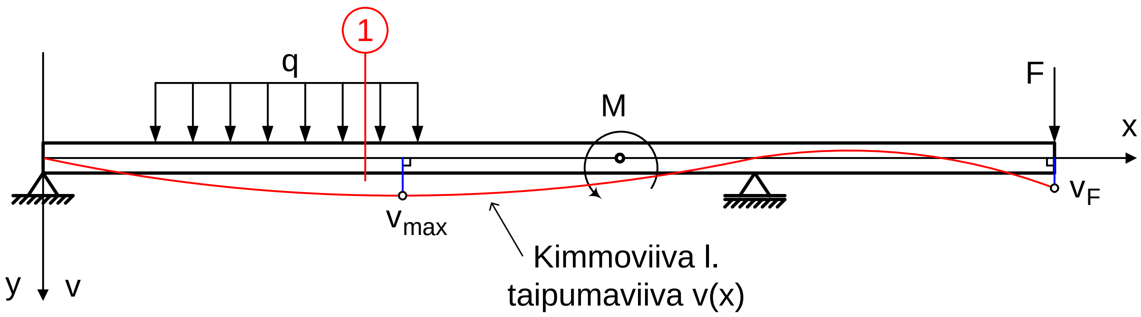
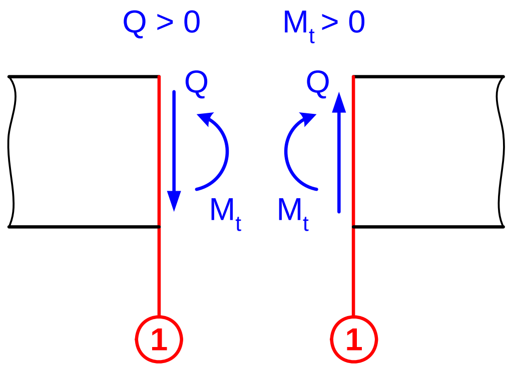
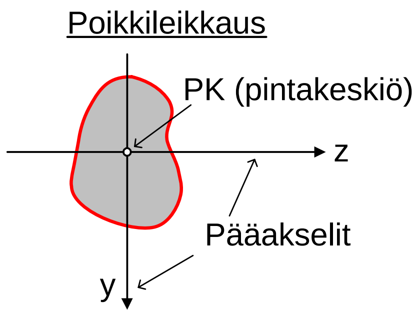
SUORAN PALKIN TAIVUTUS, JOHDANTO







$$\boxed{M_t}$$

$\Rightarrow$ Normaalijännitys $\sigma_x = \dfrac{M_t}{I_z} \cdot y$ (I_z on pääneliömomentti)

$\max|\sigma_x| = \dfrac{M_t}{W_z}$ ylä– tai alapinnassa (W_z on taivutusvastus)

$$\boxed{Q}$$

$\Rightarrow$ Leikkausjännitys $\tau_{xy} = \dfrac{Q\,S_z(y)}{I_z\,b(y)}$ (Jourawskin kaava)

(S_z on staattinen momentti, b on leveys)

$$\boxed{v(x)}$$

$EI_z v''(x) = -M_t(x)$ Kimmoviivan differentiaaliyhtälö

- Taivutusmomentin aiheuttama taipuma. Leikkausvoiman aiheuttamalla taipumalla on yleensä vähäinen merkitys.
- Taipumataulukot.

TAIVUTUSPALKIN RASITUSKUVAT

Pistekuormitukset ja tukireaktiot jakavat palkin alueisiin, joissa kuormitus q(x) on jakaantunut. Jakaantuneen kuormituksen alueella ovat voimassa yhteydet

$$\frac{dQ}{dx} = -q(x) \qquad \frac{dM_t}{dx} = Q(x) \qquad \frac{d^2M_t}{dx^2} = -q(x)$$

Kuormitukseton alue q(x)=0:

-Q-kuvassa on vakioarvo.

-M_t-kuvassa on vino suora, tarvitaan arvot välin päätepisteissä.

Tasaisen kuormituksen alue $q(x)=q_0$ (vakio):

-Q-kuvassa on vino suora, tarvitaan arvot välin päätepisteissä.

-M_t-kuvassa on paraabeli, tarvitaan arvot välin päätepisteissä ja lisäksi mahdollinen huippuarvo, joka on leikkausvoiman nollakohdassa.

Pistevoiman kohdalla:

-Q-kuvassa on pistevoiman suuruinen äkillinen muutos.

-M_t-kuvassa on kärkipiste.

Pistemomentin kohdalla:

-M_t-kuvassa on pistemomentin suuruinen äkillinen muutos.

