

IV. KUORIEN KALVOTEORIAA

1 JOHDANTO

Kuorirakenteen keskipinta on jo ennen muodonmuutoksia kaareva pinta. Kaarevasta muodosta seuraa, että keskipinnan ja sen normaalin suuntaisia kuormituksia ei voi käsitellä erikseen kuten tasopintarakenteella. Kun kuorta kuormitetaan keskipinnan normaalin suunnassa, pystyy se kaarevuutensa ansiosta kantamaan osan kuormituksesta keskipinnan suuntaisilla kalvorasituksilla eli kuormituksesta syntyy keskipinnan suuntaisten taivutus- ja vääntöjännitysten lisäksi kalvojännityksiä. Vastaavasti kuoren keskipinnan suuntainen kuormitus voi kuoren kaarevuuden takia aiheuttaa siihen taivutusta ja vääntöä eli kuormituksesta syntyy kalvojännitysten lisäksi keskipinnan suuntaisia taivutus- ja vääntöjännityksiä.

Ohuen kimmoisen kuoren perusyhtälöt esitti ensimmäisenä Love v. 1888. Ne perustuvat yksinkertaistaviin oletuksiin, joita sanotaan Loven hypoteeseiksi. Vastaavaa kuoriteoriaa sanotaan klassiseksi kuoriteoriaksi. Myöhemmin on esitetty tarkempia, mutta samalla mutkikkaampia kuoriteorioita. Loven hypoteesit ovat seuraavat:

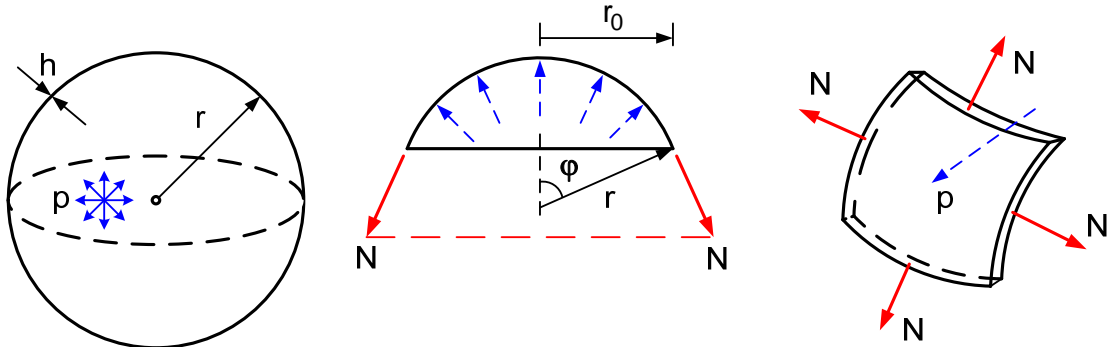
1. Kuori on ohut. Kuorta on ohut, jos sen paksuus h verrattuna keskipinnan pääkaarevuussäteisiin R_1 ja R_2 on pieni; kriteerinä voi olla esimerkiksi $h < R_i / 10$.
2. Kuoren siirtymät ovat pieniä, jolloin voidaan käyttää lineaarista teoriaa. Siirtymä voidaan katsoa pieneksi, jos se on alle viidesosa kuoren paksuudesta.
3. Keskipinnan normaalin suuntaiset normaalijännitykset ovat niin pieniä muihin jännityksiin verrattuina, että niitä ei tarvitse ottaa huomioon.
4. Keskipinnan normaalilla olevat kuoren pisteet pysyvät tästä taipumalla ja venymällä syntyneen kimmopinnan normaalilla eikä normaalin pituus muutu muodonmuutoksessa. Tämän oletuksen mukaan normaalin suuntainen venymä ja normaalin ja keskipinnan välinen liukuma ovat nolliä kuoren pisteissä.

Klassisen kuoriteorian perusyhtälöt johdetaan näistä hypoteeseista lähtien. Saatava yhtälöryhmä on mutkikas, sillä kuoren kaarevuudesta johtuen yhtälöiden muodostamisessa on käytettävä keskipintaan liittyvää käyräviivaista koordinaatistoa. Kuoren normaalin ja keskipinnan suuntaisten rasitusten kytkentä mutkistaa omalta osaltaan yhtälöitä. Tässä yhteydessä ei tarkastella klassisen kuoriteorian yleisiä yhtälöitä.

2 KUOREN KALVOTILA

Kuori kantaa kuormituksensa osittain keskipinnan suuntaisten rasitusten eli kalvovoimien ja osittain taivutus- ja vääntömomenttien sekä leikkausvoimien avulla. Vastaavia kuoren rasitustiloja kutsutaan kalvotilaksi ja taivutustilaksi. Tietyin edellytyksin kuoreen syntyvällä taivutustilalla on niin vähäinen merkitys, että se voidaan jättää huomioon ottamatta kalvotilan rinnalla. Tarkastellaan esimerkkinä kuoren kalvotilasta kuvan 2.1 sisäpuolisen ylipaineen p kuormittamaa pallokuorta. Kuoren keskipinta on r -säteinen pallo ja sen paksuus on h . Paine kuormitus p on keskipintaa vastaan koh-

tisuora kuormitus. Seuraavassa osoitetaan, että kuori kantaa tämän kuormituksen pääasiassa kalvovoimiensa avulla. Merkitään symbolilla N kuoren leikkauksessa $\varphi = \text{vakio}$ vaikuttavaa normaalivoimatiheyttä, joka tarvitaan, jotta kuori olisi staattisessa tasapainossa. N on rengasmaisen viivakuormitus kuoren keskipinnan ympyrän muotoisessa leikkauksessa. Kuormituksen ja rakenteen symmetriasta seuraa, että leikkausvoimatiheys kuoren keskipinnan suunnassa on kaikkialla nolla.



