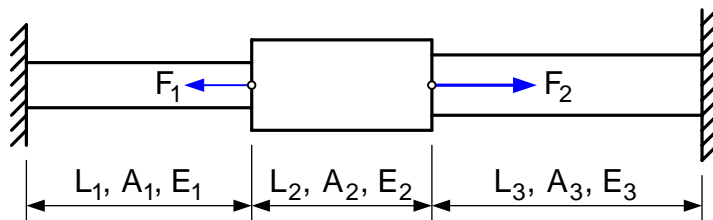


2 RISTIKKORAKENTEET

2.1 Aksiaalinen rakenne

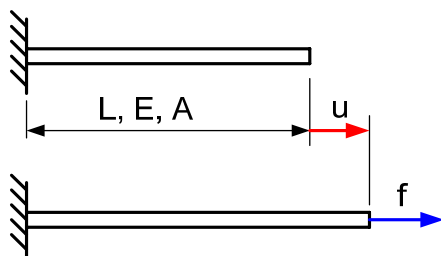
Aksiaalinen rakenne koostuu suoralla peräkkäin olevista sauvoista kuvan 2.1 mukaisesti.



Kuva 2.1 Aksiaalinen rakenne.

Aksiaalinen rakenne ei ole yleinen sovelluksissa, mutta elementtimenetelmän teoria on tässä tapauksessa yksinkertaisimmillaan, joten siitä kannattaa aloittaa. Aksiaalisen rakenteen yhteydessä elementtimenetelmän perusajatuksia tulevat esiin mahdollisimman pelkistetyssä muodossa, jolloin ne on helppo omaksua ja yleistys mutkikkaampiin rakenteisiin sujuu paremmin.

2.1.1 Aksiaalisen elementin jäykkyyden matriisi

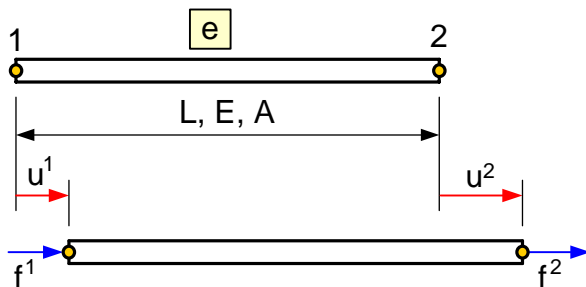


Kuva 2.2 Sauvan jäykkyys.

Kuvan 2.2 sauvan kuormituksen f ja pituudenmuutoksen u välinen yhteys on

$$f = \frac{EA}{L}u \quad (2.1)$$

jossa L on sauvan pituus, A poikkileikkauksen ala ja E kimmomoduuli. Sauva voidaan siis tulkita jouseksi, jonka jousivakio on EA/L . Kun sauva on elementtiverkon elementtinä, voivat sen molemmat päät siirtyä, kuten kuvassa 2.3 on esitetty. Yleistetään jäykkyyden käsite koskemaan tätä tilannetta. Elementin aksiaalisesta tasapainosta seuraa



Kuva 2.3 Sauvaelementti.

elementtinä, voivat sen molemmat päät siirtyä, kuten kuvassa 2.3 on esitetty. Yleistetään jäykkyyden käsite koskemaan tätä tilannetta. Elementin aksiaalisesta tasapainosta seuraa

$$f^1 = -f^2 \quad (2.2)$$

Toisaalta sauvan pituuden muutokselle on voimassa

$$\Delta L = u^2 - u^1 = \frac{f^2 L}{EA} = \frac{f^2}{k} \quad \Rightarrow \quad f^2 = -ku^1 + ku^2 \quad (2.3)$$

Kaavojen (2.2) ja (2.3) mukaan on siis

$$\begin{cases} f^1 = ku^1 - ku^2 \\ f^2 = -ku^1 + ku^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} f^1 \\ f^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

tai lyhyemmin kirjoitettuna

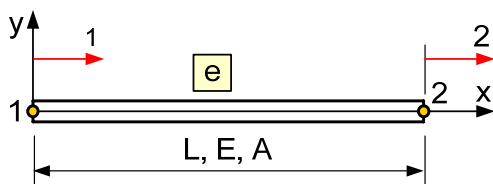
$$\{\mathbf{f}\} = [\mathbf{k}] \{\mathbf{u}\} \quad (2.5)$$

jossa $\{\mathbf{f}\} = \{f^1 \quad f^2\}$ on elementin solmuvoimavektori ja $\{\mathbf{u}\} = \{u^1 \quad u^2\}$ solmusiirtymävektori sekä

$$[\mathbf{k}] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

akσιαalisen sauvaelementin jäykkyyismatriisi. Solmuvoimavektorin komponenteista saadaan normaalivoima elementin päissä, sillä $f^1 = -N$ ja $f^2 = N$. Normaalivoimaa ei kannata käyttää solmusuurena, sillä systemaattisen käsittelyn kannalta on parasta valita suureiden positiivinen suunta samaksi eli solmuvoima on oikealle positiivinen kummassakin solmussa.

Kuvassa 2.4 on aksiaalisen sauvaelementin kuvasta 2.3 yksinkertaistettu solmumittaus-piirros, jossa elementti on piirretty lepotilannetta vastaavaan asemaan. Kuvassa



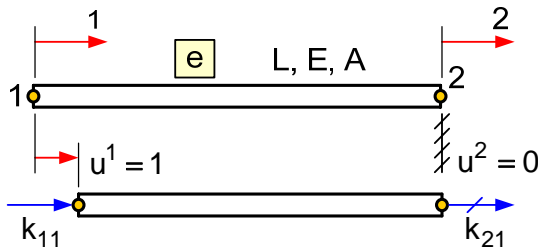
Kuva 2.4 Aksiaalinen elementti.

on solmut 1 ja 2, jotka ovat elementin alkusolmu ja loppusolmu. Ne määräävät elementin xy-paikalliskoordinaatiston eli lokaalikoordinaatiston. Lisäksi kuvassa on nuolisymboleina solmumittaukseen käytetyt suureet eli elementin vapausasteet. Ne ilmaisevat solmumittaukseen käytetyt voima- ja siirtymäsuureet sekä näiden positiiviset suunnat. Edellä johdetut sauvaelementin solmuvoimavektori, solmusiirtymävektori ja jäykkyyismatriisi liittyvät juuri kuvan 2.4 solmumittausjärjestelmään. Jos solmumittaus valitaan toisin, muuttuvat nämä suureet.

Elementtien jäykkyyismatriisien määrittämiseen tarvitaan mahdollisimman tehokkaita menetelmiä. Edellä tultiin toimeen peruslujuusopilla, mutta se ei aina riitä. Muutaman kerran voidaan hyödyntää ykkössiirtymämenetelmää, joten tutustutaan siihen johta-

malla jäykkyysmatriisin (2.6) lauseke uudestaan. Oletetaan, että elementille pakotetaan solmusiirtymävektori $\{u\} = \{1 \ 0\}$ kuvan 2.5 mukaisesti. Tähän tarvitaan solmu-

voimat, jotka voidaan ratkaista elementin perusyhtälöstä (2.5). Kun merkitään tuntemattomia jäykkyysmatriisin alkioita k_{ij} , $i, j = 1, 2$, saadaan tulos



$$\begin{bmatrix} f^1 \\ f^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \end{bmatrix}$$

Kuva 2.5 Ykkössiirtymä.

jonka mukaan tarvittava solmuvoimavektori on jäykkyysmatriisin ensimmäinen sarake. Kuvan 2.5 perusteella

on $k_{11} = -k_{21} = EA/L$. Pakottamalla solmusiirtymävektoriksi $\{u\} = \{0 \ 1\}$ saadaan jäykkyysmatriisin toinen sarake tähän tarvittavista solmuvoimakomponenteista.

Jäykkyysmatriisilla (2.6) on kaikille jäykkyysmatriiseille tyypillisiä ominaisuuksia

- jäykkyysmatriisi on symmetrinen eli $[k] = [k]^T$
- lävistjäälkiot ovat aidosti positiivisia eli $k_{ii} > 0$, $i = 1, 2$
- elementillä on vapausasteillaan jäykän kappaleen liikemahdollisuus (translaatio x-suunnassa), josta johtuen jäykkyysmatriisi on singulaarinen, jolloin $\det[k] = 0$ ja siis $[k]^{-1}$ ei ole olemassa.

