LUJUUSHYPOTEESIT, YLEISTÄ

Lujuushypoteesin tarkoitus:

Vastataan kysymykseen kestääkö materiaali tietyn yleisen jännitystilan ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$) vaurioitumatta. Tyypillisiä materiaalivaurioita ovat **myötö** ja **murtuminen**.

Käytettävissä olevat materiaalivakiot:

Vetokokeesta saadaan **vetomyötöraja** R_e ja **vetomurtolujuus** R_m.

Puristuskokeesta saadaan **puristusmyötöraja** (tyssäysraja) R_{-e} ja **puristusmurtolujuus** R_{-m}.

Vääntökokeesta saadaan **leikkausmyötöraja** τ_s ja **-murtolujuus** τ_B.

Usein tunnetaan vain vetokokeesta saatavat materiaalivakiot.

Varmuusluvun yleinen määritelmä:

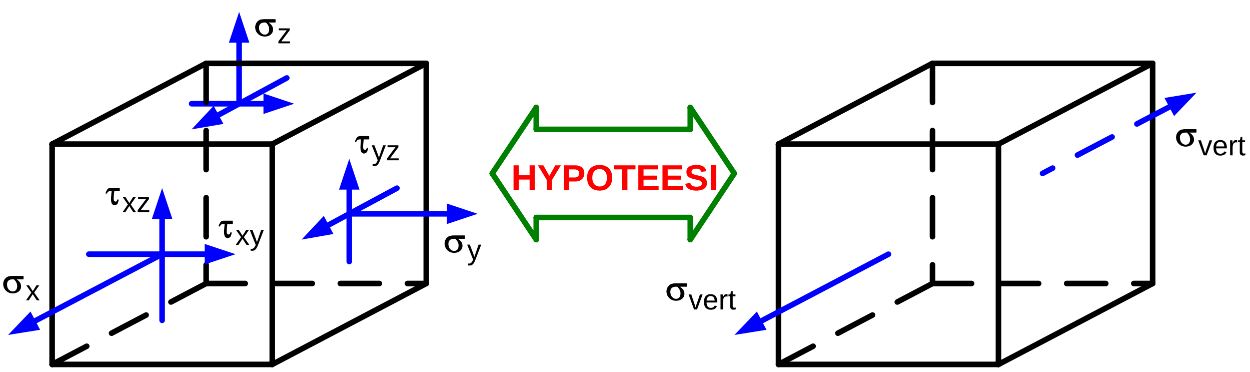
Jännitystilan varmuusluvulla n tietyn materiaalivaurion suhteen tarkoitetaan sitä positiivista lukua, jolla jännitystila on kerrottava, jotta siitä tulee kyseistä vauriota vastaava rajajännitystila. Jännitystilan kertominen luvulla tarkoittaa sitä, että jokainen jännityskomponentti kerrotaan erikseen tällä luvulla.

Vertailujännityksen määritelmä:

Yleistä jännitystilaa vastaavalla vertailujännityksellä σ_{vert} tarkoitetaan sen aksiaalisen vetotilan normaalijännitystä, jolla on sama varmuusluku kyseessä olevan materiaalivaurion suhteen.

Vertailujännityksen lausekkeen määritys:

Tiettyyn lujuushypoteesiin liittyvä vertailujännityksen lauseke saadaan selville merkitsemällä vauriokriteerinä oleva suure yhtä suureksi yleisessä jännitystilassa ja aksiaalisessa vetotilassa (kuva). Maksimileikkausjännityshypoteesissa (MLJH) vaaditaan, että kuvan elementeillä on sama τ_{max}. Vakiovääristymisenergiahypoteesissa (VVEH) vaaditaan, että elementteihin on sitoutunut sama vääristymisenergiatiheys.



MPJH (Rankine)