Kuva 2.1. Pallokuori ja sen elementti.

Kuvasta 2.1 saadaan pystysuuntaiseksi voimatasapainoyhtälöksi

$$\uparrow p \cdot \pi r_0^2 - 2\pi r_0 \cdot N \sin \varphi = 0 \Rightarrow N = \frac{pr_0}{2 \sin \varphi} \Rightarrow N = pr/2 \quad (2.1)$$

Tulos (2.1) on voimassa kuoren kaikissa pisteissä, sillä N on riippumaton kulmasta φ . Kuoren keskipinnan elementissä on kuvan 2.1 kuormitustilanne, josta aiheutuvat keskipinnan pisteen pääjännitykset ovat

$$\sigma_1 = \sigma_2 = N/h \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2h} \quad (2.2)$$

Normaalin suuntainen pääjännitys on pieni (suuruusluokkaa $-p$) näihin verrattuna, joten keskipinnan päävenymiksi $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ saadaan käyttämällä Hooken lakia tasojännitystilaoletuksin

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu \sigma_2) = (1 - \nu) \frac{pr}{2Eh} \quad (2.3)$$

Venymien (2.3) johdosta pallon ympärysmitta muuttuu arvoon $2\pi r' = 2\pi r(1 + \varepsilon_1)$, joten muodonmuutoksen jälkeen pallon säde on $r' = r(1 + \varepsilon_1)$. Pinnan kaarevuuden muutos on siis

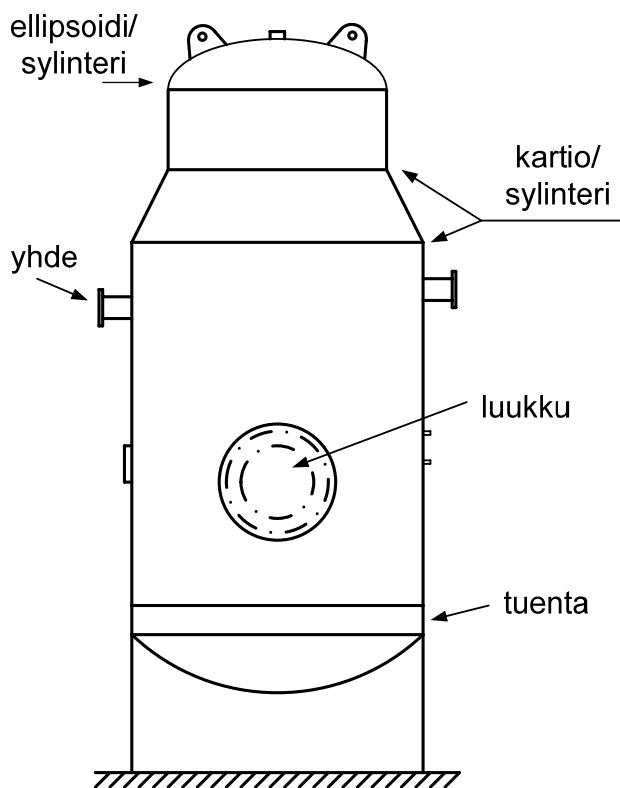
$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{1 + \varepsilon_1} - 1 \right) = -\frac{\varepsilon_1}{r} \frac{1}{1 + \varepsilon_1} \approx -\frac{\varepsilon_1}{r} \quad (2.4)$$

Sijoittamalla kaavaan (2.4) ε_1 kaavasta (2.3) saadaan

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) \approx -\frac{\varepsilon_1}{r} = -\frac{(1-\nu)p}{2Eh} \quad (2.5)$$

Kuoren taivutusmomenttitiheydelle M saadaan likiarvo sijoittamalla laatan taivutusmomenttitiheyden $M_x = D(\kappa_x + \nu\kappa_y)$ kaavaan kaarevuuksille κ_x ja κ_y arvo $\Delta(1/r)$ yhtälöstä (2.5). jolloin seuraa tulos

$$M = \frac{-D(1-\nu^2)p}{2Eh} = -\frac{ph^2}{24} \quad (2.6)$$



Kuva 2.2. Paineastia.

Vastaava suurin normaalijännitys on

$$\sigma_t = -6M/h^2 = p/4 \quad (2.7)$$

Vertailemalla kaavojen (2.2) ja (2.7) jännityksiä σ_1 ja σ_t , nähdään niiden suhteeksi

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_t} = \frac{2r}{h} \quad (2.8)$$

