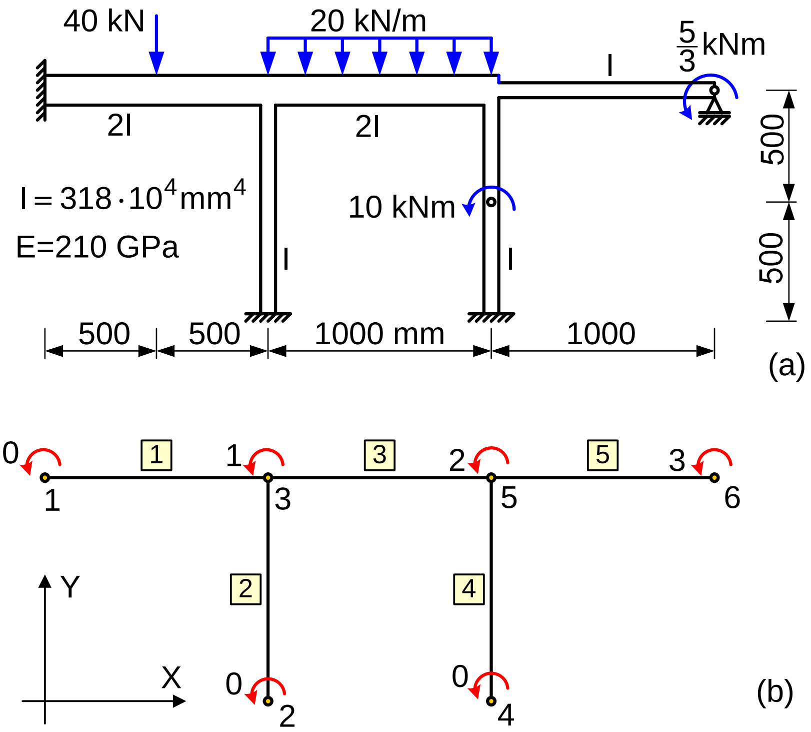
Esimerkki 3.2

Tarkastellaan kuvassa 1 (a) olevan tasokehän statiikan ratkaisemista elementtimenetelmällä. Kun palkkien normaalivoimista aiheutuvat pituudenmuutokset oletetaan nolliksi, on kehä nurkistaan siirtymätön. Kuvassa (b) on ratkaisussa käytettävä elementtiverkko numerointeineen. Elementtejä on 5 ja solmuja 6, joista 3 on tuettu kiertymät-



Kuva 1. Tasokehä ja sen elementtiverkko.

tömiksi. Laskujen lyhentämiseksi ratkaisussa käytetään vain vapaita solmujen rotaatioita, joten tuetut vapausasteet on numeroitu yhteisellä numerolla 0. Elementteihin 1, 3 ja 4 kohdistuvat niiden alueessa olevat kuormitukset, jotka käsitellään ekvivalenttisina solmukuormituksina. Lisäksi kuormituksena on solmussa 6 pistemomentti.

Kirjoitetaan elementtien jäykkyysmatriisit ja ekvivalenttiset solmukuormitusvektorit ja merkitään niiden yhteyteen osoitteet sijoittelusummausta varten. Laskut ovat yksikköjärjestelmässä (kN,m), mutta yksiköitä ei välivaiheisiin merkitä näkyviin.

$$\frac{EI}{L} = \frac{210 \cdot 10^6 \cdot 318 \cdot 10^{-8}}{1} = 667{,}8\,\mathrm{kNm} \qquad \frac{2EI}{L} = 1335{,}6\,\mathrm{kNm}$$

$$[k]^1 = 1335{,}6 \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \;\; 1 \end{matrix} \end{array} \qquad [k]^2 = 667{,}8 \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \;\; 1 \end{matrix} \end{array} \qquad [k]^3 = 1335{,}6 \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & \;\; 2 \end{matrix} \end{array}$$

$$[k]^4 = 667{,}8\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 2 \end{matrix} & \end{array} \qquad [k]^5 = 667{,}8\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix} & \end{array}$$

$$\{r\}^1 = \begin{array}{c} \{-5 \quad 5\} \\ 0 \quad 1 \end{array} \qquad \{r\}^3 = \begin{array}{c} \{-5/3 \quad 5/3\} \\ 1 \quad 2 \end{array} \qquad \{r\}^4 = \begin{array}{c} \{-5/2 \quad -5/2\} \\ 0 \quad 2 \end{array}$$

Suoraan solmuihin vaikuttavien kuormitusten vektori on $\{F\} = \begin{array}{c} \{0 \quad 0 \quad 5/3\} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \end{array}$

