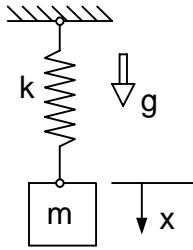
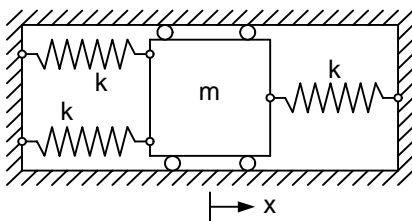


Liite lukuun 8.

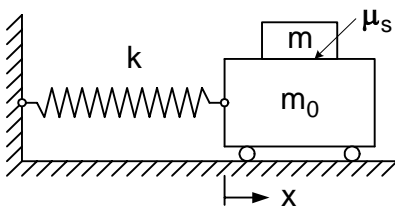
Yhden vapausasteen värähtely - harjoitustehtäviä



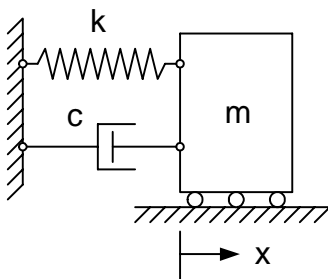
8.1 Kuvan jousi-massa systeemissä on $m = 10 \text{ kg}$ ja $k = 2,5 \text{ kN/m}$. Siirtymä x mitataan staattisesta tasapainoasemasta lähtien. Alkuhetkellä $t = 0 \text{ s}$ massa on staattisessa tasapainoasemassaan ja sillä on nopeus $0,5 \text{ m/s}$ alaspäin. Laske jousen pituuden muutos staattisessa tasapainoasemassa, ominaiskulmataajuus, ominaistaajuus ja ominaisvärähdysaika. Muodosta siirtymän $x(t)$ lauseke ja selvitä sen avulla siirtymän, nopeuden ja kiihtyvyyden maksimiarvot. Vast. $0,0392 \text{ m}$ $15,81 \text{ rad/s}$ $2,516 \text{ Hz}$ $0,397 \text{ s}$ $0,03162 \text{ m}$ $0,4999 \text{ m/s}$ $7,9057 \text{ m/s}^2$



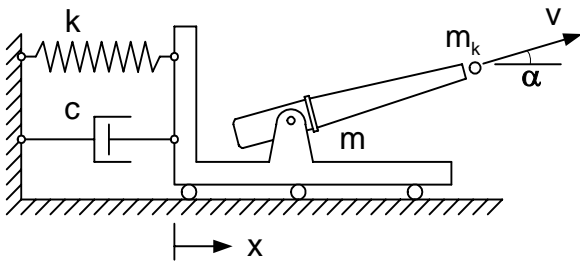
8.2 Kuvan mukaisessa massan ja kolmen jousen muodostamassa systeemissä on $m = 0,1 \text{ kg}$ ja kaikkien jousien jousivakio $k = 90 \text{ N/m}$. Alkuhetkellä $t = 0 \text{ s}$ on $x_0 = 4 \text{ mm}$ ja $\dot{x}_0 = 0,3 \text{ m/s}$. Laske systeemin ominaiskulmataajuus, ominaistaajuus ja ominaisvärähdysaika. Määritä massan asema ja nopeus hetkellä $t = 2 \text{ s}$. Vast. $51,96 \text{ rad/s}$ $8,27 \text{ Hz}$ $0,121 \text{ s}$ $-5,31 \text{ mm}$ $-238,85 \text{ mm/s}$



8.3 Kuvan mukaisessa systeemissä on $m_0 = 6 \text{ kg}$ ja $k = 600 \text{ N/m}$. Mitoita lisämassa m siten, että systeemin ominaisvärähdysajaksi tulee $0,75 \text{ s}$ olettaen kitka niin suureksi, että lisämassa ei luista alkuperäisen massan päällä. Massoja poikkeutetaan staattisesta tasapainoasemastaan 50 mm ja päästetään sitten ilman alkunopeutta liikkeelle. Laske kuinka suuri lepokitkakertoimen μ_s on vähintään oltava, jotta lisämassa ei luistaisi liikkeen aikana. Vast. $2,549 \text{ kg}$ $0,358$