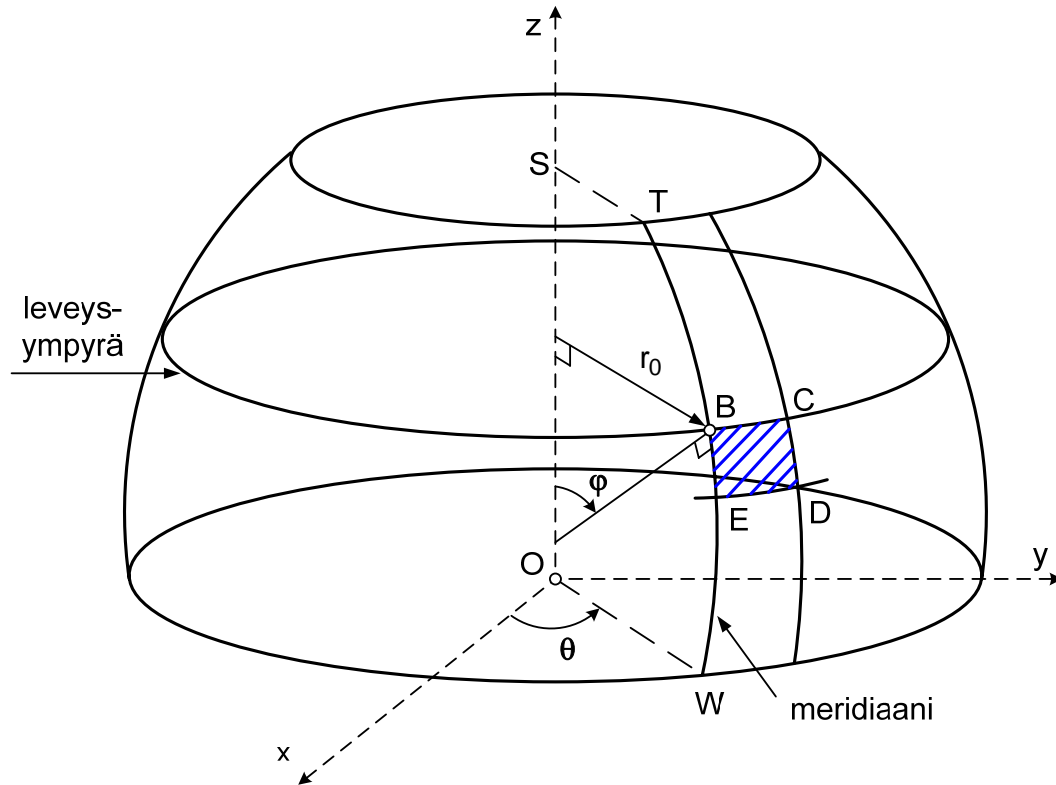
josta näkyy, että kalvojäännitys σ_1 on taivutusjäännitystä σ_t selvästi suurempi, sillä ohuella kuorella $2r \gg h$. Nähdään, että pallokuori kantaa normaalin suuntaisen painekuormituksen pääasiassa keskipintaa venyttävillä kalvorasituksilla.

Edellä esitetty tarkastelu liittyi yksinkertaiseen pallokuoreen.

Kuoren peruskäyttäytymistä tehdyt johtopäätökset pätevät yleisemmällekin geometrialle ja kuormitukselle, kun tarkastelukohta on tarpeeksi kaukana kuoreen taivutusta aiheuttavien vaikutusten esiintymiskohdista. Tavallisimpia syitä taivutuksen syntymiseen ovat kuoren geometrian epäjatkuvuuskohdat sekä diskreetit ja epäsymmetriset kuormitukset ja tuennat. Usein taivutustilalla on merkitystä vain näiden häiriökohtien välittömässä läheisyydessä ja kauempana kalvotila on hallitseva. Kuvassa 2.2 on tästä esimerkkinä paineastia, jonka kuvaan on merkitty geometrian epäjatkuvuuskohdat, joiden lähistöllä taivutustilalla on merkitystä.

3 PYÖRÄHDYSSYMMETRISEN KUOREN KALVOVOIMAT

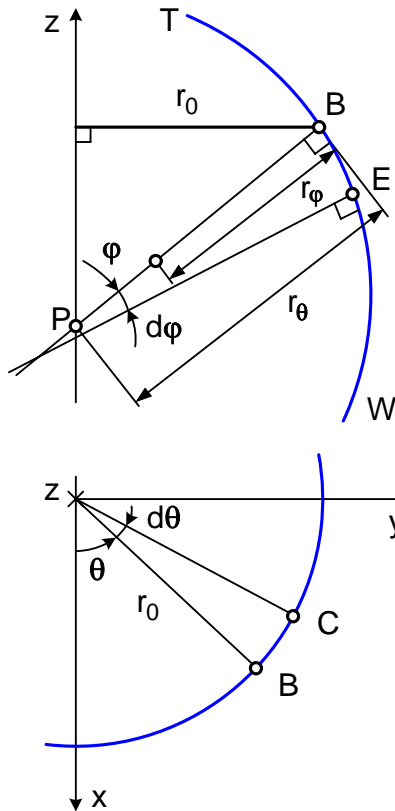
Pyörähdyspinta syntyy, kun tasokäyrä pyörähtää tasossaan olevan suoran ympäri. Pyörähtävää tasokäyrää sanotaan pinnan meridiaaniksi ja sen pisteiden piirtämiä ympyröitä leveysympyröiksi. Kuvassa 3.1 on esitetty erään pyörähdyspinnan kuva, jossa pyörähdysakselina on koordinaattiakseli z .



Kuva 3.1 Pyörähdyspinta ja sen elementti.

