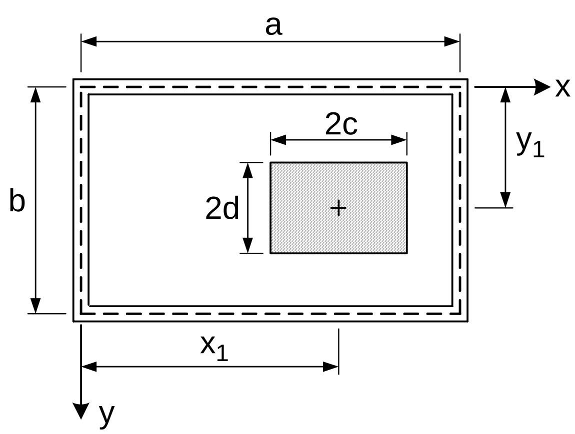
III.6. Reunoiltaan niveltuetulla suorakulmiolaatalla on kuvan mukaisella $2c\times 2d$-alueella (keskipiste on (x_1,y_1)) tasainen kuormitus p_0. a) Määritä laatan taipuman kaksoissinisarja. b) Johda raja-arvotarkastelulla a)-kohdan tuloksesta kohdassa (x_1,y_1) vaikuttavan pistevoiman P aiheuttaman taipuman kaksoissinisarja. c) Kirjoita b)-kohdan sarja tapauksessa $x_1=\frac{a}{2}$, $y_1=\frac{b}{2}$ ja $a=b$. Esitä maksimi taipuman sarja ja laske maksimi taipuman arvoja käyttäen eri termimääriä. Vertaa tuloksia tarkkaan arvoon $0{,}01160\cdot\frac{Pa^2}{D}$.



Ratkaisu:

a) Kuormituksen kaksoissinisarjan kertoimet ovat

$$p_{mn}=\frac{4p_0}{ab}\int_{y_1-d}^{y_1+d}\sin\beta_n y\,dy\int_{x_1-c}^{x_1+c}\sin\alpha_m x\,dx \qquad \alpha_m=\frac{m\pi}{a}\quad \beta_n=\frac{n\pi}{b}\qquad\Rightarrow$$

$$p_{mn}=\frac{4p_0}{ab\alpha_m\beta_n}\Big/_{y_1-d}^{y_1+d}(-\cos\beta_n y)\Big/_{x_1-c}^{x_1+c}(-\cos\alpha_m x)$$

$$=\frac{4p_0}{ab\alpha_m\beta_n}[\cos\beta_n(y_1+d)-\cos\beta_n(y_1-d)][\cos\alpha_m(x_1+c)-\cos\alpha_m(x_1-c)]$$

$$=\frac{16p_0}{\pi^2 mn}\sin\alpha_m x_1\cdot\sin\beta_n y_1\cdot\sin\alpha_m c\cdot\sin\beta_n d$$

Taipuman kaksoissinisarja on näin ollen

$$w(x,y)=\frac{16p_0}{\pi^6 D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha_m x_1\cdot\sin\beta_n y_1\cdot\sin\alpha_m c\cdot\sin\beta_n d}{mn[(m/a)^2+(n/b)^2]^2}\sin\alpha_m x\sin\beta_n y$$

b) $P=p_0\cdot 2c\cdot 2d$ ja $c\to 0\,,\,d\to 0\quad\Rightarrow$

$$p_{mn}=\lim_{\substack{c\to 0\\ d\to 0}}\frac{4P}{\pi^2 mn}\sin\alpha_m x_1\cdot\sin\beta_n y_1\cdot\frac{\sin\alpha_m c}{c}\cdot\frac{\sin\beta_n d}{d}\qquad\Rightarrow$$

$$p_{mn}=\frac{4P}{\pi^2 mn}\sin\alpha_m x_1\cdot\sin\beta_n y_1\cdot\alpha_m\cdot\beta_n=\frac{4P}{ab}\sin\alpha_m x_1\cdot\sin\beta_n y_1\qquad\Rightarrow$$

Pistevoiman aiheuttaman taipuman kaksoissinisarja on näin ollen

$$w(x,y)=\frac{4P}{\pi^4 Dab}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha_m x_1\cdot\sin\beta_n y_1}{[(m/a)^2+(n/b)^2]^2}\sin\alpha_m x\sin\beta_n y$$

c) Kun $x_1=\frac{a}{2}$ $\quad y_1=\frac{b}{2}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\alpha_m x_1=m\cdot\frac{\pi}{2}$ $\quad \beta_n y_1=n\cdot\frac{\pi}{2}$ $\quad\Rightarrow$

$$\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0\text{ , kun } m \text{ tai } n \text{ parillinen}\\ (-1)^{(m-1)/2}\cdot(-1)^{(n-1)/2}=(-1)^{[(m+n)/2-1]}\text{ , kun } m \text{ ja } n \text{ pariton}\end{cases}$$

Kun lisäksi $a=b$, tulee taipuman sarjaksi

$$w(x,y)=\frac{4Pa^2}{\pi^4 D}\sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty}\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{[(m+n)/2-1]}}{(m^2+n^2)^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{a}$$

Taipuman maksimi on kohdassa $x=\frac{a}{2}$ $\quad y=\frac{a}{2}$ (laatan keskipiste) $\quad\Rightarrow$

$$w_{max}=\frac{4Pa^2}{\pi^4 D}\sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty}\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{1}{(m^2+n^2)^2}$$

Ottamalla summasta tietty määrä termejä w_{max} voidaan esittää muodossa $k\cdot\frac{Pa^2}{D}$, missä kerroin k on seuraavan taulukon mukainen.

Termejä	k
1	0,01027
4	0,01121
9	0,01142
16	0,01150
25	0,01154
36	0,01156
49	0,01157
64	0,01158
81	0,01158
100	0,01158
∞	0,01160