

# › ZWEI-GELENK-ROBOTER

Vorabgabe 09.11.2022

# INHALTSVERZEICHNIS

---

1. Aufgabenstellung
2. Modellannahmen
3. Eingangs-, Zustands-, Ausgangssignale, Parameter und Anfangsbedingungen
4. Modellbildung
  - 4.1 Physikalisches Ersatzschaltbild
  - 4.2 Freischnitt
  - 4.3 Energetische Gleichungen
  - 4.4 Lagrange Gleichungen → Bewegungsgleichung
  - 4.5 Zustandsraummodell
5. Aufgabe zur Vorabgabe
  - 5.1 Stationärer Zustand
  - 5.2 Beweis der Invertierbarkeit der Massenmatrix  $M$

# 1. AUFGABENSTELLUNG UND PROJEKTZIELE

---

- > Modellbildung und Simulation eines Zwei-Gelenk-Roboters

## 2. MODELLANNAHMEN

---

- > Die Roboterarme sind masselos.
- > Die Massen konzentrieren sich in den Antriebsmotoren und am Greifer.
- > Die Robotergetriebe sind reibungslos.
- > Der Roboter wird angetrieben durch zwei Elektromotoren jeweils in der Schulter und im Ellenbogen, die die Drehmomente  $u_1$  und  $u_2$  erzeugen.

### 3. EINGANGS-, ZUSTANDS-, AUSGANGSSIGNALE, PARAMETER UND ANFANGSBEDINGUNGEN

Eingangssignal	Symbol	Simulink	Einheit
Drehmoment durch Schulter-Antrieb	$u_1$	u1	$Nm$
Drehmoment durch Ellbogen-Antrieb	$u_2$	u2	$Nm$

Zustandsvariable	Symbol	Simulink	Einheit	Anfangswert
Winkel des Oberarms	$x_1 = \varphi_1$	x(1)	$rad$	$\pi$
Winkel des Unterarms	$x_2 = \varphi_2$	x(2)	$rad$	$\frac{\pi}{2}$
Winkelgeschwindigkeit des Oberarms	$x_3 = \dot{\varphi}_1$	x(3)	$\frac{rad}{s}$	$0 \frac{rad}{s}$
Winkelgeschwindigkeit des Unterarms	$x_4 = \dot{\varphi}_2$	x(4)	$\frac{rad}{s}$	$0 \frac{rad}{s}$

### 3. EINGANGS-, ZUSTANDS-, AUSGANGSSIGNALE, PARAMETER UND ANFANGSBEDINGUNGEN

---

Parameter	Symbol	Simulink	Einheit	Anfangswert
Masse des Ellenbogengelenks	$m_1$	P_m1	$kg$	10
Masse des Greifers	$m_2$	P_m2	$kg$	10
Länge des Oberarms	$l_1$	P_l1	$m$	0,8
Länge des Unterarms	$l_2$	P_l2	$m$	0,7
Schwerkraft	$g$	P_g	$\frac{m}{s^2}$	9,81

## 4. MODELLBILDUNG

### 4.1 PHYSIKALISCHES ERSATZSCHALTBIKD

Definition der verallgemeinerten Koordinaten:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (4.1.1) \quad \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix} \quad (4.1.2)$$

Definition der kinematischen Größen:

Position Punkt 1:

$$\mathbf{r}_1 = l_1 \begin{bmatrix} \sin(\varphi_1) \\ -\cos(\varphi_1) \end{bmatrix} \quad (4.2.1)$$

Position Punkt 2:

$$\mathbf{r}_2 = l_1 \begin{bmatrix} \sin(\varphi_1) \\ -\cos(\varphi_1) \end{bmatrix} + l_2 \begin{bmatrix} \sin(\varphi_2) \\ -\cos(\varphi_2) \end{bmatrix} \quad (4.2.3)$$

Geschwindigkeit Punkt 1:

$$\mathbf{v}_1 = l_1 \dot{\varphi}_1 \begin{bmatrix} \cos(\varphi_1) \\ \sin(\varphi_1) \end{bmatrix} \quad (4.2.2)$$

Geschwindigkeit Punkt 2:

$$\mathbf{v}_2 = l_1 \dot{\varphi}_1 \begin{bmatrix} \cos(\varphi_1) \\ \sin(\varphi_1) \end{bmatrix} + l_2 \dot{\varphi}_2 \begin{bmatrix} \cos(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_2) \end{bmatrix} \quad (4.2.4)$$