Pinnan pisteen B sijainti tunnetaan, kun siihen liittyvät suureet θ , ϕ , ja r_0 on annettu. Kuvassa 3.1 on pinnasta kahden meridiaanin ja leveysympyrän avulla erotettu pintaelementti $BCDE$. Jatkossa tarvitaan tämän elementin sivujen BE ja BC pituuksia, joiden laskemiseen tarvitaan pinnan pääkaarevuussäteet pisteessä B . Pinnan kaarevuus on sen kaarevuussäteen käänteisarvo. Kun pintaa leikataan pisteessä B sitä vastaan kohtisuoralla tasolla, syntyy tähän tasoon liittyvä leikkauskäyrä. Pinnan kaarevuus leikkaustason suhteen on syntyneen leikkauskäyrän kaarevuus tavanomaisessa mielessä. Pintateoriassa osoitetaan, että pinnan pisteeseen liittyy kaksi toisiaan vastaan kohtisuoraa tasoa, joita vastaavat kaarevuudet ovat kaarevuuden ääriarvoja eli pääkaarevuuksia. Pääkaarevuussäteet ovat näiden käänteisarvot.

Pyörähdyspinnan pääkaarevuudet esiintyvät meridiaanitasossa (taso $OSTW$ kuvassa 3.1) ja meridiaanitasoa vastaan kohtisuorassa pinnan normaalitasossa. On syytä huomata, että jälkimmäinen pääkaarevuustasoista ei ole leveysympyrän taso. Meridiaanitasoon liittyvä pinnan pääkaarevuussäde r_ϕ on meridiaanikäyrän kaarevuussäde. Toinen pääkaarevuussäde r_θ sijaitsee myös meridiaanitasossa ja on se pinnan



Kuva 3.2 Pääkaarevuussäteet.

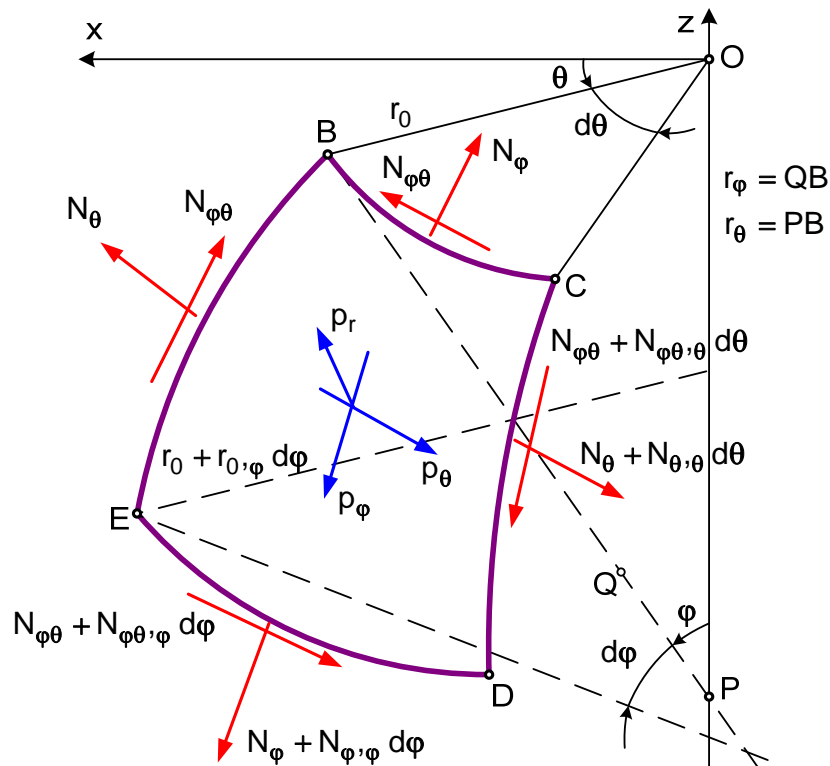
normaalin se osa, joka jää meridiaanin ja pyörähdysakselin väliin eli jana PB kuvassa 3.2. Kuvasta 3.2 nähdään, että leveysympyrän säteelle r_0 on voimassa

$$r_0 = r_\theta \sin \varphi \quad (3.1)$$

Lisäksi kuvasta 3.2 näkyy, että

$$\begin{aligned} BE &= r_\varphi d\varphi \\ BC &= r_0 d\theta = r_\theta \sin \varphi d\theta \end{aligned} \quad (3.2)$$

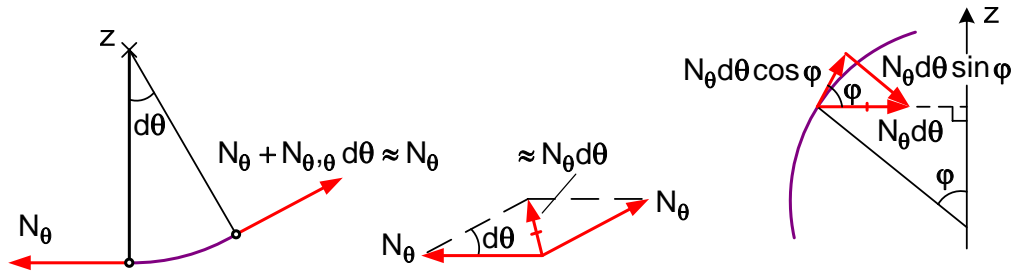
Kuvassa 3.3 on kuoren keskipinnan elementti ja siihen vaikuttavat kalvovoimat N_φ , N_θ ja $N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi}$ sekä pintakuormituksen komponentit p_r , p_φ ja p_θ . Kalvovoimat ovat kuoren leikkauksen keskipinnan suuntaiset normaali- ja leikkausvoimatiheydet. N_φ on meridiaanivoima, N_θ kehävoima ja $N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi}$ kalvoleikkausvoima.



Kuva 3.3 Pyörähdyskuoren kalvovoimat.

