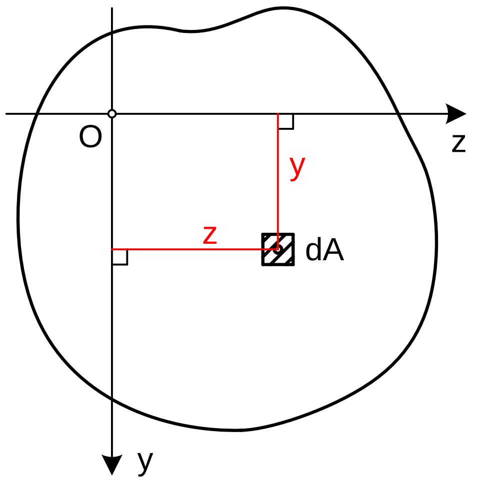
POIKKILEIKKAUKSEN GEOMETRISET SUUREET

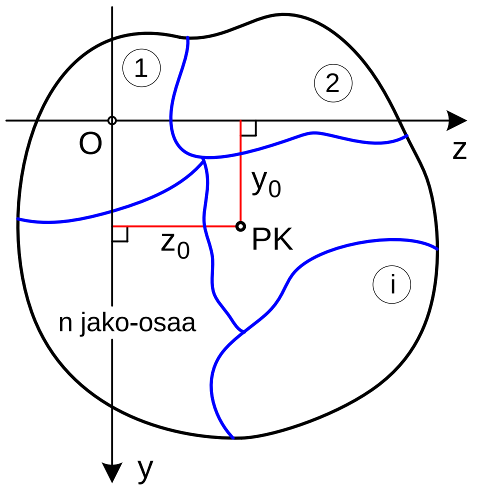


Poikkileikkauksen geometriset suureet määritellään mielivaltaisen pisteen (y,z) kohdalla olevan pinta-elementin dA avulla.
Tässä käsiteltäviä pintasuureita laskettaessa voidaan käyttää yhteenlaskuperiaatetta (myös vähennyslaskuperiaate on mahdollinen), jolloin pinta paloitellaan sellaisiin jako-osiin, joiden pintakeskiöt ja pintasuureet on annettu taulukoissa tai standardeissa.

<u>Pinta-ala</u>

Määritelmä $A = \int_A dA$

Pinta-ala on positiivinen, yksikkö on esim. mm^2.



<u>Pinta-alan laskenta:</u>

1. Yhteenlaskuperiaate $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$

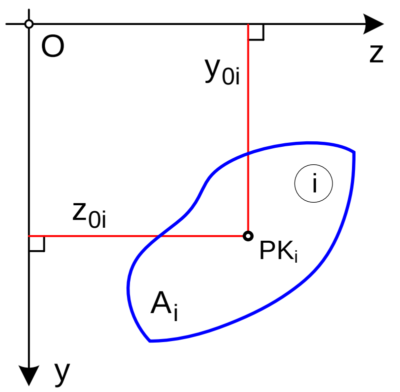
2. Osa-alueiden pinta-alat saadaan kaavoista ja standardeista.

<u>Staattinen momentti</u>

Määritelmät: y-akselin suhteen $S_y = \int_A z\,dA$

z-akselin suhteen $S_z = \int_A y\,dA$

Staattinen momentti voi olla positiivinen, negatiivinen tai nolla, yksikkö on esim. mm^3.



<u>Staattisen momentin laskenta:</u>

1. Yhteenlaskuperiaate $S_y = \sum_{i=1}^{n} S_{yi}$ $\quad S_z = \sum_{i=1}^{n} S_{zi}$

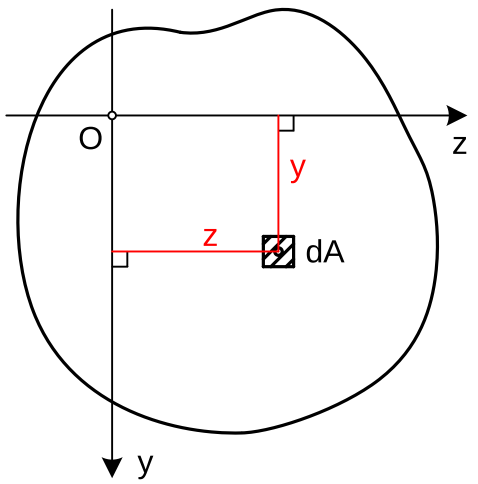
2. Tasoalueen staattinen momentti suoran suhteen on sen pinta-ala kertaa pintakeskiön etäisyys kyseisestä suorasta.