Kuvan 2.4 elementin aksiaalista jäykän kappaleen liikettä vastaava tasapainoehto on

$$f^1 + f^2 = 0 \quad (2.7)$$

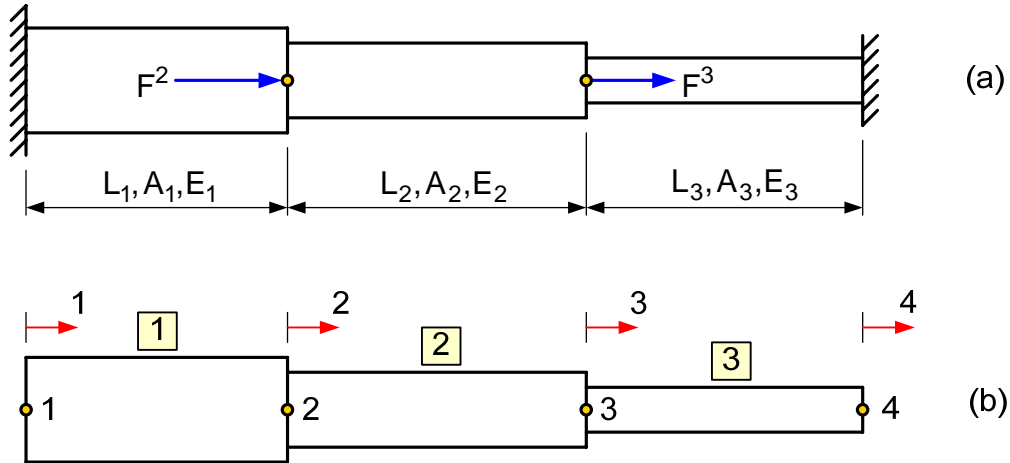
Kuvan 2.5 perustella jäykkyysmatriisin ensimmäisen sarakkeen alkiot toteuttavat yhtälön (2.7). Myös jäykkyysmatriisin toisen sarakkeen alkiot toteuttavat sen. On siis voimassa

$$k_{11} + k_{21} = 0 \quad k_{21} + k_{22} = 0 \quad (2.8)$$

Jäykkyysmatriisin symmetriasta seuraa, että myös sen vaakarivien alkiot toteuttavat tasapainoyhtälön (2.7). Edellä esitetty on myös yleisesti voimassa, tietyn elementin jäykkyysmatriisin rivien ja sarakkeiden alkiot toteuttavat elementin jäykän kappaleen liikemahdollisuuksia vastaavat tasapainoehdot.

2.1.2 Sijoittelusummaus

Tarkastellaan kuvan 2.6 (a) aksiaalista rakennetta. Kuvassa 2.6 (b) on sen elementtiverkko. Elementtiverkon kuvassa on esitetty solmujen vapausasteet, mutta ei tukia ja kuormituksia. Elementtiverkossa on kolme elementtiä ja neljä solmua, joiden globaalit



Kuva 2.6 Aksiaalinen rakenne ja sen elementtiverkko.

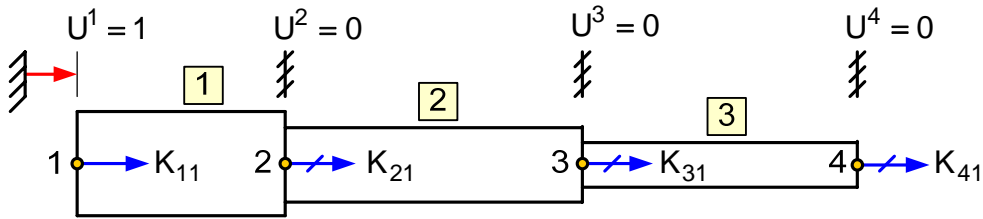
solmunumerot ovat kuvassa. Elementtien jousivakiot ovat $k_i = E_i A_i / L_i$, $i = 1, 2, 3$. Koska elementtikuormituksia ei ole, on kuvan 2.6 (b) elementtiverkon perusyhtälö

$$[K] \{U\} = \{F\} \quad (2.9)$$

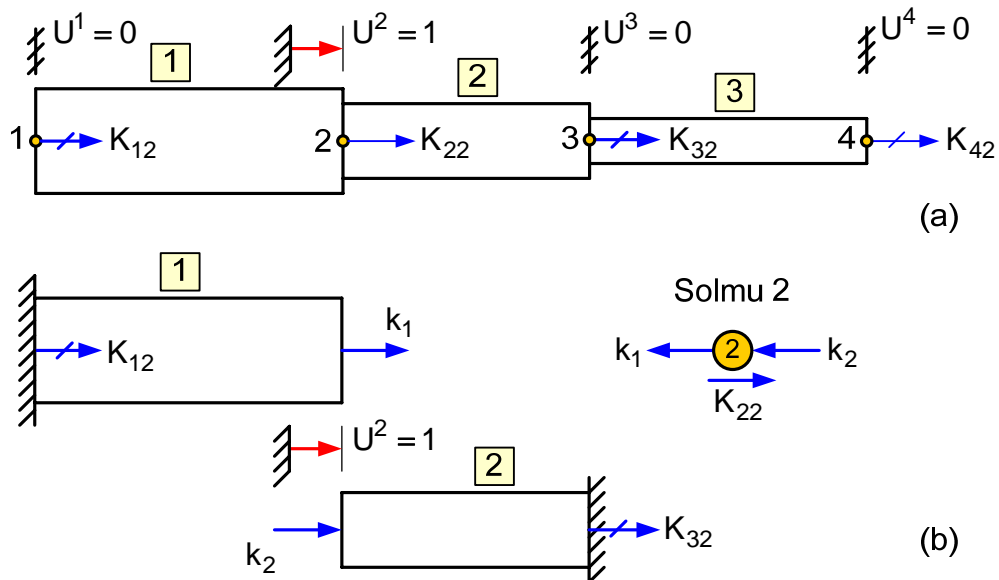
jossa $\{U\}$ on elementtiverkon solmusiirtymävektori ja $\{F\}$ solmukuormitusvektori sekä $[K]$ näitä vastaava elementtiverkon jäykkyysmatriisi. Koska elementtiverkolla on neljä vapausastetta, yhtälö (2.9) on auki kirjoitettuna

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^1 \\ U^2 \\ U^3 \\ U^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^1 \\ F^2 \\ F^3 \\ F^4 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Elementtiverkon jäykkyysmatriisin määrittämiseen ei vielä ole esitetty ykkössiirtymämenetelmää tehokkaampaa keinoa, joten käytetään sitä matriisin $[K]$ sarakkeiden määrittämiseen. Kuvassa 2.7 on rakenteella siirtymävektori $\{U\} = \{1 \ 0 \ 0 \ 0\}$ ja tähän tarvittava solmukuormitusvektori $\{F\} = \{K_{11} \ K_{21} \ K_{31} \ K_{41}\}$. Koska solmut 2, 3 ja 4 eivät liiku, pysyvät elementtien 2 ja 3 pituudet ennallaan, joten niiden normaali-voimat ovat nollia. Tästä seuraa, että tukireaktiot K_{31} ja K_{41} ovat nollia. Lisäksi on $K_{11} = k_1$ ja aksiaalisen tasapainon perusteella $K_{21} = -K_{11} = -k_1$. Jäykkyysmatriisin $[K]$ ensimmäinen sarake on siis $\{k_1 \ -k_1 \ 0 \ 0\}$.

Kuva 2.7 Ykkössiirtymä $\{U\} = \{1 \ 0 \ 0 \ 0\}$.

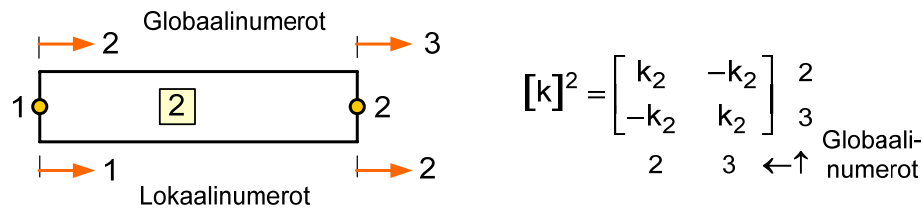
Kuvassa 2.8 rakenteella on siirtymävektori $\{U\} = \{0 \ 1 \ 0 \ 0\}$, jonka syntymiseen tarvitaan solmukuormitusvektori $\{F\} = \{K_{12} \ K_{22} \ K_{32} \ K_{42}\}$. Koska elementin 3 pituus ei muutu, on sen normaalivoima nolla, joten $K_{42} = 0$. Kuvan 2.8 (b) perusteella $K_{22} = k_1 + k_2$, $K_{12} = -k_1$ ja $K_{32} = -k_2$, joten jäykkyyismatriisin $[K]$ toinen sarake on $\{-k_1 \ k_1 + k_2 \ -k_2 \ 0\}$.