Kuvan 3.3 elementille voidaan kirjoittaa kolme voimatasapainoyhtälöä. Aloitetaan meridiaanin tangentin suuntaisesta yhtälöstä, jolloin kuvista 3.3 ja 3.4 seuraa tulos

$$(N_{\varphi\theta} + N_{\varphi\theta,\theta} d\theta) \cdot r_\varphi d\varphi - N_{\varphi\theta} \cdot r_\varphi d\varphi + (N_\varphi + N_{\varphi,\varphi} d\varphi) \cdot (r_0 + r_{0,\varphi} d\varphi) d\theta - N_\varphi \cdot r_0 d\theta - N_\theta d\theta \cos \varphi \cdot r_\varphi d\varphi + p_\varphi \cdot r_0 d\theta \cdot r_\varphi d\varphi = 0 \quad (3.3)$$



Kuva 3.4 Kehävoiman vaikutus φ - ja r -suunnan tasapainoon.

φ -tasapainoyhtälö sievenee kaavan (3.4) ensimmäiseksi yhtälöksi. Leveysympyrän tangentin ja keskipinnan normaalin suuntaisiksi tasapainoehdoiksi saadaan

$$(N_{\varphi\theta} + N_{\varphi\theta,\varphi} d\varphi) \cdot (r_0 + r_{0,\varphi} d\varphi) d\theta - N_{\varphi\theta} \cdot r_0 d\theta + (N_\theta + N_{\theta,\theta} d\theta) \cdot r_\varphi d\varphi - N_\theta \cdot r_\varphi d\varphi - N_{\varphi\theta} d\theta \cos \varphi \cdot r_\varphi d\varphi + p_\theta \cdot r_0 d\theta \cdot r_\varphi d\varphi = 0 \quad (3.4)$$

$$- N_\theta d\theta \sin \varphi \cdot r_\varphi d\varphi - N_\varphi d\varphi \cdot r_0 d\theta + p_r \cdot r_0 d\theta \cdot r_\varphi d\varphi = 0 \quad (3.5)$$

joista saadaan sieventämällä kaavan (3.6) toinen ja kolmas yhtälö. Kaavan (3.6) yhtälöitä sanotaan pyörähdyskuoren kalvovoimien tasapainodifferentiaaliyhtälöiksi.

$$\begin{aligned} (r_0 N_\varphi)_{,\varphi} + r_\varphi N_{\varphi\theta,\theta} - r_\varphi N_\theta \cos \varphi + r_0 r_\varphi p_\varphi &= 0 \\ (r_0 N_{\varphi\theta})_{,\varphi} + r_\varphi N_{\theta,\theta} + r_\varphi N_{\varphi\theta} \cos \varphi + r_0 r_\varphi p_\theta &= 0 \\ r_\varphi \sin \varphi N_\theta + r_0 N_\varphi - r_0 r_\varphi p_r &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ryhmässä (3.6) on sama määrä yhtälöitä ja tuntemattomia. Kalvovoimat saadaan ratkaistua suoraan tasapainoyhtälöistä eli kalvotilassa oleva pyörähdyskuori on staattisesti määrätty, jonka voimasuureet ratkeavat ilman muodonmuutosten tarkastelua.

3.1 Pyörähdysymmetrinen kuormitus ja tuenta

Jos kuoren geometrian lisäksi sen kuormitus ja tuenta ovat pyörähdysymmetriset, menevät yhtälöt (3.6) huomattavasti yksinkertaisempaan muotoon. Tässä tapauksessa on $N_{\varphi\theta} = 0$, $p_{\theta} = 0$ ja suureet N_{φ} ja N_{θ} ovat kulmasta θ riippumattomia.

Ryhmän (3.6) keskimäinen yhtälö toteutuu identtisesti ja muut menevät muotoon

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi}(r_0 N_{\varphi}) - r_{\varphi} N_{\theta} \cos \varphi + r_0 r_{\varphi} p_{\varphi} &= 0 \\ r_{\varphi} \sin \varphi N_{\theta} + r_0 N_{\varphi} - r_0 r_{\varphi} p_r &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ryhmälle (3.7) löydetään ratkaisu suljetussa muodossa. Kun sen jälkimmäiseen yhtälöön sijoitetaan kaavasta (3.1) $\sin \varphi = r_0 / r_{\theta}$, saadaan aluksi

$$r_{\varphi} \frac{r_0}{r_{\theta}} N_{\theta} + r_0 N_{\varphi} - r_0 r_{\varphi} p_r = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{N_{\theta}}{r_{\theta}} + \frac{N_{\varphi}}{r_{\varphi}} = p_r \quad (3.8)$$

joka on kaavan (3.9) ensimmäinen yhtälö. Kertomalla ryhmän (3.7) ensimmäinen yhtälö puolittain funktiolla $\sin \varphi$ ja sijoittamalla $r_{\varphi} \sin \varphi N_{\theta}$ ryhmän (3.7) toisesta yhtälöstä saadaan

$$\frac{d}{d\varphi}(r_0 N_{\varphi}) \sin \varphi + r_0 N_{\varphi} \cos \varphi = r_0 r_{\varphi} p_r \cos \varphi - r_0 r_{\varphi} p_{\varphi} \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad (3.9)$$

$$\frac{d}{d\varphi}(r_0 N_{\varphi} \sin \varphi) = r_{\theta} r_{\varphi} (p_r \cos \varphi \sin \varphi - p_{\varphi} \sin^2 \varphi) \quad (3.10)$$

