

## 7 2D-SOLIDIRAKENTEET

### 7.1 Johdanto

Edellä tarkasteltiin interpolointia ja numeerista integrointia emoneliön ja emokolmion alueissa. Emoelementtien avulla voidaan muodostaa vaihtelevan muotoisia ja haluttu tavalla xy-tasolle sijoittuvia kaksiulotteisia elementtejä ns. kuvaustekniikalla. Tällöin käytetään koordinaattimuunnosta, joka kuvaa emoelementin pisteet kuvaelementin pisteiksi siten, että emoelementin solmut kuvautuvat kuvaelementin vastinsolmuiksi. Kuvauksen pitää olla kääntäen yksikäsitteinen, jotta kuvaelementti toimisi verkon osana. Tämä tarkoittaa sitä, että kukin emoelementin piste kuvautuu täsmälleen yhdeksi kuvaelementin pisteeksi ja kullakin kuvaelementin pisteellä on täsmälleen yksi alkukuva emoelementissä.

Lujuusopissa tasoelementtejä tarvitaan esimerkiksi levyrakenteiden käsittelyyn, jolloin kyseessä on tasojännitystilän (TJT) elementti, mutta ne ovat tarpeen myös tasomuodonmuutostilan (TMT) yhteydessä. Näihin tapauksiin liittyvät elementit eroavat toisistaan vain konstitutiivisen matriisin  $[E]$  osalta, joten niiden teoria voidaan esittää samanaikaisesti. Tietyn elementin käyttö verkon osana vaatii sen jäykkyyismatriisin  $[k]$  ja ekvivalenttisen solmukuormitusvektorin  $\{r\}$  määrittämistä kaavoista (4.20) ja (4.21). Tämä edellyttää kenttäfunktioiden (siirtymäkomponenttien) derivointia ja tiettyjen lausekkeiden integrointia elementin alueessa. Nämä operaatiot voidaan palauttaa emoelementin yhteyteen, jolloin käsittely tulee helpommaksi ja systemaattisemmaksi.

### 7.2 Lineaarinen kolmisivuinen elementti

#### 7.2.1 Emokolmion geometrinen kuvaus

Tarkastellaan kuvan 7.1 (a) lineaarista kolmisivuista elementtiä, jonka solmut sijaitsevat elementin kärkipisteissä ja niiden koordinaatit ovat  $(x_i, y_i)$   $i = 1, 2, 3$ . Määritellään solmukoordinaattien vektorit  $\{\hat{x}\}$  ja  $\{\hat{y}\}$  seuraavasti

$$\{\hat{x}\} = \{x_1 \quad x_2 \quad x_3\} \quad \{\hat{y}\} = \{y_1 \quad y_2 \quad y_3\} \quad (7.1)$$

Lineaariset interpolointifunktiot kuvan 7.1 (b) emoelementin alueessa ovat

$$N_1 = 1 - \xi - \eta \quad N_2 = \xi \quad N_3 = \eta \quad (7.2)$$

Määritellään elementin geometrian kuvausmatriisi  $[G]$  seuraavasti

$$[G] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] = [1 - \xi - \eta \quad \xi \quad \eta] \quad (7.3)$$

Edellä on merkintöjen yksinkertaistamiseksi jätetty interpolointifunktioista  $N_1, N_2, N_3$  ja kuvausmatriisista  $[G]$  niiden argumentit  $\xi$  ja  $\eta$  pois. Näin menetellään jatkossa usein myös muiden suureiden yhteydessä. Lukijan on kuitenkin syytä tarkoin hahmottaa, mitkä suureet riippuvat emoelementin koordinaateista  $\xi$  ja  $\eta$ .

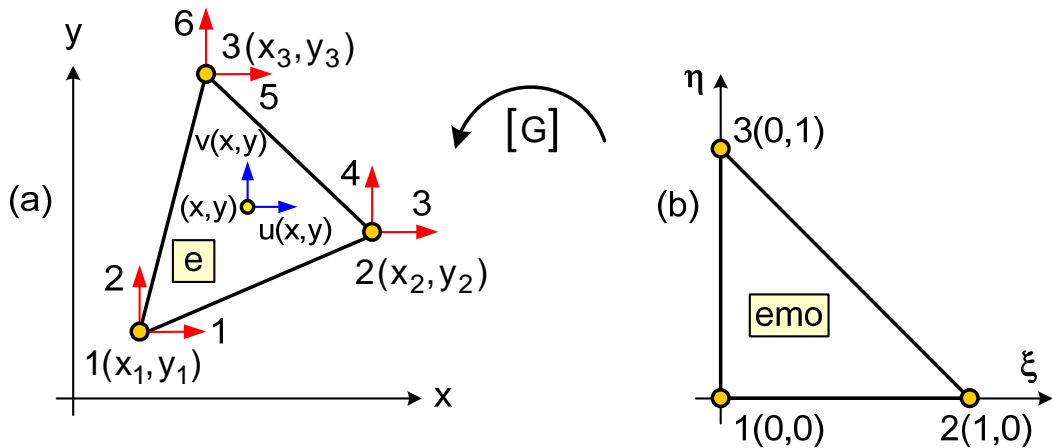
Lineaarinen kuvaus, joka muuntaa emoelementin  $xy$ -tason kolmioelementiksi  $e$ , jonka kärjet ovat pisteissä  $(x_i, y_i)$   $i = 1, 2, 3$ , on

$$\begin{aligned} x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 = (1 - \xi - \eta) x_1 + \xi x_2 + \eta x_3 \\ y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 = (1 - \xi - \eta) y_1 + \xi y_2 + \eta y_3 \end{aligned} \quad (7.4)$$

Tällöin emokolmion kärkipisteet kuvautuvat kuvan 7.1 solmunumeroinnin mukaisesti. Kuvaus (7.4) voidaan kirjoittaa tiiviimmin muotoon

$$\boxed{x = [G] \{\hat{x}\} \quad y = [G] \{\hat{y}\}} \quad (7.5)$$

Koska kuvaus (7.4) on lineaarinen, se säilyttää suorat suorina, yhdensuuntaiset yhdensuuntaisina ja jakosuhteet ennallaan. Emoelementin sivut kuvautuvat janoiksi, jotka määräytyvät päätepisteidensä perusteella. Tästä seuraa, että elementtiverkossa vierekkäisiksi kuvatut elementit liittyvät toisiinsa ilman aukkoja. Kuvaus (7.4) on kääntäen yksikäsitteinen, kun kuvaelementin solmut ovat eri pisteissä.



Kuva 7.1 Emokolmion lineaarinen kuvaus  $xy$ -tasolle.

