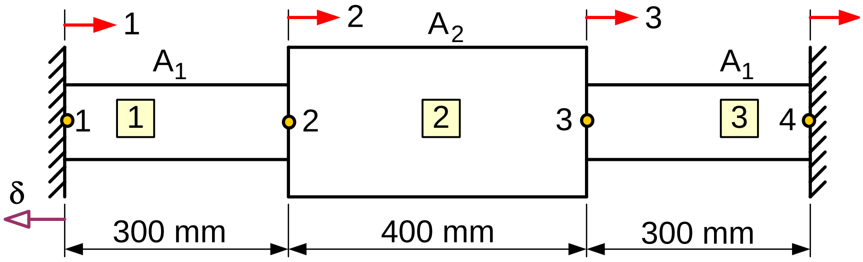
Esimerkki 2.2

Tarkastellaan kuvan 1 aksiaalista rakennetta, kun kuormituksena on vasemmanpuoleisen tuen siirtymä $\delta = 1\text{mm}$ vasemmalle.



$A_1 = 100\,\text{mm}^2 \quad A_2 = 200\,\text{mm}^2 \quad E = 210\,\text{GPa}$

Kuva 1. Aksiaalinen rakenne.

Elementtiverkon perusyhtälössä $[K]\{U\} = \{R\}$ jäykkyysmatriisi $[K]$ riippuu rakenteen geometriasta ja materiaaliominaisuuksista, mutta ei tuennasta ja kuormituksista. Rakenteen eri kuormitustapauksia voidaan siis käsitellä saman jäykkyysmatriisin avulla. Tässä voidaan siis käyttää esimerkissä 2.1 johdettua jäykkyysmatriisia.

Kineettiset kuormitukset sijoittuvat kokonaiskuormitusvektoriin $\{R\}$ ja kinemaattiset kuormitukset solmusiirtymävektoriin $\{U\}$. Elementtiverkon perusyhtälöksi tulee

$$\begin{bmatrix} 70 & -70 & 0 & 0 \\ -70 & 175 & -105 & 0 \\ 0 & -105 & 175 & -70 \\ 0 & 0 & -70 & 70 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ U^2 \\ U^3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^1 \\ 0 \\ 0 \\ F^4 \end{bmatrix}$$

jonka toisesta ja kolmannesta yhtälöstä saadaan tuntemattomien solmusiirtymien U^2 ja U^3 ratkaisemiseen yhtälöpari

$$\begin{cases} -70 \cdot (-1) + 175\ U^2 - 105\ U^3 = 0 \\ -105\ U^2 + 175\ U^3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad U^2 = -0{,}625\,\text{mm} \quad U^3 = -0{,}375\,\text{mm}$$

Perusyhtälön ensimmäisestä ja neljännestä yhtälöstä voidaan laskea tukireaktiot

$$F^1 = 70 \cdot (-1) - 70\ U^2 = -26{,}25\,\text{kN} \qquad F^4 = -70\ U^3 = 26{,}25\,\text{kN}$$

Ratkaistaan elementtien solmuvoimavektorit elementin perusyhtälöstä $\{f\}=[k]\{u\}$. Tulokseksi saadaan vektorit

$$\begin{bmatrix} f^1 \\ f^2 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 70 & -70 \\ -70 & 70 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -0{,}625 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26{,}25 \\ 26{,}25 \end{bmatrix} \mathrm{kN}$$

$$\begin{bmatrix} f^1 \\ f^2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 105 & -105 \\ -105 & 105 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}625 \\ -0{,}375 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26{,}25 \\ 26{,}25 \end{bmatrix} \mathrm{kN}$$

$$\begin{bmatrix} f^1 \\ f^2 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 70 & -70 \\ -70 & 70 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}375 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26{,}25 \\ 26{,}25 \end{bmatrix} \mathrm{kN}$$

Kaikkien elementtien normaalivoimaksi tulee sama eli $N^1 = N^2 = N^3 = 26{,}25\,\mathrm{kN}$.

Elementtien normaalijännitykset ovat

$$\sigma^1 = 26{,}25 \cdot 10^3\,\mathrm{N}/100\,\mathrm{mm}^2 = 262{,}5\,\mathrm{MPa}$$
$$\sigma^2 = 26{,}25 \cdot 10^3\,\mathrm{N}/200\,\mathrm{mm}^2 = 131{,}25\,\mathrm{MPa}$$
$$\sigma^3 = 26{,}25 \cdot 10^3\,\mathrm{N}/100\,\mathrm{mm}^2 = 262{,}5\,\mathrm{MPa}$$