Kuva 2.8 Ykkössiirtymä $\{U\} = \{0 \ 1 \ 0 \ 0\}$.

Samalla periaatteella saadaan matriisin $[K]$ kolmas ja neljäs sarake ja ne ovat $\{0 \ -k_2 \ k_2 + k_3 \ -k_3\}$ ja $\{0 \ 0 \ -k_3 \ k_3\}$. Jäykkyyismatriisiksi $[K]$ tulee

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \quad (2.11)$$

Jäykkyysmatriisissa (2.11) näkyy selvästi kunkin elementin 1, 2 ja 3 vaikutukset globaalisolmunumeroidensa mukaisilla alueilla. Tulos voidaan tulkita elementtien jäykkyysmatriisien sijoittelusummaksi. Tämä tarkoittaa sitä, että kunkin elementin jäykkyysmatriisin alkiot sijoitetaan kokonaisjäykkyysmatriisiin $[K]$ elementin globaalisolmunumeroiden mukaisiin paikkoihin laskien samaan paikkaan tulevat alkiot yhteen. Esimerkiksi elementin 2 jäykkyysmatriisin alkiot sijoittelusummataan matriisiin $[K]$ kuvan (2.9) mukaisesti. Kun elementin jäykkyysmatriisi on kirjoitettu, globaalinumeroit merkitään sen ala- ja oikealle puolelle kuvassa 2.9 esitetyllä tavalla. Silloin kunkin alkion osoite kokonaisjäykkyysmatriisissa on välittömästi nähtävissä.



Kuva 2.9 Jäykkyysmatriisin $[k]^2$ sijoittelusummaus.

Sijoittelusummausta voidaan soveltaa yleisesti kaiken tyyppisille elementeille rakenteen jäykkyysmatriisia muodostettaessa. Soveltamisen edellytyksenä on kuitenkin, että elementin lokaalin ja elementtiverkon globaalin solmumittauksien suunnat ovat samat. Jos näin ei ole, on elementin jäykkyysmatriisiin sovellettava vielä ennen sijoittelusummausta koordinaatiston kiertoa, kuten myöhemmin tulee esille. Sijoittelusummauksen symbolina käytetään merkintää " \sum ", joten lauseke

$$[K] = \sum_{e=1}^M [k]^e \quad (2.12)$$

tarkoittaa, että elementtiverkon jäykkyysmatriisi muodostetaan sijoittelusummaamalla M kappaletta elementtien jäykkyysmatriiseja.

Tuloksesta (2.11) näkyy, että saatu jäykkyysmatriisi on symmetrinen ja sen päälävistääalkiot ovat positiivisia. Matriisi $[K]$ on singulaarinen, sillä kuvan 2.6 (b) solmumittausjärjestelmään sisältyy aksiaalinen jäykän kappaleen liikemahdollisuus, jota vastaava tasapainoyhtälö on

$$F^1 + F^2 + F^3 + F^4 = 0 \quad (2.13)$$

Matriisin (2.11) sarakkeiden ja rivien alkiot toteuttavat tämän yhtälön.

Elementtiverkon perusyhtälössä (2.10) on oikealla puolella solmukuormitusvektori $\{F\}$, joka sisältää solmuihin vaikuttavat annetut kuormitukset ja tuntemattomat tukireaktiot. Tässä tapauksessa on kuvan 2.6 (a) perusteella

$$\{F\} = \{F^1 \quad F^2 \quad F^3 \quad F^4\} \quad (2.14)$$

jossa F^1 ja F^4 ovat tuntemattomia tukireaktioita. Solmusiirtymävektorista $\{U\}$ tunnetaan tukikomponentit U^1 ja U^4 . Ne ovat nollia, jos tuet ovat siirtymättömiä tai annetun suuruisia pakkosiirtymiä. Perusyhtälö (2.9) on auki kirjoitettuna

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^1 \\ U^2 \\ U^3 \\ U^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^1 \\ F^2 \\ F^3 \\ F^4 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Yhtälössä (2.15) on solmusiirtymä- ja solmukuormitusvektorissa tunnetut komponentit lihavoitu.

Ryhmää (2.15) ei voi ratkaista kääntämällä kerroinmatriisi, sillä se on singulaarinen. Lisäksi tuntemattomia esiintyy myös yhtälöryhmän oikealla puolella. Ratkaisu saadaan esimerkiksi niin, että otetaan ryhmästä (2.15) vapaita solmusiirtymiä U^2 ja U^3 vastaavat yhtälöt, jolloin saadaan

$$\begin{cases} -k_1 U^1 + (k_1 + k_2) U^2 - k_2 U^3 = F^2 \\ -k_2 U^2 + (k_2 + k_3) U^3 - k_3 U^4 = F^3 \end{cases} \quad (2.16)$$

eli matriisimuotoon kirjoitettuna

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^2 \\ U^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^2 + k_1 U^1 \\ F^3 + k_3 U^4 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

joka voidaan ratkaista kääntämällä kerroinmatriisi. Kun U^2 ja U^3 on ratkaistu, saadaan tukireaktiot F^1 ja F^4 ryhmän (2.15) ensimmäisestä ja neljännestä yhtälöstä eli

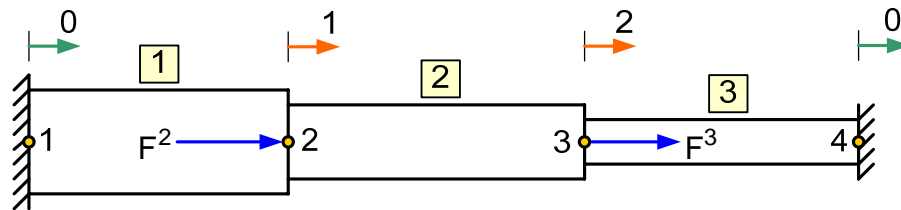
$$F^1 = k_1 U^1 - k_1 U^2 \quad F^4 = -k_3 U^3 + k_3 U^4 \quad (2.18)$$

Edellä esitetty jäykkyysyhtälön ratkaisumenetelmä on tehoton, joten FEM-ohjelmissa se on korvattu tehokkaammilla menetelmillä.

2.1.3 Vapaat solmusiirtymät verkon vapausasteina

Vaikka elementtimenetelmää ei ole ajateltu käsilaskumenetelmäksi, on teorian havainnollistamiseksi hyvä käsitellä pieniä malleja ilman tietokonetta. Tukisiirtymien ollessa nollia voidaan laskentatyötä vähentää jättämällä tukivapausasteet alkuvaiheessa pois elementtiverkon solmumittauksesta, jolloin sijoittelusummaus johtaa suoraan vapaiden solmusiirtymien yhtälöryhmään. Tuntemattomat tukireaktiot voidaan siirtymien ratkaisemisen jälkeen laskea elementin perusyhtälön avulla.

Kuvassa 2.10 on edellä tarkasteltu elementtiverkko, jossa solmusiirtymät solmuissa 2 ja 3 on varustettu vapausastenumeroilla 1 ja 2 sekä kiinteiksi oletetuissa tukisolmuissa 1 ja 4 on yhteinen vapausaste 0 merkinä siitä, että nämä jätetään alkuvaiheessa laskennasta pois. Kuvan 2.10 verkon jäykkyyssyhtälö voidaan muodostaa tavanomaisesti sijoittelusummauksella elementtien jäykkyyismatriiseista jättäen huomioonottamatta ne alkiot, joiden osoitteessa esiintyy vapausaste 0.



Kuva 2.10 Vapaat solmusiirtymät.