$$\boxed{S_{yi} = z_{0i} \cdot A_i \qquad S_{zi} = y_{0i} \cdot A_i}$$

<u>Pintakeskiön sijainti</u>

Koska edellä oleva tulos 2 pätee myös koko poikkileikkaukselle, pintakeskiön koordinaatit tiettyyn origoon O sijoitetussa yz-koordinaatistossa ovat:

$$y_0 = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_{zi}}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \qquad z_0 = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_{yi}}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$



Neliömomentti

Määritelmät: y-akselin suhteen $I_y = \int_A z^2 \, dA$

z-akselin suhteen $I_z = \int_A y^2 \, dA$

Neliömomentti on positiivinen, yksikkö on esim. mm^4.

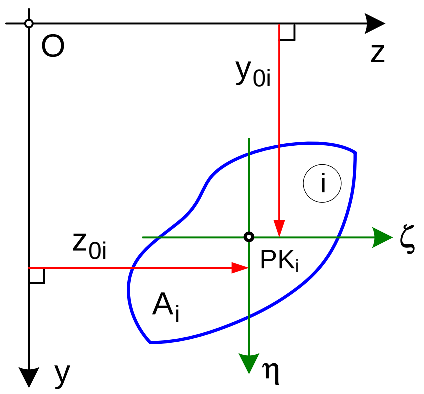
Neliömomentin laskenta:

1. Yhteenlaskuperiaate $I_y = \sum_{i=1}^{n} I_{yi}$ $\qquad I_z = \sum_{i=1}^{n} I_{zi}$

2. Osa-alueiden neliömomentit niiden $\eta\zeta$ -pinta-keskiö-akseleiden suhteen saadaan kaavoista ja standardeista

3. Steinerin sääntö:

$$I_{yi} = I_{\eta i} + z_{0i}^2 \cdot A_i \qquad I_{zi} = I_{\zeta i} + y_{0i}^2 \cdot A_i$$



Tulomomentti

Määritelmä:

yz-akseliparin suhteen $\qquad I_{yz} = \int_A yz \, dA$

Tulomomentti voi olla positiivinen, negatiivinen tai nolla, yksikkö on esim. mm^4.

Tulomomentin laskenta:

1. Yhteenlaskuperiaate $I_{yz} = \sum_{i=1}^{n} I_{yzi}$

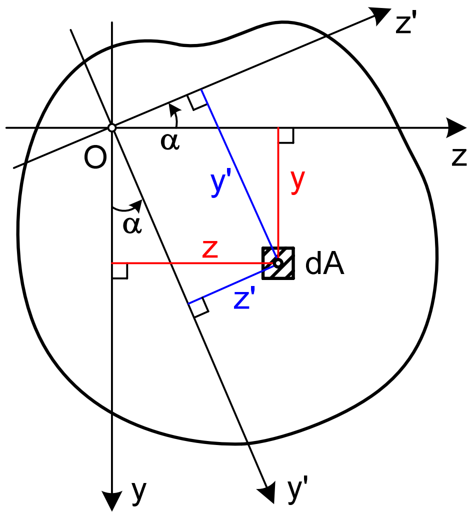
2. Symmetriasääntö: Jos η tai ζ on symmetria-akseli, on $I_{\eta\zeta i} = 0$.

3. Osa-alueiden tulomomentit niiden pintakeskiö-akseleiden suhteen saadaan kaavoista ja standardeista

4. Tulomomentin Steinerin sääntö (huomaa, että suureilla y_{0i} ja z_{0i} on etumerkit):

$$I_{yzi} = I_{\eta\zeta i} + y_{0i} \cdot z_{0i} \cdot A_i$$

PÄÄKOORDINAATISTO JA PÄÄNELIÖMOMENTIT



Kun tunnetaan tiettyyn origoon O (ei välttämättä pintakeskiö) sijoitetussa yz-koordinaatistossa neliömomentit I_y ja I_z sekä tulomomentti I_{yz}, voidaan niistä laskea vastaavat suureet kulman α (positiivinen vastapäivään) kiertyneessä $y'z'$-koordinaatistossa.