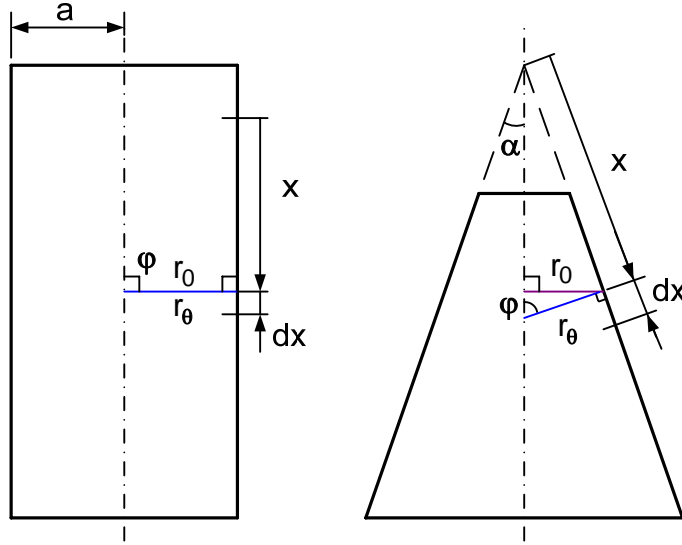
Tästä seuraa integroimalla kaavan (3.11) toinen yhtälö.

$$\begin{aligned} \frac{N_{\theta}}{r_{\theta}} + \frac{N_{\varphi}}{r_{\varphi}} &= p_r \\ N_{\varphi} &= \frac{1}{r_{\theta} \sin^2 \varphi} \left[\int r_{\theta} r_{\varphi} (p_r \cos \varphi - p_{\varphi} \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi + C \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

jossa C on integroimisvakio, joka määräytyy tuennasta. Pyörähdysymmetrisesti tuetun ja kuormitetun pyörähdyskuoren kalvovoimat saadaan siis kaavoilla (3.11). Jos kuoren huippu on umpinainen, kalvovoiman N_{φ} lauseke on

$$N_{\varphi} = \frac{1}{r_{\theta} \sin^2 \varphi} \left[\int_0^{\varphi} r_{\theta} r_{\varphi} (p_r \cos \varphi - p_{\varphi} \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi \right] \quad (3.12)$$

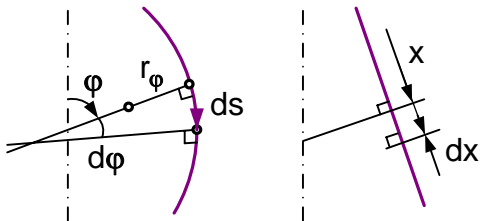
4 SUORAN MERIDIAANIN PYÖRÄHDYSKUORET



Kuva 4.1 Sylinteri- ja kartiokuori.

Jos pyörähdyskuoren meridiaani on suora, on kyseessä sylinterikuori tai kartiokuori. Sylinterikuoren meridiaani on yhdensuuntainen pyörähdysakselin kanssa, mutta kartiokuoren meridiaani leikkaa pyörähdysakselin. Näille suoran meridiaanin pyörähdyskuorille ei voida käyttää kulmaa φ koordinaattina, koska se on vakio. Kuvasta 4.1 näkyy, että sylinterille $\varphi = \pi/2$ ja kartiolle $\varphi = \pi/2 - \alpha$. Lisäksi kaarevuussäde $r_\varphi = \infty$.

Kulman φ tilalle on vaihdet-



Kuva 4.2 x-koordinaatti.

tava pitkin meridiaanisuoraa kulkeva koordinaatti x kuvan 4.2 mukaisesti. Kalvovoimien tasapainoyhtälöt (3.6) ja (3.7) on myös muunnettava vastaavasti. Tämä onnistuu rajatarkastelulla hyödyntämällä yhteyksiä

$$dx = \lim_{r_\varphi \rightarrow \infty} r_\varphi d\varphi \quad ()_{,x} = \frac{1}{r_\varphi} ()_{,\varphi} \quad (4.1)$$

4.1 Sylinterikuoren tasapainoyhtälöt

Sylinterikuorella on $r_\varphi = \infty$, $r_\theta = a$, $r_0 = a$ ja $\varphi = \pi/2$, jossa a on sylinterin säde. Kaavasta (3.6) seuraa näillä arvoilla yhtälöt

$$\begin{aligned} \frac{a}{r_\varphi} N_{\varphi,\varphi} + N_{\varphi\theta,\theta} + a p_\varphi &= 0 & \frac{a}{r_\varphi} N_{\varphi\theta,\varphi} + N_{\theta,\theta} + a p_\theta &= 0 \\ N_\theta + \frac{a}{r_\varphi} N_\varphi - a p_r &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Kun $r_\varphi \rightarrow \infty$ ja merkinnöiksi vaihdetaan $N_\varphi \rightarrow N_x$, $N_{\varphi\theta} \rightarrow N_{x\theta}$ ja $p_\varphi \rightarrow p_x$, saadaan tulokseksi tasapainoyhtälöt

$$\boxed{a N_{x,x} + N_{x\theta,\theta} + a p_x = 0 \quad a N_{x\theta,x} + N_{\theta,\theta} + a p_\theta = 0 \quad N_\theta - a p_r = 0} \quad (4.3)$$