Muodostetaan elementtien jäykkyyismatriisit ja varustetaan ne osoitenumeroilla

$$[k]^1 = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \quad [k]^2 = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \quad [k]^3 = \begin{bmatrix} k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \quad (2.19)$$

Jäykkyyismatriiseissa on sijoittelusummaukseen osallistuvat alkiot lihavoitu. Kun sijoittelusummaus suoritetaan näillä alkioidella, saadaan elementtiverkon perusyhtälöksi

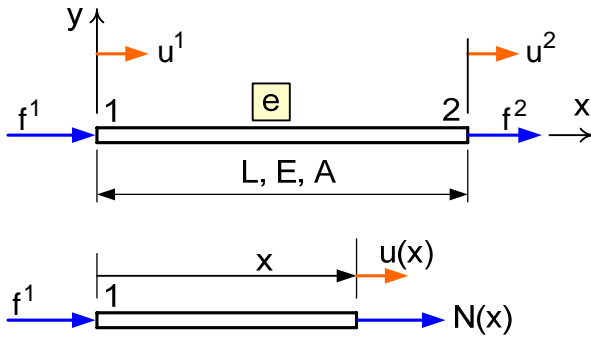
$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^2 \\ U^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^2 \\ F^3 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

josta näkyy, että yhtälöön (2.17) päästään tällä tekniikalla suoraan. Tulokseen (2.17) päästään myös, kun ryhmästä (2.15) pyyhitään pois tuettuja solmumittauksia 1 ja 4 vastaavat rivit ja sarakkeet.

Pelkkien vapaiden solmusiirtymien käyttö vapausasteina onnistuu vain, kun tukisiirtymät ovat nollia. Nollasta poikkeavien tukisiirtymien käsittely edellyttää niihin liittyvien vapausasteiden ottamista mukaan solmumittaukseen.

2.1.4 Tuntemattomien suureiden ratkaiseminen

Elementtiverkon solmusiirtymävektori ratkeaa verkon perusyhtälöstä $[K]\{U\} = \{F\}$. Solmusiirtymävektorista $\{U\}$ voidaan poimia minkä tahansa elementin solmusiirtymävektori $\{u\}^e$, josta voidaan laskea elementin perusyhtälön $\{f\}^e = [k]^e \{u\}^e$ avulla solmuvoimavektori $\{f\}^e$. Kun solmusuureet tunnetaan, voidaan tuntemattomat suureet elementin alueessa laskea niistä. Johdetaan kaava mielivaltaisen poikkileikkauksen siirtymälle $u(x)$. Kinemaattisen yhtälön ja Hooken lain perusteella saadaan



Kuva 2.11 Kenttäsuureiden määrittäminen.

$$\frac{du}{dx} = \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (2.20)$$

Kuvan 2.11 ja yhtälön (2.4) perusteella on

$$\sigma_x = -\frac{f^1}{A} = -\frac{E}{L}(u^1 - u^2) \quad (2.21)$$

Kaavoista (2.20) ja (2.21) seuraa

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{L}(u^1 - u^2) \Rightarrow \int_{u^1}^{u(x)} du = -\frac{1}{L}(u^1 - u^2) \int_0^x dx \Rightarrow u(x) - u^1 = -\frac{1}{L}(u^1 - u^2)x$$

Siirtymälle $u(x)$ tulee edellä olevasta lauseke

$$u(x) = \frac{L-x}{L}u^1 + \frac{x}{L}u^2 = N_1(x)u^1 + N_2(x)u^2 \quad (2.22)$$

eli siirtymä $u(x)$ saadaan lineaarisella interpoloinnilla solmuarvoistaan u^1 ja u^2 interpolointifunktioiden ollessa

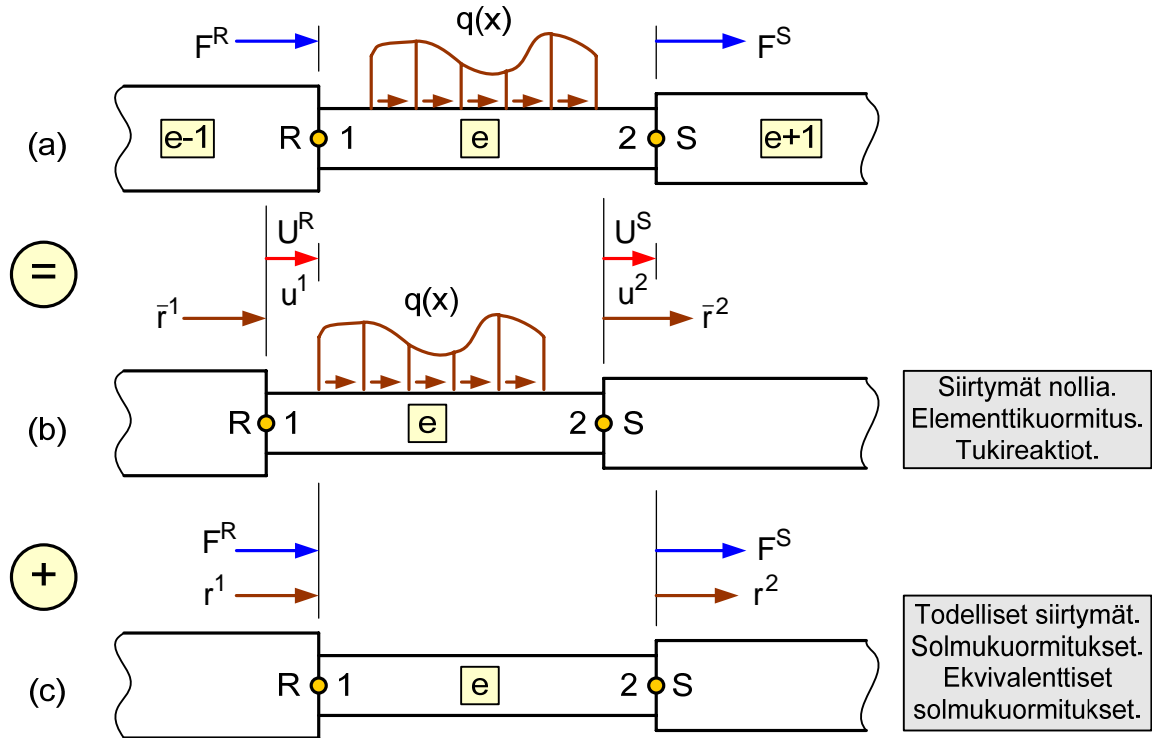
$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad N_2(x) = \frac{x}{L} \quad (2.23)$$

Tässä tapauksessa tarkka siirtymäratkaisu elementin alueessa löytyy ja se on sama kuin lineaarisella interpoloinnilla saatava ratkaisu. Siirtymää (2.22) vastaavat venymä ϵ_x ja jännitys σ_x ovat

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{dN_1}{dx}u^1 + \frac{dN_2}{dx}u^2 = \frac{1}{L}(u^2 - u^1) \quad \sigma_x = E\epsilon_x = \frac{E}{L}(u^2 - u^1) \quad (2.24)$$

2.1.5 Ekvivalenttiset solmukuormitukset

Yleisessä tapauksessa kuormituksia voi olla myös elementin alueessa. Solmujen ulkopuolella olevia kuormituksia sanotaan elementtikuormituksiksi. Niiden vaikutus voidaan ottaa huomioon ekvivalenttisten solmukuormitusten avulla. Ekvivalenttisilla solmukuormituksilla $\{r\}$ tarkoitetaan sellaisia solmukuormituksia, jotka aiheuttavat rakenteelle samat solmusiirtymät $\{U\}$ kuin kyseessä oleva elementtikuormitus.



Kuva 2.12 Ekvivalenttiset solmukuormitukset.

Ekvivalenttisten solmukuormitusten lausekkeet saadaan yhteenlaskuperiaatteella. Tarkastellaan kuvan 2.12 aksiaalisen rakenteen elementtiä e , jonka solmujen 1 ja 2 globaaliluvut ovat R ja S . Tutkittava tilanne (a) on jaettu kahteen osatapaukseen (b) ja (c). Tapaus (b) sisältää elementtikuormituksen ja sen solmusiirtymät on estetty. Tällöin elementin päihin syntyvät tukireaktiot \bar{r}_1 ja \bar{r}_2 . Tapaus (c) sisältää solmukuormitukset F^R ja F^S solmusiirtymien ollessa todelliset tapauksen (a) mukaiset. Solmukuormituksiin tarvitaan tapauksessa (c) lisäykset, jotka ovat juuri ekvivalenttiset solmukuormitukset r^1 ja r^2 . Yhteenlaskuperiaate (a) = (b) + (c) toteutuu jos ja vain jos

$$r^1 = -\bar{r}^1 \quad \text{ja} \quad r^2 = -\bar{r}^2 \quad (2.25)$$

Nähdään, että ekvivalenttiset solmukuormitukset ovat elementtikuormituksista syntyvien tukireaktioiden vastasuureet, kun solmumittauksen mukaisten siirtymien syntyminen on estetty. Päättely pätee minkä tyyppiselle elementille ja elementtikuormitukselle tahansa, kun vain yhteenlaskuperiaate on voimassa.

