Eletrostática - Potencial Elétrico e Condições de Contorno.

Nome: Mateus Sousa Araújo.
Matrícula: 374858.
Professor: Antônio Joel Ramiro de Castro.
Curso: Engenharia de Computação.

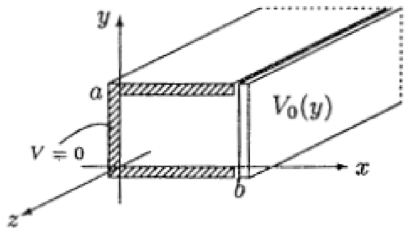
1. **Griffiths - Cap. 3 - Problema 3.14.**

   Um tubo retangular que corre paralelo ao eixo z (de $-\infty$ a $+\infty$), tem três lados de metal aterrados, em $y = 0$, $y = a$ e $x = 0$. O quarto lado, em $x = b$, é mantido em um potencial específico $V_0(y)$.

   (a) Desenvolva uma fórmula geral para o potencial no interior do tubo.

   (b) Encontre o potencial explicitamente, para o caso $V_0(y) = V_0$ (uma constante).

   RESOLUÇÃO



   (a) Com a figura acima, temos as seguintes condições de contorno:

   i. $V(x, 0) = 0$
   ii. $V(x, a) = 0$
   iii. $V(0, y) = 0$
   iv. $V(b, y) = V_0(y)$

   Precisamos resolver a equação de Laplace para esse caso:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

   Podemos considerar duas funções em x e y que compõem o potencial.

$$V(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$$

   Fazendo as derivadas segundas de cada função de acordo com a equação de Laplace, temos:

$$V_{xx} = \psi(y)\varphi''(x)$$
$$V_{yy} = \varphi(x)\psi''(y)$$

   Somando na equação de Laplace e dividindo ambos temos por $1/V$, obtemos:

$$\frac{1}{V}(\psi(y)\varphi''(x) + \varphi(x)\psi''(y)) = 0$$

$$\frac{1}{\varphi(x)}\varphi''(x) + \frac{1}{\psi(y)}\psi''(y) = 0$$

$$f(x) + g(y) = 0$$

Podemos chamar $f(x)$ de uma constante c_1 e $g(y)$ de outra constante c_2. Dessa forma:

$$c_1 + c_2 = 0$$
$$c_1 = -c_2$$
$$c_1 = k^2$$

Temos duas equações de 1 ordem:

$$\frac{1}{\varphi(x)}\varphi''(x) = c_1 \tag{1}$$

$$\frac{1}{\psi(y)}\psi''(y) = c_2 \tag{2}$$

Em 1 temos:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = k^2 \varphi$$

Para esse caso, temos uma solução da seguinte forma:

$$\varphi(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx} \tag{3}$$

Em 2 temos:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -k^2 \psi$$

Para esse caso, temos uma solução da seguinte forma:

$$\psi(y) = C\sin(ky) + D\cos(ky) \tag{4}$$

Aplicando a 3ª condição em 3, temos:

$$V(0, y) = \varphi(0)\psi(y) = 0$$

Da condição acima, temos que $\varphi(0) = 0$. Aplicando esse resultado em 3, temos:

$$B = -A$$

Aplicando a 1ª condição em 4, temos:

$$V(0, y) = \varphi(x)\psi(0) = 0$$

Da condição acima, temos que $\psi(0) = 0$. Aplicando esse resultado em 4, temos:

$$D = 0$$

Aplicando a 2ª condição em 4, temos:

$$V(0, y) = \varphi(x)\psi(a) = 0$$

Da condição acima, temos que $\psi(a) = 0$. Substituindo esse valor em 4, temos que:

$$ka = n\pi$$

$$k = \frac{n\pi}{a}$$

onde, $n = 0, 1, 2, 3, ...$
Retornando para $V(x, y)$, temos:

$$V(x, y) = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C\sin(ky) + D\cos(ky))$$

$$V(x, y) = (2AC)(e^{n\pi x/a} - e^{-n\pi x/a})\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

$$V(x, y) = (2AC)\sinh\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

Já que $2AC$ é uma constante arbitrária, temos:

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \tag{5}$$

Aplicando a última condição em 5, temos:

$$\sum C_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) = V_0(y)$$

Por definição, temos:

$$C_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) = \frac{2}{a}\int_0^a V_0(y)\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\, dy$$

Portanto, chegamos:

$$C_n = \frac{2}{a\sinh(n\pi b/a)}\int_0^a V_0(y)\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\, dy$$

(b)

$$C_n = \frac{2}{a\sinh(n\pi b/a)} V_0 \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\, dy$$

No entanto, temos:

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\, dy = \begin{cases} 0, \text{ se n for par} \\ \dfrac{2a}{n\pi}, \text{ se n for ímpar} \end{cases}$$

Com as condições acima, podemos concluir:

$$V(x, y) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=1,3,5,...}\frac{\sinh(n\pi x/a)\sin(n\pi y/a)}{n\sinh(n\pi b/a)}$$

2. **Griffiths - Cap. 3 - Problema 3.19.**

   Suponha que o potencial $V_0(\theta)$ na superfície de uma esfera é especificado e que não há carga dentro ou fora da esfera. Mostre que a densidade de carga na esfera é dada por

$$\sigma(\theta) = \frac{\epsilon_0}{2R} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)^2 C_l P_l(\cos\theta)$$

   onde

$$C_l = \int_0^{\pi} V_0(\theta) P_l(\cos\theta) \sin\theta \; d\theta.$$

   RESOLUÇÃO

   Podemos usar a seguinte relação:

$$\sigma(\theta) = \epsilon_0 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_l R^{l-1} P_l(\cos\theta)$$

   Temos que:

$$A_l = \frac{2l+1}{2R^l} \int_0^{\pi} V_0(\theta) P_l(\cos\theta) \sin\theta \; d\theta$$

   Juntando as duas, temos:

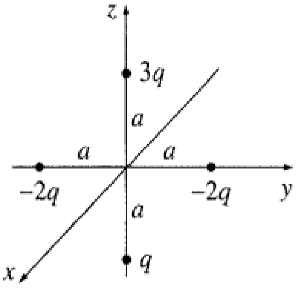
$$\sigma(\theta) = \epsilon_0 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)^2 C_l P_l(\cos\theta)$$

   O valor para C_l, fica:

$$C_l = \int_0^{\pi} V_0(\theta) P_l(\cos\theta) \sin\theta \; d\theta.$$

3. **Griffiths - Cap.3 - Problema 3.27.**

   Quatro partículas (uma de carga q, uma de carga $3q$ e duas de carga $-2q$) estão dispostas como mostra a figura abaixo, cada uma delas a uma distância a da origem. Encontre uma fórmula simples aproximada para o potencial, válida em pontos distantes da origem. (Expresse sua resposta em coordenadas esféricas.)



   RESOLUÇÃO

$$p = (3qa - qa)\hat{\boldsymbol{z}} + (-2qa - 2q(-a))\hat{\boldsymbol{y}} = 2qa\hat{\boldsymbol{z}}$$

Para a fórmula do potencial, temos:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p \cdot \hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}$$

Temos também que:

$$p \cdot \hat{\boldsymbol{r}} = 2qa\hat{\boldsymbol{z}} \cdot \hat{\boldsymbol{r}} = 2qa\cos\theta$$

Dessa forma, concluímos que o dipolo fica:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2qa\cos\theta}{r^2}$$