

SymPy — matematyka symboliczna w Pythonie

Mateusz Paprocki <mattpap@gmail.com>

Continuum Analytics, Inc.

27 kwietnia 2016

Co to jest matematyka symboliczna?

Python operuje na liczbach zmiennoprzecinkowych:

```
In[1]: import math  
In[2]: math.sqrt(3)
```

1.7320508075688772

W matematyce symbolicznej operujemy na liczbach i symbolach:

```
In[3]: import sympy  
In[4]: sympy.sqrt(3)
```

$\sqrt{3}$

```
In[5]: _4.evalf()
```

1.73205080756888

```
In[6]: _4.evalf(n=50)
```

1.7320508075688772935274463415058723669428052538104

Co to jest matematyka symboliczna?

Python operuje na liczbach zmiennoprzecinkowych:

```
In[1]: import math  
In[2]: math.sqrt(3)
```

1.7320508075688772

W matematyce symbolicznej operujemy na liczbach i symbolach:

```
In[3]: import sympy  
In[4]: sympy.sqrt(3)
```

$\sqrt{3}$

```
In[5]: _4.evalf()
```

1.73205080756888

```
In[6]: _4.evalf(n=50)
```

1.7320508075688772935274463415058723669428052538104

Co to jest matematyka symboliczna?

Dokładne wyniki

```
In [7]: math.sqrt(3)**2
```

2.9999999999999996

```
In [8]: sympy.sqrt(3)**2
```

3

```
In [9]: 1 - math.sin(math.pi)
```

0.9999999999999999

```
In [10]: 1 - sympy.sin(sympy.pi)
```

1

Co to jest matematyka symboliczna?

Operacje na symbolach i wyrażeniach

```
In[11]: x**2 - 1  
NameError: name 'x' is not defined
```

```
In[12]: f = lambda x: x**2 - 1  
In[13]: f(10)
```

99

```
In[14]: sympy.var('x')
```

x

```
In[15]: x**2 - 1
```

$x^2 - 1$

```
In[16]: _.subs(x, 10)
```

99

```
In[17]: sympy.factor(_15)
```

$(x - 1)(x + 1)$

Co to jest matematyka symboliczna?

Wzory ogólne

```
In[18]: sum([ i for i in range(0, 10+1) ])
```

55

```
In[19]: n, k = sympy.symbols('n,k')
```

```
In[20]: sympy.summation(k, (k, 0, n))
```

$$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

```
In[21]: _.subs(n, 10)
```

55

Matematyka w Pythonie

- moduł `math`
 - wbudowany moduł matematyczny
 - podstawowe operacje na liczbach zmiennoprzecinkowych
- NumPy, SciPy
 - biblioteki numeryczne (macierze, optymalizacja)
- Swig, Pynac, ...
 - warstwa abstrakcji nad biblioteką GiNaC (C++)
 - duża wydajność, ale mała funkcjonalność
 - trudne w rozwijaniu
- Sage
 - kompletny system algebry komputerowej
 - podstawowy instalator to 0.8-1.4 GB (Linux 64)
 - zawiera SymPy
- SymPy

Dlaczego SymPy?

Istnieje wiele systemów matematycznych:

- systemy **komercyjne**:
 - Mathematica, Maple, Magma, ...
- systemy **Open Source**:
 - AXIOM, GiNaC, Maxima, PARI, Sage, Singular, Yacas, ...

Problemy:

- większość wymyśla swój własny język programowania
- trudna lub niemożliwa rozbudowa systemu i naprawa błędów
- systemy komercyjne są bardzo kosztowne

Dlaczego SymPy?

Istnieje wiele systemów matematycznych:

- systemy **komercyjne**:
 - Mathematica, Maple, Magma, ...
- systemy **Open Source**:
 - AXIOM, GiNaC, Maxima, PARI, Sage, Singular, Yacas, ...

Problemy:

- większość wymyśla swój własny język programowania
- trudna lub niemożliwa rozbudowa systemu i naprawa błędów
- systemy komercyjne są bardzo kosztowne

Co to jest SymPy?