Elementtiverkon perusyhtälö saadaan sijoittelusummaamalla edellä olevat jäykkyys-matriisit ja kuormitusvektorit

$$1335{,}6\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 10 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \end{array} \begin{bmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \\ \Phi^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/3 \\ -5/6 \\ 5/3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Perusyhtälöstä ratkeavat tuntemattomat rotaatiot solmuissa, yksikkö on radiaani.

$$\Phi^1 = 0{,}2988 \cdot 10^{-3} \quad \Phi^2 = -0{,}2461 \cdot 10^{-3} \quad \Phi^3 = 0{,}7470 \cdot 10^{-3}$$

Lasketaan solmuvoimavektorit elementin perusyhtälöstä $\{f\} = [k]\{u\} - \{r\}$, joka ottaa huomioon ekvivalenttiset solmukuormitukset

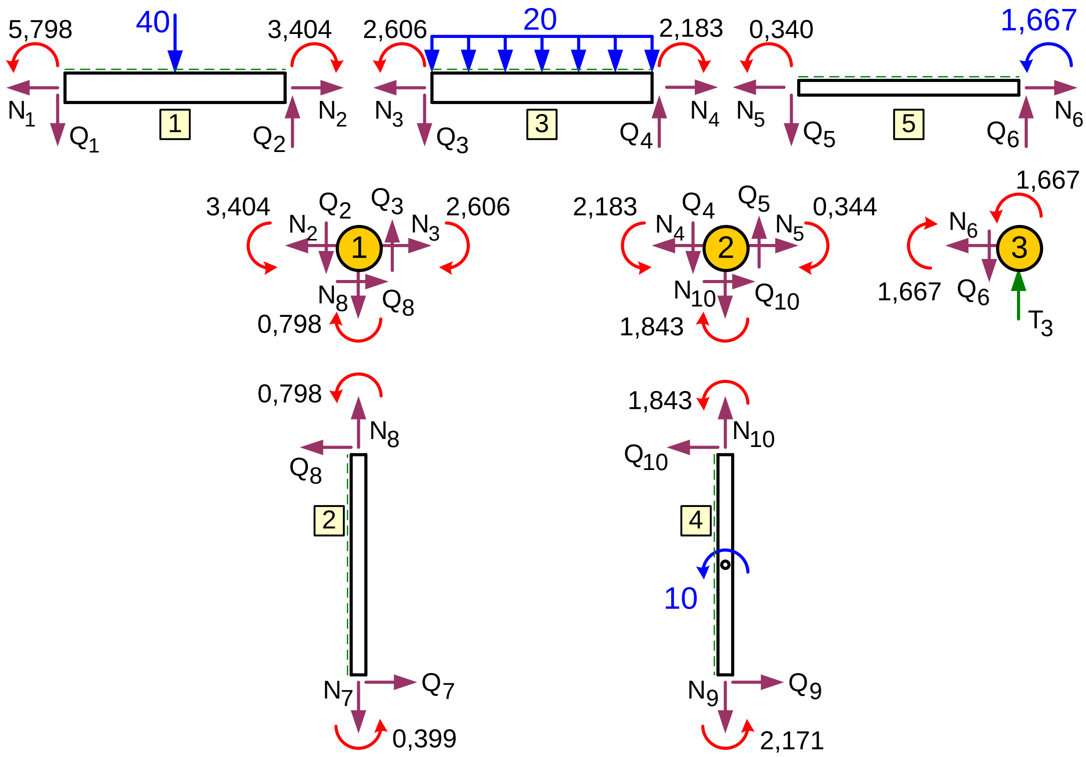
$$\begin{bmatrix} m^1 \\ m^2 \end{bmatrix}^1 = 1335{,}6\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}2988 \end{bmatrix}10^{-3} - \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}798 \\ -3{,}404 \end{bmatrix}\text{kNm}$$

$$\begin{bmatrix} m^1 \\ m^2 \end{bmatrix}^2 = 667{,}8\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}2988 \end{bmatrix}10^{-3} = \begin{bmatrix} 0{,}399 \\ 0{,}798 \end{bmatrix}\text{kNm}$$

$$\begin{bmatrix} m^1 \\ m^2 \end{bmatrix}^3 = 1335{,}6\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}2988 \\ -0{,}2461 \end{bmatrix}10^{-3} - \begin{bmatrix} -5/3 \\ 5/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}606 \\ -2{,}183 \end{bmatrix}\text{kNm}$$

$$\begin{bmatrix} m^1 \\ m^2 \end{bmatrix}^4 = 667{,}8\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}2461 \end{bmatrix}10^{-3} - \begin{bmatrix} -5/2 \\ -5/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}171 \\ 1{,}843 \end{bmatrix}\text{kNm}$$

$$\begin{bmatrix} m^1 \\ m^2 \end{bmatrix}^5 = 667{,}8\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0{,}246061 \\ 0{,}746970 \end{bmatrix}10^{-3} = \begin{bmatrix} 0{,}34038 \\ 1{,}66667 \end{bmatrix}\text{kNm}$$



Kuva 2. Elementtien ja solmujen vapaakappalekuvat.

