6 NUMEERINEN INTEGROINTI

6.1 Johdanto

Elementin jäykkyysmatriisi $[k]$ ja ekvivalenttinen solmukuormitusvektori $\{r\}$ ovat

$$\boxed{[k] = \int_{V_e} [B]^T [E][B]\, dV} \tag{6.1}$$

$$\boxed{\{r\} = -\int_{V_e} [B]^T \{\sigma_0\}\, dV + \int_{V_e} [N]^T \{f\} dV + \int_{A_e} [N]^T \{p\} dV} \tag{6.2}$$

Matriisin ja vektorin integrointi tarkoittaa sitä, että niiden alkiot integroidaan erikseen. Yksinkertaisissa tapauksissa integrointi voidaan tehdä analyyttisesti, mutta yleensä on käytettävä numeerista integrointia. Menetelmiä on useita, mutta parhaiten elementtimenetelmään sopivat Gaussin ja Hammerin integroinnit, joten käsitellään vain niitä.

Jos integroitava funktio on vakio, määrätyn integraalin arvo saadaan kertomalla tätä vakiota integrointialueen mitalla, joka on integrointialueen tilavuus, pinta-ala tai pituus sen mukaan, kuinka moniulotteinen integraali on. Tällöin saadaan tarkka ratkaisu, jos mitta tunnetaan tarkasti. Jos integrandi ei ole vakio, saadaan numeerisella integroinnilla likimääräinen tulos. Syntyvää likimääräisyyttä sanotaan integrointivirheeksi ja sen suuruus riippuu käytetystä menetelmästä.

Numeeristen integrointimenetelmien ajatuksena on yleensä muuttaa integraali äärelliseksi painotetuksi summaksi, jolloin integrandin arvoja otetaan sopivasti valituissa integrointipisteissä ja näistä lasketaan painotettu keskiarvo.

6.2 Yksiulotteinen Gauss-Legendre integrointi

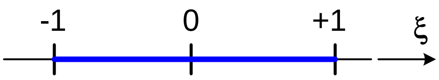
Määrätty yksiulotteinen integraali on muotoa

$$I = \int_a^b g(x)\, dx \tag{6.3}$$

Sijoituksella

$$x = \frac{1}{2}(1-\xi)a + \frac{1}{2}(1+\xi)b \qquad \Rightarrow \qquad dx = \frac{1}{2}(b-a)\, d\xi \tag{6.4}$$

© Matti Lähteenmäki



Kuva 6.1 Emojana.

integraali (6.3) menee standardimuotoon

$$\boxed{I=\int_{-1}^{+1} f(\xi)\,d\xi} \tag{6.5}$$

jossa $f(\xi)=(b-a)g[(x(\xi)]/2$. Kaavan (6.5) mukaan integrointi voidaan muuntaa laskettavaksi kuvan 6.1 emojanan yli, joten rajoitutaan tarkastelemaan tätä tapausta. Integraalille (6.5) voidaan laskea likiarvo kaavasta

$$\boxed{I \approx W_1 f(\xi_1)+W_2 f(\xi_2)+\cdots+W_n f(\xi_n)=\sum_{i=1}^{n} W_i f(\xi_i)} \tag{6.6}$$

Luvut ξ_i ilmaisevat integrointipisteiden sijainnit, luvut $f(\xi_i)$ ovat integrandin arvot integrointipisteissä ja luvut W_i ovat painokertoimet. Koska standardimuotoisessa integraalissa (6.5) integrointivälin mitta on 2, on painokertoimien W_i summa 2.

Gaussin integroinnissa integrointipisteet ξ_i ovat välillä $[-1,+1]$ niin, että kaavasta (6.6) tulee tarkka tulos mahdollisimman korkea-asteisille polynomeille. Jos integrointipisteitä on n kpl, pisteiden sijainnit ξ_i ja painokertoimet W_i pystytään valitsemaan siten, että kaava (6.6) on tarkka astelukua $2n-1$ oleville polynomeille. Tällöin integrointipisteet ovat integrointivälillä symmetrisesti ja symmetristen vastinpisteiden painokertoimet ovat yhtä suuret. Jos integrointipisteiden lukumäärä n on pieni, voidaan sijainnit ξ_i ja kertoimet W_i määrittää edellä esitettyjen ominaisuuksien perusteella.