- biblioteka pisana w Pythonie
 - `import sympy` i możemy całkować
 - bez nowego środowiska, języka, ...
 - bez rozszerzeń kompilowanych
 - brak obligatoryjnych zależności (poza mpmath)
 - działa na dowolnej platformie (~~Jython~~)
- prostota architektury
 - kod w bibliotece oraz REPL nie powinny się (bardzo) różnić
 - łatwość w rozbudowie na dowolnym poziomie
- szeroka funkcjonalność
 - obsługa najważniejszych gałęzi matematyki
 - wspieranie zaawansowanych metod i algorytmów
 - integracja z IPython/Jupyter, NumPy, ...
- liberalna licencja: BSD

SymPy: historia i trochę liczb

- 2006–teraz (Ondřej Čertík, od 2011 Aaron Meurer)
- 400 autorów
- 450+ tysięcy linii kodu, testów i dokumentacji
- wykonanie testów (na Travis CI) trwa średnio 9 godzin
- 48 projektów (45 studentów) w Google Summer of Code

Możliwości

● podstawowe możliwości

- podstawowa arytmetyka: $+$, $-$, $*$, $/$, $**$
- liczby dowolnej precyzji
- rozwijanie wyrażeń
- podstawianie wyrażeń
- upraszczanie/przekształcanie wyrażeń
- dopasowywanie do wzorców
- wyrażenia nieprzemienne
- stałe matematyczne (π , e , złoty podział)

● funkcje

- elementarne (trygonometryczne, hiperboliczne, wykładnicza, logarytmy)
- kombinatoryczne, całkowitoliczbowe ($n!$, liczby Stirlinga)
- komponenty liczb zespolonych ($\Re x$, $\Im x$, $|x|$)
- wielomiany specjalne (cyklotomiczne, Czebyszewa)
- harmoniki sferyczne
- inne funkcje specjalne ($\Gamma(x)$, $\zeta(x)$)

● analiza matematyczna

- różniczkowanie
- całkowanie
- granice
- szeregi (Taylor, Laurent, Puiseux)

● algebra wielomianów

- arytmetyka, największy wspólny dzielnik
- rozkład na czynniki
- rozkład bezkwadratowy
- bazy Gröbnera
- rozkład na ułamki proste
- wyróżnik i rugownik
- izolacja pierwiastków

● rozwiązywanie równań

- równania wielomianowe
- równania algebraiczne
- równania transcendentálne
- równania różniczkowe
- równania różnicowe
- równania diofantyczne
- równania zadane przedziałami
- układy równań
- nierówności

● kombinatoryka

- permutacje, kombinacje, partycje, podzbiory
- grupy permutacji (wielościanny, kostka Rubik'a)
- kody Prüfera, Graya

Więcej możliwości

- **matematyka dyskretna**

- współczynniki dwumianowe
- funkcje hipergeometryczne
- sumy i produkty (skończone i nieskończone)

- **teoria liczb**

- generowanie i rozpoznawanie liczb pierwszych
- rozkład liczb całkowitych na czynniki
- ułamki łańcuchowe

- **macierze**

- arytmetyka, odwracanie macierzy
- wartości i wektory własne
- wielomian charakterystyczny
- wyznacznik

- **geometria**

- punkty, linie, segmenty, elipsy, wielokąty, ...
- przecinanie się, styczność, podobieństwo figur

- **fizyka**

- jednostki miar (analiza wymiarowa)
- stałe fizyczne
- mechanika klasyczne (dynamika bryły sztywnej)
- mechanika kwantowa
- optyka

- **statystyka i rachunek prawdopodobieństwa**

- rozkłady prawdopodobieństwa

- **wyświetlanie wyrażeń**

- 2D ASCII/Unicode
- LaTeX, MathML
- integracja z IPython/Jupyter notebook
- generacja kodu: C, Fortran, Python, JavaScript