Kuvaus (7.4) antaa kuvaelementin koordinaatit emoelementin koordinaattien funktiona eli  $x = x(\xi, \eta)$  ja  $y = y(\xi, \eta)$ . Tietyn kenttäfunktion  $f(x, y)$  osittaisderivaatoiksi muuttujien  $\xi$  ja  $\eta$  suhteen tulee ketjusäännön mukaisesti

$$f_{,\xi} = f_{,x} x_{,\xi} + f_{,y} y_{,\xi} \quad f_{,\eta} = f_{,x} x_{,\eta} + f_{,y} y_{,\eta} \quad (7.6)$$

Kirjoitetaan edellä oleva tulos matriisimuotoon

$$\begin{bmatrix} f_{,\xi} \\ f_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{,x} \\ f_{,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{,x} \\ f_{,y} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} f_{,x} \\ f_{,y} \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

Matriisi  $[J]$  on kuvauksen Jacobin matriisi. Kuvausyhtälöistä (7.4) seuraa Jacobin matriisille ja sen determinantille lausekkeet

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 & -y_1 + y_2 \\ -x_1 + x_3 & -y_1 + y_3 \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

$$|J| = \begin{vmatrix} -x_1 + x_2 & -y_1 + y_2 \\ -x_1 + x_3 & -y_1 + y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 2A \quad (7.9)$$

jossa  $A$  on kuvaelementin pinta-ala. Kaavasta (7.9) tulee  $|J| > 0$ , kun solmut numeroidaan kiertäen elementti vastapäivään. Kaavasta (7.7) seuraa tulos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_{,x} \\ f_{,y} \end{bmatrix} &= [J]^{-1} \begin{bmatrix} f_{,\xi} \\ f_{,\eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{,\xi} \\ f_{,\eta} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} -y_1 + y_3 & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3 & -x_1 + x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{,\xi} \\ f_{,\eta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.10)$$

jota tarvitaan elementin kinemaattisen matriisin määrittämiseen. Kuvaelementin yli olevalle integraalille tulee matematiikan mukaan kaava

$$\iint_A F(x, y) dx dy = \iint_{E_{mo}} F[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)] |J| d\xi d\eta = 2A \int_0^1 \int_0^{1-\eta} H(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (7.11)$$

jossa on merkitty  $F[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)] = H(\xi, \eta)$ . Kuvaelementin yli olevat integraalit voidaan muuntaa emoelementin yli laskettaviksi kaavan (7.11) avulla.

### 7.2.2 Siirtymäkentän interpolointi

Kuvan 7.1 (a) elementin solmuilla on kaksi vapausastetta, siirtymät  $x$ - ja  $y$ -suunnissa, joten elementillä on kuusi vapausastetta. Kun vapausastenumerointi valitaan solmuittain eteneväksi, tulee elementin solmusiirtymävektoriksi

$$\{u\} = \left\{ u^1 \quad v^1 \mid u^2 \quad v^2 \mid u^3 \quad v^3 \right\} \quad (7.12)$$

Elementin alueessa tuntemattomana kenttäfunktiona on siirtymäkenttä

$$\{d(x,y)\} = \{u(x,y) \quad v(x,y)\} \quad (7.13)$$

joka sisältää elementin alueen pisteiden  $(x,y)$   $x$ - ja  $y$ -suuntaiset siirtymät  $u(x,y)$  ja  $v(x,y)$ . Siirtymäkenttä  $\{d\}$  interpoloidaan elementin alueessa solmuarvoistaan. Interpoloinnissa käytetään samoja funktioita (7.2) kuin geometrian kuvauksessa. Siirtymäkentän komponenteille saadaan näin

$$\begin{aligned} u(x,y) &= N_1 u^1 + N_2 u^2 + N_3 u^3 = (1-\xi-\eta) u^1 + \xi u^2 + \eta u^3 \\ v(x,y) &= N_1 v^1 + N_2 v^2 + N_3 v^3 = (1-\xi-\eta) v^1 + \xi v^2 + \eta v^3 \end{aligned} \quad (7.14)$$

Määritellään elementin interpolointimatriisi  $[N]$  seuraavasti

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

jolloin kenttäfunktion interpolointi (7.14) voidaan kirjoittaa tiiviimpään muotoon

$$\{d\} = [N] \{u\} \quad (7.16)$$

Koska interpolointifunktiot  $N_i = N_i(\xi, \eta)$  määritettiin emoelementin koordinaattien  $\xi$  ja  $\eta$  avulla, antaa kaava (7.16) elementin siirtymäkentän niiden funktiona. Tämä ei haittaa, koska geometrian kuvaus on tunnettu ja kääntäen yksikäsitteinen. Siirtymäkentän komponentit  $u$  ja  $v$  ovat jatkuvia myös elementtien rajoilla, sillä interpolointifunktioiden perusominaisuuksista seuraa, että tietyllä sivulla siirtymäkomponentin interpolointiin vaikuttavat vain kyseisen sivun solmuarvot ja interpolointifunktiot. Funktioiden  $u$  ja  $v$  derivaattojen jatkuvuudesta ei sen sijaan ole takeita.

### 7.2.3 Muodonmuutostilakenttä

Kun siirtymäkenttä tunnetaan, saadaan muodonmuutostilakenttä lujuusopin perusyhtälöiden mukaan kinemaattisista yhtälöistä. 2D-solidirakenteilla voidaan ottaa käyttöön muodonmuutoskomponenttien vektori  $\{\epsilon\}$  seuraavasti

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \gamma_{xy}\} \quad (7.17)$$

Tasomuodonmuutostilassa muut muodonmuutoskomponentit  $\epsilon_z, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  ovat nollia. Tasojännitystilassa  $\epsilon_z$  ei ole nolla, mutta se voidaan helposti määrittää jälkikäteen  $xy$ -tason jännityksistä, joten sitä ei tarvitse ottaa elementtimenetelmäratkaisuun mu-

kaan. Kinemaattiset yhtälöt ovat tasotapauksessa

$$\epsilon_x = u_{,x} \quad \epsilon_y = v_{,y} \quad \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} \quad (7.18)$$

Kaavasta (7.18) seuraa vektorin  $\{\epsilon\}$  ja siirtymäkentän  $\{d\}$  yhteydeksi tulos

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [D] \{d\} \quad (7.19)$$

jossa on määritelty kinemaattinen differentiaalioperaattori  $[D]$  seuraavasti

$$[D] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

Kaavoista (7.19) ja (7.16) saadaan muodonmuutosvektorille  $\{\epsilon\}$  solmusiirtymien avulla esitetty likilauseke

$$\{\epsilon\} = [D] \{d\} = [D][N] \{u\} = [B] \{u\} \quad (7.21)$$

jossa  $[B]$  on kinemaattinen matriisi ja se ilmaisee muodonmuutoskomponenttien yhteyden solmusiirtymiin. Matriisin  $[B]$  lausekkeeksi tulee

$$[B] = [D][N] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (7.22)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} \end{bmatrix}$$

Interpolointifunktioiden derivaatat voidaan laskea kaavan (7.10) avulla, josta seuraa

$$\begin{aligned} 2AN_{1,x} &= (y_3 - y_1) \cdot (-1) + (y_1 - y_2) \cdot (-1) = y_2 - y_3 = \beta_1 \\ 2AN_{1,y} &= (x_1 - x_3) \cdot (-1) + (x_2 - x_1) \cdot (-1) = x_3 - x_2 = \alpha_1 \\ 2AN_{2,x} &= (y_3 - y_1) \cdot 1 + (y_1 - y_2) \cdot 0 = y_3 - y_1 = \beta_2 \\ 2AN_{2,y} &= (x_1 - x_3) \cdot 1 + (x_2 - x_1) \cdot 0 = x_1 - x_3 = \alpha_2 \\ 2AN_{3,x} &= (y_3 - y_1) \cdot 0 + (y_1 - y_2) \cdot 1 = y_1 - y_2 = \beta_3 \\ 2AN_{3,y} &= (x_1 - x_3) \cdot 0 + (x_2 - x_1) \cdot 1 = x_2 - x_1 = \alpha_3 \end{aligned} \quad (7.23)$$

Kaavassa (7.23) on otettu käyttöön solmukoordinaateista saatavat vakiot

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= x_3 - x_2 & \alpha_2 &= x_1 - x_3 & \alpha_3 &= x_2 - x_1 \\ \beta_1 &= y_2 - y_3 & \beta_2 &= y_3 - y_1 & \beta_3 &= y_1 - y_2 \end{aligned} \quad (7.24)$$

Edellä olevasta seuraa kinemaattiseksi matriisiksi  $[B]$  vakiomatriisi

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & \alpha_2 & 0 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \alpha_3 & \beta_3 \end{bmatrix} \quad (7.25)$$

Kaavojen (7.21) ja (7.25) mukaan muodonmuutosvektori on elementin alueessa vakio. Lineaarista kolmisivuista elementtiä kutsutaan myös vakio venymän kolmioksi.

