ESIMERKKI: Nelisivuinen lineaarinen levyelementti

$ORIGIN := 1$ $\quad E := 210000 \cdot MPa$ $\quad \nu := 0.3$ $\quad t := 10 \cdot mm$

Solmukoordinaatit: $x_1 := 20 \cdot mm$ $\quad x_2 := 80 \cdot mm$ $\quad x_3 := 40 \cdot mm$ $\quad x_4 := 10 \cdot mm$

$y_1 := 10 \cdot mm$ $\quad y_2 := 30 \cdot mm$ $\quad y_3 := 70 \cdot mm$ $\quad y_4 := 50 \cdot mm$

Vakiot: $a := -x_1 + x_2 + x_3 - x_4$ $\quad b := x_1 - x_2 + x_3 - x_4$ $\quad c := -x_1 - x_2 + x_3 + x_4$

$d := -y_1 + y_2 + y_3 - y_4$ $\quad e := y_1 - y_2 + y_3 - y_4$ $\quad f := -y_1 - y_2 + y_3 + y_4$

$a = 90\,mm$ $\quad b = -30\,mm$ $\quad c = -50\,mm$ $\quad d = 40\,mm$ $\quad e = 7 \times 10^{-15}$ $\quad f = 80\,mm$

Jacobin matriisin deteminantti: $$\det(\xi,\eta) := \frac{[(a \cdot f - c \cdot d) + (a \cdot e - b \cdot d) \cdot \xi + (b \cdot f - c \cdot e) \cdot \eta]}{16}$$

Jacobin matriisin käänteismatriisi:

$$J\_11(\xi,\eta) := \frac{(f + e \cdot \xi)}{4 \cdot \det(\xi,\eta)} \qquad J\_12(\xi,\eta) := \frac{(-d - e \cdot \eta)}{4 \cdot \det(\xi,\eta)} \qquad J\_21(\xi,\eta) := \frac{(-c - b \cdot \xi)}{4 \cdot \det(\xi,\eta)} \qquad J\_22(\xi,\eta) := \frac{(a + b \cdot \eta)}{4 \cdot \det(\xi,\eta)}$$

Interpolointifunktiot ja niiden derivaatat:

$$N_1(\xi,\eta) := \frac{(1-\xi)\cdot(1-\eta)}{4} \qquad N_2(\xi,\eta) := \frac{(1+\xi)\cdot(1-\eta)}{4} \qquad N_3(\xi,\eta) := \frac{(1+\xi)\cdot(1+\eta)}{4} \qquad N_4(\xi,\eta) := \frac{(1-\xi)\cdot(1+\eta)}{4}$$

$$N_{1\xi}(\xi,\eta) := \frac{d}{d\xi}N_1(\xi,\eta) \qquad N_{2\xi}(\xi,\eta) := \frac{d}{d\xi}N_2(\xi,\eta) \qquad N_{3\xi}(\xi,\eta) := \frac{d}{d\xi}N_3(\xi,\eta) \qquad N_{4\xi}(\xi,\eta) := \frac{d}{d\xi}N_4(\xi,\eta)$$

$$N_{1\eta}(\xi,\eta) := \frac{d}{d\eta}N_1(\xi,\eta) \qquad N_{2\eta}(\xi,\eta) := \frac{d}{d\eta}N_2(\xi,\eta) \qquad N_{3\eta}(\xi,\eta) := \frac{d}{d\eta}N_3(\xi,\eta) \qquad N_{4\eta}(\xi,\eta) := \frac{d}{d\eta}N_4(\xi,\eta)$$

Kinemaattinen matriisi:

$$B1(\xi,\eta) := \begin{pmatrix} J\_11(\xi,\eta) & J\_12(\xi,\eta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J\_21(\xi,\eta) & J\_22(\xi,\eta) \\ J\_21(\xi,\eta) & J\_22(\xi,\eta) & J\_11(\xi,\eta) & J\_12(\xi,\eta) \end{pmatrix}$$

$$B2(\xi,\eta) := \begin{pmatrix} N_{1\xi}(\xi,\eta) & 0 & N_{2\xi}(\xi,\eta) & 0 & N_{3\xi}(\xi,\eta) & 0 & N_{4\xi}(\xi,\eta) & 0 \\ N_{1\eta}(\xi,\eta) & 0 & N_{2\eta}(\xi,\eta) & 0 & N_{3\eta}(\xi,\eta) & 0 & N_{4\eta}(\xi,\eta) & 0 \\ 0 & N_{1\xi}(\xi,\eta) & 0 & N_{2\xi}(\xi,\eta) & 0 & N_{3\xi}(\xi,\eta) & 0 & N_{4\xi}(\xi,\eta) \\ 0 & N_{1\eta}(\xi,\eta) & 0 & N_{2\eta}(\xi,\eta) & 0 & N_{3\eta}(\xi,\eta) & 0 & N_{4\eta}(\xi,\eta) \end{pmatrix}$$

