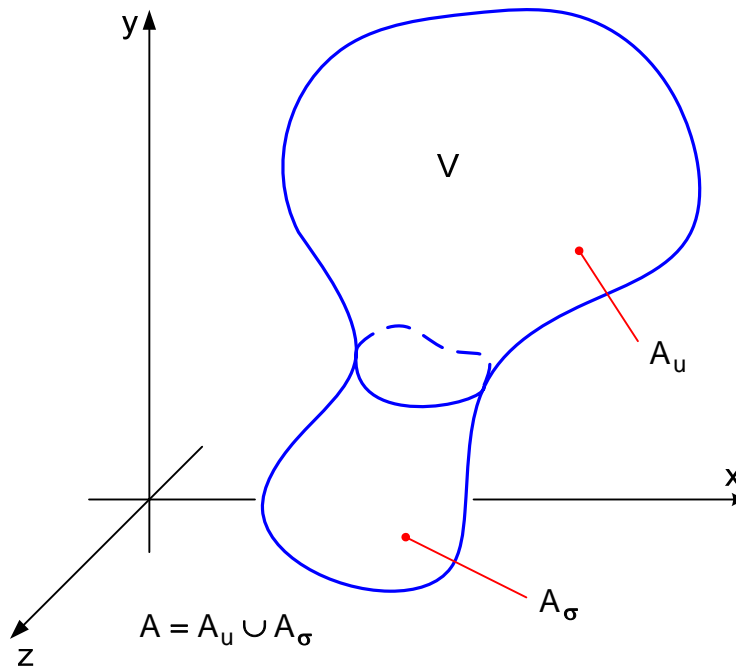


## 4 YLEINEN ELEMENTTIMENETELMÄ

### 4.1 Johdanto

Elementtimenetelmä on osittaisdifferentiaaliyhtälöryhmän reuna-arvotehtävän likimääräinen ratkaisumenetelmä. Tällöin tarkastellaan tiettyä fysikaalista materiaali- aluetta  $V$ , jota rajoittaa sen reuna  $A$  kuvan 4.1 mukaisesti. Tarkastelut suoritetaan



Kuva 4.1 Alue  $V$  ja sen reuna  $A$ .

jossakin koordinaatistossa, joksi voidaan valita esimerkiksi karteesinen xyz-koordinaatisto. Alueessa  $V$  on määritelty tuntematon kenttäfunktio, jonka saamista arvoista ollaan kiinnostuneita. Kenttäfunktio voi olla skalaariarvoinen  $d(x,y,z)$ , mutta se voi olla myös vektoriarvoinen  $\{d(x,y,z)\}$ . Lämpötilakenttä  $T(x,y,z)$  on skalaariarvoinen kenttäfunktio, mutta siirtymätilakenttä  $\{u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)\}$  lujuusopin luvuissa on vektoriarvoinen kenttäfunktio. Reuna  $A$  jakaantuu osiin  $A_u$  ja  $A_\sigma$ , joista ensiksi mainitulla on annettu oleellisia reunaehtoja ja jälkimmäisellä luonnollisia reunaehtoja. Lujuusopin tehtävässä oleelliset reunaehdot koskevat kappaleen siirtymiä tukien kohdilla ja luonnolliset reunaehdot liittyvät sen pintakuormituksiin.

Tuntematon kenttäfunktio  $\{d\}$  toteuttaa alueessa  $V$  tarkasteltavaan tapaukseen liittyvän osittaisdifferentiaaliyhtälöryhmän ja reunalla  $A$  annetut reunaehdot. Näiden asemasta tai lisäksi kenttäfunktiolle  $\{d\}$  voidaan tuntea tietty ääriarvoperiaate. Lujuusopin yhtälöryhmänä ovat lujuusopin perusyhtälöt (käsiteltiin lujuusopin jatko-

kurssilla) ja ääriarvoperiaatteena potentiaalienergian minimin periaate. Useimmissa tapauksissa osittaisdifferentiaaliyhtälöryhmän tai ääriarvoperiaatteen tarkan ratkaisun löytäminen ei ole mahdollista, jolloin on tyydyttävä kenttäfunktion  $\{d\}$  likimääräiseen määrittämiseen. Eräs likimääräisistä ratkaisutavoista on elementtimenetelmä.