#### 7.2.4 Jännitystilakenttä

2D-solidirakenteilla määritellään jännityskomponenttien vektori  $\{\sigma\}$  seuraavasti

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\} \quad (7.26)$$

Tasojännitystilassa jännityskomponentit  $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  ovat nollia. Tasomuodonmuutos-tilassa  $\sigma_z$  ei ole nolla, mutta se voidaan määrittää xy-tason muodonmuutoksista, joten sitä ei oteta elementtimenetelmäratkaisuun mukaan. Vektoreiden  $\{\epsilon\}$  ja  $\{\sigma\}$  yhteys saadaan materiaaliyhtälöstä, joka lineaarisesti kimmoiselle materiaalille on

$$\{\sigma\} = [E] \{\epsilon\} \quad (7.27)$$

Konstitutiivinen matriisi  $[E]$  on eri tapauksissa seuraavan kaavan mukainen

$$[E]_{TJT} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\nu} \end{bmatrix} \quad [E]_{TMT} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\bar{\nu}} \end{bmatrix} \quad (7.28)$$

jossa  $E$  on kimmomoduuli,  $\nu$  Poissonin vakio ja  $\bar{\nu} = (1-\nu)/2$  ja  $\bar{\bar{\nu}} = (1-2\nu)/2$ . Kaavoista (7.27) ja (7.21) tulee vektorille  $\{\sigma\}$  solmusiirtymien avulla esitetty likilauseke

$$\{\sigma\} = [E] \{\epsilon\} = [E] [B] \{u\} \quad (7.29)$$

Kaavasta (7.29) näkyy, että myös jännitysvektori on lineaarisen kolmisivuisen ele-

mentin alueessa vakio. Tällä elementillä saatavat muodonmuutos- ja jännityskomponentit ovat elementtien rajaviivoilla yleensä epäjatkuvia ja riittävän tarkkojen tulosten saaminen edellyttää varsin tiheän elementtiverkon käyttöä.

### 7.2.5 Jäykkyysmatriisi

Elementin jäykkyysmatriisi saadaan kaavan (4.20) integraalista. 2D-tapauksessa elementin paksuus  $t$  oletetaan tasojännitystilassa vakioksi ja tasomuodonmuutostilassa se valitaan ykköseksi. Jäykkyysmatriisin lauseke on kummassakin tapauksessa

$$[k] = \iint_{A_e} [B]^T [E] [B] t dA \quad (7.30)$$

jolloin integrointi on xy-tasossa elementin alueen yli. Kaavojen (7.25) ja (7.28) matriiseilla  $[B]$  ja  $[E]$  kaavan (7.30) integrandi on vakio ja integrointi voidaan suorittaa tarkasti tuloksen ollessa

$$[k] = [B]^T [E] [B] t A \quad (7.31)$$

Lineaarisen kolmisivuisen elementin jäykkyysmatriisi voidaan siis laskea ilman numeerista integrointia kaavasta (7.31).

### 7.2.6 Ekvivalenttiset solmukuormitukset

Elementin ekvivalenttiset solmukuormitukset saadaan kaikissa tapauksissa kaavan (4.21) tilavuus- ja pintaintegraaleista.

#### 7.2.6.1 Tilavuusvoimakuormitus

Tilavuusvoimakuormitusta vastaa kaavan (4.21) keskimäinen tilavuusintegraali. Se voidaan tasotapauksessa ja elementin paksuuden  $t$  ollessa vakio laskea seuraavasti

$$\{r\} = \iiint_{V_e} [N]^T \{f\} dV = t \iint_{A_e} [N]^T \{f\} dA \quad (7.32)$$

jossa viimeinen integrointi on elementin alueen yli. Tilavuusvoimien vektorilla  $\{f\}$  on komponentit  $x$ - ja  $y$ -suunnassa eli

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_x & f_y \end{Bmatrix} \quad (7.33)$$

Komponentit  $f_x$  ja  $f_y$  voivat olla mielivaltaisia koordinaattien  $x$  ja  $y$  funktioita. Kun integrointi muunnetaan emokolmion alueeseen kaavan (7.11) mukaisesti, on tilavuusvoimakomponentit lausuttava emon koordinaattien avulla. Tämä onnistuu sijoittamalla niihin  $x$  ja  $y$  kuvausyhtälöistä (7.4). Merkitään sijoituksen jälkeen saatavaa tilavuusvoimien vektoria ja sen komponentteja seuraavasti

$$\{\bar{f}\} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_x & \bar{f}_y \end{Bmatrix} \quad (7.34)$$

jolloin integraali (7.32) menee kaavan (7.11) perusteella muotoon

$$\{r\} = 2At \int_0^1 \int_0^{1-\eta} [N]^T \{\bar{f}\} d\xi d\eta \quad (7.35)$$

Lasketaan ensin lausekkeen (7.35) integrandi

$$[N]^T \{\bar{f}\} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{f}_x \\ \bar{f}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 \bar{f}_x \\ N_1 \bar{f}_y \\ N_2 \bar{f}_x \\ N_2 \bar{f}_y \\ N_3 \bar{f}_x \\ N_3 \bar{f}_y \end{bmatrix}$$

Edellä olevasta näkyy, että tilavuusvoimakomponentit  $f_x$  ja  $f_y$  aiheuttavat solmukuormituksia vain oman suuntansa vapausasteisiin. Tilavuusvoimavektori  $\{f\}$  voidaan muuntaa ekvivalenttisiksi solmukuormituksiksi integraalilla (7.35) ainakin likimääräisesti numeerista integrointia käyttäen. Jos  $\{f\} = \{f_0\} = \begin{Bmatrix} f_{x0} & f_{y0} \end{Bmatrix}$  on vakiovektori, voidaan integrointi suorittaa tarkasti, jolloin saadaan

$$\{r\} = 2At \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \begin{bmatrix} N_1 f_{x0} \\ N_1 f_{y0} \\ N_2 f_{x0} \\ N_2 f_{y0} \\ N_3 f_{x0} \\ N_3 f_{y0} \end{bmatrix} d\xi d\eta = 2At \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \begin{bmatrix} (1-\xi-\eta)f_{x0} \\ (1-\xi-\eta)f_{y0} \\ \xi f_{x0} \\ \xi f_{y0} \\ \eta f_{x0} \\ \eta f_{y0} \end{bmatrix} d\xi d\eta = \frac{At}{3} \begin{bmatrix} f_{x0} \\ f_{y0} \\ f_{x0} \\ f_{y0} \\ f_{x0} \\ f_{y0} \end{bmatrix}$$

Kummankin suunnan tilavuusvoimaresultantti jakaantuu solmuille samansuuruisiksi pistevoimiksi. Painovoimakuormituksessa tilavuusvoimavektori on  $\{f_0\} = \begin{Bmatrix} 0 & -pg \end{Bmatrix}$ , joka muunnetaan kolmeksi solmuihin vaikuttavaksi  $y$ -suuntaiseksi pistevoimaksi, jotka ovat suuruudeltaan  $-Atpg/3 = -mg/3$ .