- **rysowanie wykresów**

- 2D i 3D
- krzywe parametryczne
- figury geometryczne

Przykłady

Podstawowa arytmetyka

SymPy automatycznie stosuje podstawowe transformacje:

```
In[1]: from sympy import *  
In[2]: var('x,y')
```

```
In[3]: 1 + x - y - y - x**2/x, exp(1), sin(0)
```

$$(-2y + 1, e, 0)$$

Zaawansowane transformacje aplikowane są manualnie:

```
In[4]: sin(x)**2 + cos(x)**2
```

$$\sin^2(x) + \cos^2(x)$$

```
In[5]: simplify(_)
```

Przykłady

Całkowanie i różniczkowanie

```
In[1]: integrate(sin(x*y*z), x, y)
```

$$\begin{cases} 0 & \text{for } yz = 0 \\ -\frac{1}{z} (-\log(xyz) + \frac{1}{2} \log(x^2 y^2 z^2) + \text{Ci}(xyz)) & \text{otherwise} \end{cases}$$

```
In[2]: diff(_, x, y)
```

$$\begin{cases} 0 & \text{for } yz = 0 \\ \sin(xyz) & \text{otherwise} \end{cases}$$

```
In[3]: _1.subs({y: 0, z: 0})
```

0

```
In[4]: _1.args[1].expr.subs({y: 0, z: 0})
```

NaN

Przykłady

Granice i szeregi

```
In[1]: lim = Limit((1 + 1/n)**n, n, oo)
In[2]: Eq(lim, lim.doit())
```

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

```
In[3]: limit(log(2 + sqrt(atan(x))*sqrt(sin(1/x))), x, 0)
log(2)
```

```
In[4]: series(sin(cos(x**2)), x, n=10)
```

$$\sin(1) - \frac{x^4}{2} \cos(1) + x^8 \left(-\frac{1}{8} \sin(1) + \frac{1}{24} \cos(1) \right) + \mathcal{O}(x^{10})$$

```
In[5]: summation(1/x**n, (n, 0, oo))
```

$$\begin{cases} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} & \text{for } \left|\frac{1}{x}\right| < 1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} x^{-n} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Problemy i pułapki

Liczby Pythona vs. liczby SymPy

```
In[1]: 1/2
```

0

```
In[2]: Rational(1, 2), S(1)/2, S("1/2"), S.Half
```

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

```
In[3]: 1.23456789123456789
```

1.234567891234568

```
In[4]: Float(1.23456789123456789)
```

1.23456789123457

```
In[5]: Float("1.23456789123456789")
```

1.23456789123456789

Problemy i pułapki

Liczby Pythona vs. liczby SymPy

```
In[1]: 1/2
```

0

```
In[2]: Rational(1, 2), S(1)/2, S("1/2"), S.Half
```

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

```
In[3]: 1.23456789123456789
```

1.234567891234568

```
In[4]: Float(1.23456789123456789)
```

1.23456789123457

```
In[5]: Float("1.23456789123456789")
```

1.23456789123456789

Problemy i pułapki

Porównywanie wyrażeń

```
In[1]: (x + 1)**2 == x**2 + 2*x + 1
```

False

```
In[2]: (x + 1)**2 == (x + 1)**2
```

True

```
In[3]: simplify((x + 1)**2 - x**2 + 2*x + 1) == 0
```

True

```
In[4]: Eq((x + 1)**2, x**2 + 2*x + 1)
```

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

Problemy i pułapki

Porównywanie wyrażeń

```
In[1]: (x + 1)**2 == x**2 + 2*x + 1
```

False

```
In[2]: (x + 1)**2 == (x + 1)**2
```

True

```
In[3]: simplify((x + 1)**2 - x**2 + 2*x + 1) == 0
```

True

```
In[4]: Eq((x + 1)**2, x**2 + 2*x + 1)
```

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

Problemy i pułapki

Limit rekurencji i pamięć podręczna

```
In[1]: from sympy.core.cache import clear_cache
In[2]: horner_poly = lambda n: horner(sum([ x**i for i in range(n) ]))

In[3]: clear_cache(); horner_poly(70).subs(x, 1)
70

In[4]: clear_cache(); horner_poly(71).subs(x, 1)
RuntimeError: maximum recursion depth exceeded

In[5]: import sys
In[6]: sys.setrecursionlimit(2*sys.getrecursionlimit())

In[7]: clear_cache(); horner_poly(142).subs(x, 1)
142

In[8]: clear_cache(); horner_poly(143).subs(x, 1)
RuntimeError: maximum recursion depth exceeded
```