$$B(\xi,\eta) := B1(\xi,\eta) \cdot B2(\xi,\eta)$$

Konstitutiivinen matriisi:

$$E_{TJT} := \frac{E}{1-\nu^2}\cdot\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}$$

$$E_{TJT} = \begin{pmatrix} 230769.230769 & 69230.769231 & 0 \\ 69230.769231 & 230769.230769 & 0 \\ 0 & 0 & 80769.230769 \end{pmatrix}\mathrm{MPa}$$

Jäykkyysmatriisi: Neljän pisteen Gaussin integrointi.

$$c := \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$k1 := 1\cdot 1\cdot B(c,c)^T\cdot E_{TJT}\cdot B(c,c)\cdot \det(c,c) \qquad k2 := 1\cdot 1\cdot B(-c,c)^T\cdot E_{TJT}\cdot B(-c,c)\cdot \det(-c,c)$$

$$k3 := 1\cdot 1\cdot B(-c,-c)^T\cdot E_{TJT}\cdot B(-c,-c)\cdot \det(-c,-c) \qquad k4 := 1\cdot 1\cdot B(c,-c)^T\cdot E_{TJT}\cdot B(c,-c)\cdot \det(c,-c)$$

$$k := t\cdot(k1 + k2 + k3 + k4)$$

$$k = \begin{pmatrix} 722343.01 & 231208.25 & -312370.87 & -340691.93 & -281146.4 & -224429.28 & -128825.73 & 333912.96 \\ 231208.25 & 1479741.17 & -282999.62 & 94950.41 & -224429.28 & -984028.79 & 276220.65 & -590662.79 \\ -312370.87 & -282999.62 & 1032121.15 & -194207.96 & 3533.25 & 278254.34 & -723283.53 & 198953.24 \\ -340691.93 & 94950.41 & -194207.96 & 521996.25 & 335946.65 & -441949.08 & 198953.24 & -174997.58 \\ -281146.4 & -224429.28 & 3533.25 & 335946.65 & 854701.99 & 233241.94 & -577088.84 & -344759.31 \\ -224429.28 & -984028.79 & 278254.34 & -441949.08 & 233241.94 & 1628454.88 & -287067 & -202477.02 \\ -128825.73 & 276220.65 & -723283.53 & 198953.24 & -577088.84 & -287067 & 1429198.1 & -188106.89 \\ 333912.96 & -590662.79 & 198953.24 & -174997.58 & -344759.31 & -202477.02 & -188106.89 & 968137.39 \end{pmatrix}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}$$

Geometrian kuvaus:

$$x(\xi,\eta) := N_1(\xi,\eta)\cdot x_1 + N_2(\xi,\eta)\cdot x_2 + N_3(\xi,\eta)\cdot x_3 + N_4(\xi,\eta)\cdot x_4$$

$$y(\xi,\eta) := N_1(\xi,\eta)\cdot y_1 + N_2(\xi,\eta)\cdot y_2 + N_3(\xi,\eta)\cdot y_3 + N_4(\xi,\eta)\cdot y_4$$

Interpolointimatriisi:

$$N(\xi,\eta) := \begin{pmatrix} N_1(\xi,\eta) & 0 & N_2(\xi,\eta) & 0 & N_3(\xi,\eta) & 0 & N_4(\xi,\eta) & 0 \\ 0 & N_1(\xi,\eta) & 0 & N_2(\xi,\eta) & 0 & N_3(\xi,\eta) & 0 & N_4(\xi,\eta) \end{pmatrix}$$

Emoelementin Gaussin pisteen (c,-c) kuvapisteen B koordinaatit:

$$x_B := x(c,-c) \qquad y_B := y(c,-c) \qquad x_B = 60.207259\,\mathrm{mm} \qquad y_B = 34.226497\,\mathrm{mm}$$

Oletetaan, että elementtiverkon perusyhtälöstä on saatu tämän elementin solmusiirtymävektoriksi:

$$u := \begin{pmatrix} 0.03 \\ 0.02 \\ -0.02 \\ -0.04 \\ 0.03 \\ -0.04 \\ 0.07 \\ 0.05 \end{pmatrix} \cdot mm$$

Siirtymät pisteessä B: $u_B := N(c, -c) \cdot u$ $\quad u_B = \begin{pmatrix} 0.000686 \\ -0.025981 \end{pmatrix} mm$ $\quad \mu := 10^{-6}$