### 7.2.6.2 Pintavoimakuormitus

Pintavoimakuormitusta vastaa kaavan (4.21) viimeinen integraali. Pintavoimat ovat 2D-tilanteessa elementin reunapintaan vaikuttavia kuormituksia ja niitä voi esiintyä vain elementtiverkon reunaan rajoituvilla elementin sivuilla. Kaavan (4.21) mukaan ekvivalenttiset solmukuormitukset voidaan tasapaksun taselementin tapauksessa laskea seuraavasti

$$\{r\} = \iint_{A_e} [N]^T \{p\} dA = t \int_{S_e} ([N]^T \{p\})_{S_e} dS \quad (7.36)$$

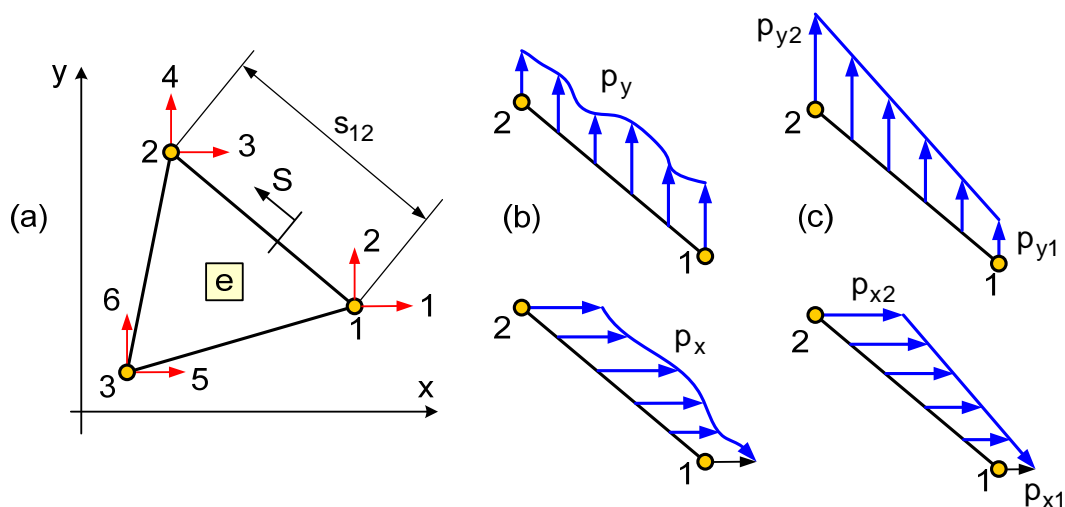
jossa viimeinen integraali on kuormitussivun yli ja  $S$  sitä pitkin kulkeva koordinaatti. Merkintä  $(\ )_{S_e}$  kaavassa (7.36) tarkoittaa, että suluissa olevassa vektorissa otetaan huomioon koordinaattien  $x$  ja  $y$  yhteys kuormitussivulla sekä koordinaattien  $\xi$  ja  $\eta$  yhteys vastaavalla emoelementin sivulla.

Pintavoimien vektorilla  $\{p\}$  on komponentit  $x$ - ja  $y$ -suunnassa eli

$$\{p\} = \{p_x \quad p_y\} \quad (7.37)$$

Komponentit  $p_x$  ja  $p_y$  voivat olla mielivaltaisia koordinaattien  $x$  ja  $y$  funktioita.

Seuraavassa oletetaan merkintöjen yksinkertaistamiseksi, että tarkasteltava pinta-kuormitus vaikuttaa sillä kuvaelementin sivulla, joka on emokolmion sivun 12 kuva. Kuvassa 7.2 on esitetty erään kuvaelementin (a) sivulla 12 oleva yleinen pinta-kuormitus (b) ja kummassakin suunnassa lineaarisesti muuttuvaa pinta-kuormitus (c).



Kuva 7.2 Pintakuormitus kuvaelementin sivulla 12.

Koska emokolmion sivulla 12 on  $\eta = 0$ , tulee geometrian kuvausyhtälöistä (7.4) tulos

$$\begin{aligned} x &= (1-\xi)x_1 + \xi x_2 & y &= (1-\xi)y_1 + \xi y_2 & \Rightarrow \\ dx &= (x_2 - x_1)d\xi & dy &= (y_2 - y_1)d\xi \end{aligned} \quad (7.38)$$

Edellä olevasta seuraa edelleen

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} d\xi = s_{12} d\xi \quad (7.39)$$

jossa  $s_{12}$  on kuvaelementin sivun 12 pituus. Kaavojen (7.2) ja (7.15) mukaan interpolointimatriisi  $[N]$  on emon sivulla 12

$$[N_{12}] = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} 1-\xi & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\xi & 0 & \xi & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (7.40)$$

Pintavoimien vektori (7.37) saadaan lausuttua koordinaatin  $\xi$  avulla sijoittamalla  $x$  ja  $y$  kuvausyhtälöistä (7.38). Merkitään sijoituksen jälkeen saatavaa pintavoimien vektoria ja sen komponentteja seuraavasti

$$\{\bar{p}\} = \{\bar{p}_x \quad \bar{p}_y\} \quad (7.41)$$

Kaavan (7.36) integraali voidaan tulosten (7.39), (7.40) ja (7.41) perusteella muuntaa emoelementin sivun 12 yli olevaksi ja se saa muodon

$$\{r\} = t s_{12} \int_0^1 [N_{12}]^T \{\bar{p}\} d\xi \quad (7.42)$$

Kirjoitetaan auki kaavan (7.42) integrandi

$$[N_{12}]^T \{\bar{p}\} = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 \\ 0 & 1-\xi \\ \xi & 0 \\ 0 & \xi \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_x \\ \bar{p}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\xi)\bar{p}_x \\ (1-\xi)\bar{p}_y \\ \xi\bar{p}_x \\ \xi\bar{p}_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Edellä olevasta näkyy, että pintakuormituksesta tulee solmukuormituksia vain sen vaikutussivun solmuihin ja lisäksi kummastakin kuormituskomponentista tulee vaikutus vain sen oman suunnan vapausasteisiin.

Määritetään vielä kuvan 7.2 (c) lineaarisiin pintakuormituksiin liittyvät ekvivalenttiset solmukuormitukset integraalista (7.42). Kuormituskomponenttien lausekkeet ovat

$$p_x = p_{x1} + \frac{p_{x2} - p_{x1}}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad p_y = p_{y1} + \frac{p_{y2} - p_{y1}}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad (7.43)$$

Sijoittamalla komponentteihin (7.43)  $x$  kuvausyhtälöistä (7.38) saadaan

$$\bar{p}_x = p_{x1} + (p_{x2} - p_{x1})\xi \quad \bar{p}_y = p_{y1} + (p_{y2} - p_{y1})\xi \quad (7.44)$$

Kaavasta (7.42) tulee seuraava lauseke ekvivalenttisille solmukuormituksille

$$\{r\} = t s_{12} \int_0^1 \begin{bmatrix} (1-\xi)[p_{x1} + (p_{x2} - p_{x1})\xi] \\ (1-\xi)[p_{y1} + (p_{y2} - p_{y1})\xi] \\ \xi[p_{x1} + (p_{x2} - p_{x1})\xi] \\ \xi[p_{y1} + (p_{y2} - p_{y1})\xi] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d\xi = \frac{t s_{12}}{6} \begin{bmatrix} 2p_{x1} + p_{x2} \\ 2p_{y1} + p_{y2} \\ p_{x1} + 2p_{x2} \\ p_{y1} + 2p_{y2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.45)$$