Elementtimenetelmässä alue  $V$  jaetaan äärellisiin osiin, joita sanotaan elementeiksi. Elementeistä valitaan tietyt pisteet solmuiksi, jotka sijaitsevat elementtien rajoilla. Perustuntemattomat ovat kenttäfunktion  $\{d\}$  tai sen derivaattojen arvot solmuissa. Kenttäfunktion arvot elementin alueessa lasketaan solmuarvoista interpoloimalla. Interpolointi on likimääräinen, mutta tarkkuus on sitä parempi mitä useampia solmuja käytetään. Tuntemattomille solmuarvoille muodostetaan lineaarinen yhtälöryhmä, jota sanotaan elementtiverkon perusyhtälöksi.

Esimerkiksi ääriarvoperiaatteesta saatava elementtiverkon perusyhtälö on muotoa

$$[K] \{U\} = \{R\} \quad (4.1)$$

jossa  $[K]$  on systeemin ominaisuuksista saatava vakio kerroinmatriisi. Vektori  $\{U\}$  sisältää kenttäfunktion solmuarvot ja siinä on otettu huomioon oleelliset reunaehdot. Vektori  $\{R\}$  sisältää luonnollisten reunaehtoien vaikutukset eli kuormitustermit. Kullekin elementille on voimassa elementin perusyhtälö

$$[k] \{u\} = \{f\} \quad (4.2)$$

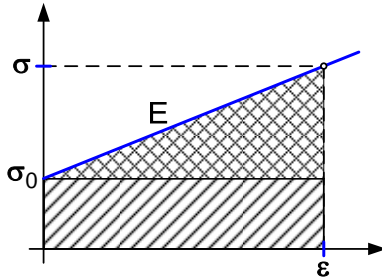
Elementtiverkon perusyhtälön kerroinmatriisi  $[K]$  muodostetaan yhdistämällä elementtien perusyhtälöiden kerroinmatriisit  $[k]$  sijoittelusummauksella. Ryhmästä (4.1) voidaan ratkaista vektorin  $\{U\}$  tuntemattomat solmuarvot ja niistä voidaan poimia kunkin elementin solmuarvot  $\{u\}$ . Näistä saadaan interpoloinnin avulla kenttäfunktion  $\{d(x,y,z)\}$  arvot elementin alueen pisteissä  $(x,y,z)$ .

Elementtimenetelmässä käytetään diskretisointia, jossa kenttäfunktion äärettömän monen tuntemattoman arvon sijasta etsitään sen solmuarvoja, joita on äärellinen määrä. Jos kenttäfunktio voidaan lausua tarkasti solmuarvojensa avulla kentän mieltävaltaisessa pisteessä, johtaa elementtimenetelmä tarkkaan ratkaisuun. Näin on viivarakenteissa (ristikot ja kehät). Yleensä kyseessä on kuitenkin likimenetelmä.

Lujuusopin ratkaisumenetelmät jaetaan kolmeen ryhmään eli siirtymä-, voima- ja sekamenetelmiin. Menetelmät eroavat toisistaan lähinnä siinä, mitä suureita käytetään laskennassa perussuureina. Elementtimenetelmää voidaan käyttää kaikkien menetelmien yhteydessä, mutta parhaiten se soveltuu siirtymämenetelmään, joten tässä rajoitutaan sen käsittelyyn. Perustuntemattomana on tällöin siirtymätilakenttä  $\{d(x,y,z)\} = \{u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)\}$ . Solmuarvoina ovat solmujen siirtymät ja lisäksi niiden derivaattojen solmuarvoja, kuten esimerkiksi kiertymiä ja kaarevuuksia.

## 4.2 Potentiaalienergia

Lujuusopin elementtimenetelmä voidaan kimmoisen materiaalin tapauksessa perustaa tarkasteltavan kappaleen potentiaalienergian  $\Pi$  minimin periaatteeseen. Potentiaalienergia  $\Pi$  koostuu kimmoenergiasta  $U$  ja ulkoisten kuormitusten työstä  $W$ .



Kuva 4.2 Aksiaalinen jännitystila.

Tarkastellaan ensin lineaarisesti kimmoisen materiaalin aksiaaliseen jännitystilaan liittyvää kimmoenergiatiheyttä  $U_0$  siinä tapauksessa, että materiaalissa on venymästä  $\varepsilon$  aiheutuvan jännityksen  $\sigma$  lisäksi esijännitys  $\sigma_0$ . Kun sovietaan, että venymä  $\varepsilon$  ei sisällä esijännityksen  $\sigma_0$  aiheuttamaa venymää  $\sigma_0/E$ , on voimassa kuvan 4.2 mukainen materiaaliyhtälö

$$\sigma = E\varepsilon + \sigma_0 \quad (4.3)$$

Kimmoenergiatiheys  $U_0$  on kuvan 4.2 ja kaavan (4.3) perusteella

$$U_0 = \frac{1}{2}\sigma_0 \frac{\sigma_0}{E} + \sigma_0 \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon(\sigma - \sigma_0) = \frac{1}{2}\frac{\sigma_0^2}{E} + \sigma_0 \varepsilon + \frac{1}{2}E\varepsilon^2 \quad (4.4)$$