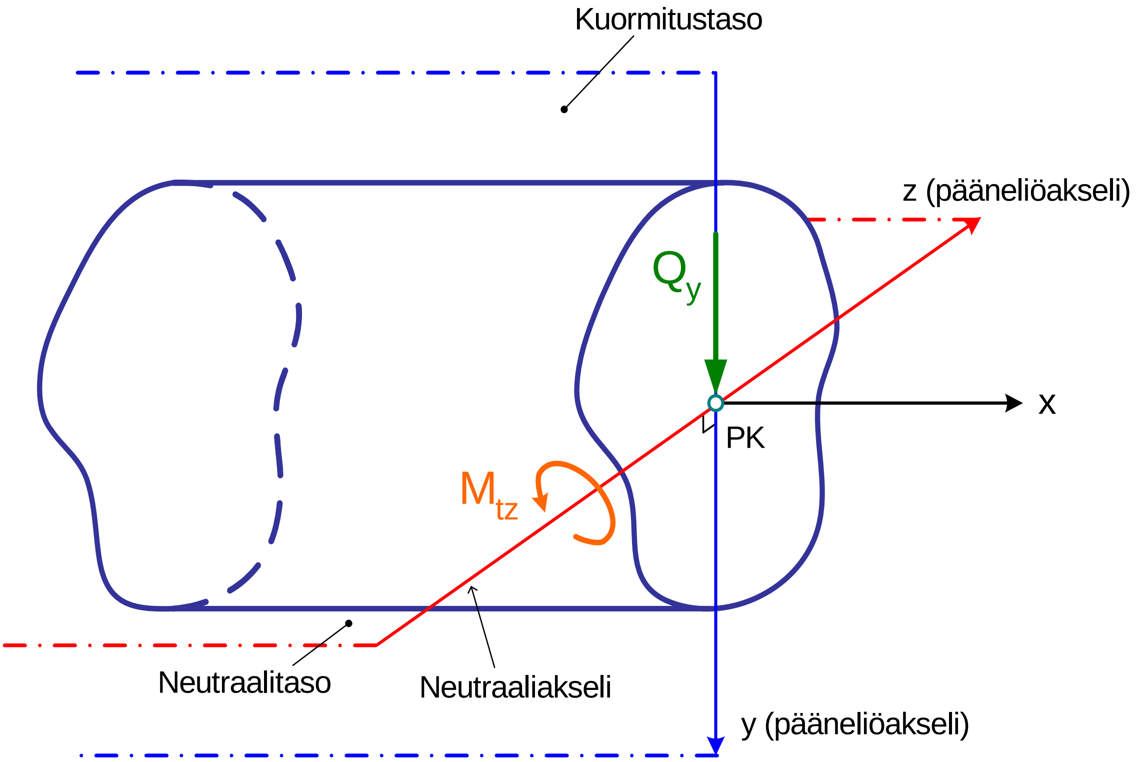
Rasituskuvien laadintaohje:

- Piirrä vapaakappalekuva ja ratkaise sen avulla tukireaktiot.
- Totea alueet, joihin pistekuormitukset jakavat palkin.
- Mieti rasituskuvien periaatteellinen muoto.
- Laske kuvien piirtämisessä tarvittavat poikkileikkausten rasitusten arvot.

Rasitusten laskenta yksittäisessä poikkileikkauksessa:

- Rasitukset aiheutuvat leikkauksen vasemmalla (oikealla) puolella olevista kuormituksista ja tukireaktioista.
- Rasitusten arvot ratkeavat aina leikkauksen vasemmalle (oikealle) puolelle jäävän palkin osan tasapainoehdoista.
- Tavallisesti tasapainoehtojen ratkaisu kirjoitetaan suoraan ilman palkin osan vapaakappalekuvaa.

SUORAN TAIVUTUKSEN PERUSKÄSITTEITÄ



- xyz-koordinaatiston origo on poikkileikkauksen pintakeskiössä (PK).