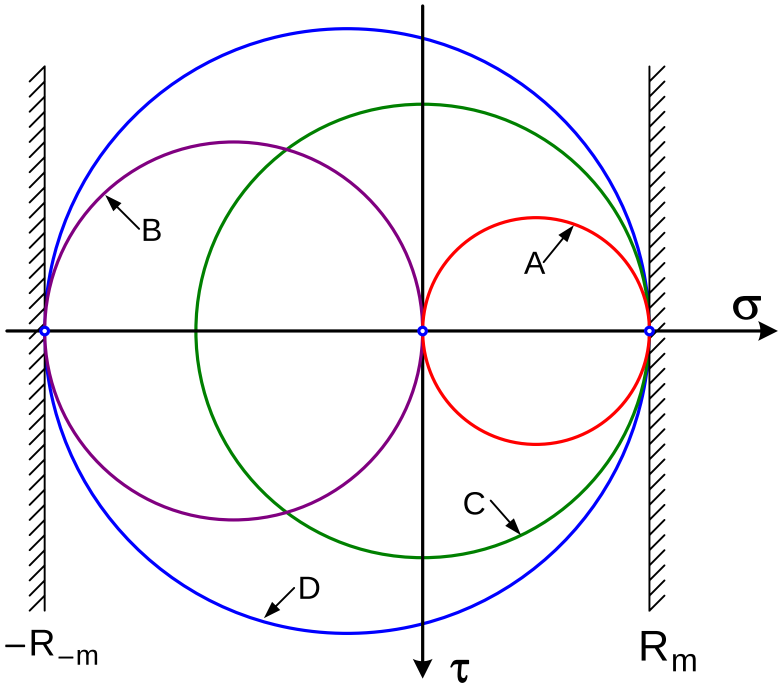
Sopii parhaiten **hauraan materiaalin murtumisen** käsittelyyn.

VAURIOKRITEERI:
Materiaali murtuu, jos suurin vetopääjännitys saavuttaa materiaalin vetomurtolujuuden tai suurin puristuspääjännitysitseisarvo saavuttaa puristusmurtolujuuden eli

$$\boxed{\sigma_I = R_m} \quad \text{tai} \quad \boxed{|\sigma_{III}| = R_{-m}}$$

Vertailujännitystä ei tämän hypoteesin kohdalla tarvita. Varmuusluku voidaan määrittää suoraan vertaamalla pääjännityksiä murtolujuuksiin.

Lujuushypoteesia MPJH voidaan havainnollistaa Mohrin ympyrän avulla kuvan mukaisesti. Hypoteesin mukaan vain ne jännitystilat ovat luvallisia, joiden pääympyrä sijoittuu murtolujuuksien mukaisten pystysuorien rajojen välille



Kuvassa on muutaman tapauksen vauriota vastaava ympyrä:

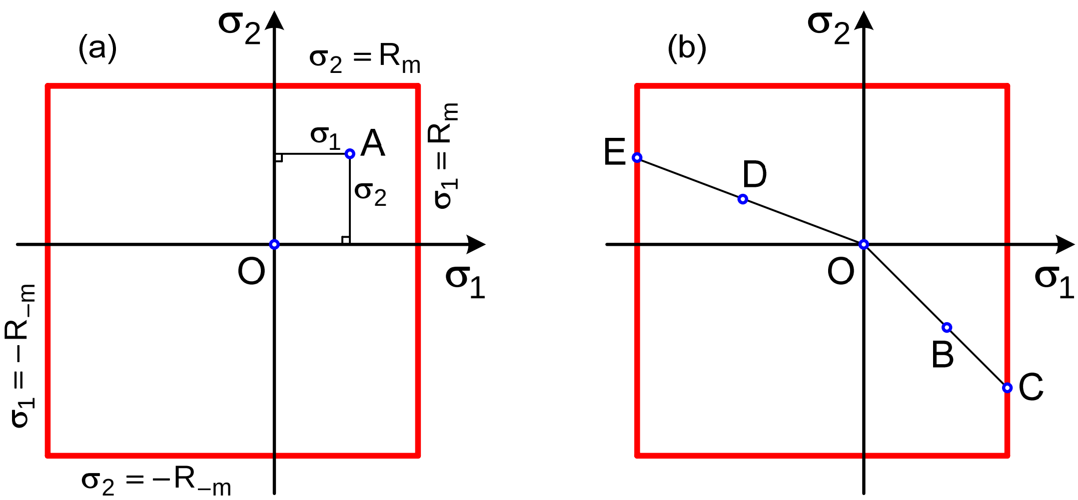
A vastaa vetotapausta, jolloin $\sigma_I = R_m$, $\sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$

B vastaa puristusta, jolloin $\sigma_I = \sigma_{II} = 0$, $\sigma_{III} = -R_{-m}$

C vastaa vääntöä, jolloin $\sigma_I = R_m$, $\sigma_{II} = 0$, $\sigma_{III} = -R_m$