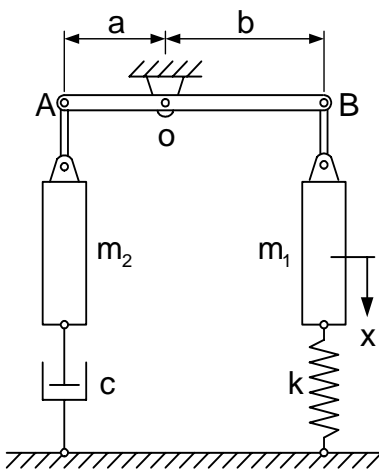


8.4 Kuvan jousi-massa-vaimennin systeemissä on $m = 50 \text{ kg}$, $k = 200 \text{ N/m}$. Massa päästetään hetkellä $t = 0 \text{ s}$ ilman alkunopeutta liikkeelle asemasta $x_0 = 0,15 \text{ m}$. Määritä massan asema hetkellä $t = 0,5 \text{ s}$, kun a) $c = 200 \text{ Ns/m}$ ja b) $c = 100 \text{ Ns/m}$. Vast. $0,110 \text{ m}$ $0,060 \text{ m}$



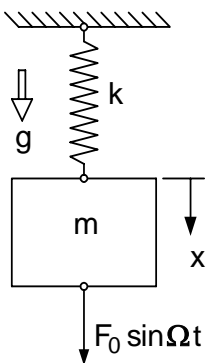
8.5 Tykillä ammutaan vaakasuuntaan nähden 20° suuntaan ammus, jonka absoluuttisen nopeuden suuruus laukaisun jälkeen on 250 m/s . Ammuksen massa on $m_k = 4,5 \text{ kg}$ ja tykin ja lavetin yhteenlaskettu massa $m = 750 \text{ kg}$. Rekyylimekanismin jousivakio on $k = 27 \text{ kN/m}$ ja vaimennusvakio $c = 1200 \text{ Ns/m}$. Laske ammuksen rekyylivaikutuksesta johtuva tykin ja lavetin suurin vaakasiirtymä.

Vast. $0,107 \text{ m}$

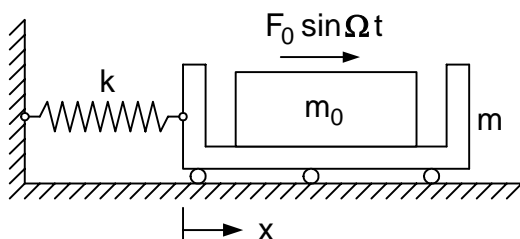


8.6 Johda kuvan mukaisen yhden vapausasteen systeemin liikeyhtälö, kun koordinaattina käytetään massan m_1 pystysiirtymää $x(t)$. Laske systeemin ominaiskulmataajuus, ominaistaajuus, ominaisvärähdysaika, vaimennusvakio, vaimennettu ominaiskulmataajuus, vaimennettu ominaisvärähdysaika ja logaritminen dekrementti, kun sen parametreilla on arvot $a = 0,2 \text{ m}$, $b = 0,4 \text{ m}$, $m_1 = 3 \text{ kg}$, $m_2 = 4 \text{ kg}$, $k = 1,6 \text{ kN/m}$ ja $c = 500 \text{ Ns/m}$. Varsi AB oletetaan massattomaksi ja värähtelyamplitudit pieniksi.