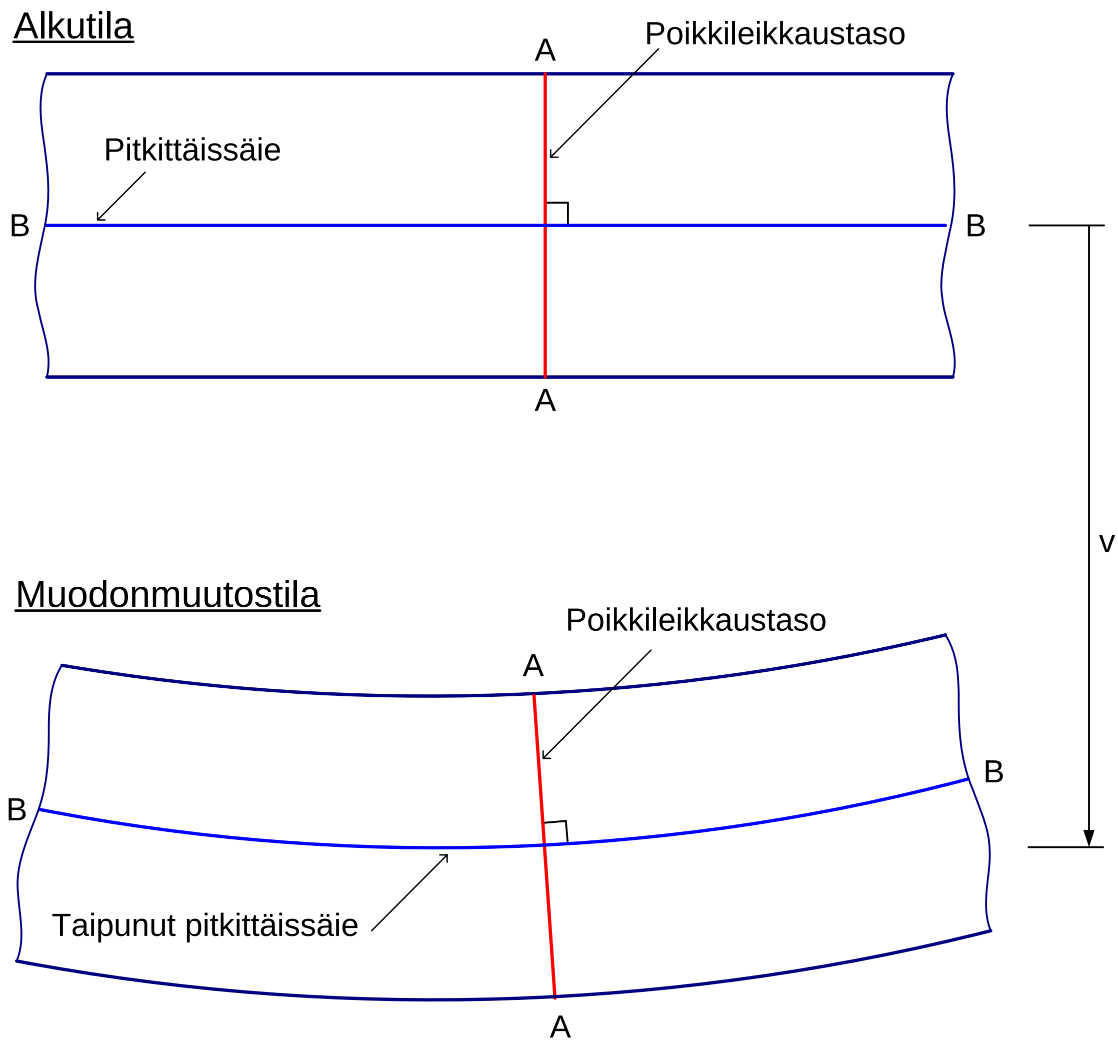
- yz-koordinaatisto on poikkileikkauksen pääneliökoordinaatisto (jolloin poikkipinnan tulomomentti $I_{yz} = 0$, esim. y tai/ja z symmetria-akseli).

- z on poikkileikkauksen neutraaliakseli, jonka pisteissä taivutusmomentista aiheutuva normaalijännitys $\sigma_x = 0$.

- Kuormitukset ja tukireaktiot sijaitsevat y-akselin kohdalla olevassa kuormitustasossa. Tällöin leikkausvoima (Q_y) on y-akselin suuntaan ja taivutusmomentti (M_{tz}) z-akselin ympäri.

- Neutraaliakseli on kohtisuorassa kuormitustasoa vastaan.

TAIVUTUSTEORIAN PERUSOLETUKSET



1. **Bernoullin hypoteesi:** Palkin poikkileikkaus säilyy taivutuksessa tasona, joka on kohtisuorassa palkin pituussäikeitä vastaan.

   Bernoullin hypoteesi on tarkasti voimassa vain puhtaan taivutuksen $(Q \equiv 0)$ alueella. Leikkausvoimasta Q aiheutuva leikkausjännitys τ aiheuttaa poikkileikkauksen A-A ja pitkittäissäikeen B-B välisen suoraan kulmaan liukuman γ, jolloin poikkileikkaus hieman käyristyy.

2. **Poikittaisvenymän huomiotta jättäminen:** Palkin poikkileikkaus säilyy muodonmuutostilassa yhtenevä alkutilan poikkileikkauksen kanssa.

   Pitkittäisvenymä ε on neutraaliakselin yhdellä puolella positiivinen ja toisella puolella negatiivinen, jolloin vastaavan poikittaisvenymän $\varepsilon_\perp$ johdosta poikkileikkaus supistuu neutraaliakselin yhdellä puolella ja laajenee toisella puolella.