D vastaa tilannetta, jossa $\sigma_I = R_m$, $\sigma_{III} = -R_{-m}$

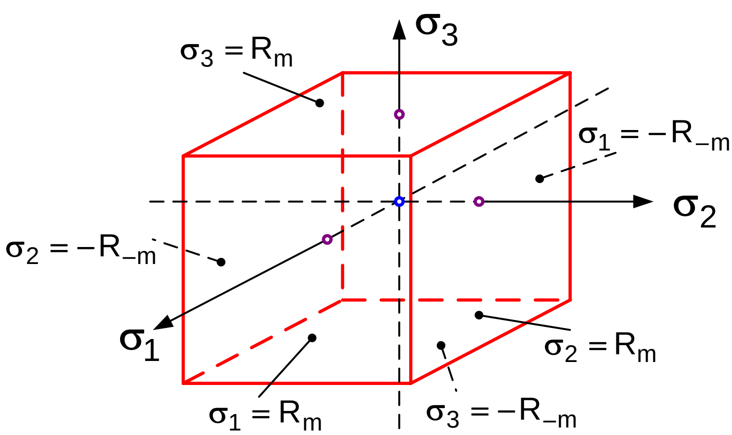
Lujuushypoteesia kuvaa **tasojännitystilassa Beckerin käyrä**. Se esitetään koordinaatistossa, jonka akseleilla mitataan pääjännityksiä σ_1 ja σ_2. Käyrä vastaa vaurioon johtavia pääjännitysyhdistelmiä. Hypoteesia MPJH vastaava Beckerin käyrä on kuvan (a) origon suhteen epäkeskeisen neliön piiri, jonka murtolujuudet määräävät. Tarkasteltava pääjännitysyhdistelmä (σ_1, σ_2) on luvallinen, jos sitä vastaava piste A on Beckerin käyrän sisäpuolella.



Beckerin käyrää voidaan käyttää myös **varmuusluvun määritykseen**. Kuvassa (b) on kahta luvallista pistettä B ja D vastaavat kuormitusviivat OBC ja ODE, jotka kuvaavat varmuusluvun määritelmän mukaista jännitysten kasvua. Vastaavat varmuusluvut ovat näin ollen $n_B = OC/OB$ ja $n_D = OE/OD$.

Yleisessä jännitystilassa lujuushypoteesia kuvaa **Beckerin pinta**, joka esitetään koordinaatistossa, jonka akseleilla mitataan pääjännityksiä σ_1, σ_2 ja σ_3. Pinta kuvaa vaurioon johtavia pääjännitysyhdistelmiä.

Hypoteesia MPJH vastaava Beckerin pinta on oheisen kuvan mukainen origon suhteen epäkeskeisesti sijoittuva kuution pinta, jonka murtolujuudet määräävät. Tarkasteltava pääjännitysyhdistelmä $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ on luvallinen, jos sitä vastaava piste A on Beckerin pinnan sisäpuolella.



Beckerin pintaa on hankala käyttää varmuusluvun määritykseen, joten sen käyttö rajoittuu hypoteesin havainnollistamiseen.

MLJH (Coulomb, Tresca, Guest)

Sopii parhaiten **sitkeän materiaalin myötämisen** käsittelyyn.

VAURIOKRITEERI:
Materiaali myötää, jos suurin leikkausjännitys saavuttaa leikkausmyötörajan.

$$\boxed{\tau_{max} = \tau_s}$$

Jos leikkausmyötöraja τ_s tunnetaan, hypoteesia voidaan käyttää suoraan vauriokriteerin avulla.

Vertailujännityksen lauseke saadaan merkitsemällä yleisen jännitystilan ja aksiaalisen vetotilan absoluuttinen τ_{max} yhtä suuriksi eli

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \frac{\sigma_{vert} - 0}{2} \quad \Rightarrow$$

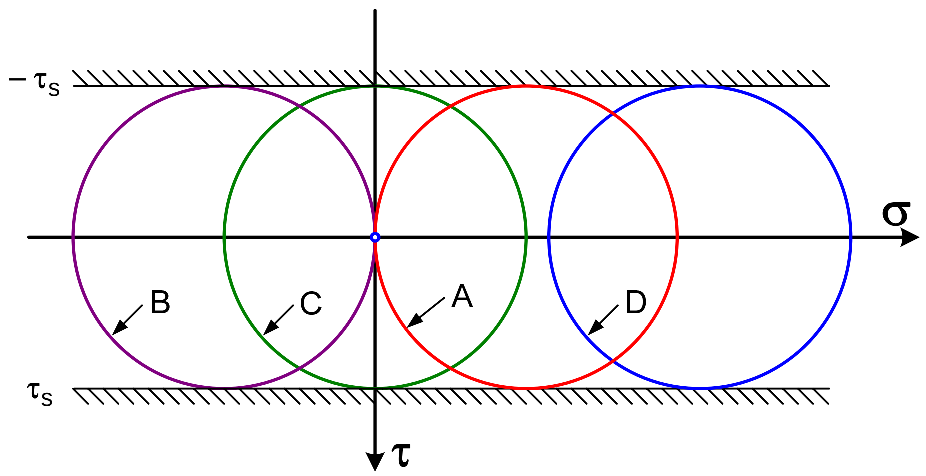
$$\boxed{\sigma_{vert} = \sigma_I - \sigma_{III} = \max\left(|\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|, |\sigma_1 - \sigma_2| \right)}$$