Yhden pisteen integroinnissa $n=1$ ja integrointipiste on kohdassa $\xi_1=0$ ja painokertoimen W_1 arvo on 2. Ensimmäisen asteen polynomit integroituvat tarkasti.

Kahden pisteen integroinnissa $n=2$ ja $2n-1=3$, joten kolmannen asteen polynomit integroituvat tarkasti. Integrointipisteet ovat ξ_1 ja ξ_2 sekä painokertoimet W_1 ja W_2, niille on voimassa $\xi_1=-\xi_2$ ja $W_1=W_2$. Yleinen kolmannen asteen polynomi on $f(\xi)=A+B\xi+C\xi^2+D\xi^3$. Kun tämä integroidaan emojanan yli, seuraa tulos

$$I=\int_{-1}^{1}(A+B\xi+C\xi^2+D\xi^3)\,d\xi=2A+2C/3 \tag{6.7}$$

Kaavasta (6.6) saadaan vastaavasti

$$\begin{aligned} I&=W_1 f(\xi_1)+W_2 f(\xi_2)\\ &=W_1(A+B\xi_1+C\xi_1^2+D\xi_1^3)+W_2(A+B\xi_2+C\xi_2^2+D\xi_2^3)\end{aligned} \tag{6.8}$$

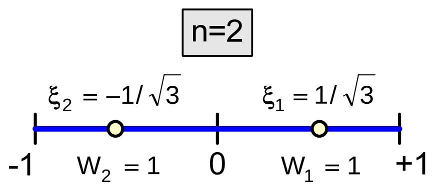
© Matti Lähteenmäki

Ottamalla huomioon yhteydet $\xi_1 = -\xi_2$ ja $W_1 = W_2$ seuraa

$$I = 2W_1(A + C\xi_1^2) \tag{6.9}$$

Kaavoista (6.7) ja (6.9) saadaan

$$2W_1(A + C\xi_1^2) = 2A + 2C/3 \quad \Rightarrow \quad W_1 = 1 \qquad W_1\xi_1^2 = 1/3 \tag{6.10}$$



Kuva 6.2 Integrointipisteet.

Kahden pisteen integroinnille saadaan siis

$$\boxed{\begin{aligned} & W_1 = W_2 = 1 \\ & \xi_1 = -\xi_2 = 1/\sqrt{3} \approx 0{,}57735027 \end{aligned}} \tag{6.11}$$

jota on vielä havainnollistettu kuvassa 6.2.

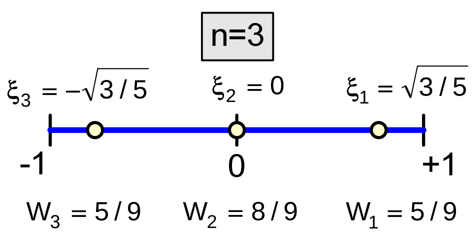
Kolmen pisteen integroinnissa on $n = 3$ ja $2n - 1 = 5$. Perusominaisuuksista seuraa $\xi_1 = -\xi_3$, $\xi_2 = 0$ ja $W_1 = W_3$. Yleiselle viidennen asteen polynomille on voimassa

$$I = \int_{-1}^{1} (A + B\xi + C\xi^2 + D\xi^3 + E\xi^4 + F\xi^5)\, d\xi = 2A + 2C/3 + 2E/5 \tag{6.12}$$

Kaavasta (6.6) seuraa, kun otetaan samalla huomioon perusominaisuudet

$$I = W_1 f(\xi_1) + W_2 f(\xi_2) + W_3 f(-\xi_1) = 2W_1(A + C\xi_1^2 + E\xi_1^4) + W_2 A \tag{6.13}$$

Merkitsemällä yllä olevat lausekkeet (6.12) ja (6.13) yhtä suuriksi seuraa vaatimukset



Kuva 6.3 Integrointipisteet.

$$\begin{aligned} & 2W_1 + W_2 = 2 \\ & W_1\xi_1^2 = 1/3 \quad W_1\xi_1^4 = 1/5 \end{aligned} \tag{6.14}$$