Koska kimmoenergian nollakohdalla ei ole ääriarvolauseessa merkitystä, voidaan termi  $\frac{1}{2}\frac{\sigma_0^2}{E}$  jättää kimmoenergiatiheyden lausekkeesta pois, jolloin sen lausekkeeksi aksiaalisessa jännitystilassa tulee

$$U_0 = \sigma_0 \varepsilon + \frac{1}{2}E\varepsilon^2 \quad (4.5)$$

Yleisessä jännitys- ja muodonmuutostilassa suureet  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  ja  $\sigma_0$  korvataan vektoreilla

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}\} & \{\varepsilon\} &= \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}\} \\ \{\sigma_0\} &= \{\sigma_{x0} \quad \sigma_{y0} \quad \sigma_{z0} \quad \tau_{xy0} \quad \tau_{xz0} \quad \tau_{yz0}\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Kaavaa (4.3) vastaa tällöin materiaaliyhtälö

$$\boxed{\{\sigma\} = [E] \{\varepsilon\} + \{\sigma_0\}} \quad (4.7)$$

Kaavassa (4.7)  $[E]$  on kimmomatriisi ja se on muotoa

$$[E] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\nu} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

jossa on merkitty  $\bar{\nu} = (1-2\nu)/2$ . Kimmoenergiatiheydelle  $U_0$  tulee yleisessä jännitys- ja muodonmuutostilassa kaavan (4.5) kanssa analoginen lauseke

$$U_0 = \{\epsilon\}^T \{\sigma_0\} + \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [E] \{\epsilon\} \quad (4.9)$$

Kappaleeseen varastoituva kimmoenergia  $U$  saadaan tästä integroimalla

$$U = \int_V U_0 dV \quad (4.10)$$

Kappaleeseen vaikuttavat ulkoinen tilavuusvoima- ja pintavoimavektori ovat

$$\{f\} = \{f_x \quad f_y \quad f_z\} \quad \{p\} = \{p_x \quad p_y \quad p_z\} \quad (4.11)$$

jolloin ulkoisten kuormitusten tekemä työ  $W$  on

$$W = \int_V \{d\}^T \{f\} dV + \int_A \{d\}^T \{p\} dA \quad (4.12)$$

Kaava (4.12) ei sisällä pistekuormitusten työtä, mutta se on tarvittaessa helppo ottaa huomioon. Potentiaalienergian  $\Pi$  lausekkeeksi tulee näin ollen

$$\Pi = U - W = \int_V \left[ \{\epsilon\}^T \{\sigma_0\} + \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [E] \{\epsilon\} \right] dV - \int_V \{d\}^T \{f\} dV - \int_A \{d\}^T \{p\} dA \quad (4.13)$$

Potentiaalienergialle  $\Pi$  on voimassa ääriarvoperiaate

Kaikkien kinemaattisesti käypien siirtymäkenttien joukosta se, joka antaa potentiaalienergialle ääriarvon, vastaa tasapainotilaa. Jos tämä ääriarvo on minimi, on tasapaino stabiili. Siirtymäkenttä on kinemaattisesti käypä, jos se toteuttaa kinemaattiset jatkuvuusehdot (on jatkuva ja derivoituva kappaleen pisteissä) ja siirtymille asetetut reunaehdot (oleelliset reunaehdot).

### 4.3 Siirtymämenetelmään perustuva elementtimenetelmä

Siirtymämenetelmään perustuvassa elementtimenetelmässä kenttäfunktio on siirtymäkenttä  $\{d\} = \{u \ v \ w\}$  ja se ratkaistaan vaatimalla, että kappaleen potentiaalienergia  $\Pi$  saa minimin. Siirtymämenetelmässä  $\Pi$  lausutaan solmusiirtymien avulla ja niille etsitään sellaiset arvot, että  $\Pi$  tulee mahdollisimman pieneksi. Tästä seuraa solmusiirtymille lineaarinen yhtälöryhmä, joka on elementtiverkon perusyhtälö.