TAIVUTUKSEN KINEMATIIKKA

Bernoullin hypoteesista seuraa pitkittäisvenymälle ε_x kinemaattisella tarkastelulla lauseke

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{y}{\rho}}$$

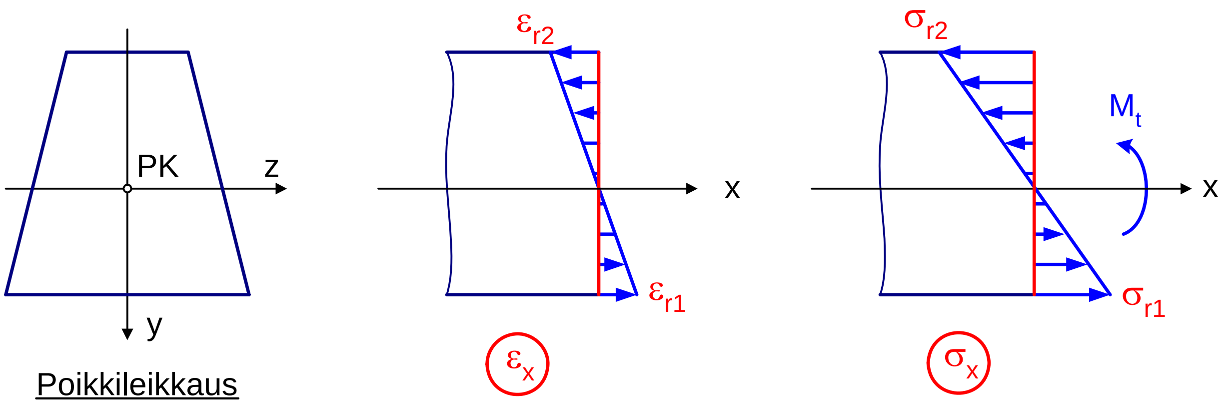
ρ on pitkittäissäikeen kaarevuussäde neutraaliakselin kohdalla
y on etäisyys neutraaliakselista

Kun poikittaisvenymät jätetään huomiotta, on palkissa vain normaalijännitys σ_x, jolle Hooken lain ollessa voimassa saadaan lauseke

$$\boxed{\sigma_x = E\frac{y}{\rho}}$$

E on materiaalin kimmomoduuli

Taivutusmomentista M_t aiheutuvan x-akselin suuntaisen venymän ε_x ja jännityksen σ_x jakaantuminen:



- z-akseli on neutraaliakseli, jonka pisteissä normaalijännitys $\sigma_x = 0$.
- Suurimmat jännityksen σ_x itseisarvot ovat poikkipinnan reunoilla.
- σ_{r1} on alareunan reunajännitys ja σ_{r2} yläreunan reunajännitys.

PALKIN TAIVUTUSJÄNNITYS

$$\sigma_x = E\frac{y}{\rho}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_t}{EI_z}$$

$$I_z = \int_A y^2\,dA$$

I_z on palkin poikkileikkauksen (pää)neliömomentti z-akselin suhteen, joka voidaan melko helposti laskea (kaavat, yhteenlaskuperiaate, Steinerin sääntö) tai saadaan standardiprofiileille suoraan taulukoista.

Palkin normaalijännitys<u>jakautuman</u> lopulliseksi <u>kaavaksi</u> tulee

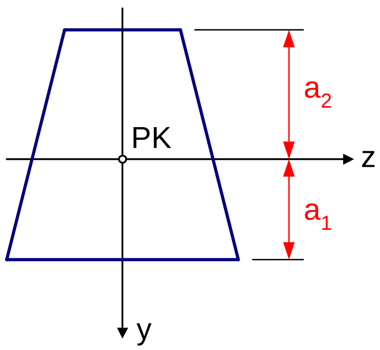
$$\sigma_x = \frac{M_t}{I_z}y$$

Palkin normaalijännitys vaihtelee korkeussuunnassa (y) lineaarisesti, mutta on sivusuunnassa (z) tietyllä korkeudella vakio.

Reunajännitykset:

a_1 alareunan reunaetäisyys

a_2 yläreunan reunaetäisyys



Alareunassa:

$$\sigma_{r1} = \frac{M_t}{I_z/a_1} = \frac{M_t}{W_{z1}}$$

Yläreunassa:

