



II.1. Päättelä oheisessa levyssä vaikuttavien jännityskomponenttien lausekkeet ja osoita, että ne toteuttavat voimamenetelmän perusyhtälöt ja reunaehdot. Ratkaise sitten levyn siirtymäkomponenttien lausekkeet ja määritä niistä pisteen C siirtymät. Materiaalivakiot ovat $E = 210 \text{ GPa}$ ja $\nu = 0,3$.

Ratkaisu: Yksiköt ovat N ja mm ja $\mu = 10^{-6}$.

Päätellään, että jännitykset ovat reunakuormitusten mukaiset levyn kaikissa pisteissä eli

$$\sigma_x(x, y) = (1500 + y) \cdot 10^{-3} \quad \sigma_y(x, y) = 0 \quad \tau_{xy}(x, y) = 2$$

jolloin jännityskomponenttien reunaehdot toteutuvat. Myös voimamenetelmän perusyhtälöt

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + f_x = 0 \quad \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + f_y = 0 \quad \nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu)(f_{x,x} + f_{y,y})$$

toteutuvat ($f_x = 0$ $f_y = 0$), joten ratkaisu on oikea. Muodonmuutoskomponenteiksi saadaan materiaaliyhtälöistä (2.2)

$$\begin{aligned} \epsilon_x(x, y) &= \frac{1}{210 \cdot 10^3} (1500 + y) \cdot 10^{-3} = 0,004762 \mu \cdot (1500 + y) \\ \epsilon_y(x, y) &= \frac{-0,3}{210 \cdot 10^3} (1500 + y) \cdot 10^{-3} = -0,001429 \mu \cdot (1500 + y) \\ \gamma_{xy}(x, y) &= \frac{2 \cdot (1 + 0,3)}{210 \cdot 10^3} \cdot 2 = 24,76 \mu \end{aligned}$$

Kinemaattisista yhtälöistä (2.9) seuraa

$$u_{,x} = \epsilon_x \Rightarrow u(x, y) = 0,004762 \mu \cdot (1500 + y)x + f(y)$$

$$v_{,y} = \epsilon_y \Rightarrow v(x, y) = -0,001429 \mu \cdot (1500 \cdot y + y^2 / 2) + g(x)$$

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} \Rightarrow 24,76 \mu = 0,004762 \mu \cdot x + \frac{df(y)}{dy} + \frac{dg(x)}{dx} \Rightarrow$$

$$0,004762 \mu \cdot x + \frac{dg(x)}{dx} = 24,76 \mu - \frac{df(y)}{dy} = C \text{ (vakio)} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{dg(x)}{dx} = C - 0,004762 \mu \cdot x \Rightarrow g(x) = Cx - 0,004762 \mu \cdot x^2 / 2 + D \\ \frac{df(y)}{dy} = -C + 24,76 \mu \Rightarrow f(y) = -Cy + 24,76 \mu \cdot y + H \end{cases}$$

jossa D ja H ovat vakioita. Siirtymäkomponenttien lausekkeiksi tulee näin ollen

$$u(x, y) = 0,004762 \mu \cdot (1500 + y)x - Cy + 24,76 \mu \cdot y + H$$

$$v(x, y) = -0,001429 \mu \cdot (1500 \cdot y + y^2 / 2) + Cx - 0,004762 \mu \cdot x^2 / 2 + D$$

Siirtymien reunaehdot levyn alakulmissa ovat

$$u(-1000, -500) = 0 \quad v(-1000, -500) = 0 \quad v(1000, -500) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 0,004762 \mu \cdot 1000 \cdot (-1000) - C \cdot (-500) + 24,76 \mu \cdot (-500) + H = 0 \\ -0,001429 \mu \cdot (-625000) + C \cdot (-1000) - 0,004762 \mu \cdot 500000 + D = 0 \\ -0,001429 \mu \cdot (-625000) + C \cdot 1000 - 0,004762 \mu \cdot 500000 + D = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$C = 0 \quad D = 1488 \mu \quad H = 17143 \mu \Rightarrow$$

$$u(x, y) = 0,004762 \mu \cdot (1500 + y)x + 24,76 \mu \cdot y + 17143 \mu$$

$$v(x, y) = -0,001429 \mu \cdot (1500 \cdot y + y^2 / 2) - 0,004762 \mu \cdot x^2 / 2 + 1488 \mu$$

Pisteen C siirtymäkomponentit

$$u(1000, 500) = 0,03905 \text{ mm} \quad v(1000, 500) = -0,002143 \text{ mm}$$