Siirtymäkenttä  $\{d\} = \{u \ v \ w\}$  esitetään elementin alueessa solmusiirtymien  $\{u\}$  avulla muodossa

$$\boxed{\{d\} = [N] \{u\}} \quad (4.14)$$

jossa  $[N]$  on solmusiirtymiä  $\{u\}$  vastaava interpolointimatriisi. Kuten myöhemmin tulee esille interpolointi (4.14) tapahtuu emoelementtiä ja sen sopivasti valittua paikalliskoordinaatistoa hyväksi käyttäen. Kun siirtymäkenttä  $\{d\}$  tunnetaan, saadaan muodonmuutostilakenttä  $\{\epsilon\}$  kinemaattisista yhtälöistä

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= u_{,x} & \epsilon_y &= v_{,y} & \epsilon_z &= w_{,z} \\ \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} & \gamma_{xz} &= u_{,z} + w_{,x} & \gamma_{yz} &= v_{,z} + w_{,y} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Kaavat (4.15) menee operaattorimatriisiin  $[D]$  avulla matriisimuotoon seuraavasti

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [D] \{d\} \quad (4.16)$$

Kaavojen (4.14) ja (4.16) avulla muodonmuutostilakenttä  $\{\epsilon\}$  voidaan lausua solmusiirtymien  $\{u\}$  avulla muodossa

$$\boxed{\{\epsilon\} = [D][N] \{u\} = [B] \{u\}} \quad (4.17)$$

jossa  $[B] = [D][N]$  on elementin kinemaattinen matriisi. Jännitykset voidaan lausua solmusiirtymien avulla kaavojen (4.7) ja (4.17) avulla

$$\boxed{\{\sigma\} = [E][B] \{u\} + \{\sigma_0\}} \quad (4.18)$$

Elementin potentiaalienergian lausekkeeksi tulee kaavoista (4.13), (4.14) ja (4.17)

$$\begin{aligned} \Pi_e = \frac{1}{2} \{u\}^T \left( \int_{V_e} [B]^T [E] [B] dV \right) \{u\} + \{u\}^T \left( \int_{V_e} [B]^T \{\sigma_0\} dV \right) \\ - \{u\}^T \left( \int_{V_e} [N]^T \{f\} dV + \int_{A_e} [N]^T \{p\} dA \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

jossa solmukuormituksia ei ole vielä otettu huomioon. Otetaan käyttöön merkinnät

$$[k] = \int_{V_e} [B]^T [E] [B] dV \quad (4.20)$$

$$\{r\} = - \int_{V_e} [B]^T \{\sigma_0\} dV + \int_{V_e} [N]^T \{f\} dV + \int_{A_e} [N]^T \{p\} dA \quad (4.21)$$

jolloin elementin potentiaalienergian lauseke menee muotoon

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \{u\}^T [k] \{u\} - \{u\}^T \{r\} \quad (4.22)$$

$[k]$  on elementin jäykkyysmatriisi ja  $\{r\}$  ekvivalenttinen solmukuormitusvektori. Kaavan (4.21) vektori  $\{r\}$  sisältää esijännitystilan  $\{\sigma_0\}$ , tilavuusvoimien  $\{f\}$  ja pintavoimien  $\{p\}$  vaikutuksen. Pintavoimavaikutus on mukana vain niillä elementeillä, joilla on yhteistä reunapintaa kappaleen ulkopinnan A kanssa.

Elementtiverkon potentiaalienergia  $\Pi$  on elementtien ja solmukuormitusten potentiaalienergioiden summa. Kun se lasketaan matriisien ja vektoreiden sijoittelusummasta käyttäen, saadaan tulokseksi lauseke

$$\Pi = \frac{1}{2} \{U\}^T \left( \sum [k] \right) \{U\} - \{U\}^T \left( \sum [r] \right) - \{U\}^T \{F\} \quad (4.23)$$

jossa  $\{F\}$  sisältää solmukuormitukset. Elementtiverkon jäykkyysmatriisille  $[K]$  ja kokonaiskuormitusvektorille  $\{R\}$  saadaan siis kaavat

$$[K] = \sum [k] \quad \{R\} = \sum \{r\} + \{F\} \quad (4.24)$$

Merkinnöillä (4.24) elementtiverkon potentiaalienergia voidaan kirjoittaa muotoon

$$\Pi = \frac{1}{2} \{U\}^T [K] \{U\} - \{U\}^T \{R\} \quad (4.25)$$

Elementtiverkon potentiaalienergia on kaavassa (4.25) esitetty solmusiirtymien  $\{U\}$  avulla. Potentiaalienergian minimiehdosta seuraa, että sen derivaattojen solmusiirtymien suhteen on oltava nollia, mistä tulee solmusiirtymien mukainen määrä ehtoja