$$\sigma_{r2} = -\frac{M_t}{I_z/a_2} = -\frac{M_t}{W_{z2}}$$

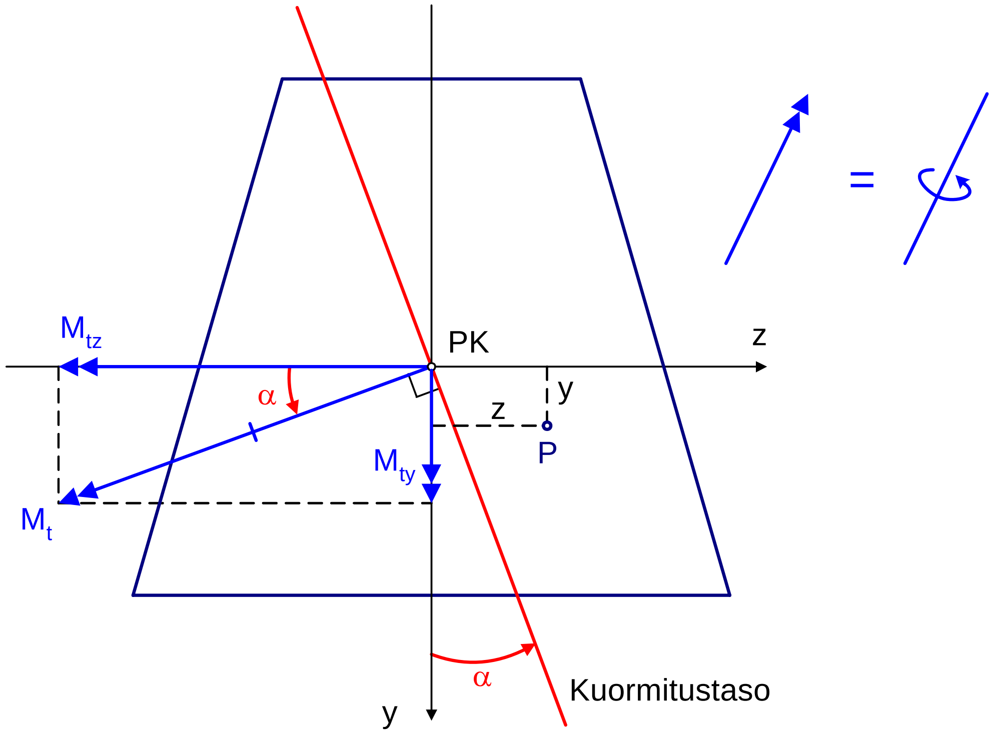
W_{z1} alareunan taivutusvastus

W_{z2} yläreunan taivutusvastus

$$|\sigma| = \frac{M_t}{W}$$

Reunajännitys

VINO TAIVUTUS



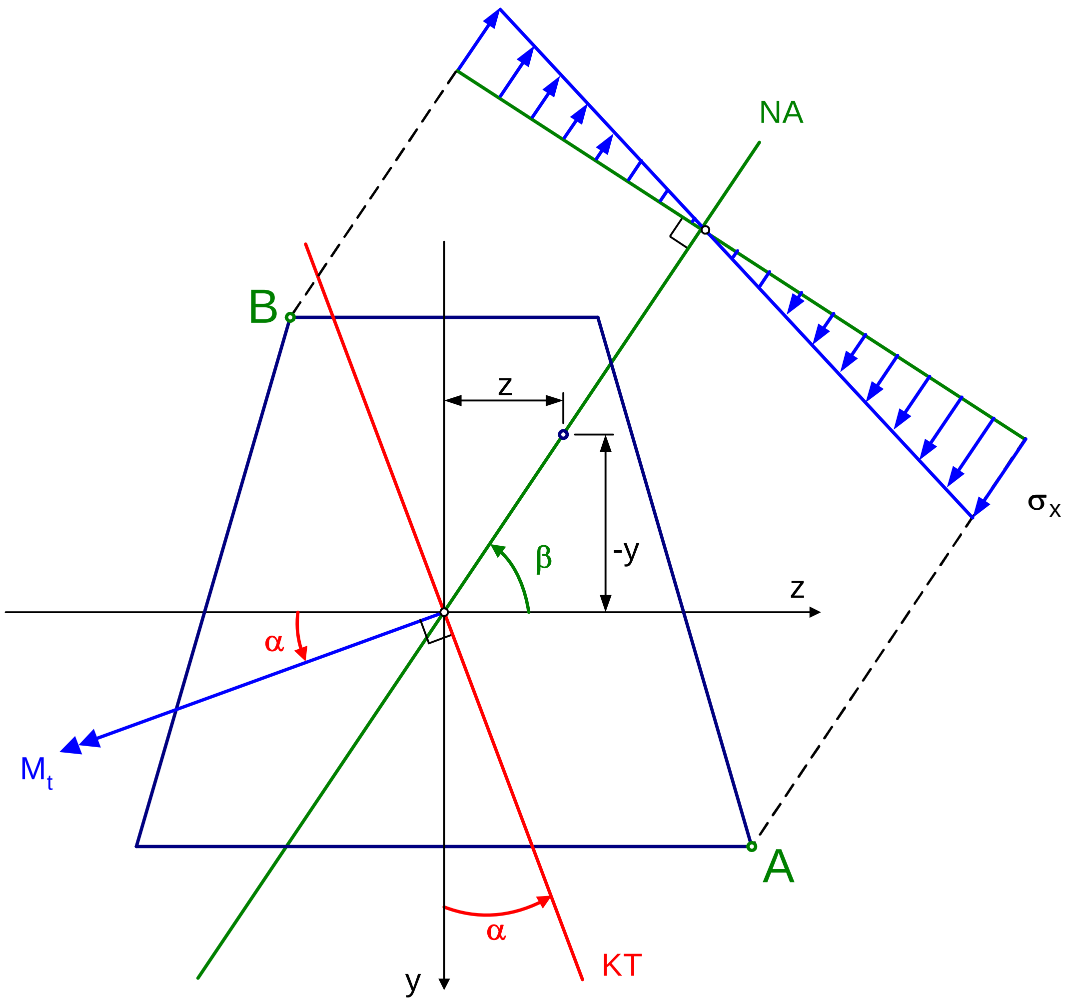
- yz-on poikkileikkauksen pääkoordinaatisto.
- Kuormitustaso muodostaa y-akseliin nähden kulman α .
- Taivutusmomenttivektori M_t on kohtisuorassa kuormitustasoa vastaan.