### 7.2.6.3 Esijännitystilakenttä

Kaavan (4.21) ensimmäinen integraali muuntaa esijännitystilakentän ekvivalenttisiksi solmukuormituksiksi ja ne voidaan laskea seuraavasti

$$\{r\} = - \iiint_{V_e} [B]^T \{\sigma_0\} dV = -t \iint_{A_e} [B]^T \{\sigma_0\} dA \quad (7.46)$$

Kuormituksena on esijännitystilakenttä

$$\{\sigma_0\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{x0} & \sigma_{y0} & \tau_{xy0} \end{Bmatrix} \quad (7.47)$$

jonka komponentit  $\sigma_{x0}$ ,  $\sigma_{y0}$  ja  $\tau_{xy0}$  voivat olla mielivaltaisia koordinaattien  $x$  ja  $y$  funktioita. Kun komponentit lausutaan kuvausyhtälöitä (7.4) käyttäen koordinaattien  $\xi$  ja  $\eta$  avulla, saadaan kuormitus

$$\{\bar{\sigma}_0\} = \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{x0} & \bar{\sigma}_{y0} & \bar{\tau}_{xy0} \end{Bmatrix} \quad (7.48)$$

Integraali (7.46) voidaan kirjoittaa emoelementin alueessa muotoon

$$\{r\} = -2At \int_0^1 \int_0^{1-\eta} [B]^T \{\bar{\sigma}\} d\xi d\eta \quad (7.49)$$

Esiännitysvektori  $\{\sigma_0\}$  voidaan muuntaa solmukuormituksiksi integraalilla (7.49) numeerista integrointia käyttäen. Jos  $\{\sigma_0\} = \{\sigma_{x0} \ \sigma_{y0} \ \tau_{xy0}\}$  on vakiovektori, voidaan integrointi suorittaa tarkastikin, sillä  $[B]$  on kaavan (7.25) vakiomatriisi. Koska emoelementin pinta-ala on  $1/2$ , saadaan tulokseksi tässä tapauksessa

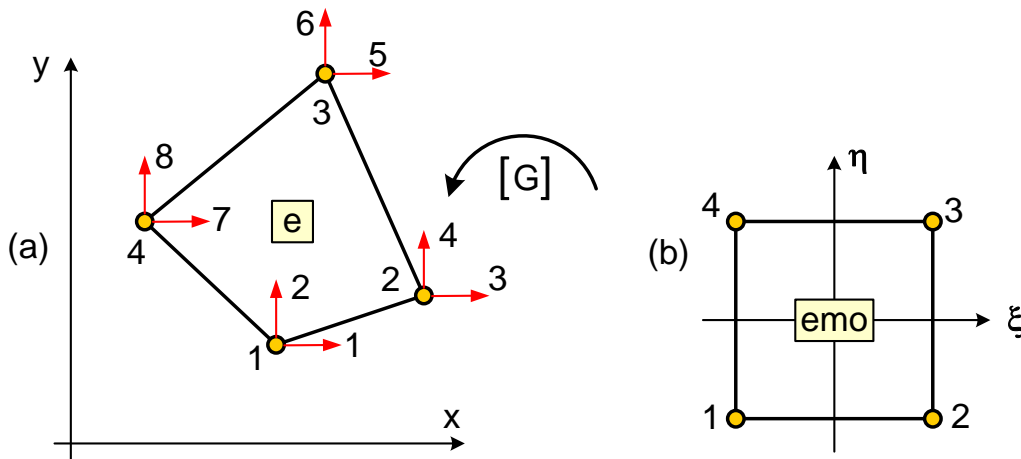
$$\{r\} = -\frac{t}{2} \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_2 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \beta_3 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_3 & \beta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{x0} \\ \sigma_{y0} \\ \tau_{xy0} \end{bmatrix} = -\frac{t}{2} \begin{bmatrix} \beta_1 \sigma_{x0} + \alpha_1 \tau_{xy0} \\ \alpha_1 \sigma_{y0} + \beta_1 \tau_{xy0} \\ \beta_2 \sigma_{x0} + \alpha_2 \tau_{xy0} \\ \alpha_2 \sigma_{y0} + \beta_2 \tau_{xy0} \\ \beta_3 \sigma_{x0} + \alpha_3 \tau_{xy0} \\ \alpha_3 \sigma_{y0} + \beta_3 \tau_{xy0} \end{bmatrix} \quad (7.50)$$

### 7.3 Lineaarinen nelisivuinen elementti

#### 7.3.1 Emoneliön geometrinen kuvaus

Kuvassa 7.3 (a) on esitetty lineaarinen nelisivuinen elementti, jonka solmut sijaitsevat elementin kärkipisteissä. Elementin solmukoordinaattien vektorit ovat

$$\{\hat{x}\} = \{x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4\} \quad \{\hat{y}\} = \{y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4\} \quad (7.51)$$



Kuva 7.3 Emoneliön lineaarinen kuvaus  $xy$ -tasolle.

Lineaariset interpolointifunktiot kuvan 7.3 (b) emoelementin alueessa ovat

$$\begin{aligned} N_1 &= (1-\xi)(1-\eta)/4 & N_2 &= (1+\xi)(1-\eta)/4 \\ N_3 &= (1+\xi)(1+\eta)/4 & N_4 &= (1-\xi)(1+\eta)/4 \end{aligned} \quad (7.52)$$

Geometrian kuvausmatriisi  $[G]$  on muotoa

$$[G] = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \quad (7.53)$$

Kuvaus, joka muuntaa emoneliön  $xy$ -tason nelikulmioelementiksi siten, että kuvaelementin kärjet ovat pisteissä  $(x_i, y_i)$   $i = 1, \dots, 4$ , voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned} x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 = [G] \{ \hat{x} \} \\ y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 = [G] \{ \hat{y} \} \end{aligned} \quad (7.54)$$

Emoneliön kärkipisteet kuvautuvat kuvan 7.3 solmunumeroinnin mukaisesti ja emoelementin sivuista tulee kuvaelementin sivuja. Kuvaus (7.54) on bi-lineaarinen, joten  $\xi$ - ja  $\eta$ -akseleiden suuntaisten suorien kuvat ovat suoria ja niiden jakosuhteet säilyvät, mutta yhdensuuntaisuus ei säily. Bi-lineaarisessa kuvauksessa (7.54) emoelementin sivut kuvautuvat janoiksi, jotka määräytyvät yksikäsitteisesti päätepisteidensä perusteella. Tästä seuraa, että elementtiverkossa vierekkäisiksi kuvatut elementit liittyvät toisiinsa ilman aukkoja.

