Eletrostática - Lei de Gauss.

Nome: Mateus Sousa Araújo.
Matrícula: 374858.
Professor: Antônio Joel Ramiro de Castro.
Curso: Engenharia de Computação.

1. **Griffiths - Cap. 2 - Problema 2.12.**

   Use a Lei de Gauss para encontrar o campo elétrico dentro de uma esfera uniformemente carregada (com densidade de carga ρ).

   RESOLUÇÃO

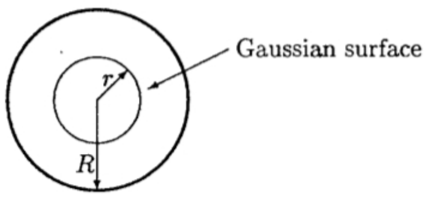

Figura 1: Superfície Gaussiana em uma esfera.

Precisamos considerar que o campo gerado por essa esfera é constante em toda sua redondeza. Também precisamos adotar a densidade superficial de cargas na esfera e substituir na relação. Dessa forma, podemos escrever:

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{da} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4\pi r^3 \rho}{3}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{3\epsilon_0} \rho r \ \hat{\boldsymbol{r}}$$

2. **Griffiths - Cap. 2 - Problema 2.13.**

   Encontre o campo elétrico a uma distância s de um fio reto de comprimento infinito, que tem uma densidade linear de carga uniforme λ.

   RESOLUÇÃO

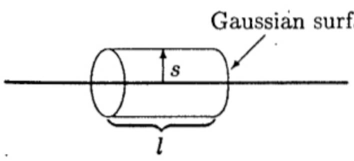

Figura 2: Superfície Gaussiana em um fio.

Primeiramente precisamos considerar que o campo gerado a uma distância s do fio é sempre constante. Dessa forma, considerando a densidade linear e uma Gaussiana envolvendo o fio, temos:

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{da} = E \cdot 2\pi s \cdot l = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot 2\pi s \cdot l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s}\ \hat{\boldsymbol{s}}$$

3. **Griffiths - Cap. 2 - Problema 2.19.**

Calcule $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ ou $\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$. Considere o campo elétrico gerado por uma carga pontual.

RESOLUÇÃO

Considere um corpo extenso de densidade volumétrica ρ que exerce um campo elétrico em um ponto P no espaço. Se tomarmos um ponto de origem O e fizermos os vetores de posição até o ponto P e calcularmos o campo elétrico, temos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(r')dv'\ \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \right)$$

Perceba que a variável em questão nesse caso é r' pois esse vetor de posição é onde o corpo extenso se encontra com suas densidades de cargas infinitesimais. Logo, precisamos nos preocupar do operador nabla aplicado no versor unitário. Esse vetor unitário possui, em coordenadas cartesianas, a seguinte relação:

$$\frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} = \frac{(x - x')\hat{\boldsymbol{\imath}} + (y - y')\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (z - z')\hat{\boldsymbol{k}}}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

O operador nabla aplicado no versor fica da seguinte forma:

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \right) = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{(x - x')}{r^3} & \dfrac{(y - y')}{r^3} & \dfrac{(z - z')}{r^3} \end{vmatrix}$$

Fazendo o cálculo do determinante para o versor $\hat{\boldsymbol{\imath}}$, temos:

$$\hat{\boldsymbol{\imath}} \left[\frac{\partial}{\partial y} \frac{(z - z')}{r^3} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{(y - y')}{r^3} \right] = 0$$

Percebe-se que, para o versor $\hat{\boldsymbol{\imath}}$, o vetor nessa coordenada possui uma componente igual a zero. Isso também é perceptível para os outros versores. Podemos concluir então que o campo elétrico gerado por uma carga pontual é igual a zero. Se retornarmos à nossa integral de campo, a mesma dará zero também devido ao cálculo do rotacional do campo.

Por propriedade, se o rotacional de um campo vetorial for igual a zero, dizemos que esse campo é conservativo. Se tomarmos a integral de linha deste campo em um contorno fechado, essa integral claramente será igual a zero devido à sua propriedade conservativa. A essa propriedade, chamamos de propriedade das integrais de linha, logo:

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$$

Concluindo assim que o campo elétrico gerado por cargas pontuais é de natureza conservativa.