Kun kuormitus ja tuenta ovat rotaatiosymmetriset, on lisäksi $N_{x\theta} = 0$ ja $p_\theta = 0$ sekä suureet N_x ja N_θ ovat kulmasta θ riippumattomia. Tällöin tasapainoyhtälöt ovat

$$N_{x,x} + p_x = 0 \quad N_\theta - \alpha p_r = 0 \quad (4.4)$$

Kaavasta (4.4) tulee kalvovoimien ratkaisuksi (C on reunaehdosta saatava vakio)

$$N_x = -\int p_x dx + C \quad N_\theta = \alpha p_r \quad (4.5)$$

4.2 Kartiokuoren tasapainoyhtälöt

Kartiokuorella on $r_\varphi = \infty$, $\varphi = \pi/2 - \alpha$, $r_\theta = x \sin \alpha$ ja $r_\theta = x \tan \alpha$, kun x mitataan kartion huipusta kuvan 4.1 mukaisesti. Kaavasta (3.3) seuraa näillä arvoilla

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_\varphi} (x \sin \alpha N_\varphi)_{,\varphi} + N_{\varphi\theta,\theta} - N_\theta \sin \alpha + x \sin \alpha p_\varphi &= 0 \\ \frac{1}{r_\varphi} (x \sin \alpha N_{\varphi\theta})_{,\varphi} + N_{\theta,\theta} + N_{\varphi\theta} \sin \alpha + x \sin \alpha p_\theta &= 0 \\ \cos \alpha N_\theta + \frac{x}{r_\varphi} \sin \alpha N_\varphi - x \sin \alpha p_r &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Kun $r_\varphi \rightarrow \infty$ ja $N_\varphi \rightarrow N_x$, $N_{\varphi\theta} \rightarrow N_{x\theta}$ ja $p_\varphi \rightarrow p_x$, saadaan tasapainoyhtälöt

$$\begin{aligned} (x N_x)_{,x} + \frac{1}{\sin \alpha} N_{x\theta,\theta} - N_\theta + x p_x &= 0 \quad N_\theta - x \tan \alpha p_r = 0 \\ (x N_{x\theta})_{,x} + \frac{1}{\sin \alpha} N_{\theta,\theta} + N_{x\theta} + x p_\theta &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Rotaatiosymmetrisen kuormituksen ja tuennan tapauksessa on $N_{x\theta} = 0$ ja $p_\theta = 0$ sekä suureet N_x ja N_θ ovat kulmasta θ riippumattomia. Tasapainoyhtälöiksi tulee

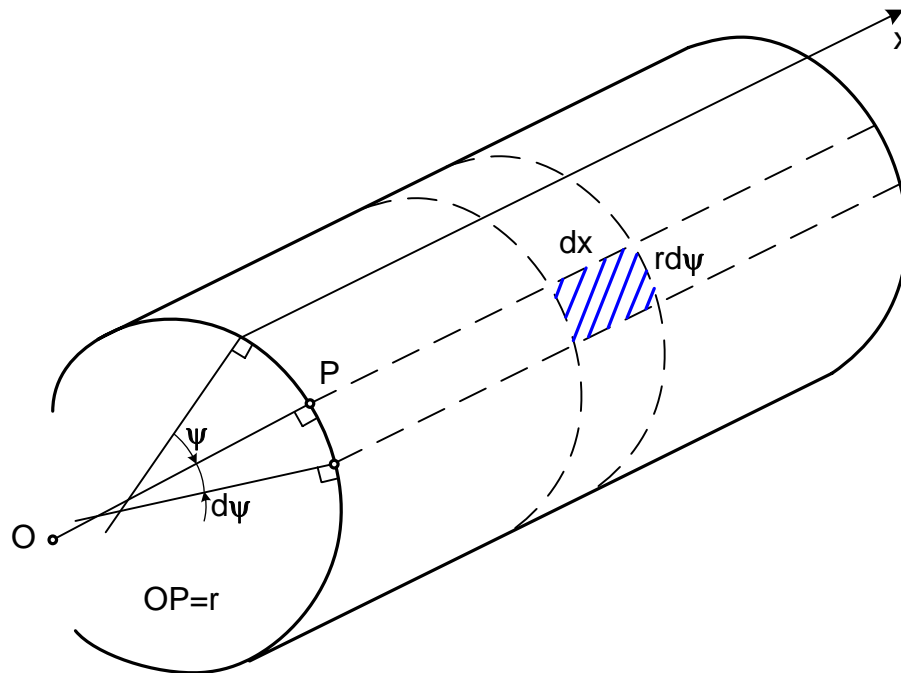
$$(x N_x)_{,x} - N_\theta + x p_x = 0 \quad N_\theta - x \tan \alpha p_r = 0 \quad (4.8)$$

Kaavasta (4.8) tulee kalvovoimien ratkaisuksi (C on reunaehdosta saatava vakio)

$$N_\theta = x \tan \alpha p_r \quad N_x = \frac{1}{x} \left[\int (N_\theta - x p_x) dx + C \right] \quad (4.9)$$

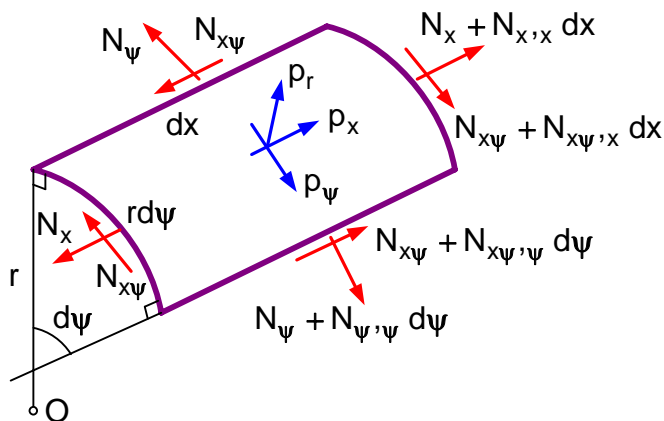
5 YLEISEN SYLINTERIKUOREN KALVOVOIMAT

Yleinen sylinterikuori tarkoittaa kuorta, jonka keskipinta on yleinen sylinteripinta. Tämä taas on translaatiossa olevan suoran ura. Jos muodostajasuora palaa lähtökoh- taansa, syntyy suljettu sylinteripinta, mutta muussa tapauksessa avoin sylinteripinta.