Tarkastelujen palauttamiseksi emoelementin yhteyteen tarvitaan kuvauksen (7.54) Jacobin matriisi  $[J]$  ja sen determinantti  $|J|$ . Jacobin matriisi määritellään yhtälöllä

$$\begin{bmatrix} f_{,\xi} \\ f_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{,x} \\ f_{,y} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} f_{,x} \\ f_{,y} \end{bmatrix} \quad (7.55)$$

jossa  $f$  on mielivaltainen kenttäfunktio. Jacobin matriisissa olevat muuttujien  $x$  ja  $y$  derivaatat koordinaattien  $\xi$  ja  $\eta$  suhteen voidaan laskea kuvausyhtälöistä (7.54) ja tulokseksi saadaan

$$\begin{aligned} x_{,\xi} &= N_{1,\xi} x_1 + N_{2,\xi} x_2 + N_{3,\xi} x_3 + N_{4,\xi} x_4 \\ y_{,\xi} &= N_{1,\xi} y_1 + N_{2,\xi} y_2 + N_{3,\xi} y_3 + N_{4,\xi} y_4 \\ x_{,\eta} &= N_{1,\eta} x_1 + N_{2,\eta} x_2 + N_{3,\eta} x_3 + N_{4,\eta} x_4 \\ y_{,\eta} &= N_{1,\eta} y_1 + N_{2,\eta} y_2 + N_{3,\eta} y_3 + N_{4,\eta} y_4 \end{aligned} \quad (7.56)$$

Kaavassa (7.56) tarvitaan solmukoordinaattien lisäksi interpolointifunktioiden (7.52) derivaatat, joille tulee lausekkeet

$$\begin{aligned} N_{1,\xi} &= -(1-\eta)/4 & N_{2,\xi} &= (1-\eta)/4 & N_{3,\xi} &= (1+\eta)/4 & N_{4,\xi} &= -(1+\eta)/4 \\ N_{1,\eta} &= -(1-\xi)/4 & N_{2,\eta} &= -(1+\xi)/4 & N_{3,\eta} &= (1+\xi)/4 & N_{4,\eta} &= (1-\xi)/4 \end{aligned} \quad (7.57)$$

Kaavoista (7.56) ja (7.57) tulee Jacobin matriisiksi

$$[J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} a+b\eta & d+e\eta \\ c+b\xi & f+e\xi \end{bmatrix}$$

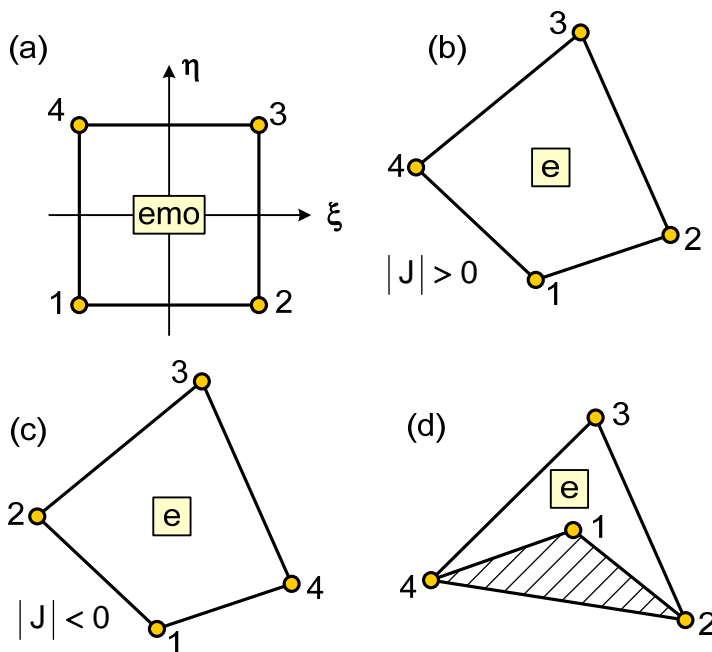
$$\begin{aligned} a &= -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 & b &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & c &= -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \\ d &= -y_1 + y_2 + y_3 - y_4 & e &= y_1 - y_2 + y_3 - y_4 & f &= -y_1 - y_2 + y_3 + y_4 \end{aligned} \quad (7.58)$$

Nähdään, että Jacobin matriisi ei ole vakiomatriisi, vaan sen alkiot ovat lineaarisia emoelementin koordinaattien  $\xi$  ja  $\eta$  funktioita. Kinemaattisen matriisin  $[B]$  muodostamisessa tarvitaan  $[J]^{-1}$ , jolle voidaan kirjoittaa lauseke

$$[J]^{-1} = \frac{1}{4 \cdot |J|} \begin{bmatrix} f+e\xi & -d-e\eta \\ -c-b\xi & a+b\eta \end{bmatrix}$$

$$|J| = [(af - cd) + (ae - bd)\xi + (bf - ce)\eta]/16$$

(7.59)



Kuva 7.4 Emoelementin kuvauksia.

Kaavan (7.59) mukaan matriisin  $[J]^{-1}$  alkiot ovat muuttujien  $\xi$  ja  $\eta$  rationaalilausekkeita, joiden osoittajat ja nimittäjät ovat ensimmäistä astetta. Jotta  $[J]^{-1}$  olisi olemassa elementin alueessa, ei  $|J|$  saa mennä nolllaksi. Jos  $|J|$  menee nolllaksi elementin alueessa, ei kuvaus (7.54) ole kääntäen yksikäsitteinen ja syntävä kuvaelementti on elementtiverkon osana kelvoton. Voidaan todistaa, että jos kuvaelementti on kupera nelikulmio, kuten kuvan 7.4 tapaukset (b) ja (c), ei  $|J|$  tule nolllaksi sen alueessa. Tällöin  $|J| > 0$ , mikäli kuvaelementin solmut on nume-

roitu samaan suuntaan kiertäen kuin emoelementissä, mutta  $|J| < 0$  numerointisuuntien ollessa vastakkaiset. Jos emoelementti kuvataan kuvan 7.4 (c) tapaan siten, että jokin sen kulmista on kovera, saa  $|J|$  elementin alueessa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja ja menee tietyllä viivalla nolllaksi. Tällöin kuvaelementti 'kaatuu itsensä päälle' kuvassa (c) viivoitetulla alueella.

### 7.3.2 Kenttien interpolointi

Siirtymäkenttä voidaan interpolointia hyväksi käyttäen lausua likimääräisesti solmu-siirtymien avulla. Lineaarisen nelisivuisen tasoelementin solmusiirtymävektori on

$$\{u\} = \{u^1 \quad v^1 \mid u^2 \quad v^2 \mid u^3 \quad v^3 \mid u^4 \quad v^4\} \quad (7.60)$$

jossa elementin vapausastenumerointi on valittu solmuittain eteneväksi. Siirtymäkenttä  $\{d(x,y)\}$  sisältää elementin alueen pisteiden  $x$ - ja  $y$ -suuntaiset siirtymät

$$\{d(x,y)\} = \{u(x,y) \quad v(x,y)\} \quad (7.61)$$

Siirtymäkentän interpoloinnissa käytetään samoja bi-lineaarisia interpolointifunktioita (7.52) kuin geometrian kuvauksessa ja interpolointimatriisiksi  $[N]$  tulee

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (7.62)$$

Siirtymäkentän interpolointi on jälleen muotoa

$$\{d\} = [N] \{u\} \quad (7.63)$$

Lauseke (7.63) antaa siirtymäkentän emoelementin koordinaattien  $\xi$  ja  $\eta$  avulla. Siirtymäkentän interpolointi on  $C^0$ -jatkuva.