Vast. 20 rad/s $3,18 \text{ Hz}$ $0,314 \text{ s}$ $0,781$
 $12,484 \text{ rad/s}$ $0,503 \text{ s}$ $7,864$

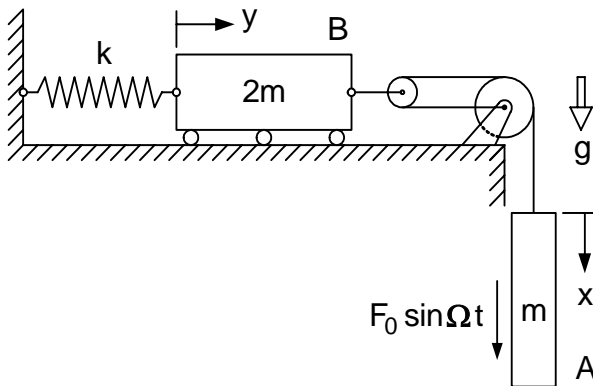


8.7 Kuvan jousi-massa systeemissä on $m = 5,1 \text{ kg}$ ja $k = 4000 \text{ N/m}$. Siirtymä x mitataan staattisesta tasapainoasemasta lähtien. Laske jousen pituuden muutos staattisessa tasapainoasemassa ja systeemin ominaiskulmataajuus. Massaan m vaikuttaa harmoninen pakkovoima $F(t) = F_0 \sin \Omega t$, jonka amplitudi $F_0 = 60 \text{ N}$ ja kulmataajuus $\Omega = 37,7 \text{ rad/s}$. Määritä syntyvän pakkovärähtelyn amplitudi ja muodosta pakkovärähtelyn $x_p(t)$ lauseke. Laske vielä värähtelyn siirtyvyys. Vast. $0,0125 \text{ m}$
 $28,01 \text{ rad/s}$ $0,0185 \text{ m}$ $1,231$



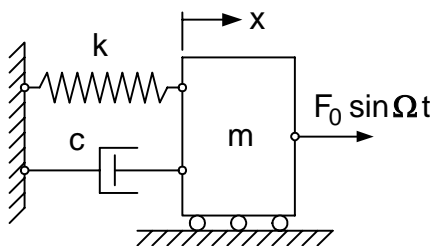
8.8 Kompressorin käytön aikana esiintyy vaakasuuntainen harmoninen pakkovoima. Pakkovoiman amplitudin selvittämiseksi kompressorin on kiinnitettävä vaakasuunnassa joustavasti tuetulle alustalle kuvan mukaisesti, jolloin vaakasuuntaisen

liikkeen oletetaan tapahtuvan kitkattomasti. Kompressorin massa $m_0 = 80 \text{ kg}$, alustan massa $M = 50 \text{ kg}$ ja kiinnityksen vaakasuuntainen jousivakio $k = 3500 \text{ N/m}$. Kun kompressoria käytetään pyörimisnopeudella $N = 1150 \text{ r/min}$, havaitaan vaakasuuntaisen värähtelyn amplitudiksi $0,5 \text{ mm}$. Laske tätä vastaava pakkovoiman amplitudi. Vast. $940,9 \text{ N}$

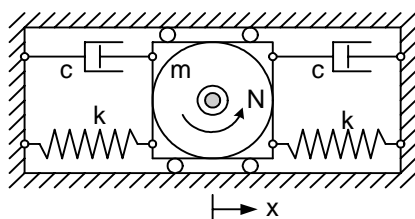


8.9 Tarkastellaan kuvan mukaista yhden vapausasteen systeemiä, jossa väkipyörät oletetaan massattomiksi ja kitkattomiksi, vaijerit venymättömiksi ja massan B vaakaliike kitkattomaksi. Selvitä, mitkä ovat jousen pituuden muutos y_{st} ja massan A pystysuuntainen siirtymä x_{st} systeemin staattisessa tasapainoasemassa. Massa A vaikuttaa harmoninen

pakkovoima $F(t) = F_0 \sin \Omega t$. Johda systeemin liikeyhtälö, kun koordinaattina käytetään massan A pystysiirtymää $x(t)$, joka mitataan sen staattisesta tasapainoasemasta lähtien. Määritä massojen A ja B pakkovärähtelyiden amplitudit ja muodosta niiden pakkovärähtelyiden lausekkeet. Laske vielä jousesta kiinnitysalustaan kohdistuva maksimivoima ja massaan A kiinnittyvässä vaijerissa vaikuttava suurin rasitus. Systeemin parametreilla on arvot $m = 8 \text{ kg}$, $k = 75 \text{ kN/m}$, $F_0 = 120 \text{ N}$ ja $\Omega = 93 \text{ rad/s}$. Vast. $1,41 \text{ mm}$ $0,71 \text{ mm}$ 210 N 101 N