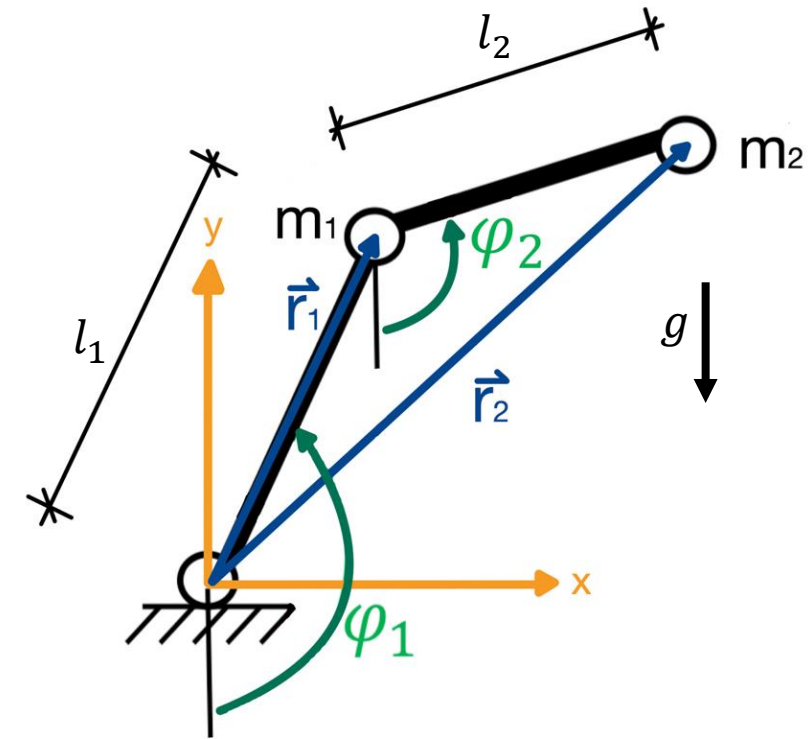
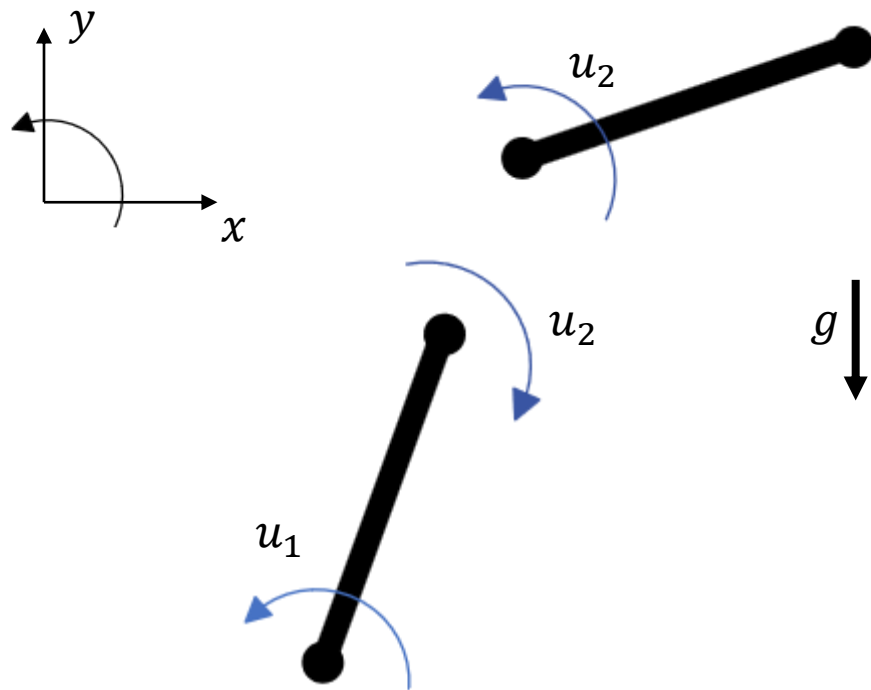


Abb. 1: Lageplan des Roboters

## 4. MODELLBILDUNG

### 4.2 FREISCHNITT



Allgemeine Lagrange Gleichung:

$$L = T - V \quad (4.3)$$

Allgemeine Lagrange Gleichung zweiter Art mit konservativen Kräften und nichtkonservativen verallgemeinerten Kräften:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}^T} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}^T} = \mathbf{k}^n \quad (4.4)$$

Zusätzliche nichtkonservativen Kräfte  $\mathbf{k}^n$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = u_1 - u_2 \quad (4.5.1)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = u_2 \quad (4.5.2)$$