Matematiikasta tunnetaan koordinaatiston kiertokaavat pintaelementin dA koordinaateille:

$$\begin{cases} y' = y\cos\alpha + z\sin\alpha \\ z' = -y\sin\alpha + z\cos\alpha \end{cases}$$

Sijoittamalla nämä $y'z'$-koordinaatiston pintasuureiden määritelmiin, saadaan seuraavaa:

$$I_{y'} = \int_A (z')^2\, dA = \int_A (-y\sin\alpha + z\cos\alpha)^2\, dA = \int_A (y^2\sin^2\alpha - 2yz\sin\alpha\cos\alpha + z^2\cos^2\alpha)\, dA$$
$$= \cos^2\alpha\cdot\int_A z^2\, dA + \sin^2\alpha\cdot\int_A y^2\, dA - 2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\int_A yz\, dA$$

$$I_{z'} = \int_A (y')^2\, dA = \int_A (y\cos\alpha + z\sin\alpha)^2\, dA = \int_A (y^2\cos^2\alpha + 2yz\sin\alpha\cos\alpha + z^2\sin^2\alpha)\, dA$$
$$= \sin^2\alpha\cdot\int_A z^2\, dA + \cos^2\alpha\cdot\int_A y^2\, dA + 2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\int_A yz\, dA$$

$$I_{y'z'} = \int_A y'z'\, dA = \int_A (y\cos\alpha + z\sin\alpha)(-y\sin\alpha + z\cos\alpha)\, dA$$
$$= \int_A [(z^2 - y^2)\sin\alpha\cos\alpha + yz(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)]\, dA$$
$$= \sin\alpha\cos\alpha\int_A (z^2 - y^2)\, dA + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\int_A yz\, dA$$

Saadaan siis seuraavat neliömomenttien ja tulomomentin <u>kiertokaavat</u>:

$$\boxed{\begin{aligned} I_{y'} &= I_y\cos^2\alpha + I_z\sin^2\alpha - 2\, I_{yz}\sin\alpha\cos\alpha \\ I_{z'} &= I_y\sin^2\alpha + I_z\cos^2\alpha + 2\, I_{yz}\sin\alpha\cos\alpha \\ I_{y'z'} &= (I_y - I_z)\sin\alpha\cos\alpha + I_{yz}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \end{aligned}}$$

Pääkoordinaatistossa on määritelmän mukaan tulomomentti nolla. Jotta nähtäisiin, millä kulman α arvolla tulomomentti on nolla ja neliömomentin eräitä ominaisuuksia, kehitetään kiertokaavoja vielä eteenpäin.

Trigonometrian mukaan on

$$\sin^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) \qquad \cos^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha) \qquad \sin\alpha\cos\alpha = \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha$$

Sijoittamalla nämä suureiden $I_{y'}$ ja $I_{y'z'}$ kaavoihin saadaan tulokset

$$I_{y'} = \tfrac{1}{2}(I_y + I_z) + \tfrac{1}{2}(I_y - I_z)\cos 2\alpha - I_{yz}\sin 2\alpha$$
$$I_{y'z'} = \tfrac{1}{2}(I_y - I_z)\sin 2\alpha + I_{yz}\cos 2\alpha$$

Merkitään $\boxed{I_k = \tfrac{1}{2}(I_y + I_z)}$ ja otetaan käyttöön vakiot $R \geq 0$ ja φ, siten, että

$$R\cos 2\varphi = \tfrac{1}{2}(I_y - I_z) \qquad R\sin 2\varphi = -I_{yz}$$

joista ratkaisemalla saadaan

$$\boxed{R = \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \qquad \tan 2\varphi = \frac{-2\,I_{yz}}{I_y - I_z} \qquad I_{yz}\sin 2\varphi \leq 0} \qquad \text{(a)}$$

Vakioiden R ja φ avulla saadaan suureiden $I_{y'}$ ja $I_{y'z'}$ kaavat muotoon

$$I_{y'} = I_k + R\cos 2\varphi\cos 2\alpha + R\sin 2\varphi\sin 2\alpha$$
$$I_{y'z'} = R\cos 2\varphi\sin 2\alpha - R\sin 2\varphi\cos 2\alpha$$

joista seuraa trigonometrian mukaan tulokset

$$I_{y'} = I_k + R\cos(2\alpha - 2\varphi) \qquad I_{y'z'} = R\sin(2\alpha - 2\varphi) \qquad \text{(b)}$$