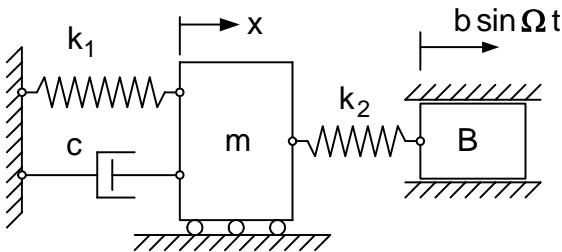
8.10 Kuvan jousi-massa-vaimennin systeemissä on $m = 30 \text{ kg}$, $k = 1080 \text{ N/m}$ ja $c = 36 \text{ Ns/m}$. Massa A vaikuttaa harmoninen pakkovoima, jonka $F_0 = 32,4 \text{ N}$ ja $\Omega = 12 \text{ rad/s}$. Laske syntyvän pakkovärähtelyn amplitudi ja vaihekulma ja kirjoita pakkovärähtelyn lauseke. Laske vielä jousesta ja vaimentimesta kiinnitysalustaan siirtyvän voiman maksimiarvo. Vast. $9,91 \text{ mm}$ $3,01 \text{ rad}$ $11,5 \text{ N}$



8.11 Moottori on kiinnitetty kuvan mukaisesti kiinteään koteloon kahdella jousella ja vaimentimella. Kummankin jousen jousivakio on $k = 2,1 \text{ kN/m}$ ja vaimentimen vaimennusvakio $c = 58 \text{ Ns/m}$. Moottoria käytettäessä syntyy vaakasuuntainen harmoninen pakkovoima, jonka aiheuttaman pakkoväräh-

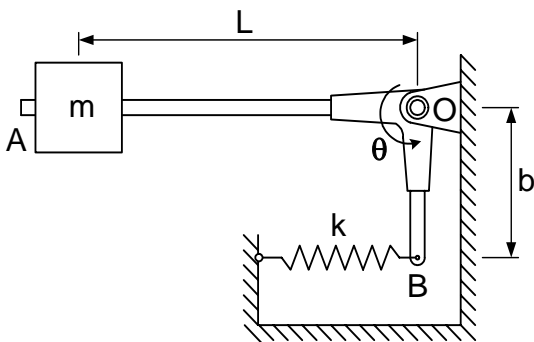
telyn amplitudin halutaan olevan korkeintaan kaksinkertainen verrattuna pakkovoiman amplitudin aiheuttamaan staattiseen siirtymään. Selvitä, millä pyörimisnopeusalueella moottoria voidaan käyttää.

Vast. $N \leq 99,9 \text{ r/min}$ $N \geq 165,97 \text{ r/min}$



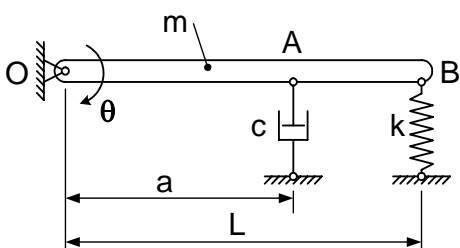
8.12 Kuvan mukaisessa yhden vapausasteen systeemissä jousen k_2 kiinnitysalusta B liikkuu funktion $u(t) = b \sin \Omega t$ mukaisesti. Johda systeemin liikeyhtälö, kun koordinaattina käytetään massan m vaakasiirtymää $x(t)$. Ratkaise alustan liikkeestä aiheutuvan pakkovärähtelyn amplitudi ja vaihekulma ja kirjoita pakko-