Elementtikuormitusten ollessa mukana, muuttuu solmuvoimavektorin $\{f\}$ laskukaava (2.5) toiseen muotoon. Kuvan 2.12 (c) mukaan $\{f\}$ sisältää solmusiirtymävektorista $\{u\}$ johtuvan osuuden $[k]\{u\}$, mutta yhteenlaskuperiaatteesta seuraa, että tähän on lisättävä kuvan 2.12 (b) tukireaktioiden vektori $\{\bar{r}\} = \{\bar{r}^1 \quad \bar{r}^2\} = -\{r\}$.

$$\{f\} = [k]\{u\} + \{\bar{r}\} = [k]\{u\} - \{r\} \quad (2.26)$$

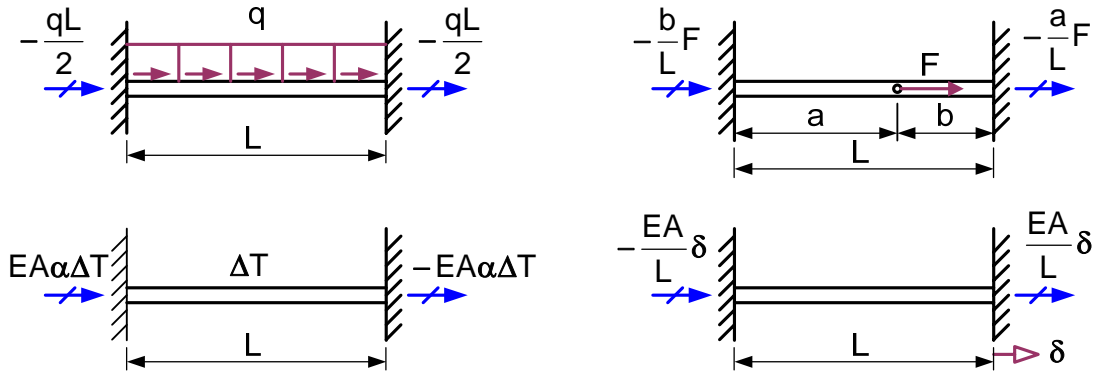
Elementtikuormitukset otetaan huomioon lisäämällä solmukuormitusvektoriin $\{F\}$ ekvivalenttiset solmukuormitukset. Tämä voidaan tehdä siten, että kullekin elementtikuormituksen alaiselle elementille lasketaan lokaalinumeroinnin mukainen ekvivalenttinen solmukuormitusvektori $\{r\}^e = -\{\bar{r}\}^e$, joka sitten sijoittelusummataan globaalinumeroinnin mukaisiin paikkoihin vektoriin $\{F\}$. Näin saadaan elementtiverkon kokonaiskuormitusvektori, jonka lauseke on

$$\{R\} = \{F\} + \sum_{e=1}^M \{r\}^e \quad (2.27)$$

Yleinen elementtiverkon jäykkyysyhtälö on siis muotoa

$$[K]\{U\} = \{R\} \quad (2.28)$$

Kuvassa 2.15 on muutaman tavallisen elementtikuormitustapausten tukireaktiot $\{\bar{r}\}$. Niistä saadaan etumerkkiä vaihtamalla ekvivalenttiset solmukuormitukset $\{r\}$



Kuva 2.13 Aksiaalisen elementin tukireaktioita $\{\bar{r}\}$.

Kun perusyhtälö $[K]\{U\} = \{R\}$ on ratkaistu, voidaan muodostaa elementtien solmusiirtymävektorit $\{u\}$ ja laskea solmuvoimavektorit $\{f\}$ kaavasta (2.26). Tuntemattomat suureet elementin alueessa saadaan näiden vektoreiden avulla. Laskennassa on otettava huomioon myös elementtikuormitusten vaikutus kuvan 2.12 (b) mukaisesti.

2.2 Tasoristikko

2.2.1 Yleistä ristikkorakenteista

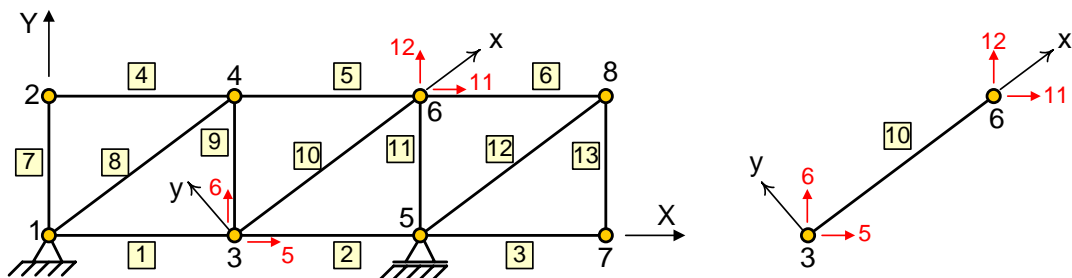
Ristikkorakenne on lujuusopin laskentamalli, joka koostuu vain vetoa ja puristusta kestävästä sauvosta. Nämä liittyvät tukipisteisiin ja toisiinsa kitkattomilla nivelillä. Jos ristikkorakenteen sauvat ovat samassa tasossa, on se tasoristikko, mutta muuten avaruusristikko. Rakennetyyppinä ristikkorakenne on viivarakenne, sillä sitä käytettäessä todellisen rakenteen geometria mallinnetaan sauvojen pintakeskiöviivoilla, jotka liittyvät toisiinsa ja tukiin nivelien kohdilla. Yleensä ristikon sauvat ovat tasapaksuja, jolloin poikkipintasuureista tarvitaan vain kunkin sauvan poikkileikkauksen pinta-ala.

Oletuksista seuraa, että ristikon kineettinen kuormitus voi koostua lähinnä niveliin kohdistuvista pistevoimista ja kinemaattinen kuormitus tukien translaatiosiirtymistä. Sauvoihin kohdistuvia kuormituksia ovat lämpötilan muutos, esijännitys ja esivenymä. Tasoristikon kuormitusten on oltava sen omassa tasossa. Laskennan tuloksena saadaan sauvojen normaalivoimat ja normaalijännitykset sekä nivelien siirtymät.

Ristikkorakenne voidaan ratkaista tarkasti elementtimenetelmällä käyttämällä elementtiverkkoa, jossa solmut sijaitsevat nivelien kohdilla ja elementit ovat niiden välille jäävät sauvat. Ristikon elementit ovat kaksisolmuisia sauvaelementtejä, eivätkä tässä suhteessa eroa edellä tarkastellusta aksiaalisesta elementistä. Aksiaalista elementtiä ei kuitenkaan voi sellaisenaan käyttää ristikkorakenteiden ratkaisuun, sillä solmumittaus on suoritettava toisella tavalla.

2.2.2 Tasoristikon elementtiverkko

Kuvan 2.5 mukaisen aksiaalisen sauvaelementin käyttö on mahdollista vain, jos elementtiverkon kaikki sauvaelementit ovat samansuuntaiset. Tasoristikolla näin ei ole, sillä elementtiverkon solmuun liittyy aina vähintään kaksi erisuuntaista elementtiä. Esimerkiksi kuvassa 2.14 olevan tasoristikon elementtiverkon solmuun 6 liittyy kaksi

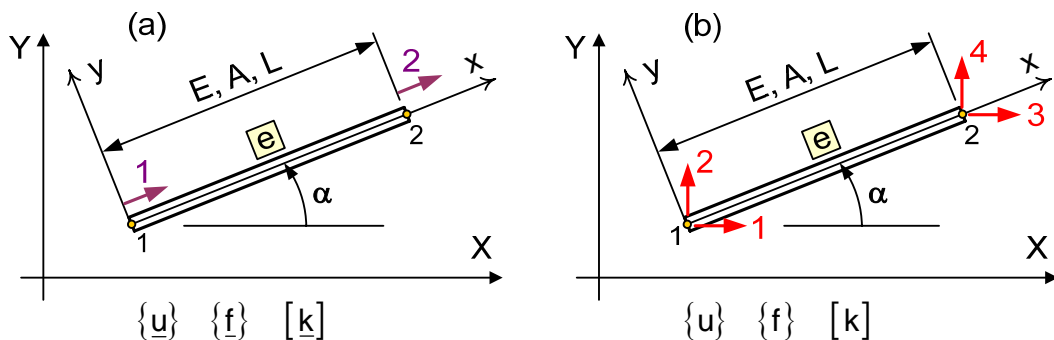


Kuva 2.14 Tasoristikon elementtiverkko ja sen elementti.