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U_k} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4.26)$$

jossa  $n$  on elementtiverkon solmusiirtymien lukumäärä. Kaavasta (4.26) saadaan derivoimalla muuttujan  $U_k$  suhteen

$$\frac{1}{2} \left( \{e_k\}^T [K] \{U\} + \{U\}^T [K] \{e_k\} \right) - \{e_k\}^T \{R\} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4.27)$$

Edellä  $\{e_k\}$  on  $n$ -vektori, jonka paikassa  $k$  oleva komponentti on 1 ja muut komponentit nollia. Kaavasta (4.27) seuraa jäykkymatriisin  $[K]$  symmetrian perusteella

$$\{e_k\}^T ([K] \{U\} - \{R\}) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4.28)$$

Kaavan (4.28) ehdot toteutuvat, jos ja vain jos on voimassa yhtälöryhmä

$$[K] \{U\} = \{R\} \quad (4.29)$$

joka on elementtiverkon perusyhtälö. Yhtälöä (4.29) ratkaistaessa pitää kinemaattiset reunaehdot ottaa huomioon.

## 4.4 Yhteenveto

Edellä esitetty elementtimenetelmän yleinen muoto sopii kaikkiin lineaarisen lujuusopin tehtäviin, jolloin siirtymät ja muodonmuutokset ovat pieniä ja materiaali käyttäytyy lineaarisesti kimmoisesti. Menetelmää voidaan soveltaa kaikkiin lujuusopin laskentamalleihin, kuten viivarakenteisiin (sauvat ja palkit), pintarakenteisiin (levyt, laatat ja kuoret) ja solidirakenteisiin. Lähtökohtana on kaikissa tapauksissa geometrialtaan yksinkertaisen muotoinen elementti, jossa on haluttu määrä tietyt vapausasteet omaavia solmuja sopivissa kohdissa. Siirtymien interpoloimiseksi valitaan elementin vapausasteisiin liittyvät interpolointifunktiot, jolloin interpolointimatriisi  $[N]$  tulee määrättyksi. Tämän jälkeen kinemaattisista yhtälöistä selviää tutkittavaan tapaukseen liittyvä kinemaattinen matriisi  $[B]$ . Lisäksi materiaaliyhtälöistä seuraa konstitutiivinen matriisi  $[E]$ . Näiden kolmen perusmatriisin yksityiskohdat riippuvat elementin

tyypistä, käytettävästä interpolointitekniikasta ja materiaalista, mutta ne ovat esitettävissä kaikille elementeille. Seurauksena on, että elementin ja elementtiverkon käsittely sujuu kaikissa tapauksissa aina edellä esitettyjen suuntaviivojen mukaisesti.

Seuraavassa on koottu elementin ja elementtiverkon käsittelyssä tarvittavat yhtälöt.

## Elementti

Kaikki suureet esitetään solmusiirtymien avulla elementin alueessa valittua interpolointitekniikkaa käyttäen

$$\{\mathbf{d}\} = [\mathbf{N}] \{\mathbf{u}\} \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{B}] \{\mathbf{u}\} \quad \{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{E}] [\mathbf{B}] \{\mathbf{u}\} + \{\boldsymbol{\sigma}_0\} \quad (4.30)$$

Elementin jäykkyyismatriisi ja ekvivalenttinen solmukuormitusvektori

$$\begin{aligned} [\mathbf{k}] &= \int_{V_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}] dV \\ \{\mathbf{r}\} &= - \int_{V_e} [\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}_0\} dV + \int_{V_e} [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{f}\} dV + \int_{A_e} [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{p}\} dA \end{aligned} \quad (4.31)$$

## Elementtiverkko

Elementtiverkon perusyhtälö muodostetaan sijoittelusummaamalla elementtien jäykkyyismatriisit sekä solmukuormitukset ja ekvivalenttiset solmukuormitusvektorit. Lisäksi otetaan huomioon kinemaattiset reunaehdot.

$$[\mathbf{K}] \{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{R}\} \quad [\mathbf{K}] = \sum [\mathbf{k}] \quad \{\mathbf{R}\} = \sum \{\mathbf{r}\} + \{\mathbf{F}\} \quad (4.32)$$

Tuntemattomat solmusiirtymät ratkaistaan elementtiverkon perusyhtälöstä, jonka jälkeen suureet elementin alueessa saadaan kaavasta (4.30).