Pääkoordinaatistossa on $I_{y'z'} = 0 \;\Rightarrow\; \sin(2\alpha - 2\varphi) = 0 \;\Rightarrow\; 2\alpha - 2\varphi = 0$ tai π

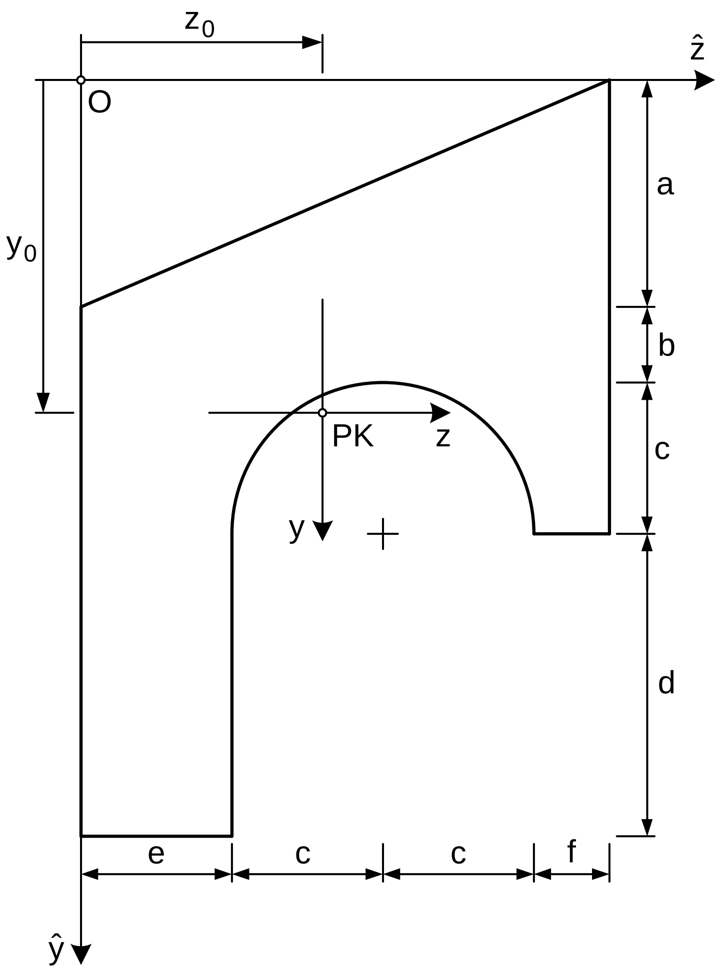
Pääakselien 1 ja 2 suuntakulmat ovat näin ollen $\boxed{\alpha_1 = \varphi \qquad \alpha_2 = \varphi + \pi/2}$

Pääneliömomenttien lausekkeet saadaan sijoittamalla pääakselien suuntakulmat neliömomentin $I_{y'}$ lausekkeeseen, jolloin seuraa

$$\boxed{I_1 = I_k + R \qquad I_2 = I_k - R}$$

Huomattakoon erityisesti, että neliömomenttia I_1 vastaava kulma φ toteuttaa kaavan (a) ehdon $I_{yz}\sin 2\varphi \leq 0$. Kaavasta (b) nähdään, että I_1 ja I_2 ovat neliömomentin ääriarvot kierrettäessä koordinaatistoa origon O ympäri eli

$$\boxed{I_1 = I_{max} \qquad I_2 = I_{min}}$$



Esimerkki
Määritä kuvan mukaisen poikkileikkauksen a) pintakeskiön PK sijainti (y_0, z_0) kuvan $\hat{y}\hat{z}$-koordinaatistossa, b) neliömomentit I_y ja I_z sekä tulomomentti I_{yz} pintakeskiöön sijoitetussa yz-koordinaatistossa ja c) pääkoordinaatiston suuntakulma φ mitattuna y-akselista vastapäivään sekä pääneliömomentit I_1 ja I_2. Poikkileikkauksen mitat ovat $a = 30\,\text{mm}$, $b = 10\,\text{mm}$, $c = 20\,\text{mm}$, $d = 40\,\text{mm}$, $e = 20\,\text{mm}$ ja $f = 10\,\text{mm}$.