Kuva 5.1 Yleinen sylinterikuori.

On ilmeistä, että yleisen sylinterikuoren pääkaarevuussäteet ovat muodostajasuoran kautta kulkevassa kuoren normaalitasossa ja tätä vastaan kohtisuorassa kuoren poikkileikkaustasossa. Edellistä vastaava pääkaarevuussäde on ääretön ja jälkimmäistä vastaava poikkileikkauskäyrän kaarevuussäde. Yleistä sylinterikuorta käsitellään kuvan 5.1 koordinaatteja x ja ψ käyttäen. x mitataan muodostajasuoraa pitkin ja ψ pinnan normaalin suuntakulma mitattuna x -akselin kohdan normaalista.



Kuva 5.2 Kalvovoimat.

Kuvassa 5.2 on yleisen sylinterikuoren keskipinnan differentiaalelementtiin $dx \cdot d\psi$ vaikuttavat kalvovoimat N_x , N_ψ ja $N_{x\psi} = N_{\psi x}$.

Kuvan 5.2 avulla voidaan kirjoittaa kalvovoimien tasapainodifferentiaaliyhtälöt x , ψ ja r suunnissa. Näin saadaan seuraavat tulokset

$$\begin{aligned}
N_{x,x} dx \cdot r d\psi + N_{x\psi,\psi} d\psi \cdot dx + p_x \cdot dx \cdot r d\psi &= 0 \\
N_{\psi,\psi} d\psi \cdot dx + N_{x\psi,x} dx \cdot r d\psi + p_\psi \cdot dx \cdot r d\psi &= 0 \\
-N_\psi d\psi \cdot dx + p_r \cdot dx \cdot r d\psi &= 0
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Yhtälöistä (5.1) seuraa tasapainodifferentiaaliyhtälöiksi

$$\boxed{N_{x,x} + \frac{1}{r} N_{x\psi,\psi} + p_x = 0 \quad N_{x\psi,x} + \frac{1}{r} N_{\psi,\psi} + p_\psi = 0 \quad N_\psi - r p_r = 0} \tag{5.2}$$

Ryhmän (5.2) toisesta ja ensimmäisestä yhtälöstä saadaan

$$N_{x\psi,x} = -\left(p_\psi + \frac{1}{r} N_{\psi,\psi}\right) \Rightarrow N_{x\psi} = -\int \left(p_\psi + \frac{1}{r} N_{\psi,\psi}\right) dx + f_1(\psi) \tag{5.3}$$

$$N_{x,x} = -\left(p_x + \frac{1}{r} N_{x\psi,\psi}\right) \Rightarrow N_x = -\int \left(p_x + \frac{1}{r} N_{x\psi,\psi}\right) dx + f_2(\psi) \tag{5.4}$$

joissa $f_1(\psi)$ ja $f_2(\psi)$ ovat reunaehdoista saatavia funktioita. Yleisen sylinterikuoren kalvovoimat saadaan siis kaavoista

$$\boxed{
\begin{aligned}
N_\psi - r p_r &= 0 & N_{x\psi} &= -\int \left(p_\psi + \frac{1}{r} N_{\psi,\psi}\right) dx + f_1(\psi) \\
N_x &= -\int \left(p_x + \frac{1}{r} N_{x\psi,\psi}\right) dx + f_2(\psi)
\end{aligned}
} \tag{5.5}$$

6 KALVOJÄNNITYKSET

Edellä käsiteltiin kuorien kalvoteoriaa kalvovoimia käyttäen. Kalvovoimat ovat kuoren keskipintaan liittyvät normaali- ja leikkausvoimatiheydet. Niitä vastaavat kalvojännitykset ovat tasan jakaantuneita kuoren paksuussuunnassa. Silloin esimerkiksi pyörähdyskuoren kalvojännitykset ovat

$$\sigma_\varphi = N_\varphi / h \quad \sigma_\theta = N_\theta / h \quad \tau_{\varphi\theta} = N_{\varphi\theta} / h \tag{6.1}$$

Jos kuoreen syntyy taivutustila, rasittavat sitä myös taivutus- ja vääntömomenttitiheydet. Näistä syntyy normaali- ja leikkausjännityksiä, jotka jakaantuvat kuoren paksuussuunnassa lineaarisesti. Tämä merkitsee sitä, että kalvotila käyttää materiaalin lujuuden tehokkaammin kuin taivutustila, joten kuorien suunnittelussa olisi pyrittävä mahdollisuuksien mukaan välttämään taivutustilan syntymistä. Taivutustilassa kuorta rasittavat lisäksi keskipinnan normaalin suuntaiset leikkausvoimatiheydet, joista aiheutuvat leikkausjännitykset ovat kuitenkin tavallisesti pieniä.