$$M_{ty} = M_t \sin\alpha \qquad M_{tz} = M_t \cos\alpha \qquad \frac{M_{ty}}{M_{tz}} = \tan\alpha$$

Taivutusmomentti M_t jaetaan pääakselin suuntaisiin komponentteihinsa M_{ty} ja M_{tz}, minkä jälkeen pisteen P normaalijännitys voidaan laskea yhteenlaskuperiaatteella suoran taivutuksen kaavaa käyttäen:

$$\boxed{\sigma_x = \frac{M_{tz}}{I_z} y + \frac{M_{ty}}{I_y} z}$$

VINON TAIVUTUKSEN NEUTRAALIAKSELI



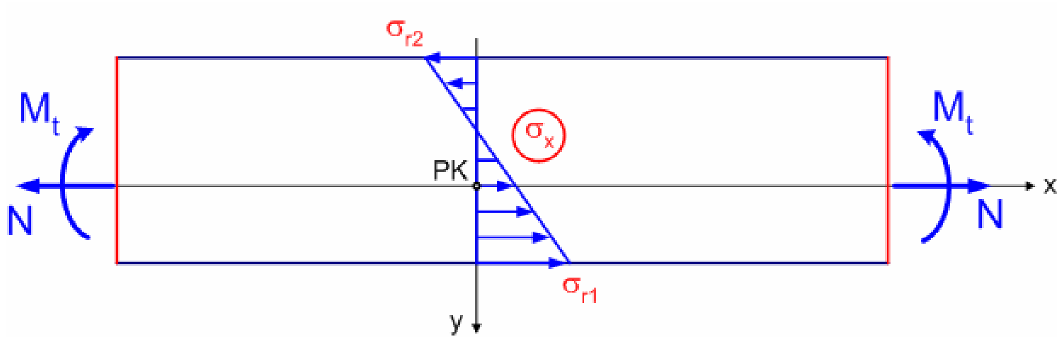
Neutraaliakselin yhtälö: $\sigma_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{M_{tz}}{I_z} y + \frac{M_{ty}}{I_y} z = 0$

$$\Rightarrow \qquad \tan\beta = \frac{-y}{z} = \frac{M_{ty}}{M_{tz}} \cdot \frac{I_z}{I_y} = \tan\alpha \cdot \frac{I_z}{I_y} \qquad \Rightarrow$$

Neutraaliakselin suuntakulman β laskenta: $\boxed{\frac{\tan\beta}{I_z} = \frac{\tan\alpha}{I_y}}$

β mitataan z-akselista samaan suuntaan kuin α y-akselista. Neutraaliakselista kauimpana olevat pisteet (A ja B) ovat poikkileikkauksen vaaralliset pisteet, joista löytyy suurin veto- ja puristusjännitys.