Jälkimmäisistä vaatimuksista seuraa $\xi_1^2 = 3/5$, joten $W_1 = (1/3)\cdot(5/3) = 5/9$. Ensimmäisestä vaatimuksesta saadaan $W_2 = 2 - 2\cdot(2/5) = 8/9$. Kolmen pisteen integroinnille on siis

$$\boxed{\begin{aligned} & W_1 = W_3 = 5/9 \approx 0{,}55555556 \qquad W_2 = 8/9 \approx 0{,}88888887 \\ & \xi_1 = -\xi_1 = \sqrt{3/5} \approx 0{,}77459667 \qquad \xi_2 = 0 \end{aligned}} \tag{6.15}$$

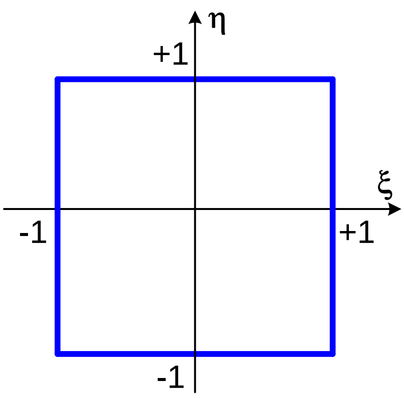
Kaavan (6.15) tuloksia on havainnollistettu kuvassa 6.3.

Jos integrointipisteiden määrä on suuri, on edellä käytetty menetelmä työläs, koska pisteiden ξ_i ja painokertoimien W_i määritykseen saatava yhtälöryhmä on epälineaarinen. Laskenta helpottuu, jos johdossa käytetään hyväksi Legendren polynomeja, mistä johtuen Gaussin integroinnista käytetään myös nimitystä Gauss-Legendre-integrointi. Integrointipisteitä ja painokertoimia löytyy taulukoituna kirjallisuudesta. Taulukossa 6.1 on tarvittavat tiedot integrointiasteeseen $n = 5$ saakka. Elementtimenetelmässä integrointiaste n on tavallisimmin 2, 3 tai 4.

Taulukko 6.1 Gauss-Legendre integrointi.

n	ξ_i	W_i
1	0,000000000000000	2,000000000000000
2	$\pm$0,577350269189626	1,000000000000000
3	0,000000000000000 $\pm$0,774596669241483	0,888888888888889 0,555555555555556
4	$\pm$0,339981043584856 $\pm$0,861136311594053	0,652145158462546 0,347854845137454
5	0,000000000000000 $\pm$0,538469310105683 $\pm$0,906179845938664	0,568888888888889 0,478629670499366 0,236926885056189

6.3 Kaksi- ja kolmiulotteinen Gaussin integrointi



Kuva 6.4 Emoneliö.

Elementtimenetelmässä pintaintegraalit palautetaan muuttujien vaihdolla jonkin yksinkertaisen emoelementin yli laskettaviksi. Nelisivuisten tasoelementtien emoelementti on kuvan 6.4 emoneliö. Perustapauksena voidaan tarkastella pintaintegraalia

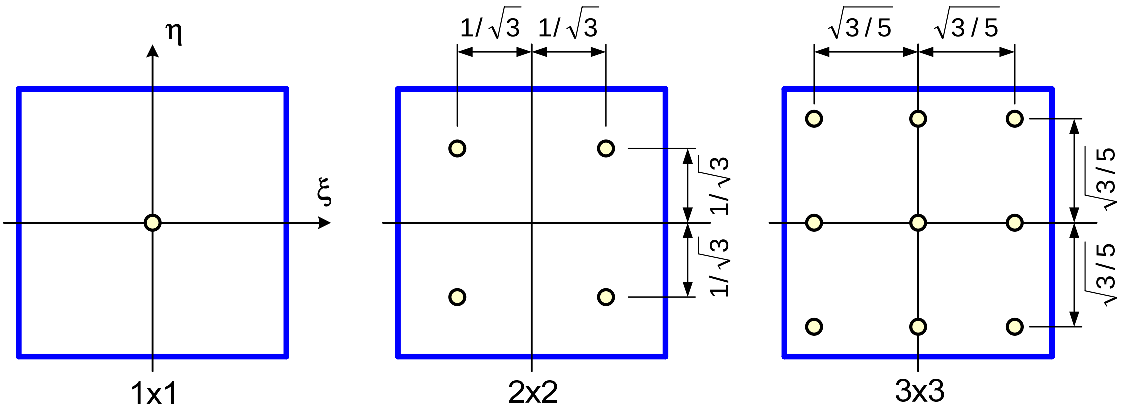
$$I = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{6.16}$$