Muodonmuutoskomponenttien vektorin  $\{\epsilon\}$  ja siirtymäkentän  $\{d\}$  yhteys on

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [D] \{d\} \quad (7.64)$$

josta seuraa muodonmuutosvektorille  $\{\epsilon\}$  solmusiirtymien avulla esitetty likilauseke

$$\{\epsilon\} = [D] \{d\} = [D] [N] \{u\} = [B] \{u\} \quad (7.65)$$

Kinemaattinen matriisin  $[B]$  lausekkeeksi tulee

$$[B] = [D] [N] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (7.66)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & 0 & N_{4,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} & N_{4,y} & N_{4,x} \end{bmatrix} \quad (7.67)$$

Interpolointifunktioiden derivaatoille tulee kaavasta (7.55) lausekkeet

$$N_{i,x} = J_{11}^{-1} N_{i,\xi} + J_{12}^{-1} N_{i,\eta} \quad N_{i,y} = J_{21}^{-1} N_{i,\xi} + J_{22}^{-1} N_{i,\eta} \quad i = 1, \dots, 4 \quad (7.68)$$

jossa merkintä  $J_{ij}^{-1}$  tarkoittaa Jacobin matriisin käänteismatriisin alkioita. Kaavan (7.68) perusteella kinemaattinen matriisi  $[B]$  saadaan esitettyä emoelementin koordinaattien avulla. Voidaan osoittaa, että tulos menee seuraavaan matriisitulomuotoon

$$[B] = \begin{bmatrix} J_{11}^{-1} & J_{12}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{21}^{-1} & J_{22}^{-1} \\ J_{21}^{-1} & J_{22}^{-1} & J_{11}^{-1} & J_{12}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} \end{bmatrix} \quad (7.69)$$

Muodonmuutosvektorista  $\{\varepsilon\}$  saadaan jännitysvektori  $\{\sigma\}$  materiaaliyhtälöillä

$$\{\sigma\} = [E] \{\varepsilon\} \quad (7.70)$$

jossa konstitutiivinen matriisi  $[E]$  on kaavan (7.28) mukainen. Kaavoista (7.70) ja (7.65) seuraa jännitysvektorille  $\{\sigma\}$  solmusiirtymien avulla esitetty likilauseke

$$\{\sigma\} = [E] \{\varepsilon\} = [E][B] \{u\} \quad (7.71)$$

Kaavasta (7.69) näkyy, että kinemaattisen matriisin  $[B]$  alkiot ovat rationaalilausekeita, joissa osoittajat ovat toista ja nimittäjät ensimmäistä astetta muuttujien  $\xi$  ja  $\eta$  suhteen. Kaavojen (7.65) ja (7.71) perusteella muodonmuutos- ja jännitysvektorin komponentit ovat samantyyppisiä lausekkeita kuin kinemaattisen matriisin alkiot.

### 7.3.3 Jäykkyysmatriisi

Jäykkyysmatriisin lauseke on vakio paksuuden  $t$  omaavalla tasoelementillä muotoa

$$[k] = \iint_{A_e} [B]^T [E] [B] t dA \quad (7.72)$$



jolloin integrointi on xy-tasossa elementin alueen yli. Integrointi voidaan muuntaa emoelementin alueen yli olevaksi kaavan (7.11) osoittamalla tavalla, josta seuraa

$$[k] = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [E] [B] |J| d\xi d\eta \quad (7.73)$$

Koska kinemaattisen matriisin  $[B]$  alkioit ja Jacobin matriisin determinantti  $|J|$  ovat edellä kuvattuja muuttujien  $\xi$  ja  $\eta$  lausekkeita, ei jäykkyysmatriisin alkioiden tarkka integrointi ole tarkoituksenmukaista, vaikka olisi periaatteessa mahdollista. Käytännössä elementtimenetelmäohjelmissa jäykkyysmatriisi lasketaan kaavasta (7.73) numeerisella Gaussin integroinnilla. Tällöin integraali korvataan käytettävän integrointiasteen mukaisella äärellisellä painotetulla summalla

$$[k] \approx t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \left( [B]^T [E] [B] |J| \right)_{(i,j)} \quad (7.74)$$

jossa merkintä  $( )_{(i,j)}$  tarkoittaa, että suluissa oleva matriisi on laskettu integrointipisteessä  $(\xi_i, \eta_j)$ . Suureet  $[B]$ ,  $[J]$ ,  $|J|$  ja  $[J]^{-1}$  tarvitaan jäykkyysmatriisia laskettaessa vain integrointipisteissä, eikä koko elementin alueessa. Kun  $[B]$  on tunnettava Gaussin integrointipisteissä, voidaan sitä hyödyntää solmusiirtymien ratkaisun jälkeen myös muodonmuutos- ja jännityskomponenttien laskemiseen näissä pisteissä.

### 7.3.4 Ekvivalenttiset solmukuormitukset

Elementin ekvivalenttiset solmukuormitukset saadaan kaikissa tapauksissa kaavan (4.21) tilavuus- ja pintaintegraaleista.

#### 7.3.4.1 Tilavuusvoimakuormitus

Tilavuusvoimakuormitusta vastaava integraali on

$$\{r\} = \iiint_{V_e} [N]^T \{f\} dV = t \iint_{A_e} [N]^T \{f\} dA \quad (7.75)$$

jossa viimeinen integrointi on elementin alueen yli. Tilavuusvoimien vektorilla on komponentit x- ja y-suunnassa eli

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_x & f_y \end{Bmatrix} \quad (7.76)$$

jotka voidaan lausua kuvausyhtälöitä (7.54) käyttäen koordinaattien  $\xi$  ja  $\eta$  avulla, jolloin saatua tilavuusvoimien vektoria merkitään

$$\{\bar{\mathbf{f}}\} = \left\{ \bar{f}_x \quad \bar{f}_y \right\} \quad (7.77)$$

Integraali (7.75) menee kaavan (7.11) perusteella muotoon

$$\{\mathbf{r}\} = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{N}]^T \{\bar{\mathbf{f}}\} |J| d\xi d\eta \quad (7.78)$$

Koska  $|J|$  riippuu koordinaateista  $\xi$  ja  $\eta$  edellä esitetyllä tavalla, ei integraalia (7.78) kannata laskea analyttisesti edes vakio tilavuusvoimakuormitukselle. Se voidaan aina laskea numeerisella Gaussin integroinnilla halutulla tarkkuudella, olipa tilavuusvoimakuormitus mikä tahansa. Kaavan (7.78) integraali korvataan tällöin äärellisellä painotetulla summalla

$$\{\mathbf{r}\} \approx t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \left( [\mathbf{N}]^T \{\bar{\mathbf{f}}\} |J| \right)_{(i,j)} \quad (7.79)$$

### 7.3.4.2 Pintavoimakuormitus

Pintavoimakuormitusta vastaa kaavan (4.21) viimeinen integraali ja sen mukaan ekvivalenttiset solmukuormitukset saadaan tasapaksulle tasoelementille kaavasta

$$\{\mathbf{r}\} = \iint_{A_e} [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{p}\} dA = t \int_{S_e} \left( [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{p}\} \right)_{S_e} dS \quad (7.80)$$

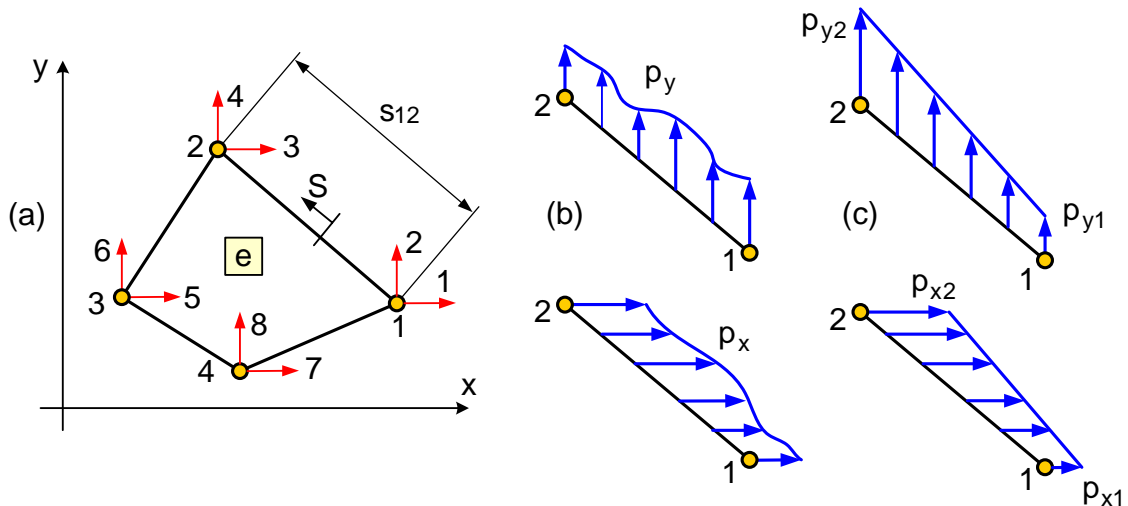
jossa viimeinen integraali on kuormitussivun yli ja  $S$  sitä pitkin kulkeva koordinaatti.