Kuvassa 2 on elementtien ja solmujen vapaakappalekuvat, joista voidaan todeta solmujen momenttitasapaino. Vapaakappalekuvissa on momenttien lisäksi solmun 3 tukireaktio T_3 ja leikkausvoimat $Q_1 \ldots Q_{10}$, joita kahden vapausasteen palkkielementti ei ratkaise. Ne saadaan selville elementtien tasapainoehdoista. Kuvissa on myös normaalivoimat $N_1 \ldots N_{10}$, koska ne saadaan tämän esimerkin tuentatapauksessa ratkaistua tasapainoehdoista. Yleiselle hyperstaattiselle tuennalle normaalivoimien ratkaiseminen ei kahden vapausasteen palkkielementillä onnistu, koska palkkien pituudenmuutokset oletetaan nolliksi. Elementtien momenttitasapainosta ja solmujen ja elementtien vaaka- ja pystytasapainosta seuraa tuntemattomille voimille tulokset

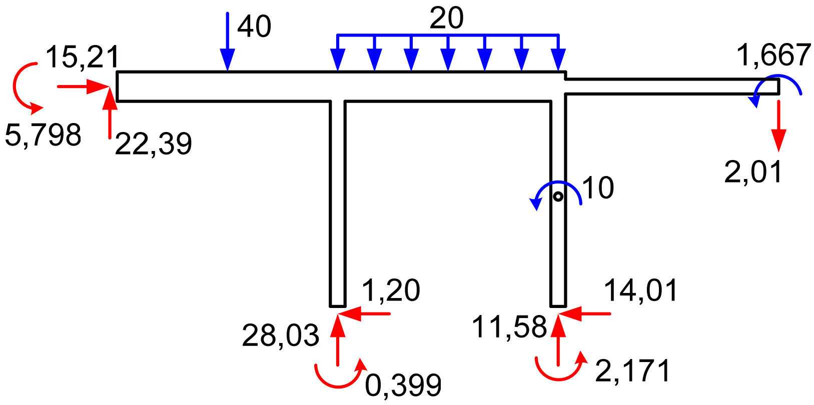
$Q_1 = -22{,}39\text{ kN} \qquad Q_2 = 17{,}61\text{ kN} \qquad Q_3 = -10{,}42\text{ kN} \qquad Q_4 = 9{,}58\text{ kN}$

$Q_5 = Q_6 = -2{,}01\text{ kN} \qquad Q_7 = Q_8 = -1{,}20\text{ kN} \qquad Q_9 = Q_{10} = -14{,}01\text{ kN}$

$N_1 = N_2 = -15{,}21\text{ kN} \qquad N_3 = N_4 = -14{,}01\text{ kN} \qquad N_5 = N_6 = 0$

$N_7 = N_8 = -28{,}03\text{ kN} \qquad N_9 = N_{10} = -11{,}58\text{ kN} \qquad T_3 = -2{,}01\text{ kN}$