Muodonmuutoskomponentit pisteessä B: $\varepsilon_B := B(c, -c) \cdot u$ $\quad \varepsilon_B = \begin{pmatrix} -1019.006082 \\ -671.304473 \\ -646.417888 \end{pmatrix} \mu$

Jännityskomponentit pisteessä B: $\sigma_B := E_{TJT} \cdot B(c, -c) \cdot u$ $\quad \sigma_B = \begin{pmatrix} -281.630175 \\ -225.462992 \\ -52.210676 \end{pmatrix} MPa$

<u>Tilavuusvoimakuormitus:</u> Rotaatio z-akselin ympäri.

$$\rho := 7850 \cdot \frac{kg}{m^3} \qquad \omega := 200 \cdot \frac{rad}{s} \qquad f(\xi, \eta) := \begin{pmatrix} \rho \cdot \omega^2 \cdot x(\xi, \eta) \\ \rho \cdot \omega^2 \cdot y(\xi, \eta) \end{pmatrix}$$

Neljän pisteen Gaussin integrointi:

$$r1 := 1 \cdot 1 \cdot N(c, c)^T \cdot f(c, c) \cdot det(c, c) \qquad r2 := 1 \cdot 1 \cdot N(-c, c)^T \cdot f(-c, c) \cdot det(-c, c)$$

$$r3 := 1 \cdot 1 \cdot N(-c, -c)^T \cdot f(-c, -c) \cdot det(-c, -c) \qquad r4 := 1 \cdot 1 \cdot N(c, -c)^T \cdot f(c, -c) \cdot det(c, -c)$$

$$r := t \cdot (r1 + r2 + r3 + r4)$$

$$r = \begin{pmatrix} 65.155000 \\ 54.950000 \\ 104.928333 \\ 73.266667 \\ 71.696667 \\ 84.780000 \\ 43.960000 \\ 66.463333 \end{pmatrix} N$$

<u>Pintavoimakuormitus:</u> Sivulla 12 lineaariset pintakuormitukset.

$p_{x1} := 1 \cdot MPa \qquad p_{x2} := 2 \cdot MPa \qquad p_{y1} := 1.5 \cdot MPa \qquad p_{y2} := 3.5 \cdot MPa$

$$p(\xi) := \begin{bmatrix} p_{x1} + \dfrac{p_{x2} - p_{x1}}{x_2 - x_1} \cdot \left(x(\xi, -1) - x_1\right) \\ p_{y1} + \dfrac{p_{y2} - p_{y1}}{y_2 - y_1} \cdot \left(y(\xi, -1) - y_1\right) \end{bmatrix}$$

$$s_{12} := \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$$

$$s_{12} = 63.245553\,mm$$

Kahden pisteen Gaussin integrointi: $r1 := 1 \cdot N(-c, -1)^T \cdot p(-c) \qquad r2 := 1 \cdot N(c, -1)^T \cdot p(c)$

$$r := \frac{t \cdot s_{12}}{2} \cdot (r1 + r2)$$

$$r = \begin{pmatrix} 421.637021 \\ 685.160160 \\ 527.046277 \\ 895.978670 \\ 0.000000 \\ 0.000000 \\ 0.000000 \\ 0.000000 \end{pmatrix} N$$

<u>Esijännitystilakenttä:</u> x-suunnassa lineaarinen esijännitysvektori.

$$\sigma_0(\xi, \eta) := \begin{pmatrix} 0.0042 \\ -0.0023 \\ -0.0031 \end{pmatrix} \cdot \frac{MPa}{mm} \cdot x(\xi, \eta) + \begin{pmatrix} 11 \\ -20 \\ 14 \end{pmatrix} \cdot MPa$$

Neljän pisteen Gaussin integrointi:

$r1 := 1 \cdot 1 \cdot B(c, c)^T \cdot \sigma_0(c, c) \cdot det(c, c) \qquad r2 := 1 \cdot 1 \cdot B(-c, c)^T \cdot \sigma_0(-c, c) \cdot det(-c, c)$

$r3 := 1 \cdot 1 \cdot B(-c, -c)^T \cdot \sigma_0(-c, -c) \cdot det(-c, -c) \qquad r4 := 1 \cdot 1 \cdot B(c, -c)^T \cdot \sigma_0(c, -c) \cdot det(c, -c)$

$$r := -t \cdot (r1 + r2 + r3 + r4)$$

$$r = \begin{pmatrix} 5982.616667 \\ -5646.050000 \\ -1968.366667 \\ -6170.950000 \\ -5962.083333 \\ 5641.600000 \\ 1947.833333 \\ 6175.400000 \end{pmatrix} N$$