Abb. 2: Freischnitt des Roboters



## 4. MODELLBILDUNG

### 4.3 ENERGETISCHE GLEICHUNGEN

---

Kinetische Energie der Massepunkte:

$$E_{kin1} = \frac{1}{2}m_1|\mathbf{v}_1|^2 = \frac{1}{2}m_1(l_1^2\dot{\varphi}_1^2 \cos^2(\varphi_1) + l_1^2\dot{\varphi}_1^2 \sin^2(\varphi_1)) = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\varphi}_1^2 = T_1 \quad (4.6.1)$$

$$\begin{aligned} E_{kin2} &= \frac{1}{2}m_2|\mathbf{v}_2|^2 = \frac{1}{2}m_2 \left( l_1^2\dot{\varphi}_1^2 (\cos^2(\varphi_1) + \sin^2(\varphi_1)) + l_2^2\dot{\varphi}_2^2 (\cos^2(\varphi_2) + \sin^2(\varphi_2)) + l_1\dot{\varphi}_1 l_2\dot{\varphi}_2 (\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)) \right) \\ &= \frac{1}{2}m_2(l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + 2l_1\dot{\varphi}_1 l_2\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) = T_2 \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

Potenzielle Energie der Massepunkte:

$$E_{pot1} = m_1 g r_{1y} = -m_1 g l_1 \cos(\varphi_1) = V_1 \quad (4.6.3)$$

$$E_{pot2} = m_2 g r_{2y} = -m_2 g (l_1 \cos(\varphi_1) + l_2 \cos(\varphi_2)) = V_2 \quad (4.6.4)$$

## 4. MODELLBILDUNG

### 4.4 LAGRANGE GLEICHUNGEN

Einsetzen der energetischen Gleichungen (4.6) in die Lagrange-Gleichung (4.3):

$$L = T - V = T_1 + T_2 - V_1 - V_2$$

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2l_1\dot{\varphi}_1l_2\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + (m_1 + m_2)gl_1\cos(\varphi_1) + m_2gl_2\cos(\varphi_2) \quad (4.7.1)$$

Linke Seite der Lagrange-Gleichung 2. Art (4.4) komponentenweise:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2) - (m_1 + m_2)gl_1\sin(\varphi_1) \quad (4.7.2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2gl_2\sin(\varphi_2) \quad (4.7.3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = (m_1 + m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1 + m_2l_1l_2\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (4.7.4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2l_2^2\dot{\varphi}_2 + m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (4.7.5)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1 + m_2l_1l_2(-\sin(\varphi_1 - \varphi_2)(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)\dot{\varphi}_2 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_2) \quad (4.7.6)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) = m_2l_2^2\ddot{\varphi}_2 + m_2l_1l_2(-\sin(\varphi_1 - \varphi_2)(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)\dot{\varphi}_1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_1) \quad (4.7.7)$$

## 4. MODELLBILDUNG

### 4.4 LAGRANGE GLEICHUNGEN → BEWEGUNGSGLEICHUNG

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = (m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_2 + (m_1 + m_2)g l_1 \sin(\varphi_1) \quad (4.7.8)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 - m_2 l_1 l_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_1 + m_2 g l_2 \sin(\varphi_2) \quad (4.7.9)$$

Bewegungsgleichung unter Berücksichtigung von (4.5.1) und (4.5.2) in Matrizenschreibweise:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) & m_2 l_2^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_2 l_1 l_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 \\ -m_2 l_1 l_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)g l_1 \sin(\varphi_1) \\ m_2 g l_2 \sin(\varphi_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 - u_2 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

## 4. MODELLBILDUNG

### 4.5 ZUSTANDSRAUMMODELL

Zustandsvektor  $\mathbf{x}$  in Bewegungsgleichung (4.8) einsetzen und nach  $\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix}$  umstellen ( $\mathbf{M}^{-1}$  siehe (5.9)):

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \underbrace{\left( - \begin{bmatrix} m_2 l_1 l_2 \sin(x_1 - x_2) x_4^2 \\ -m_2 l_1 l_2 \sin(x_1 - x_2) x_3^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) g l_1 \sin(x_1) \\ m_2 g l_2 \sin(x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 - u_2 \\ u_2 \end{bmatrix} \right)}_{\mathbf{f}^*(\mathbf{x}, \mathbf{u})} \quad (4.9)$$

$$\dot{x}_1 = x_3; \quad \dot{x}_2 = x_4$$

Zustandsraum:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{f}^*(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{bmatrix}; t > 0 \quad (4.10.1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}; t \geq 0 \quad (4.10.2)$$