Ratkaisu
Käytetään seuraavalla sivulla olevan kuvan mukaista jakoa, jossa jako-osa 1 on suorakulmio ja osat 2, 3 ja 4 siitä vähennettävät suorakulmio, puoliympyrä ja kolmio. Merkitään

$$g = a + b + c + d \qquad i = \frac{4c}{3\pi}$$

$$h = e + 2c + f \qquad j = 2c + f$$

Osien pinta-alat ja pintakeskiöiden koordinaatit $\hat{y}\hat{z}$-koordinaatistossa ovat:

$$A_1 = hg \quad y_{01} = \frac{g}{2} \quad z_{01} = \frac{h}{2} \quad \Rightarrow \quad A_1 = 70\,\text{cm}^2 \quad y_{01} = 5\,\text{cm} \quad z_{01} = 3{,}5\,\text{cm}$$

$$A_2 = jd \quad y_{02} = a + b + c + \frac{d}{2} \quad z_{02} = e + \frac{j}{2} \quad \Rightarrow \quad A_2 = 20\,\text{cm}^2 \quad y_{02} = 8\,\text{cm} \quad z_{02} = 4{,}5\,\text{cm}$$

$$A_3 = \frac{\pi c^2}{2} \quad y_{03} = a + b + c - i \quad z_{03} = e + c \quad \Rightarrow \quad A_3 \approx 6{,}283\,\text{cm}^2 \quad y_{03} \approx 5{,}151\,\text{cm} \quad z_{03} = 4\,\text{cm}$$

$$A_4 = \frac{ha}{2} \quad y_{04} = \frac{a}{3} \quad z_{04} = \frac{h}{3} \quad \Rightarrow \quad A_4 = 10{,}5\,\text{cm}^2 \quad y_{04} = 1{,}0\,\text{cm} \quad z_{04} \approx 2{,}333\,\text{cm}$$

Poikkileikkauksen pinta-ala ja staattiset momentit $\hat{z}$- ja -$\hat{y}$-akselin suhteen ovat:

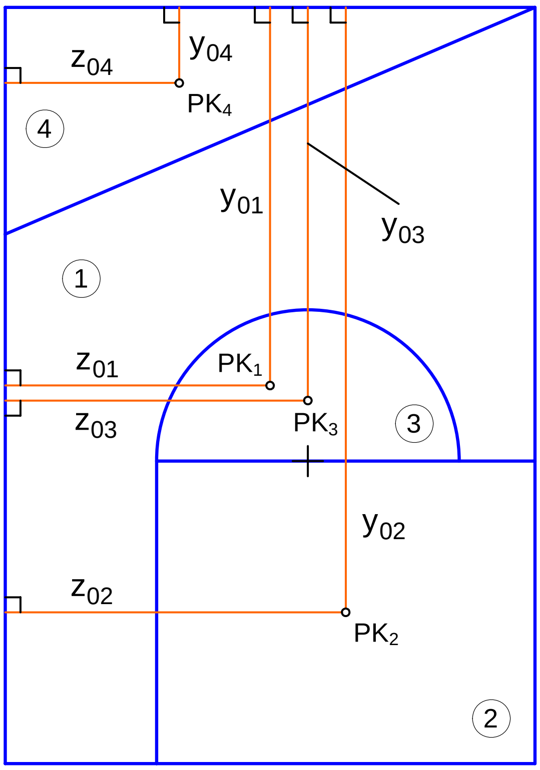
$$A = A_1 - A_2 - A_3 - A_4 \qquad \Rightarrow \qquad A \approx 33{,}217\,\text{cm}^2$$

