vec v_{P/B} = \vec v_B + \vec\omega \times \vec r_{P/B} + \vec v_{rel}} \tag{5.21}$$

Suhteellisen nopeuden lausekkeesta $\vec v_{P/B} = \vec\omega \times \vec r_{P/B} + \vec v_{rel}$ nähdään, että pyörivän koordinaatiston käyttö aiheuttaa lisätermin $\vec\omega \times \vec r_{P/B}$. Koska $\vec r_{P/B} = \vec r_{K/B}$, kaavan (5.21) voidaan myös tulkita olevan muotoa $\vec v_P = \vec v_K + \vec v_{rel}$, jossa $\vec v_K = \vec v_B + \vec\omega \times \vec r_{K/B}$ on kuljetuspisteen nopeus.

Derivoimalla kaavassa (5.21) puolittain saadaan partikkelin P absoluuttinen kiihtyvyys

$$\vec{a}_P = \dot{\vec{v}}_B + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{P/B} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_{P/B} + \dot{\vec{v}}_{rel} \tag{5.22}$$

Termi $\dot{\vec{v}}_B = \vec{a}_B$ on pisteen B absoluuttinen kiihtyvyys ja $\dot{\vec{\omega}} = \alpha$ on kappaleen κ kulmakiihtyvyys. Nopeuden $\vec{v}_P$ lausekkeen johdosta näkyy, että $\dot{\vec{r}}_{P/B} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{P/B} + \vec{v}_{rel}$, joten kaavan (5.22) oikean puolen kolmannelle termille saadaan

$$\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_{P/B} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/B} + \vec{v}_{rel}) = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/B}) + \vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} \tag{5.23}$$

Kaavan (5.22) oikean puolen viimeiselle termille tulee vastaavasti lauseke

$$\dot{\vec{v}}_{rel} = (\dot{x}\,\dot{\vec{i}} + \dot{y}\,\dot{\vec{j}}) + (\ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j}) = \vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel} \tag{5.24}$$

jossa $\vec{a}_{rel}$ on xy-kappalekoordinaatistossa havaittu partikkelin P kiihtyvyys. Kokoamalla tulokset saadaan partikkelin A absoluuttiselle kiihtyvyydelle lauseke

$$\boxed{\vec{a}_P = \vec{a}_B + \vec{a}_{P/B} = \vec{a}_B + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{P/B} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/B}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel}} \tag{5.25}$$

Suhteellisen kiihtyvyyden lausekkeessa kolme ensimmäistä termiä eli $\vec{a}_{P/B} = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{P/B} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{P/B}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel}$ johtuvat pyörivän kappalekoordinaatiston käytöstä.

Kiihtyvyystermiä $\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}$ sanotaan Coriolis-kiihtyvyydeksi ranskalaisen G. Coriolisin mukaan, joka ensimmäisenä esitti sen lausekkeen. Ristitulon määritelmästä seuraa, että Coriolis-kiihtyvyys on kohtisuorassa suhteellista nopeutta $\vec{v}_{rel}$ vastaan. Kaavan (5.25) johdosta nähdään, että Coriolis-kiihtyvyys aiheutuu kahdesta eri syystä. Tästä seuraa, että Coriolis-kiihtyvyydelle on melko vaikea esittää yksinkertaista havainnollista tulkintaa.

Kaavan (5.25) voidaan myös tulkita olevan muotoa $\vec{a}_P = \vec{a}_K + \vec{a}_C + \vec{a}_{rel}$, missä termi $\vec{a}_K = \vec{a}_B + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{K/B} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{K/B})$ on kuljetuspisteen kiihtyvyys. Partikkelin P kiihtyvyys on siis sen kuljetuspisteen K kiihtyvyyden, Coriolis-kiihtyvyyden ja pyörivässä koordinaatistossa havaitun kiihtyvyyden summa.