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.10.3)$$

## 5. AUFGABE ZUR VORABGABE

---

- > Für eine erfolgreiche Modellierung in Simulink muss die Massenmatrix invertierbar sein. Zeigen Sie, dass die Massenmatrix unabhängig von den Zustandsgrößen oder der Parameter Festlegung invertierbar ist.
- > Bestimmen Sie allgemein die stationären Gleichungen des Systems.
- > Zur späteren Regelung und Bahnplanung des Roboterarms wird folgende stationäre Gleichung  $\bar{\varphi}_1 = f_s(\bar{\varphi}_2)$  mit der Vorgabe  $\bar{u}_2 = \beta \bar{u}_1$  benötigt. Bestimmen Sie diese aus den stationären Gleichungen.

## 5. AUFGABE ZUR VORABGABE

### 5.1 STATIONÄRER ZUSTAND

Stationären Zustand  $\bar{\dot{\varphi}}_1 = \bar{\dot{\varphi}}_2 = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}; \bar{\ddot{\varphi}}_1 = \bar{\ddot{\varphi}}_2 = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$  in (4.7) einsetzen

Allgemeine stationäre Gleichung:

$$\begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2l_1l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ m_2l_1l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) & m_2l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)gl_1 \sin(\bar{\varphi}_1) \\ m_2gl_2 \sin(\bar{\varphi}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 - \bar{u}_2 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix} \quad (5.1.1)$$

$$\begin{bmatrix} (m_1 + m_2)gl_1 \sin(\bar{\varphi}_1) \\ m_2gl_2 \sin(\bar{\varphi}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 - \bar{u}_2 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix} \quad (5.1.2)$$

$\bar{u}_2 = \beta \bar{u}_1$  umgestellt nach  $\bar{u}_1$ :

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{\beta} \bar{u}_2 \quad (5.2)$$

## 5. AUFGABE ZUR VORABGABE

### 5.1 STATIONÄRER ZUSTAND

---

(5.2) in (5.1.2) einsetzen:

$$\begin{bmatrix} (m_1 + m_2)gl_1 \sin(\bar{\varphi}_1) \\ m_2gl_2 \sin(\bar{\varphi}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} \bar{u}_2 - \bar{u}_2 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Dies ergibt sich zeilenweise zu:

$$(m_1 + m_2)gl_1 \sin(\bar{\varphi}_1) = \bar{u}_2 \left( \frac{1}{\beta} - 1 \right) \quad (5.4)$$

$$m_2gl_2 \sin(\bar{\varphi}_2) = \bar{u}_2 \quad (5.5)$$

(5.5) in (5.4) einsetzen und nach  $\bar{\varphi}_1$  auflösen:

$$\bar{\varphi}_1 = \arcsin \left( \frac{m_2l_2}{(m_1+m_2)l_1} \sin(\bar{\varphi}_2) \left( \frac{1}{\beta} - 1 \right) \right) \quad (5.6)$$

## 5. AUFGABE ZUR VORABGABE

### 5.2 BEWEIS DER INVERTIERBARKEIT DER MASSENMATRIX $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}) = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) & m_2 l_2^2 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

Zu zeigen:  $\det(\mathbf{M}) \neq 0$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{M}) &= (m_1 + m_2)l_1^2 m_2 l_2^2 - (m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2))^2 \\ &= l_1^2 l_2^2 (m_1 m_2 + m_2^2 (1 - \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2))) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Da  $0 \leq \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) \leq 1$  für alle  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$  gilt  $1 - \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) \geq 0$

Weiterhin gilt für alle Parameter  $l_1, l_2, m_1, m_2 > 0$

Damit ist auch  $\det(\mathbf{M}) > 0$  für alle  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$

→ Matrix  $\mathbf{M}$  ist nicht singulär und somit invertierbar!

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{M})} \cdot \begin{pmatrix} m_2 l_2^2 & -m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ -m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) & (m_1 + m_2)l_1^2 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$



# DANKE!

Rückfragen bitte an:



**Moritz Höhnel**

Fakultät T1 | ASE

mhoehnel@stud.hs-heilbronn.de



**Marc Grosse**

Fakultät T1 | ASE

mgrosse@stud.hs-heilbronn.de



**Mattis Ritter**

Fakultät T1 | ASE

mritter@stud.hs-heilbronn.de