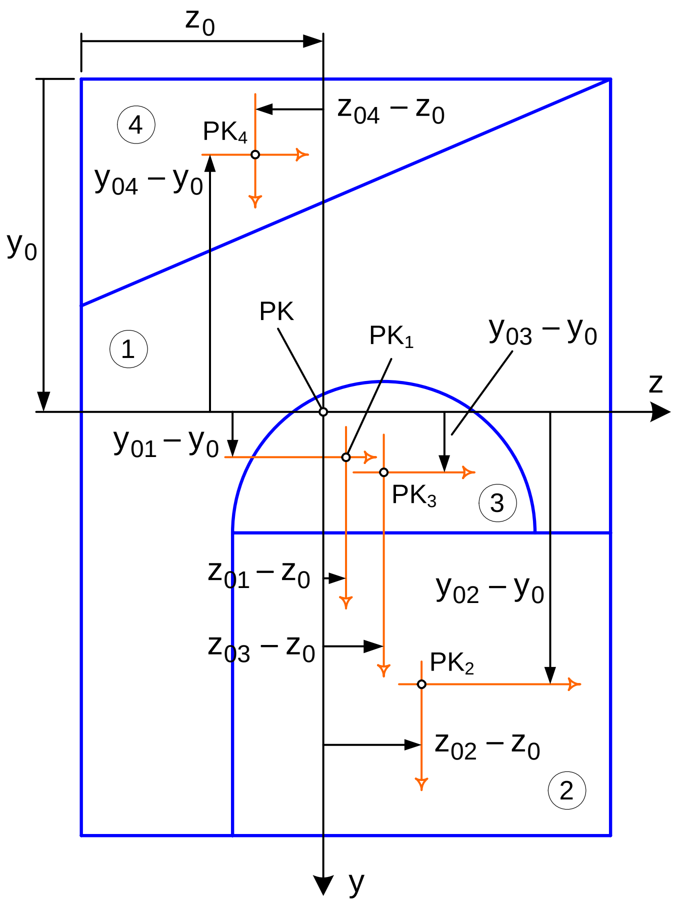
$$S_{\hat{z}} = y_{01}A_1 - y_{02}A_2 - y_{03}A_3 - y_{04}A_4 \qquad \Rightarrow \qquad S_{\hat{z}} \approx 147{,}134\,\text{cm}^3$$

$$S_{\hat{y}} = z_{01}A_1 - z_{02}A_2 - z_{03}A_3 - z_{04}A_4 \qquad \Rightarrow \qquad S_{\hat{y}} \approx 105{,}367\,\text{cm}^3$$

Pintakeskiön PK koordinaatit ovat:

$$y_0 = S_{\hat{z}} / A \qquad z_0 = S_{\hat{y}} / A \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{y_0 \approx 4{,}430\,\text{cm} \qquad z_0 = 3{,}172\,\text{cm}}$$





Neliömomentit z- ja y-akselin suhteen saadaan taulukkokaavojen ja Steinerin säännön avulla:

$$I_z = \frac{hg^3}{12} + (y_{01} - y_0)^2 A_1 - \frac{jd^3}{12} - (y_{02} - y_0)^2 A_2 - \frac{9\pi^2 - 64}{72\pi} c^4 - (y_{03} - y_0)^2 A_3 +$$
$$- \frac{ha^3}{36} - (y_{04} - y_0)^2 A_4$$

$$I_y = \frac{gh^3}{12} + (z_{01} - z_0)^2 A_1 - \frac{dj^3}{12} - (z_{02} - z_0)^2 A_2 - \frac{\pi c^4}{8} - (z_{03} - z_0)^2 A_3 +$$
$$- \frac{ah^3}{36} - (z_{04} - z_0)^2 A_4$$

$$I_{yz} = 0 + (y_{01} - y_0)(z_{01} - z_0) A_1 - 0 - (y_{02} - y_0)(z_{02} - z_0) A_2 +$$
$$- 0 - (y_{03} - y_0)(z_{03} - z_0) A_3 - \left(-\frac{a^2 h^2}{72}\right) - (y_{04} - y_0)(z_{04} - z_0) A_4$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_z \approx 190{,}706\,\text{cm}^4 \qquad I_y \approx 169{,}866\,\text{cm}^4 \qquad I_{yz} \approx -109{,}563\,\text{cm}^4}$$

Pääkoordinaatiston suuntakulma:

$$\tan 2\varphi = \frac{-2I_{yz}}{I_y - I_z} \approx -10{,}515 \quad \Rightarrow \quad 2\varphi \approx -84{,}567^\circ \quad \text{tai} \quad 2\varphi \approx 95{,}433^\circ$$

$$I_{yz}\sin 2\varphi \le 0 \quad \Rightarrow \quad 2\varphi \approx 95{,}433^\circ \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi \approx 47{,}716^\circ}$$

Pääneliömomentit:

$$I_k = \frac{1}{2}(I_y + I_z) \quad \Rightarrow \quad I_k \approx 180{,}286\,\text{cm}^4$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \quad \Rightarrow \quad R \approx 110{,}058\,\text{cm}^4$$

$$I_1 = I_k + R \qquad I_2 = I_k - R \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_1 \approx 290{,}344\,\text{cm}^4 \qquad I_2 = 70{,}228\,\text{cm}^4}$$