vaakasuuntaista, vinossa asennossa oleva ja pystysuora elementti. Koska solmusuureiden mittausta ei voida valita elementtien paikallisten x-akselien suuntaiseksi, sovitaan rakenteelle globaalkoordinaatisto, jonka akseleiden suhteen solmumittaus suoritetaan. Kuvassa 2.14 on valittu globaali XY-koordinaatisto siten, että origo on solmussa 1. Elementtiverkon globaalkoordinaatiston lisäksi kullakin elementillä on oma lokaali xy-koordinaatistonsa. Kuvassa 2.14 on myös elementin 10 lokaalikoordinaatisto. Solmumittaus tapahtuu solmuissa globaaliakselien suunnissa ja sisältää translaatiosiirtymät ja solmuvoimat. Tasoristikon sauvaelementin solmuun liittyy kaksi mittaussuuntaa, jolloin solmulla on kaksi ja elementillä neljä vapausastetta. Kuvassa 2.14 on esitetty solmujen 3 ja 5 solmumittauksen vapausasteet nuolisymboleilla ja lisäksi ne on numeroitu. Tasoristikon elementin solmusuurevektoreiden dimensio on 4 ja elementin jäykkyyismatriisi 4x4-matriisi. Tasoristikon elementtiverkon vapausasteiden määrä on kaksi kertaa solmujen määrä.

2.2.3 Tasoristikon elementin jäykkyyismatriisi

Tasoristikon tarkasteluun tarvitaan kuvan 2.15 globaalkoordinaatistoon yleisesti sijoittuva sauvaelementti. Kulma α määrittelee elementin suunnan ja se mitataan X-suunnasta positiivisen suunnan ollessa vastapäivään. Lisäksi on tunnettava suureet E, A ja L tai pituuden sijasta solmujen koordinaatit.



Kuva 2.15 Tasoristikon elementti, lokaali- ja globaalimittaus.

Kuvassa 2.15 (a) on esitetty elementin lokaaliakselin suuntainen solmumittaus, johon liittyvät solmusiirtymä- ja solmuvoimavektorit ovat

$$\{\underline{u}\} = \begin{Bmatrix} u^1 & u^2 \end{Bmatrix} \quad \{\underline{f}\} = \begin{Bmatrix} f^1 & f^2 \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

Lokaalimittaukseen liittyvä jäykkyyismatriisi on $[\underline{k}]$ ja se on kaavan (2.6) mukaisesti

$$[\underline{k}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Kuvassa 2.15 (b) on esitetty elementin globaaliakseleiden suuntainen solmumittaus. Solmujen vapausasteiden lokaalinumerointi otetaan solmuittain eteneväksi niin, että vaakasuunta numeroidaan ensin. Elementin solmusiirtymävektori $\{u\}$ sisältää solmujen globaaliakseleiden suuntaiset siirtymäkomponentit ja solmuvoimavektori $\{f\}$ elementin päihin vaikuttavat vaaka- ja pystysuuntaiset voimakomponentit ja ne ovat

$$\{u\} = \{u_X^1 \quad u_Y^1 \quad u_X^2 \quad u_Y^2\} \quad \{f\} = \{f_X^1 \quad f_Y^1 \quad f_X^2 \quad f_Y^2\} \quad (2.31)$$

Laskennassa tarvitaan globaalimittaukseen liittyvä jäykkyyismatriisi $[k]$, joten johdetaan seuraavaksi sen lauseke.

Lokaalimittauksen solmusiirtymät muodostuvat globaalimittauksen solmusiirtymistä elementin suunnalle tulevista komponenteista seuraavasti

$$u^1 = \cos \alpha \cdot u_X^1 + \sin \alpha \cdot u_Y^1 \quad u^2 = \cos \alpha \cdot u_X^2 + \sin \alpha \cdot u_Y^2 \quad (2.32)$$

Siirtymien yhteys voidaan esittää matriisimuodossa

$$\{\underline{u}\} = \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_X^1 \\ u_Y^1 \\ u_X^2 \\ u_Y^2 \end{bmatrix} = [B] \{u\} \quad (2.33)$$

Globaalimittauksen solmuvoimat muodostuvat lokaalimittauksen solmuvoimien komponenteista seuraavasti

$$f_X^1 = \cos \alpha \cdot f^1 \quad f_Y^1 = \sin \alpha \cdot f^1 \quad f_X^2 = \cos \alpha \cdot f^2 \quad f_Y^2 = \sin \alpha \cdot f^2 \quad (2.34)$$

Voimien yhteys voidaan esittää matriisimuodossa

$$\{f\} = \begin{bmatrix} f_X^1 \\ f_Y^1 \\ f_X^2 \\ f_Y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 \\ \sin \alpha & 0 \\ 0 & \cos \alpha \\ 0 & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f^1 \\ f^2 \end{bmatrix} = [B]^T \{\underline{f}\} \quad (2.35)$$

Lokaali- ja globaalimittausten suureiden välillä ovat yhteydet

$$\{\underline{u}\} = [B] \{u\} \quad \{f\} = [B]^T \{\underline{f}\} \quad [B] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

jota sanotaan kontragradienttilaiksi. Suureiden yhteyden antavaa matriisia $[B]$ sanotaan kinemaattiseksi matriisiksi.

Kummassakin mittauksessa on voimassa elementin perusyhtälö eli

$$[\underline{k}]\{\underline{u}\} = \{\underline{f}\} \quad [k]\{u\} = \{f\} \quad (2.37)$$

Kaavojen (2.36) ja (2.37) perusteella voidaan kirjoittaa

$$[B]^T \{f\} = \{f\} \Rightarrow [B]^T [k] \{u\} = \{f\} \Rightarrow [B]^T [k] [B] \{u\} = \{f\} \quad (2.38)$$

josta nähdään, että globaalkoordinaatiston jäykkyyismatriisilla $[k]$ on lauseke

$$[k] = [B]^T [k] [B] \quad (2.39)$$

Globaalkoordinaatiston jäykkyyismatriisi voidaan laskea lokaalkoordinaatiston jäykkyyismatriisista kinemaattisen matriisin $[B]$ avulla käyttäen muunnoskaavaa (2.39), jota sanotaan kongruenssimuunnokseksi. Kun matriisit $[B]$ ja $[k]$ sijoitetaan kaavaan (2.39) ja suoritetaan matriisien kertominen, saadaan tulokseksi jäykkyyismatriisi

$$[k] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Kaavasta (2.40) näkyy, että tasoristikon sauvaelementin jäykkyyismatriisin laskemiseksi pitää tuntea sen jousivakio EA/L ja suuntakulma α globaalkoordinaatistossa.

Sauvaelementin normaalivoimaa $N = f^2$ ei saada välittömästi elementin perusyhtälöstä $\{f\} = [k]\{u\}$, mutta se voidaan laskea vektorin $\{f\}$ komponenteista. N voidaan laskea myös vektorin $\{u\}$ komponenteista, sillä $\{f\} = [k]\{u\} = [k][B]\{u\}$ ja laskemalla oikean puolen vektorin toinen komponentti saadaan kaava

$$N = f^2 = \frac{EA}{L} \left[(u_x^2 - u_x^1) \cdot \cos \alpha + (u_y^2 - u_y^1) \cdot \sin \alpha \right] \quad (2.41)$$

Tehdyistä oletuksista seuraa myös, että sauvaelementille ei voi tulla vektorin $\{f\}$ komponenteista leikkausvoimaa Q .

2.2.4 Ekvivalenttiset solmukuormitukset

Koska tasoristikon sauvaelementti ei tehtyjen oletuksien mukaan ota vastaan taivutus- eikä leikkausrasitusta, on elementin alueella vaikuttavien kuormitusten oltava

sauvan lokaalin x-akselin suuntaisia eli kuvan 2.13 tyyppisiä. Käytännössä kysymykseen voi tulla lähinnä sauvan lämpötilan muutos ΔT ja pituudenmuutos δ .