värähtelyn lauseke. Ratkaise jousen k_1 ja vaimentimen c kiinnitysalustaan siirtyvän voiman maksimiarvo. Laske vielä jousessa k_2 vaikuttavan voiman maksimiarvo. Systeemin parametreilla on arvot $m = 5 \text{ kg}$, $k_1 = 800 \text{ N/m}$, $k_2 = 1200 \text{ N/m}$, $c = 80 \text{ Ns/m}$, $b = 0,01 \text{ m}$ ja $\Omega = 60 \text{ rad/s}$. Vast. $0,718 \text{ mm}$ $2,85 \text{ rad}$ $3,74 \text{ N}$ $12,81 \text{ N}$



8.13 Kuvan systeemissä on $m = 6 \text{ kg}$, $b = 0,3 \text{ m}$, $L = 0,8 \text{ m}$ ja $k = 18 \text{ kN/m}$. Kulmakappale AOB oletetaan massattomaksi ja nivel O kitkattomaksi. Staattisessa tasapainoasemassa jousi k ja kulmakappaleen osa AO ovat vaaka-asennossa ja kulmakappaleen osa OB pystyasennossa. Laske jousen pituuden muutos staattisessa tasapainoasemassa. Johda systeemin ominaisvärähtelyn liikeyhtälö,

kun koordinaatiksi valitaan kulmakappaleen rotaatiokulma θ , joka mitataan staattisesta tasapainoasemasta lähtien. Laske systeemin ominaiskulmataajuus, ominaistaajuus ja ominaisvärähdysaika. Vast. $20,54 \text{ rad/s}$ $3,27 \text{ Hz}$ $0,306 \text{ s}$

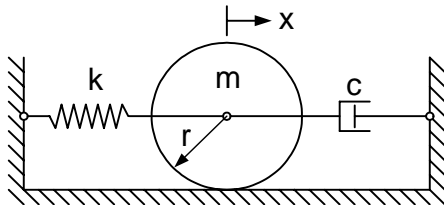


8.14 Kuvan palkki OAB on tasapaksu ja homogeeninen. Nivel O oletetaan kitkattomaksi. Palkin massa on $m = 20 \text{ kg}$, $k = 25 \text{ kN/m}$, $c = 200 \text{ Ns/m}$, $L = 1,2 \text{ m}$ ja $a = 0,8 \text{ m}$. Palkki on staattisessa tasapainoasemassaan vaaka-asennossa. Laske jousen pituuden muutos staattisessa tasapainoasemassa. Johda systeemin ominaisvärähtelyn liikeyhtälö, kun

koordinaatiksi valitaan palkin rotaatiokulma θ , joka mitataan staattisesta tasapai-

noasemasta lähtien. Laske systeemin vaimennussuhde, ominaiskulmataajuus, ominaistaajuus, ominaisvärähdysaika ja vastaavat vaimennetut suureet.

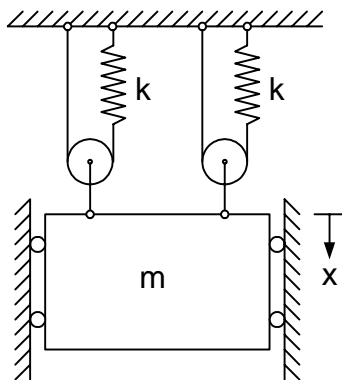
Vast. 3,92 mm 0,109 61,24 rad/s 9,75 Hz 0,1026 s 60,87 rad/s 9,69 Hz 0,1032 s



8.15 Johda kuvassa esitetyn homogeenisen ympyräsylinterin ominaisvärähtelyn liikeyhtälö, kun koordinaatiksi valitaan sylinterin keskipisteen vaaka-asema x ja sylinterin oletetaan vierivän liukumatta. Sylinterin massa $m = 0,5$ kg, säde $r = 0,5$ m, $k = 75$ N/m ja $c = 10$ Ns/m. Laske