Problemy i pułapki

Limit rekurencji i pamięć podręczna

```
In[1]: from sympy.core.cache import clear_cache
In[2]: horner_poly = lambda n: horner(sum([ x**i for i in range(n) ]))

In[3]: clear_cache(); horner_poly(70).subs(x, 1)
70

In[4]: clear_cache(); horner_poly(71).subs(x, 1)
RuntimeError: maximum recursion depth exceeded

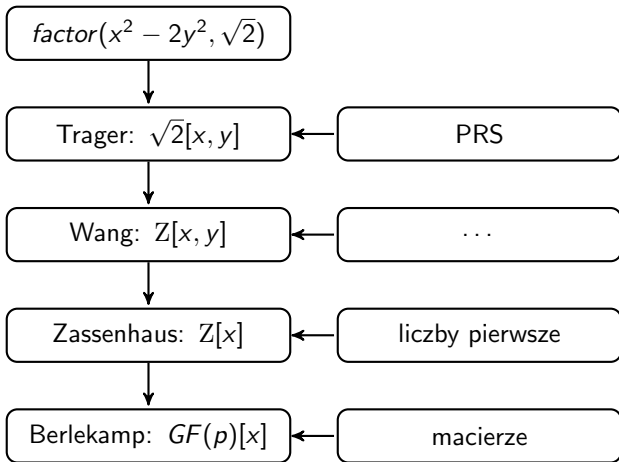
In[5]: import sys
In[6]: sys.setrecursionlimit(2*sys.getrecursionlimit())

In[7]: clear_cache(); horner_poly(142).subs(x, 1)
142

In[8]: clear_cache(); horner_poly(143).subs(x, 1)
RuntimeError: maximum recursion depth exceeded
```

Algebra komputerowa od wewnątrz

Na przykładzie rozkładu na czynniki pierwsze



Informacje kontaktowe

- Strona główna projektu:
 - www.sympy.org
- Dokumentacja:
 - docs.sympy.org
 - wiki.sympy.org
- Strony dodatkowe:
 - live.sympy.org, gamma.sympy.org
 - try.jupyter.org
- Lista mailingowa:
 - sympy@googlegroups.com
- Kanał IRC:
 - #sympy na FreeNode
- Repozytorium git:

```
git clone git://github.com/sympy/sympy.git
```


Dodatkowe materiały

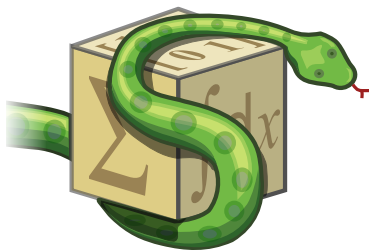
- [SymPy tutorial](#) at SciPy 2011
- [SymPy tutorial](#) at SciPy 2013 ([video](#))
- [PyDy tutorial](#) at SciPy 2015 ([video](#))

Moja rola w projekcie

- pracuję nad SymPy od marca 2007 roku
- student w Google Summer of Code 2007
 - algorytmy rozwiązywania równań rekurencyjnych
 - algorytmy sumowania nieoznaczonego i oznaczonego
- no i tak już zostało:
 - algorytmy całkowania
 - wielomiany, struktury algebraiczne
 - przekształcanie/upraszczanie wyrażeń
 - ...
- poza tym:
 - mentor w Google Summer of Code 2009, 2010, 2011, 2013
 - praca dyplomowa (Politechnika Wrocławska)
 - konferencje (SciPy, EuroScipy, SciPy.In, PyCon.PL, py4science)

Dziękuję za uwagę!

Pytania, uwagi, dyskusja ...



SymPy