Ekvivalenttiset solmukuormitukset $\{\underline{r}\}$ sauvaelementin lokaalikoordinaatistossa saadaan helposti selville esimerkiksi kuvasta 2.13, mutta ne on vielä muunnettava globaalkoordinaatiston komponenteiksi, jotta ne voitaisiin yhdistää solmukuormituksiin sijoittelusummauksella kaavan (2.27) mukaisesti. Muunnokseen voidaan käyttää kaavaa (2.36), josta seuraa

$$\{\underline{r}\} = [\underline{B}]^T \{\underline{r}\} \quad (2.42)$$

jossa $\{\underline{r}\}$ globaalkoordinaatiston ekvivalenttinen solmukuormitusvektori.

Esimerkiksi lämpötilan muutokselle ΔT seuraa kuvasta 2.13 lokaalikoordinaatistossa

$$\{\underline{r}\} = EA \alpha \Delta T \{-1 \quad 1\} \quad (2.43)$$

josta seuraa kaavan (2.42) avulla globaalkoordinaatiston vektori

$$\{\underline{r}\} = EA \alpha \Delta T \{-\cos \alpha \quad -\sin \alpha \quad \cos \alpha \quad \sin \alpha\} \quad (2.44)$$

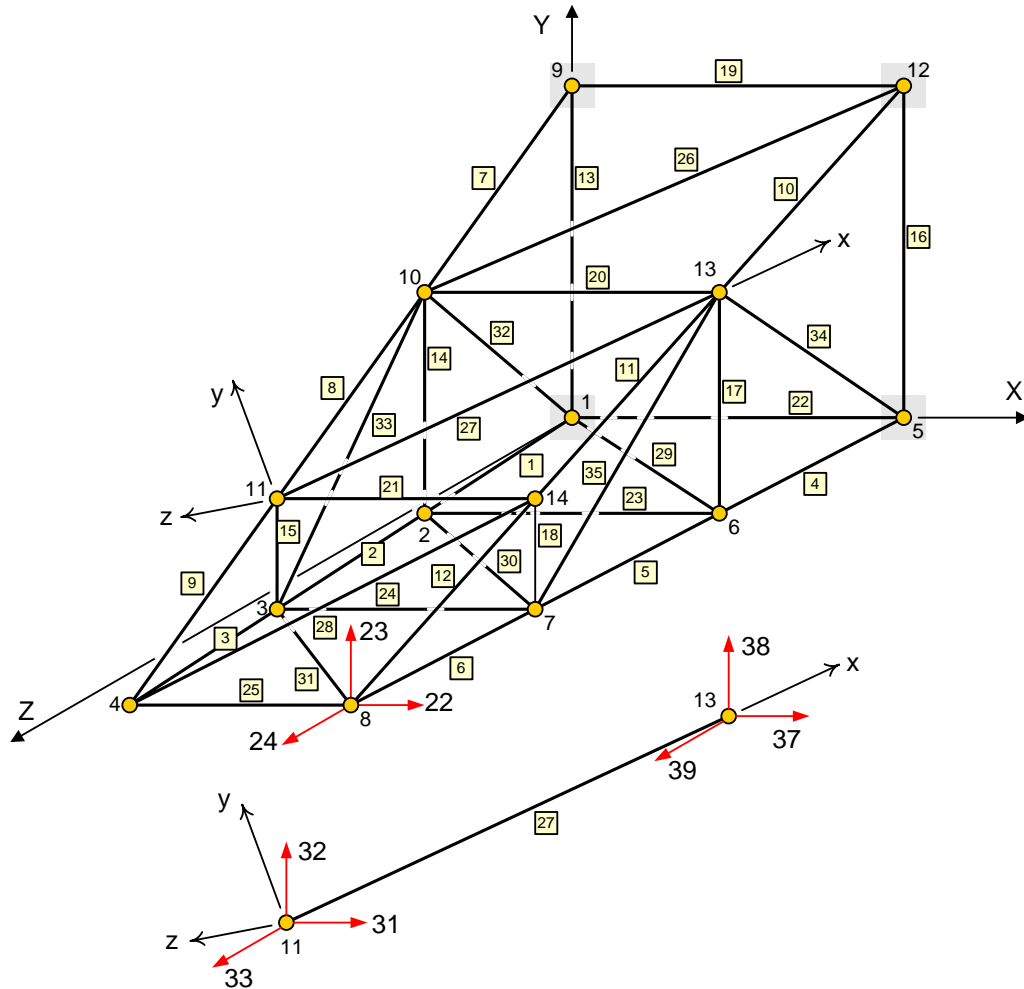
2.3 Avaruusristikko

2.3.1 Avaruusristikon elementtiverkko

Avaruusristikon tarkka ratkaisu elementtimenetelmällä löytyy käyttämällä elementtiverkkoa, jonka solmut ovat ristikon nivelien ja tukien kohdilla ja kukin ristikon sauva on elementti. Kuvassa 2.16 on esimerkki avaruusristikon elementtiverkosta, jossa on 14 solmua ja 35 elementtiä. Avaruusristikon sauvaelementti on ominaisuuksiltaan samanlainen kuin tasoristikon elementti eli tarvittavat ominaisuudet tasapaksulle sauvalle ovat E, A ja L. Kolmiulotteinen geometria aiheuttaa jonkin verran lisää laskentatyötä ja solmumittaus pitää yleistää tasotapauksesta.

Laskentaa varten otetaan käyttöön XYZ-globaalkoordinaatisto, jonka akseleiden suunnissa solmumittaus suoritetaan. Solmumittaus sisältää translaatiosiirtymät ja solmuvoimat X-, Y- ja Z-suunnassa. Kuvan 2.16 tapauksessa globaalkoordinaatiston origo on sijoitettu solmuun 1. Solmulla on kolme ja elementillä kuusi vapausastetta, jolloin solmusuurevektoreiden dimensio on kuusi ja elementin jäykkyyismatriisi on 6x6-matriisi. Elementtiverkon vapausasteiden määrä on kolme kertaa solmujen lukumäärä. Kuvassa 2.16 on esitetty nuolisymboleilla solmun 8 vapausasteet, jotka on lisäksi numeroitu. Kuvan 2.16 elementtiverkolla on 42 vapausastetta ja verkon jäykkyyismatriisi on näin 42x42-matriisi, tuntemattomia solmusuureita ovat vapaiden solmujen 30 siirtymäkomponenttia ja tukisolmujen (1, 5, 9, 12) 12 tukireaktiokomponent-

tia. Elementtiverkon globaalkoordinaatiston lisäksi elementillä on oma lokaali xyz-koordinaatistonsa, jonka x-akseli kulkee elementin suuntaisesti sen alkusolmusta loppusolmuun päin sekä y- ja z-akselit ovat poikkileikkaustasossa. Kuvassa 2.16 on esimerkkinä elementin 27 lokaalikoordinaatisto ja solmumittaus.



Kuva 2.16 Avaruusristikon elementtiverkko ja sen elementti.

Avaruusristikon käsittely elementtimenetelmällä onnistuu elementtimenetelmän periaatteiden mukaisesti, kun tunnetaan XYZ-globaalkoordinaatistossa mielivaltaisessa asennossa olevan sauvaelementin globaalimittaukseen liittyvä jäykkyyismatriisi. Seuraavassa tämä johdetaan kongruenssimuunnosta käyttäen.