Pintavoimien vektorilla  $\{\mathbf{p}\}$  on komponentit  $x$ - ja  $y$ -suunnassa eli

$$\{\mathbf{p}\} = \left\{ p_x \quad p_y \right\} \quad (7.81)$$

Komponentit  $p_x$  ja  $p_y$  voivat olla mielivaltaisia koordinaattien  $x$  ja  $y$  funktioita.

Seuraavassa oletetaan merkintöjen yksinkertaistamiseksi, että tarkasteltava pinta-kuormitus vaikuttaa emoneliön sivun 12 kuvasivulla, jonka solmuja merkitään myös numeroilla 1 ja 2. Kuvassa 7.5 on esitetty erään kuvaelementin (a) sivulla 12 oleva yleinen pintakuormitus (b) ja kummassakin suunnassa lineaarinen pintakuormitus (c).



Kuva 7.5 Pintakuormitus kuvaelementin sivulla 12.

Koska emoneliön sivulla 12 on voimassa  $\eta = -1$ , saadaan kuvausyhtälöistä (7.54)

$$\begin{aligned} x = x(\xi) &= \frac{1}{2}(1-\xi)x_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)x_2 & y = y(\xi) &= \frac{1}{2}(1-\xi)y_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)y_2 \\ \Rightarrow \quad dx &= \frac{1}{2}(x_2 - x_1)d\xi & dy &= \frac{1}{2}(y_2 - y_1)d\xi \end{aligned} \quad (7.82)$$

Edellä olevasta seuraa edelleen

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} d\xi = \frac{1}{2}s_{12} d\xi \quad (7.83)$$

jossa  $s_{12}$  on kuvaelementin sivun 12 pituus. Kaavojen (7.52) ja (7.62) mukaan interpolointimatriisi  $[N]$  menee emon sivulla 12 muotoon

$$[N_{12}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 1+\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\xi & 0 & 1+\xi & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.85)$$

Pintavoimien vektori (7.81) lausutaan koordinaatin  $\xi$  avulla sijoittamalla  $x$  ja  $y$  kuvausyhtälöistä (7.82). Merkitään näin saatavaa vektoria ja komponentteja seuraavasti

$$\{\bar{p}\} = \{\bar{p}_x \quad \bar{p}_y\} \quad (7.86)$$

Kaavan (7.80) integraali voidaan tulosten (7.83), (7.85) ja (7.86) perusteella muuntaa emoelementin sivun 12 yli olevaksi ja se saa muodon

$$\{r\} = \frac{1}{2}ts_{12} \int_{-1}^1 [N_{12}]^T \{\bar{p}\} d\xi \quad (7.87)$$

Kirjoitetaan auki kaavan (7.87) integrandi

$$[N_{12}]^T \{\bar{p}\} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 \\ 0 & 1-\xi \\ 1+\xi & 0 \\ 0 & 1+\xi \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_x \\ \bar{p}_y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1-\xi)\bar{p}_x \\ (1-\xi)\bar{p}_y \\ (1+\xi)\bar{p}_x \\ (1+\xi)\bar{p}_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Edellä olevasta nähdään, että pintakuormituksesta tulee solmukuormituksia vain sen vaikutussivun solmuihin ja kummastakin kuormituskomponentista tulee vaikutus vain sen oman suunnan vapausasteisiin.

Määritetään vielä kuvan 7.5 (c) kuormituksiin liittyvät solmukuormitukset. Kuormituskomponentit ovat

$$p_x = p_{x1} + \frac{p_{x2} - p_{x1}}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad p_y = p_{y1} + \frac{p_{y2} - p_{y1}}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad (7.88)$$

Sijoittamalla komponentteihin (7.88) koordinaatti  $x$  kuvausyhtälöistä (7.82) saadaan

$$\bar{p}_x = p_{x1} + \frac{1}{2}(p_{x2} - p_{x1})(1 + \xi) \quad \bar{p}_y = p_{y1} + \frac{1}{2}(p_{y2} - p_{y1})(1 + \xi) \quad (7.89)$$

Kaavasta (7.87) tulee seuraava lauseke ekvivalenttisille solmukuormituksille

$$\{r\} = \frac{1}{4} t s_{12} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} (1-\xi)[p_{x1} + (1+\xi)(p_{x2} - p_{x1})/2] \\ (1-\xi)[p_{y1} + (1+\xi)(p_{y2} - p_{y1})/2] \\ (1+\xi)[p_{x1} + (1+\xi)(p_{x2} - p_{x1})/2] \\ (1+\xi)[p_{y1} + (1+\xi)(p_{y2} - p_{y1})/2] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d\xi = \frac{t s_{12}}{6} \begin{bmatrix} 2p_{x1} + p_{x2} \\ 2p_{y1} + p_{y2} \\ p_{x1} + 2p_{x2} \\ p_{y1} + 2p_{y2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.90)$$

### 7.3.4.3 Esijännitystilakenttä

Kaavan (4.21) ensimmäinen integraali muuntaa esijännitystilakentän ekvivalenttisiksi solmukuormituksiksi seuraavasti

$$\{r\} = - \iiint_{V_e} [B]^T \{\sigma_0\} dV = -t \iint_{A_e} [B]^T \{\sigma_0\} dA \quad (7.91)$$

jolloin kuormituksena on esijännitystilakenttä

$$\{\sigma_0\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{x0} & \sigma_{y0} & \tau_{xy0} \end{Bmatrix} \quad (7.92)$$

Esijännityskomponentit lausutaan emon koordinaattien avulla kuvausyhtälöitä (7.54) käyttäen, josta saadaan kuormitus

$$\{\bar{\sigma}_0\} = \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{x0} & \bar{\sigma}_{y0} & \bar{\tau}_{xy0} \end{Bmatrix} \quad (7.93)$$

Integrointi muunnetaan emoneliön alueeseen kaavan (7.11) mukaisesti, jolloin se menee muotoon

$$\{r\} = -t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T \{\bar{\sigma}_0\} |J| d\xi d\eta \quad (7.94)$$

Koska  $|J|$  ja  $[B]$  riippuvat koordinaateista  $\xi$  ja  $\eta$  edellä esitetyllä tavalla, ei integraalia (7.94) kannata laskea analyyttisesti edes vakio esijännitystilakentällä. Se voidaan laskea Gaussin integroinnilla kaikilla esijännitystilakentillä. Kaavan (7.94) integraali korvataan tällöin integrointiasteen mukaisella äärellisellä painotetulla summalla

$$\{r\} \approx -t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \left( [B]^T \{\bar{\sigma}_0\} |J| \right)_{(i,j)} \quad (7.95)$$