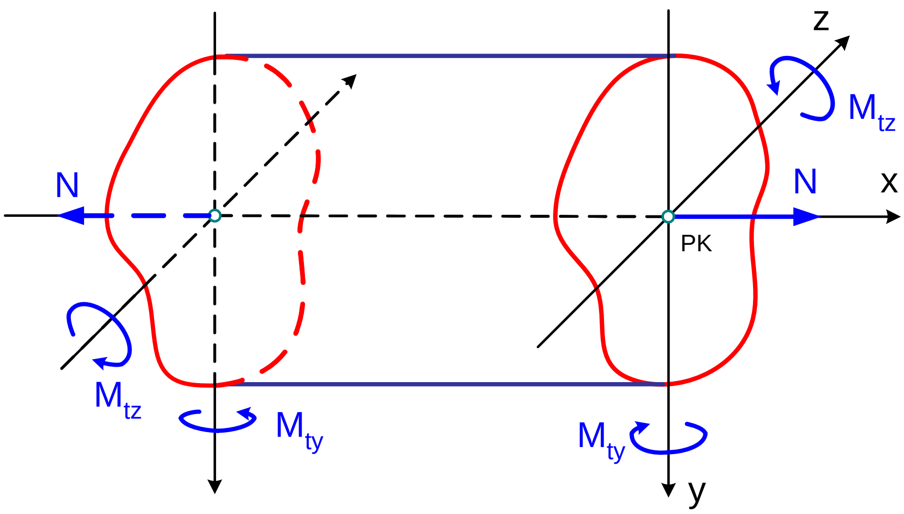
SAMANAIKAINEN NORMAALIVOIMA JA TAIVUTUS



Normaalijännitysjakautuma: $\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_t}{I_z} y$

Reunajännitykset: $\sigma_{r1} = \frac{N}{A} + \frac{M_t}{W_{z1}}$ $\sigma_{r2} = \frac{N}{A} - \frac{M_t}{W_{z2}}$

SAMANAIKAINEN NORMAALIVOIMA JA VINO TAIVUTUS



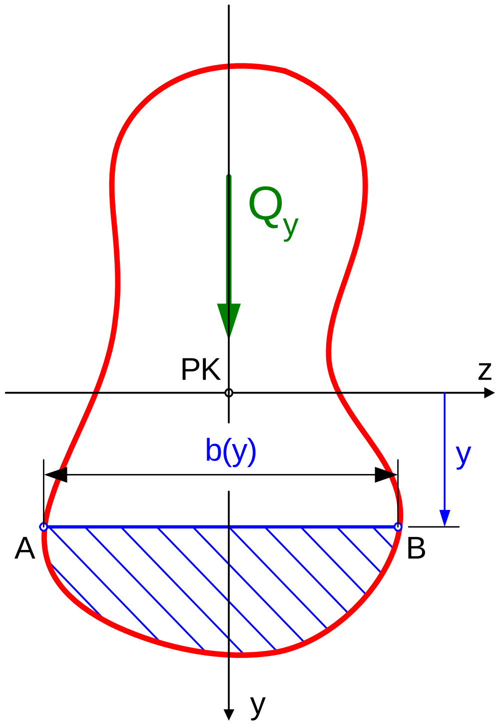
Normaalijännitysjakautuma: $\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_{tz}}{I_z} y + \frac{M_{ty}}{I_y} z$

Vaaralliset pisteet löytyvät taivutuksen neutraaliakselin avulla:

$\frac{\tan\beta}{I_z} = \frac{\tan\alpha}{I_y}$ $\tan\alpha = \frac{M_{ty}}{M_{tz}}$

TAIVUTUSPALKIN LEIKKAUSJÄNNITYS

Taivutuspalkin leikkausjännitys ei ole tasaisesti jakaantunut, vaan riippuu sekä y- että z-koordinaatista. Monissa tapauksissa z-riippuvuus on niin lievää, että se voidaan jättää huomiotta, jolloin saadaan ns. Jourawskin kaava. Tehdystä oletuksesta johtuen Jourawskin kaavaa ei voida soveltaa tapauksiin joissa leikkausjännityksen z-riippuvuus on merkittävä (esim. I-palkin laippalevy).



Oletukset:

- yz-koordinaatisto on poikkileikkauksen pääkoordinaatisto.
- Suora taivutus, jossa taivutusmomentti vaikuttaa z-akselin ympäri ja leikkausvoima y-suuntaan.
- Leikkausjännitys τ_{xy} on tietyllä korkeudella y sivusuunnassa tasan jakaantunut (riippumaton z-koordinaatista).

Keskimääräinen leikkausjännitys korkeudella y saadaan Jourawskin kaavasta:

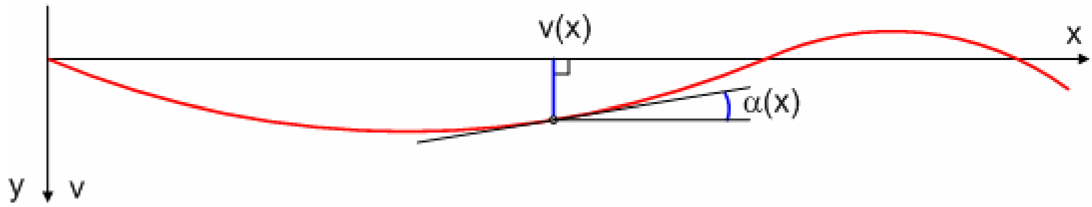
$$\boxed{\tau_{xy}(y) = \frac{Q_y\, S_z(y)}{I_z\, b(y)}}$$

- Q_y on poikkileikkauksessa vaikuttava leikkausvoima (rasituskuvasta).
- $S_z(y)$ on tarkastelukorkeuden y alapuolelle jäävän poikkipinnan osan staattinen momentti z-akselin suhteen. Voidaan käyttää myös tarkastelukorkeuden y yläpuolelle jäävän poikkipinnan osan staattista momenttia z-akselin suhteen, koska sillä on sama itseisarvo.
- I_z on poikkipinnan (pää)neliömomentti z-akselin suhteen.
- $b(y)$ on poikkileikkauksen leveys z-suunnassa tarkastelukorkeudella y (voi koostua useammasta palasta).