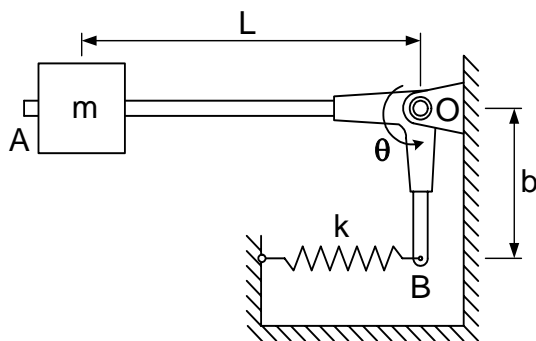
ominaiskulmataajuus, vaimennussuhde ja vaimennettu ominaiskulmataajuus. Esitä sylinterin vaimennetun ominaisvärähtelyn $x(t)$ lauseke, kun alkuehdot ovat $x_0 = -0,02$ m ja $\dot{x}_0 = 0,05$ m/s.

Vast. 10 rad/s 0,667 7,45 rad/s $C = 0,0229$ m $\psi = 4,203$ rad

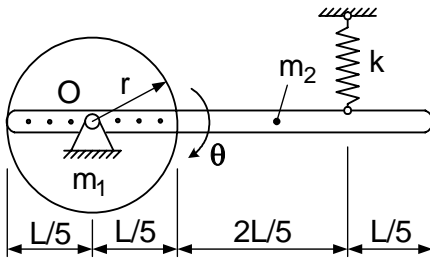


8.16 Johda kuvan mukaisen systeemin pystysuuntaisen ominaisvärähtelyn liikeyhtälö energiaperiaatteella. Väkipyörät oletetaan massattomiksi ja kitkattomiksi. Massa m liikkuu kitkattomasti pystysuuntaisessa johteessa. Siirtymä x mitataan staattisesta tasapainoasemasta lähtien. Laske systeemin ominaiskulmataajuus ja ominaisvärähdysaika, kun $m = 25$ kg ja $k = 1200$ N/m.

Vast. 19,6 rad/s 0,321 s



8.17 Kuvan systeemissä on $m = 6$ kg, $b = 0,3$ m, $L = 0,8$ m ja $k = 18$ kN/m. Kulmakappale AOB oletetaan massattomaksi ja nivel O kitkattomaksi. Staattisessa tasapainoasemassa jousi k ja kulmakappaleen osa AO ovat vaaka-asennossa ja kulmakappaleen osa OB pystyasennossa. Johda systeemin ominaisvärähtelyn liikeyhtälö energiaperiaatteella, kun koordinaatiksi valitaan kulmakappaleen rotaatiokulma θ , joka mitataan staattisesta tasapainoasemasta lähtien. Laske systeemin ominaiskulmataajuus, ominaistaajuus ja ominaisvärähdysaika. Vast. 20,54 rad/s 3,27 Hz 0,306 s



8.18 Oheisen kuvan mukaisessa systeemissä on tasapaksu ja homogeeninen palkki kiinnitetty homogeeniseen ympyrälevyyn, joka voi pyöriä kitkattomasti nivelen O ympäri. Palkki on staattisessa tasapainoasemassa vaaka-asennossa. Johda systeemin ominaisvärähtelyn liikeyhtälö energiaperiaatteella, kun koordinaatiksi valitaan palkin ja levyn yhteinen rotaatiokulma θ , joka mitataan staattisesta tasapainoasemasta lähtien.

Laske ominaiskulmataajuus ja ominaistaajuus, kun systeemin parametreilla on arvot $L = 1,6 \text{ m}$, $r = L/5$, $m_1 = 8 \text{ kg}$, $m_2 = 5 \text{ kg}$ ja $k = 6 \text{ kN/m}$. Vast. $45,87 \text{ rad/s}$ $7,30 \text{ Hz}$