Vertailujännitys tasojännitystilassa $(\sigma_3 = 0)$

$$\boxed{\sigma_{vert} = \sigma_I - \sigma_{III} = \max\left(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2| \right)}$$

Jännitystä σ_{vert} verrataan **vetomyötörajaan** R_e, joten sitä käytettäessä ei leikkausmyötörajaa tarvitse tuntea.

Lujuushypoteesia MLJH voidaan havainnollistaa Mohrin ympyrän avulla kuvan mukaisesti.

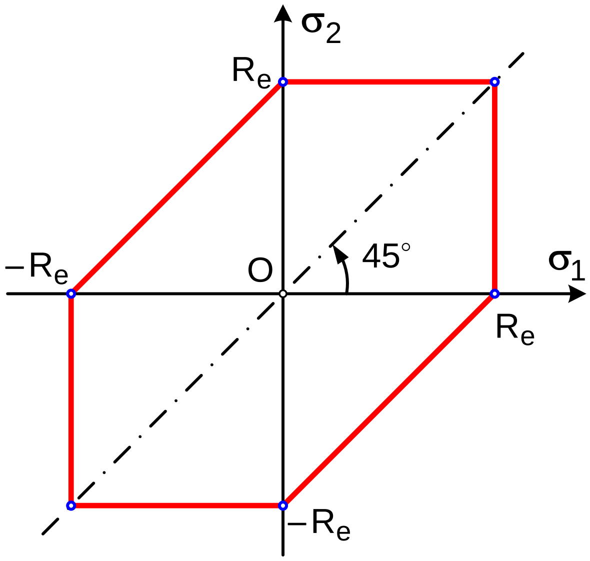


MLJH:n mukaan vain ne jännitystilat ovat luvallisia, joiden pääympyrä sijoittuu leikkausmyötörajan mukaisten vaakasuorien rajojen. Kuvassa A on vedon, B puristuksen ja C väännön vauriota vastaava pääympyrä. Pääympyrä D vastaa tapausta, jossa kaikki pääjännitykset ovat vetoa.

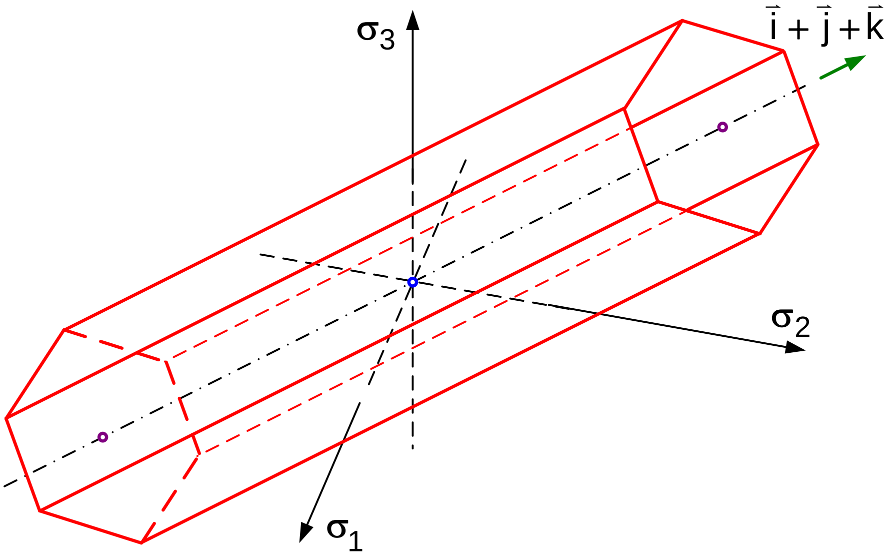
Tasojännitystilassa hypoteesia MLJH vastaava **Beckerin käyrän yhtälö** on

$$\boxed{\max\left(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1-\sigma_2|\right)=R_e}$$

Sen kuvaajaksi tulee kuvan mukainen kuusikulmio. Luvallisia pääjännitysyhdistelmiä vastaavat pisteet sijaitsevat kuusikulmion sisäpuolella.