KIMMOVIIVAN DIFFERENTIAALIYHTÄLÖ

Oletukset:

- Suora taivutus (y pääakseli), pienet taipumat.
- x-akselin pisteet siirtyvät vain y-suunnassa (x-akselin venymistä ei oteta huomioon).
- Kyseessä on taivutusmomentin aiheuttama taipuma.



Palkin taipumaviiva $\boxed{v(x)}$. Palkin kaltevuuskulma $\boxed{\alpha(x)}$.

$$v'(x) = \tan\alpha(x) \qquad \alpha(x) \approx \tan\alpha(x) \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{v'(x) = \alpha(x)}$$ (yksikkö radiaani)

Palkin kimmoviivan kaarevuussäde $\rho(x)$ on lujuusopin mukaan

$$\rho(x) = \frac{EI(x)}{|M_t(x)|}$$

Tasokäyrän kaarevuussäde on matematiikan mukaan

$$\rho(x) = \frac{\left(1 + v'(x)^2\right)^{3/2}}{|v''(x)|} \approx \frac{1}{|v''(x)|}$$ pienet kaltevuudet $v'(x)$

Ottamalla huomioon taivutusmomentin merkkisopimus seuraa kimmoviivan (linearisoitu) differentiaaliyhtälö

$$\boxed{v''(x) = -\frac{M_t(x)}{EI(x)}}$$

Kun taivutusjäykkyys $EI(x)$ on vakio, menee kimmoviivan DY muotoon

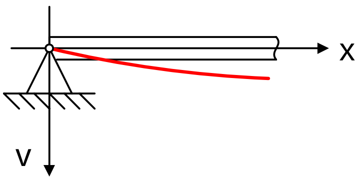
$$\boxed{EI\,v''(x) = -M_t(x)}$$

- Taipumaviiva saadaan edellä olevasta kimmoviivan differentiaaliyhtälöstä integroimalla taivutusmomentin lauseke kahdesti.
- Taivutusmomentin lauseke on yleensä määritelty palkin alueissa paloittain, jolloin integrointi on suoritettava vastaavasti useassa osassa (tai kärkisulkeiden menetelmää käyttäen).
- Integroitaessa syntyvät integroimisvakiot määrätään palkin tuennasta tai taipuman ja kaltevuuskulman jatkuvuusehdoista.
- Tavallisimmat tuenta- ja kuormitustapaukset löytyvät valmiiksi integroituna taipumataulukoista.

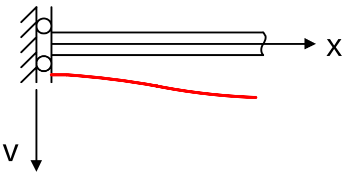
Tavallisimmat palkin reuna- ja väliehdot:

<u>Tuennat palkin päässä</u>

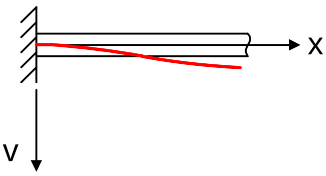
Niveltuki: v=0



Luistituki: v'=0

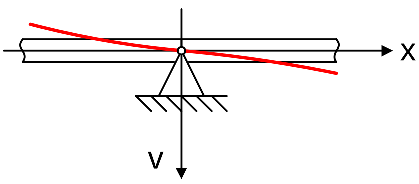


Jäykkä tuki: v=0 v'=0

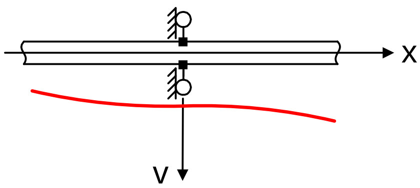


<u>Tuennat palkin alueella</u>

Väliniveltuki: v=0 v' jatkuva

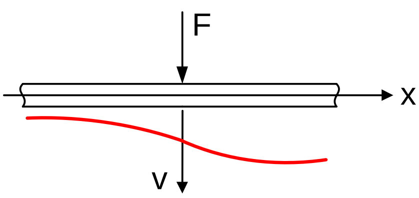


Väliluistituki: v'=0 v jatkuva



<u>Pistekuormitukset palkin alueella</u>

Pistevoima: v ja v' jatkuvia



Pistemomentti: v ja v' jatkuvia