2.3.2 Avaruusristikon elementin jäykkyyismatriisi

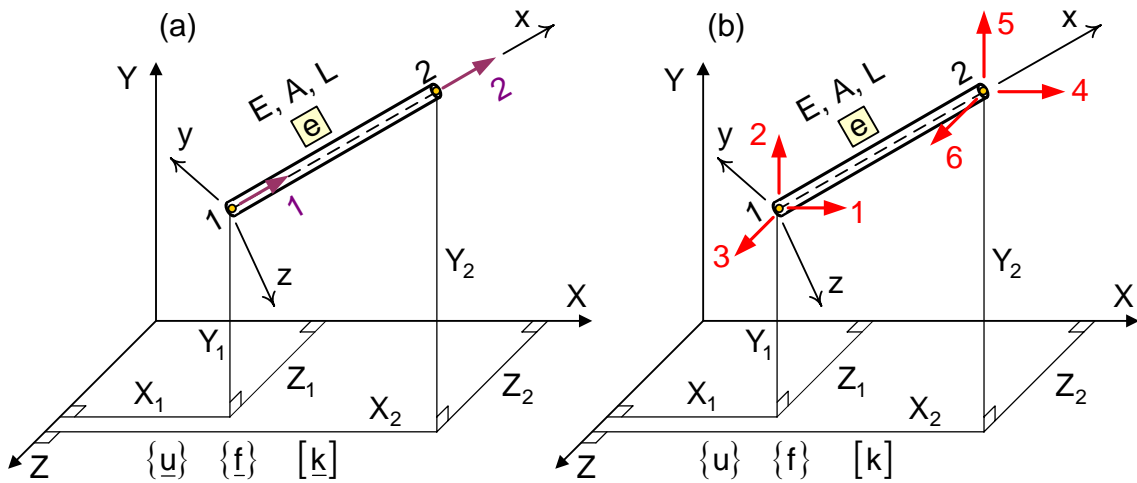
Avaruusristikon tarkasteluun tarvitaan kuvan 2.17 globaalkoordinaatistoon yleisesti sijoittuva sauvaelementti. Solmujen koordinaatit X_1, Y_1, Z_1 ja X_2, Y_2, Z_2 määrittelevät

elementin asennon ja niistä voidaan laskea elementin pituus ja sen lokaalin x-akselin suuntakosinit globaaliakseleiden suhteen

$$L = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2} \quad (2.45)$$

$$\cos \alpha_x = \frac{(X_2 - X_1)}{L} \quad \cos \alpha_y = \frac{(Y_2 - Y_1)}{L} \quad \cos \alpha_z = \frac{(Z_2 - Z_1)}{L} \quad (2.46)$$

α_x , α_y ja α_z ovat kulmat, jotka lokaali x-akseli muodostaa globaalien X-, Y- ja Z-akseleiden kanssa. Lisäksi elementistä on tunnettava suureet E ja A.



Kuva 2.17 Avaruusristikon elementti, lokaali- ja globaalimittaus.

Kuvassa 2.17 (a) on elementin lokaaliakselin suuntainen solmumittaus, johon liittyvät solmuniirtymä- ja solmuvoimavektori ovat

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u^1 & u^2 \end{Bmatrix} \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} f^1 & f^2 \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

Lokaalimittaukseen liittyvä jäykkyyismatriisi on $[k]$ ja se on kaavan (2.6) mukaisesti

$$[k] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Kuvassa 2.17 (b) on elementin globaali solmumittaus. Solmujen vapausasteiden numerointi otetaan solmuittain eteneväksi ja solmussa numerointijärjestys on X, Y ja Z. Solmuniirtymävektori $\{u\}$ sisältää globaaliakseleiden suuntaiset siirtymäkomponentit ja solmuvoimavektori $\{f\}$ koordinaattiakseleiden suuntaiset voimakomponentit

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_x^1 & u_y^1 & u_z^1 & u_x^2 & u_y^2 & u_z^2 \end{Bmatrix} \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} f_x^1 & f_y^1 & f_z^1 & f_x^2 & f_y^2 & f_z^2 \end{Bmatrix} \quad (2.49)$$

Lokaalimittauksen solmusiirtymät muodostuvat globaalimittauksen solmusiirtymistä elementin suunnalle tulevista komponenteista seuraavasti

$$\begin{aligned} u^1 &= \cos \alpha_X \cdot u_X^1 + \cos \alpha_Y \cdot u_Y^1 + \cos \alpha_Z \cdot u_Z^1 \\ u^2 &= \cos \alpha_X \cdot u_X^2 + \cos \alpha_Y \cdot u_Y^2 + \cos \alpha_Z \cdot u_Z^2 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Gloaalimittauksen solmuvoimat muodostuvat lokaalimittauksen solmuvoimien komponenteista seuraavasti

$$\begin{aligned} f_X^1 &= \cos \alpha_X \cdot f^1 & f_X^2 &= \cos \alpha_X \cdot f^2 \\ f_Y^1 &= \cos \alpha_Y \cdot f^1 & f_Y^2 &= \cos \alpha_Y \cdot f^2 \\ f_Z^1 &= \cos \alpha_Z \cdot f^1 & f_Z^2 &= \cos \alpha_Z \cdot f^2 \end{aligned} \quad (2.51)$$

Siirtymien ja voimien yhteydet voidaan esittää matriisimuodossa seuraavasti

$$\begin{aligned} \{\underline{u}\} &= [\underline{B}] \{\underline{u}\} & \{\underline{f}\} &= [\underline{B}]^T \{\underline{f}\} \\ [\underline{B}] &= \begin{bmatrix} \cos \alpha_X & \cos \alpha_Y & \cos \alpha_Z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_X & \cos \alpha_Y & \cos \alpha_Z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.52)$$

joka on siirtymien ja voimien välinen kontragradienttilaki. Globaalimittauksen jäykkymatriisi saadaan tällöin kongruenssimuunnoksella

$$[\underline{k}] = [\underline{B}]^T [\underline{k}] [\underline{B}] \quad (2.53)$$

Kun matriisien kertolaskut suoritetaan, päädytään seuraavaan tulokseen

$$[\underline{k}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c_X^2 & c_X c_Y & c_X c_Z & -c_X^2 & -c_X c_Y & -c_X c_Z \\ c_X c_Y & c_Y^2 & c_Y c_Z & -c_X c_Y & -c_Y^2 & -c_Y c_Z \\ c_X c_Z & c_Y c_Z & c_Z^2 & -c_X c_Z & -c_Y c_Z & -c_Z^2 \\ -c_X^2 & -c_X c_Y & -c_X c_Z & c_X^2 & c_X c_Y & c_X c_Z \\ -c_X c_Y & -c_Y^2 & -c_Y c_Z & c_X c_Y & c_Y^2 & c_Y c_Z \\ -c_X c_Z & -c_Y c_Z & -c_Z^2 & c_X c_Z & c_Y c_Z & c_Z^2 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

jossa on käytetty lyhennysmerkintöjä

$$c_X = \cos \alpha_X \quad c_Y = \cos \alpha_Y \quad c_Z = \cos \alpha_Z \quad (2.55)$$

Sauvaelementin normaalivoimaa $N = f^2$ ei saada välittömästi elementin perusyhtälöstä $\{\underline{f}\} = [\underline{k}] \{\underline{u}\}$, mutta se voidaan laskea vektorin $\{\underline{f}\}$ komponenteista.

N voidaan laskea myös vektorin $\{u\}$ komponenteista, sillä $\{f\} = [k] \{u\} = [k] [B] \{u\}$ ja laskemalla oikean puolen vektorin toinen komponentti saadaan kaava

$$N = f^2 = \frac{EA}{L} \left[(u_X^2 - u_X^1) \cdot \cos \alpha_X + (u_Y^2 - u_Y^1) \cdot \cos \alpha_Y + (u_Z^2 - u_Z^1) \cdot \cos \alpha_Z \right] \quad (2.56)$$

Tehdyistä oletuksista seuraa myös, että sauvaelementille ei voi tulla vektorin $\{f\}$ komponenteista leikkausvoimia Q_Y ja Q_Z .

2.3.3 Ekvivalenttiset solmukuormitukset

Koska avaruusristikon sauvaelementti ei oletuksen mukaan ota taivutus- eikä leikkausrasitusta, on elementtikuormitusten oltava sauvan lokaalin x-akselin suuntaisia eli kuvan 2.13 mukaisia. Kysymykseen tulee tällöin lähinnä sauvan lämpötilan muutos ΔT ja pituudenmuutos δ .

Ekvivalenttiset solmukuormitukset $\{r\}$ saadaan kuvasta 2.13 lokaalikoordinaatistossa, jolloin ne on vielä muunnettava globaalkoordinaatistoon. Muunnokseen voidaan käyttää kaavaa (2.52), jolloin saadaan

$$\{r\} = [B]^T \{r\} \quad (2.57)$$

jossa $\{r\}$ globaalkoordinaatiston ekvivalenttinen solmukuormitusvektori.

Esimerkiksi pituuden muutokselle δ seuraa kuvasta 2.13 lokaalikoordinaatistossa

$$\{r\} = \frac{EA\delta}{L} \{1 \quad -1\} \quad (2.58)$$

josta seuraa kaavan (2.57) avulla globaalkoordinaatiston vektori

$$\{r\} = \frac{EA\delta}{L} \{\cos \alpha_X \quad \cos \alpha_Y \quad \cos \alpha_Z \quad -\cos \alpha_X \quad -\cos \alpha_Y \quad -\cos \alpha_Z\} \quad (2.59)$$