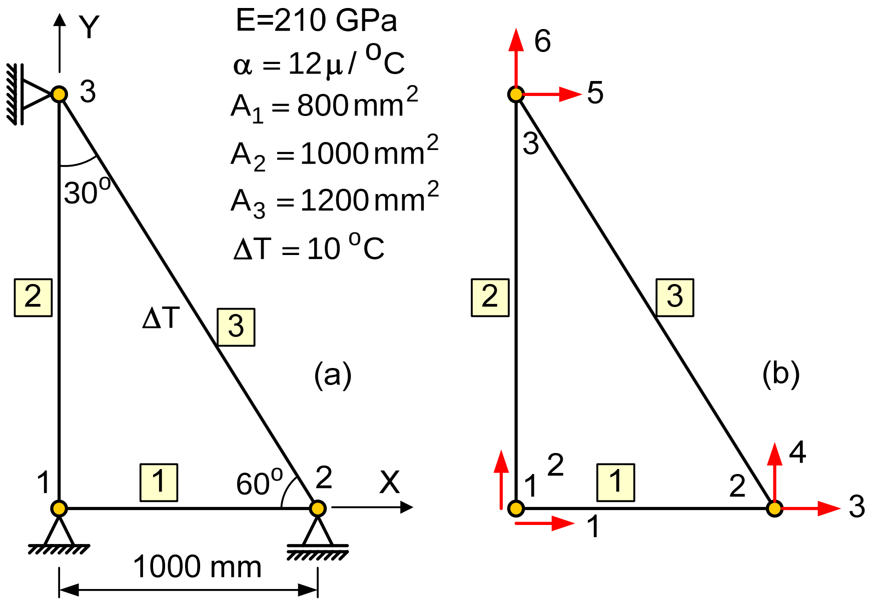
Esimerkki 2.5

Esimerkin 2.4 tasoristikon kuormituksena on pistevoimien sijasta elementin 3 lämpötilan muutos $\Delta T = 10\,^{o}C$. Tämä kuormitustapaus voidaan myös käsitellä esimerkissä 2.4 määritetyn elementtiverkon jäykkyysmatriisin avulla.



Kuva 1. Tasoristikko ja sen elementtiverkko.

Lämpötilan muutoksesta johtuva elementin 3 ekvivalenttinen solmukuormitusvektori globaalikoordinaatistossa on kaavan (2.44) mukaan

$$\{r\}^3 = 210 \cdot 1200 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \,\{0{,}5 \quad -0{,}866 \quad -0{,}5 \quad 0{,}866\} \quad \Rightarrow$$

$$\{r\}^3 = \{\underset{3}{15{,}12} \quad \underset{4}{-26{,}19} \quad \underset{5}{-15{,}12} \quad \underset{6}{26{,}19}\}$$

Elementtiverkon perusyhtälöksi tulee tässä kuormitustapauksessa

$$\begin{bmatrix} 168{,}00 & 0 & -168{,}00 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 121{,}24 & 0 & 0 & 0 & -121{,}24 \\ -168{,}00 & 0 & 199{,}50 & -54{,}56 & -31{,}50 & 54{,}56 \\ 0 & 0 & -54{,}56 & 94{,}50 & 54{,}56 & -94{,}50 \\ 0 & 0 & -31{,}50 & 54{,}56 & 31{,}50 & -54{,}56 \\ 0 & -121{,}24 & 54{,}56 & -94{,}50 & -54{,}56 & 215{,}74 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_X^2 \\ 0 \\ 0 \\ U_Y^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_X^1 \\ F_Y^1 \\ 15{,}12 \\ F_Y^2 - 26{,}19 \\ F_X^3 - 15{,}12 \\ 26{,}19 \end{bmatrix}$$

Tuntemattomat siirtymät U_X^2 ja U_Y^3 saadaan kolmannesta ja kuudennesta yhtälöstä

$$\begin{cases} 199{,}50\ U_X^2 + 54{,}56\ U_Y^3 = 15{,}12 \\ 54{,}56\ U_X^2 + 215{,}74\ U_Y^3 = 26{,}19 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad U_X^2 = 0{,}0458\,\text{mm} \quad U_Y^3 = 0{,}1098\,\text{mm}$$

Perusyhtälön muista yhtälöstä saadaan tukireaktiot F_X^1, F_Y^1, F_Y^2 ja F_X^3

$$F_X^1 = -168 \cdot 0{,}0458 = -7{,}89\,\text{kN} \quad F_Y^1 = -121{,}24 \cdot 0{,}1098 = -13{,}31\text{kN}$$

$$F_Y^2 = -54{,}56 \cdot 0{,}0458 - 94{,}50 \cdot 0{,}1098 = 13{,}31\text{kN}$$

$$F_X^3 = -31{,}50 \cdot 0{,}0458 - 54{,}56 \cdot 0{,}1098 = 7{,}89\,\text{kN}$$

Elementtien solmuvoimavektorit saadaan elementin perusyhtälöstä $\{f\} = [k]\{u\} - \{r\}$.

$$\begin{bmatrix} f_X^1 \\ f_Y^1 \\ f_X^2 \\ f_Y^2 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 168{,}00 & 0 & -168{,}00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -168{,}00 & 0 & 168{,}00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}3491 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7{,}69 \\ 0 \\ 7{,}69 \\ 0 \end{bmatrix} \text{kN}$$

$$\begin{bmatrix} f_X^1 \\ f_Y^1 \\ f_X^2 \\ f_Y^2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 121{,}24 & 0 & -121{,}24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -121{,}24 & 0 & 121{,}24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}1898 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -13{,}31 \\ 0 \\ 13{,}31 \end{bmatrix} \text{kN}$$

$$\begin{bmatrix} f_X^1 \\ f_Y^1 \\ f_X^2 \\ f_Y^2 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 31{,}50 & -54{,}56 & -31{,}50 & 54{,}56 \\ -54{,}56 & 94{,}50 & 54{,}56 & -94{,}50 \\ -31{,}50 & 54{,}56 & 31{,}50 & -54{,}56 \\ 54{,}56 & -94{,}50 & -54{,}56 & 94{,}50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}0458 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}1098 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15{,}12 \\ -26{,}19 \\ -15{,}12 \\ 26{,}19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7{,}69 \\ 13{,}31 \\ 7{,}69 \\ -13{,}31 \end{bmatrix} \text{kN}$$

Elementtien 1 ja 2 solmuvoimavektoreista näkyy suoraan niiden normaalivoimien arvot, koska nämä elementit ovat globaaliakseleiden suuntaiset. Vinon elementin 3 normaalivoima on sen solmuvoimakomponenttien resultantti

$$N = -\sqrt{7{,}69^2 + 13{,}31^2} = -15{,}37\text{ kN} \qquad \{\underline{f}\} = \{15{,}37 \quad -15{,}37\}\text{ kN}$$

Elementtien normaalivoimat ja -jännitykset ovat

$$N^1 = 7{,}69\text{ kN} \qquad \sigma^1 = 7{,}69 \cdot 10^3\,\text{N}/800\,\text{mm}^2 = 9{,}61\,\text{MPa}$$

$$N^2 = 13{,}31\,\text{kN} \qquad \sigma^2 = 13{,}31 \cdot 10^3\,\text{N}/1000\,\text{mm}^2 = 13{,}31\,\text{MPa}$$

$$N^3 = -15{,}37\text{ kN} \qquad \sigma^3 = -15{,}37 \cdot 10^3\,\text{N}/1200\,\text{mm}^2 = -12{,}81\,\text{MPa}$$