Kun integraaliin (6.16) sovelletaan Gaussin integrointia ensin ξ-suunnassa ja sitten η-suunnassa, saadaan kaava

 © Matti Lähteenmäki

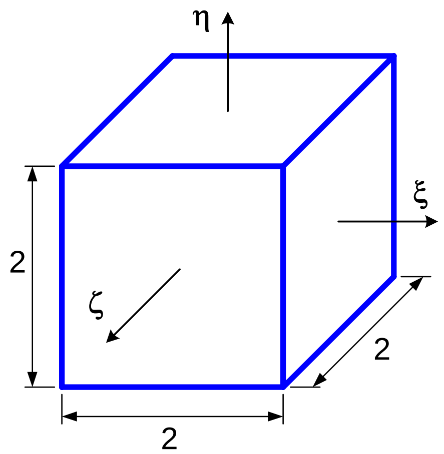
$$I \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} W_i W_j f(\xi_i,\eta_j) \tag{6.17}$$

Kaavan (6.17) integrointipisteet (ξ_i,η_j) ja painokertoimet W_i ja W_j saadaan taulukosta 6.1. Kuvassa 6.5 on kolmen alimman integrointiasteen Gaussin pisteet.



Kuva 6.5 Emoneliön Gaussin integrointipisteitä.

Kaksiulotteisessa nxn Gaussin integroinnissa on n^2 integrointipistettä. Voidaan todistaa, että nxn integrointi integroi tarkasti ne muuttujien ξ ja η polynomit, joiden asteluku on korkeintaan $2n-1$ molemmat muuttujat huomioon ottaen.



Kuva 6.6 Emokuutio.

Elementtimenetelmän tilavuusintegraalit voidaan palauttaa muuttujien vaihdolla emoelementin yli lasketuiksi. Kuusitahoisen tiilikivielementin integroinnissa käytetään kuvan 6.6 emokuutiota, jolloin perustapaus on

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \tag{6.18}$$

Kun integraaliin (6.18) käytetään Gaussin integrointia ξ, η ja ζ suunnissa, saadaan kaava

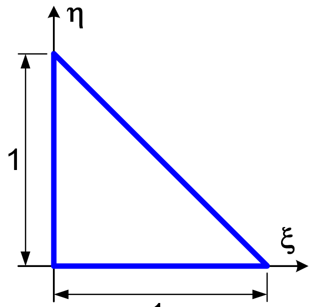
$$I \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} W_i W_j W_k f(\xi_i,\eta_j,\zeta_k) \tag{6.19}$$

Kaavassa (6.19) olevat integrointipisteet (ξ_i,η_j,ζ_k) ja painokertoimet W_i, W_j ja W_k saadaan taulukosta 6.1. Kun integrointipisteitä on n kpl kolmessa suunnassa, on niiden lukumäärä n^3. Saadaan siis 1 pisteen, 8 pisteen, 27 pisteen jne. integroinnit. Voidaan osoittaa, että nxnxn-integroinnilla saadaan laskettua tarkasti ne muuttujien ξ, η ja ζ polynomit, joiden asteluku on $2n-1$ kaikki muuttujat huomioon ottaen.

© Matti Lähteenmäki

6.4 Kaksi- ja kolmiulotteinen Hammerin integrointi

Kolmisivuiset tasoelementit ja tetraedrielementit vaativat omat integrointimenetelmänsä, koska niiden emoelementeissä ei integroida vakiorajoilla, kuten emoneliön ja -kuution tapauksissa. Kolmisivuisen tasoelementin yli ulotetut integraalit voidaan muuntaa kuvan 6.7 emokolmion yli laskettaviksi. Perustapaus on integraali