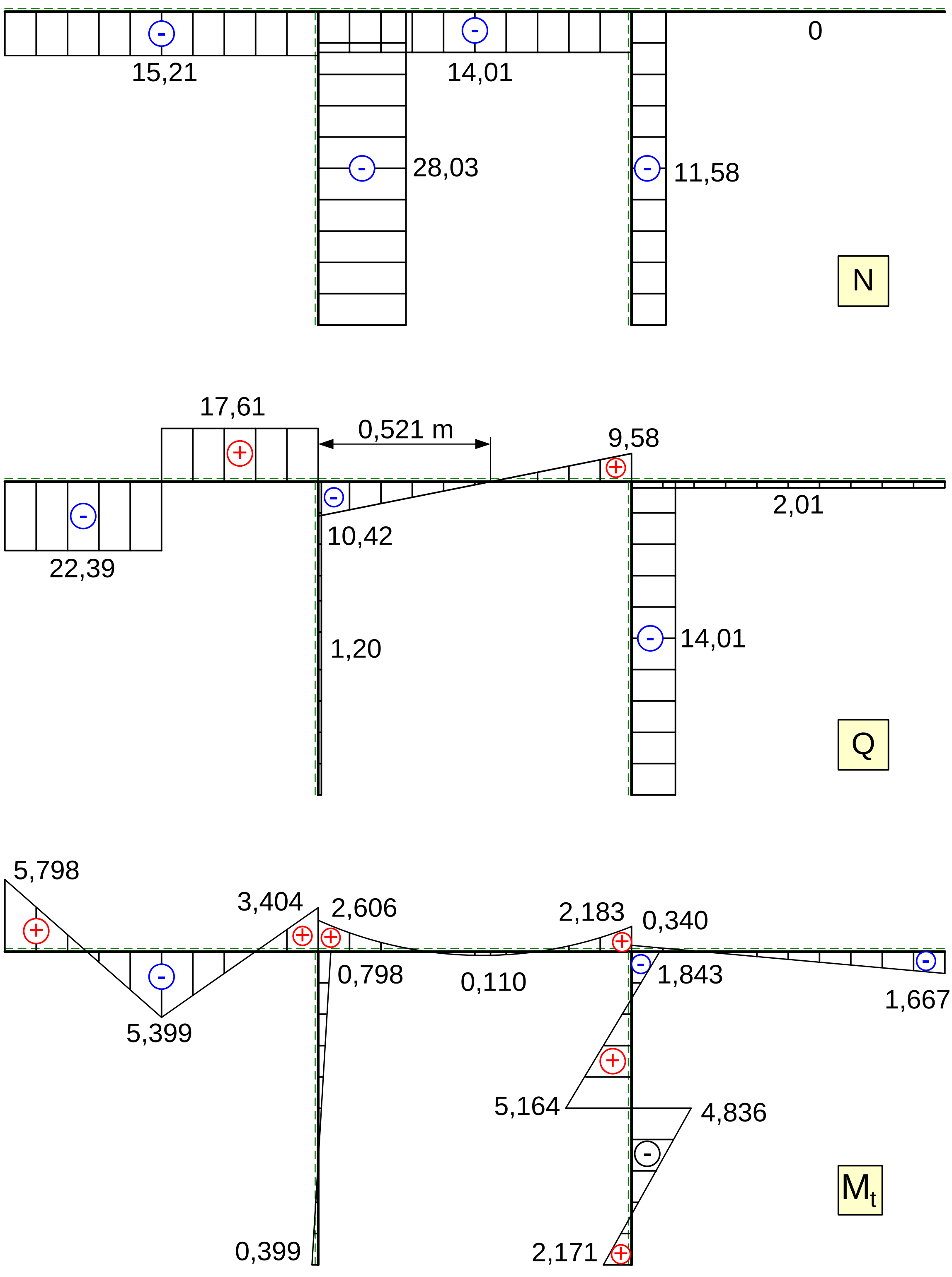
Laskettujen arvojen perusteella voidaan piirtää kuvan 3 kehän vapaakappalekuva, josta voidaan todeta voima- ja momenttitasapaino. Kuvasta näkyy, että palkkeihin syntyy normaalivoimia, joten palkit muuttavat hieman pituuksiaan. Tästä seuraa kehän nurkkapisteiden lievää siirtymistä, joka muuttaa hieman edellä saatuja tuloksia. Jos nurkkien siirtymät otetaan huomioon, täytyy solmumittausta täydentää tältä osin.



Kuva 3. Kehän vapaakappalekuva.

Edellä esitetystä seuraa, että palkkien leikkausvoimat saadaan aina elementtien poikittaisesta voimatasapainosta ja momenttitasapainosta, kun niiden päissä vaikuttavat momentit ovat elementtimenetelmäratkaisusta tunnetut. Tästä seuraa, että nurkistaan siirtymättömän tasokehän leikkausvoima- ja taivutusmomenttikuva saadaan aina selville kahden vapausasteen palkkielementtiverkolla. Edelleen taivutusmomenttikuvan ollessa tunnettu voidaan tarvittaessa määrittää palkkien taipumaviivojen lausekkeet kimmoviivan differentiaaliyhtälöstä.

Kuvassa 4 on esitetty edellä tutkitun kehän rasituskuvat. Mukana on myös normaalivoimakuva, joka tällä kertaa saatiin selville. Huomattakoon, että jos esimerkiksi solmussa 3 olisi ollut vaakasuuntainen voimatukireaktio, tasapainoyhtälöt eivät olisi riittäneet normaalivoimien määritykseen.



Kuva 4. Kehän rasituskuvat.