II.6. Laaditaan Mathcad-dokumentti paksuseinäisen sylinteriputken jännityksien ja säteittäissiirtymän tutkimiseen. Lähtötietoina annetaan dokumentin alussa kimmomoduuli E, Poissonin vakio ν, sisäsäde a, ulkosäde b, sisäpaine p_s, ulkopaine p_u sekä tieto siitä, onko putken pituuden muutos estetty vai ei.

Dokumentti tekee lähtötiedot saatuaan seuraavaa:

a) Piirtää samaan kuvaan jännitysten σ_r, σ_θ ja σ_z kuvaajat säteen r funktiona putken paksuuden matkalta.

b) Piirtää samaan kuvaan vertailujännitysten σ_{vert}/MLJH ja σ_{vert}/VVEH kuvaajat säteen r funktiona putken paksuuden matkalta ja etsii niiden maksimiarvot.

c) Piirtää säteittäissiirtymän u_r kuvaajan säteen r funktiona putken paksuuden matkalta ja etsii sen maksimiarvon.

Ratkaisu:

Lähtötiedot: $\quad MPa := \dfrac{N}{mm^2} \qquad E := 210 \cdot 10^3 \cdot MPa \qquad \nu := 0.3$

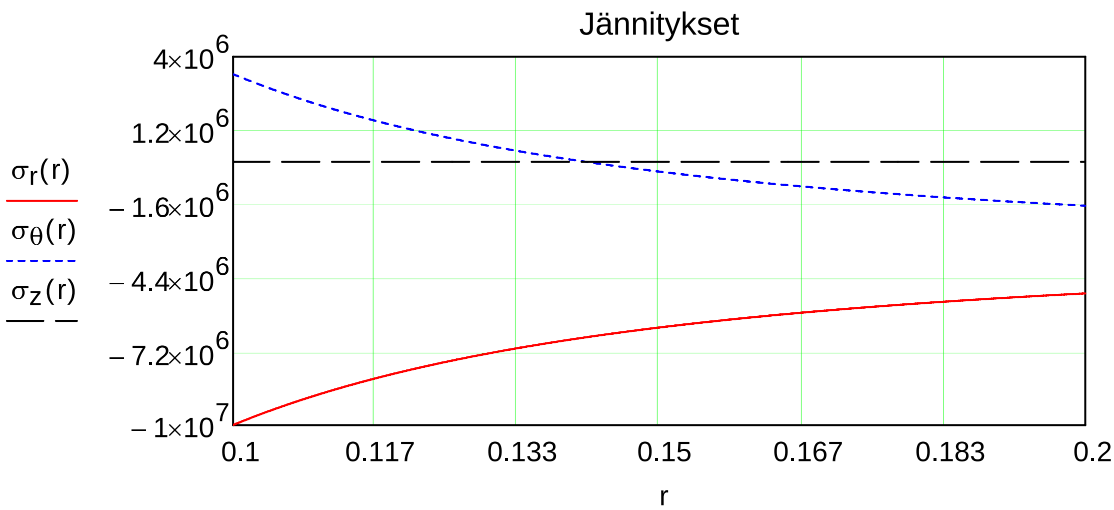
$a := 100 \cdot mm \qquad b := 200 \cdot mm \qquad p_s := 10 \cdot MPa \qquad p_u := 5 \cdot MPa$

Pituudenmuutos vapaa: $pm \neq 0$ Pituudenmuutos estetty: $pm = 0$ $\quad pm := 1$

Jännityskomponenttien lausekkeet:

$$\sigma_r(r) := \frac{a^2 \cdot p_s - b^2 \cdot p_u}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot (p_s - p_u)}{r^2 \cdot (b^2 - a^2)} \qquad \sigma_\theta(r) := \frac{a^2 \cdot p_s - b^2 \cdot p_u}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot (p_s - p_u)}{r^2 \cdot (b^2 - a^2)}$$

$$\sigma_z(r) := \text{if}\left(pm = 0, 2 \cdot \nu \cdot \frac{a^2 \cdot p_s - b^2 \cdot p_u}{b^2 - a^2}, 0 \cdot MPa \right)$$