Kuva 6.7 Emokolmio

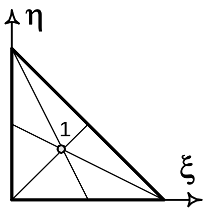
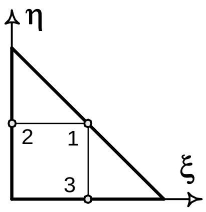
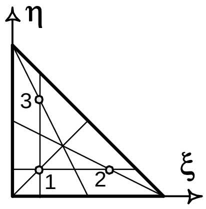
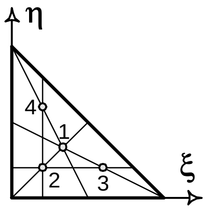
$$I = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \tag{6.20}$$

Hammerin integroinnissa integraali (6.20) lasketaan likimääräisesti summasta

$$I \approx \sum_{i=1}^{r} W_i\, f(\xi_i,\eta_i) \tag{6.21}$$

jossa luvut W_i ovat painokertoimet ja (ξ_i,η_i) vastaavat integrointipisteet. Näitä on

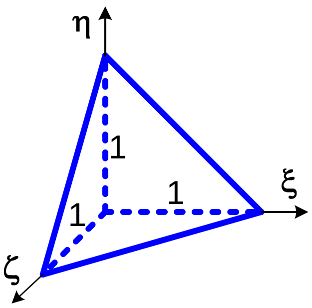
Taulukko 6.2 Hammerin integrointi emokolmion alueessa.

	Aste m	Pisteitä r	Koordinaatit ξ_i	Koordinaatit η_i	Painot W_i
	1	1	1/3	1/3	1/2
	2	3	1/2	1/2	1/6
			0	1/2	1/6
			1/2	0	1/6
	2	3	1/6	1/6	1/6
			2/3	1/6	1/6
			1/6	2/3	1/6
	3	4	1/3	1/3	-27/96
			1/5	1/5	25/96
			3/5	1/5	25/96
			1/5	3/5	25/96

© Matti Lähteenmäki

kirjallisuudesta taulukoituna suurillakin r-arvoilla. Taulukossa 6.2 on r-arvoihin 1, 3 ja 4 liittyvät tiedot. Koska integrointialueen mitta on 1/2, on painojen summa myös 1/2. Astetta m oleva Hammerin integrointi laskee tarkasti muuttujien ξ ja η polynomien integraalit, joiden korkeimman asteen termin $\xi^i\eta^j$ asteluku toteuttaa ehdon $i+j\leq m$.

Nelitahoisen tetraedrielementin yli ulotetut integraalit voidaan muuntaa kuvan 6.8 mukaisen emotetraedrin yli laskettaviksi. Tällöin perustapaus on



Kuva 6.8 Emotetraedri.

$$\boxed{I=\int_0^1\int_0^{1-\xi}\int_0^{1-\xi-\eta} f(\xi,\eta,\zeta)\,d\zeta\,d\eta\,d\xi} \tag{6.22}$$

Hammerin integroinnissa integraali (6.22) lasketaan likimääräisesti summasta

$$\boxed{I\approx\sum_{i=1}^{r} W_i\, f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)} \tag{6.23}$$

jossa integrointipisteet ovat (ξ_i,η_i,ζ_i) ja painokertoimet W_i. Taulukossa 6.3 on 1, 4 ja 5 pisteen Hammerin integrointiin tarvittavat tiedot. Lisätapauksia löytyy kirjallisuudesta. Integrointialueen mitta on 1/6, joten painokertoimien summa on samoin 1/6. Astetta m oleva Hammerin integrointi laskee tarkasti muotoa $\xi^i\eta^j\zeta^k$ olevien polynomitermien integraalit, kun $i+j+k\leq m$.

Taulukko 6.3 Hammerin integrointi emotetraedrin alueessa.

Aste m	Pisteitä r	Koordinaatit ξ_i	η_i	ζ_i	Painot W_i	
1	1	1/4	1/4	1/4	1/6	
2	4	a	a	a	1/24	$a=\frac{5-\sqrt{5}}{20}$
		a	a	b	1/24	
		a	b	a	1/24	$b=\frac{5+3\sqrt{5}}{20}$
		b	a	a	1/24	
3	5	c	c	c	-2/15	
		d	d	d	3/40	c=1/4
		d	d	e	3/40	d=1/6
		d	e	d	3/40	e=1/2
		e	d	d	3/40	

© Matti Lähteenmäki