Voidaan osoittaa, että **yleisessä jännitystilassa Beckerin pinta** on äärettömän pitkä sylinteriputki, jonka poikkileikkaus on säännöllinen kuusikulmio ja akseli vektorin $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ suuntainen. Luvallisia pääjännitysyhdistelmiä vastaavat pisteet sijaitsevat putken sisäpuolella. Putki leikkaa $\sigma_1\sigma_2-$tason pitkin edellä olevaa Beckerin käyrää.



VVEH (Huber, Hencky, von Mises)

Sopii parhaiten **sitkeän materiaalin myötämisen** käsittelyyn.

VAURIOKRITEERI:
Materiaali myötää, jos **vääristymisenergiatiheys** saavuttaa kriittisen arvon.

$$\boxed{U_{0D} = U_{0D}^{kr}}$$

Vääristymisenergiatiheyden lauseke yleisessä jännitystilassa on

$$U_{0D} = \frac{1}{12G}\left[\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + \left(\sigma_z - \sigma_x\right)^2\right] + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2\right)$$

Aksiaalisessa vetotilassa sen lausekkeeksi on $U_{0D} = \frac{1}{12G}\left[\sigma_{vert}^2 + \sigma_{vert}^2\right]$

Vertailujännityksen lauseke saadaan merkitsemällä yleisen jännitystilan ja aksiaalisen vetotilan U_{0D} yhtä suuriksi ja ratkaisemalla sitten σ_{vert}. $\Rightarrow$

$$\boxed{\sigma_{vert} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_x\sigma_z + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}}$$

Mikäli **pääjännitykset tunnetaan**, menee edellä oleva kaava muotoon

$$\boxed{\sigma_{vert} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3}}$$

Tasojännitystilassa on $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_3 = 0$, mistä seuraa tulos

$$\boxed{\sigma_{vert} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}}$$

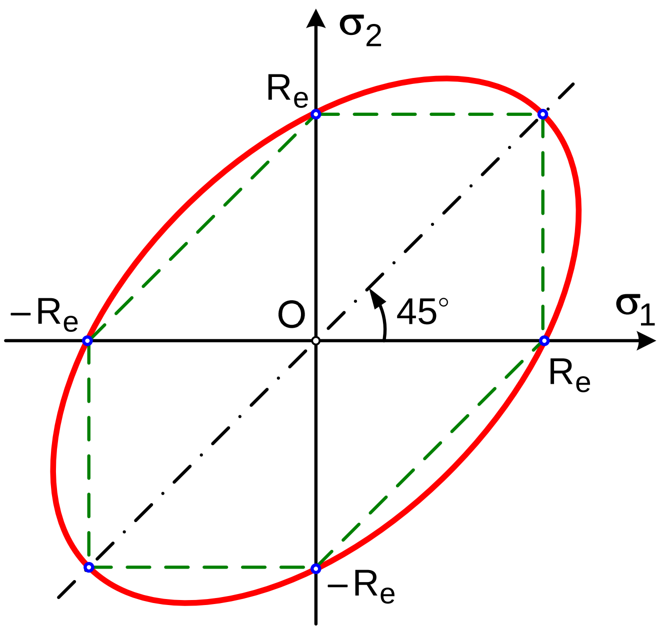
Kannattimen tapauksessa jännitykset ovat $\sigma_y = 0 \quad \sigma_x = \sigma \quad \tau_{xy} = \tau$, joten

$$\boxed{\sigma_{vert} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}}$$

Hypoteesia VVEH vastaavan Beckerin käyrän yhtälö on

$$\boxed{\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2=R_e^2}$$

Sen kuvaajaksi tulee kuvan mukainen ellipsi. Kuvaan on piirretty myös katkoviivoilla hypoteesin MLJH mukainen kuusikulmio.



Voidaan osoittaa, että lujuushypoteesia VVEH vastaava Beckerin pinta on äärettömän pitkä sylinteriputki, jonka poikkileikkaus on ympyrä ja akseli vektorin $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ suuntainen. Se on hypoteesin MLJH kuusikulmioputken ympäri piirretty sylinteri. Putki leikkaa $\sigma_1\sigma_2-$tason pitkin edellä olevaa Beckerin ellipsiä.