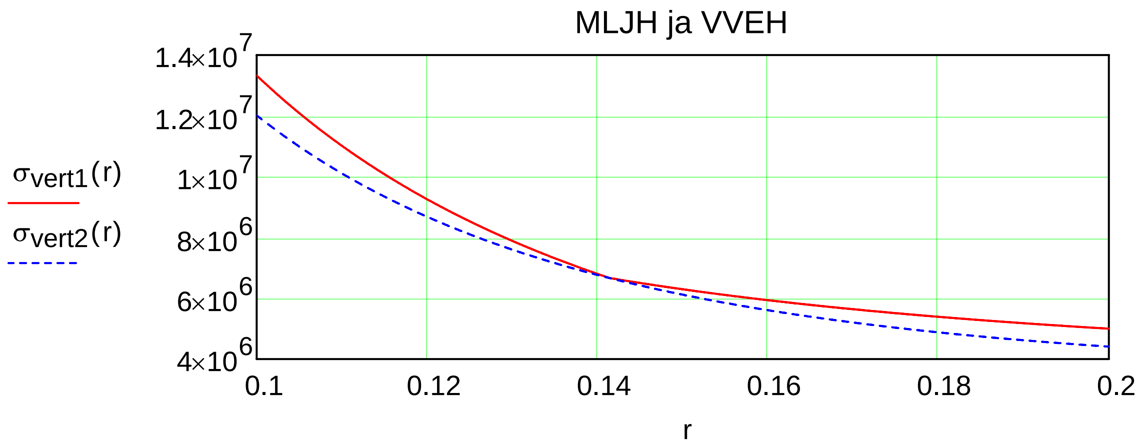


Vertailujännitykset:

MLJH: $\sigma_I(r) := \max(\sigma_r(r), \sigma_\theta(r), \sigma_z(r))$ $\sigma_{III}(r) := \min(\sigma_r(r), \sigma_\theta(r), \sigma_z(r))$

$\sigma_{vert1}(r) := \sigma_I(r) - \sigma_{III}(r)$

VVEH: $\sigma_{vert2}(r) := \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left[(\sigma_\theta(r) - \sigma_r(r))^2 + (\sigma_r(r) - \sigma_z(r))^2 + (\sigma_\theta(r) - \sigma_z(r))^2\right]}$



Maksimiarvot:

MLJH: $r_1 := \frac{a+b}{2}$ (alkuarvaus)

Given $r_1 \geq a$ $r_1 \leq b$ $p := \text{Maximize}(\sigma_{vert1}, r_1)$

$p = 0.1\,\text{m}$ $\sigma_{vert1}(p) = 13.333\,\text{MPa}$

VVEH: $r_1 := \frac{a+b}{2}$ (alkuarvaus)

Given $r_1 \geq a$ $r_1 \leq b$ $p := \text{Maximize}(\sigma_{vert2}, r_1)$

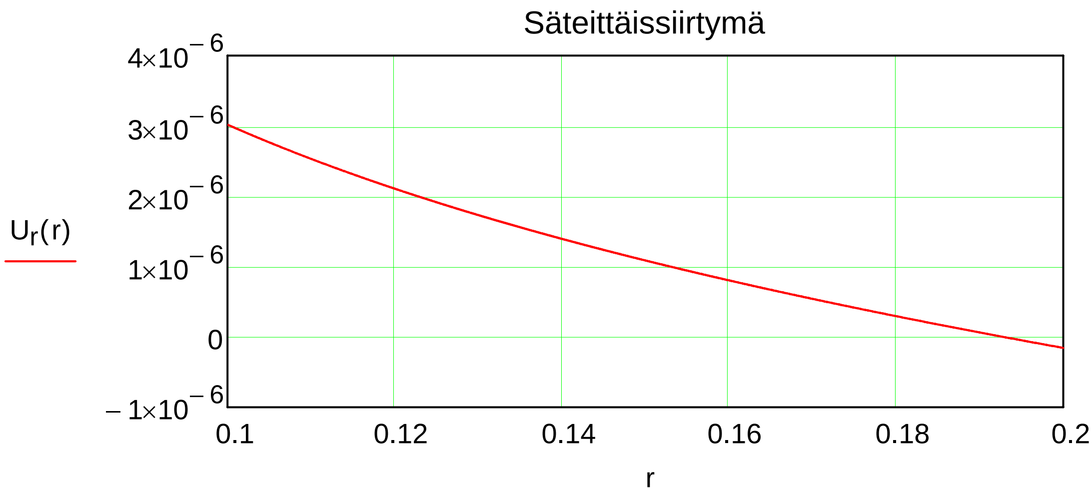
$p = 0.1\,\text{m}$ $\sigma_{vert2}(p) = 12.019\,\text{MPa}$

Säteittäissiirtymä:

$$u_r(r) := \frac{1}{E}\cdot\left[(1-\nu)\cdot\frac{a^2\cdot p_s - b^2\cdot p_u}{b^2-a^2}\cdot r + (1+\nu)\cdot\frac{a^2\cdot b^2\cdot(p_s-p_u)}{r\cdot(b^2-a^2)}\right]$$

$$u_{r1}(r) := \frac{1+\nu}{E}\cdot\left[(1-2\cdot\nu)\cdot\frac{a^2\cdot p_s - b^2\cdot p_u}{b^2-a^2}\cdot r + \frac{a^2\cdot b^2\cdot(p_s-p_u)}{r\cdot(b^2-a^2)}\right]$$

$$U_r(r) := \mathrm{if}\left(pm = 0, u_{r1}(r), u_r(r)\right)$$



Maksimiarvo: $r_1 := \frac{a+b}{2}$ (alkuarvaus)

Given $r_1 \geq a$ $r_1 \leq b$ $p := \mathrm{Maximize}(U_r, r_1)$

$p = 0.1\,m$ $U_r(p) = 0.003016\,mm$