II.5. Paksuseinäisen sylinteriputken säteet ovat $a = 280\ \text{mm}$ ja $b = 700\ \text{mm}$. Sisäpuolinen paine on $p_i = 2p$ ja ulkopuolinen paine $p_o = p$. Putki pääsee vapaasti laajenemaan pituussuunnassa. Osoita, että MLJHin mukaisen vertailujännityksen maksimiarvo on putken sisäpinnassa ja laske sen perusteella p_{sall}, kun $\sigma_{sall} = 140\ \text{MPa}$. Laske arvoa p_{sall} vastaava putken ulkohalkaisijan muutos, kun $\nu = 0{,}3$ ja $E = 210\ \text{GPa}$.

Ratkaisu:

$\text{MPa} := \dfrac{\text{N}}{\text{mm}}$ $\quad E := 210\cdot 10^3\cdot\text{MPa}$ $\quad \nu := 0.3$ $\quad \sigma_{sall} := 140\cdot\text{MPa}$

$a := 280\cdot\text{mm}$ $\quad b := 700\cdot\text{mm}$

Kun ΔL on vapaa sekä p_i=2p ja p_o=p, ovat jännityskomponenttien lausekkeet:

$$\sigma_r(r,p) := -\frac{p}{r^2}\cdot\frac{a^2\cdot b^2}{b^2-a^2} + p\cdot\frac{2\cdot a^2 - b^2}{b^2-a^2} \qquad \sigma_r(r,p) \to -\frac{17\cdot p}{21} - \frac{280000\cdot\text{mm}^2\cdot p}{3\cdot r^2}$$

$$\sigma_\theta(r,p) := \frac{p}{r^2}\cdot\frac{a^2\cdot b^2}{b^2-a^2} + p\cdot\frac{2\cdot a^2 - b^2}{b^2-a^2} \qquad \sigma_\theta(r,p) \to \frac{280000\cdot\text{mm}^2\cdot p}{3\cdot r^2} - \frac{17\cdot p}{21}$$

$\sigma_z := 0$ $\quad \sigma_r < 0$, kun $a \le r \le b$

$\sigma_\theta = 0$, kun $r_1 := \sqrt{\dfrac{21}{17}\cdot\dfrac{280000}{3}}\cdot\text{mm}$ $\quad r_1 = 339.54988\,\text{mm}$

$\sigma_\theta < 0$, kun $a \le r < r_1$ $\quad \sigma_\theta > 0$, kun $r_1 < r \le b$ $\quad \sigma_r < \sigma_\theta$, kun $a \le r \le b$

Kun $a \le r \le r_1$: $\quad \sigma_I = \sigma_\theta \quad \sigma_{II} = 0 \quad \sigma_{III} = \sigma_r$ $\quad$ MLJH $\Rightarrow$

$$\sigma_{vert1}(r,p) := \sigma_\theta(r,p) - \sigma_r(r,p) \qquad \sigma_{vert1}(r,p) \to \frac{560000\cdot\text{mm}^2\cdot p}{3\cdot r^2}$$

Vertailujännityksen maksimi on tällöin putken sisäpinnassa:

$$\max\sigma_{vert1}(p) := \sigma_{vert1}(a,p) \qquad \max\sigma_{vert1}(p) \to \frac{50\cdot p}{21}$$

Kun $r_1 \le r \le b$: $\sigma_I = 0$ $\sigma_{II} = \sigma_\theta$ $\sigma_{III} = \sigma_r$ MLJH $\Rightarrow$

$$\sigma_{vert2}(r, p) := 0 - \sigma_r(r, p) \qquad \sigma_{vert2}(r, p) \rightarrow \frac{17 \cdot p}{21} + \frac{280000 \cdot mm^2 \cdot p}{3 \cdot r^2}$$

Vertailujännityksen maksimi on tässä tapauksessa kohdassa $r=r_1$:

$$\max\sigma_{vert2}(p) := \sigma_{vert1}(r_1, p) \qquad \max\sigma_{vert2}(p) \rightarrow \frac{34 \cdot p}{21}$$

Nähdään, että sisäpinta on ratkaiseva. Sallituksi paineeksi p_{sall} tulee:

$$p_{sall} := \frac{21}{50} \cdot \sigma_{sall} \qquad p_{sall} = 58.8\,MPa$$

Ulkohalkaisijan muutos:

$$p_s := 2 \cdot p_{sall} \qquad p_u := p_{sall}$$

$$u_r(r) := \frac{1}{E} \cdot \left[(1 - \nu) \cdot \frac{a^2 \cdot p_s - b^2 \cdot p_u}{b^2 - a^2} \cdot r + (1 + \nu) \cdot \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot (p_s - p_u)}{r \cdot (b^2 - a^2)} \right]$$

$$u_r(b) = -0.06253\,mm \qquad \Delta d := 2 \cdot u_r(b) \qquad \Delta d = -0.12507\,mm$$