UFC

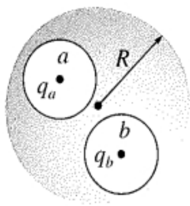
Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá
Avaliação Parcial 1

Prova 1 - Eletrostática.

Nome: Mateus Sousa Araújo.
Matrícula: 374858.
Professor: Antônio Joel Ramiro de Castro.
Curso: Engenharia de Computação.

1. **Griffiths - Cap. 2 - Problema 2.36.**

   Duas cavidades esféricas de raios a e b são escavadas no interior de uma esfera condutora (neutra) de raio R, como na figura abaixo. No centro de cada cavidade é colocada uma carga pontual - chame essas cargas de q_a e q_b.



   (a) Encontre as densidades superficiais de carga σ_a, σ_b e σ_R.

   RESOLUÇÃO

   Podemos usar a relação abaixo para encontrar a densidade superficial de cargas das cavidades e do corpo neutro:

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

   Em que Q e A são a carga e a área do corpo, respectivamente. Dessa forma, para σ_a, σ_b e σ_R, temos:

$$\sigma_a = \frac{q_a}{4\pi a^2}$$

$$\sigma_b = \frac{q_a}{4\pi b^2}$$

$$\sigma_R = \frac{q_a + q_b}{4\pi R^2}$$

   (b) Qual é o campo fora do condutor?

   RESOLUÇÃO

   Se envolvermos nosso corpo neutro com uma Gaussiana de raio R, podemos usar a Lei de Gauss da eletricidade para tal análise.

$$\oint \vec{E}\ \hat{n}\ dA = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

   Como dentro da esfera apenas estão inclusas as cargas q_a e q_b, podemos concluir que o campo elétrico externo na direção normal é:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_a + q_b}{R^2}\ \hat{n}$$

(c) Qual é o campo dentro de cada cavidade?
RESOLUÇÃO
Como temos uma esfera condutora e neutra, podemos dizer que o campo dentro elétrico dentro é igual a 0. Porém, nas duas cavidades existem campo elétrico, já que dentro das mesmas existem cargas pontuais. O campo existe separadamente para ambas cavidades. Dessa forma, teremos o campo elétrico nas cavidades resultando:

$$\vec{E_a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_a}{r_a^2}\ \hat{r_a}$$

$$\vec{E_b} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_b}{r_b^2}\ \hat{r_b}$$

(d) Qual é a força em q_a e q_b?
RESOLUÇÃO
Como dentro da esfera, o campo elétrico é nulo, e a força elétrica depende única e exclusivamente desse campo, podemos afirmar que a força entre as cargas q_a e q_b será zero. Embora exista campo em cada cavidade, os campos não vão interagir para haver força, uma vez que a esfera condutora está neutra.

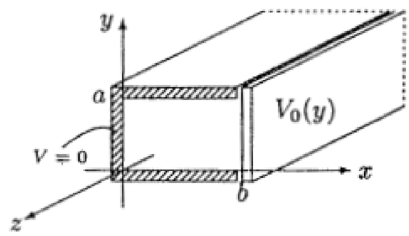
(e) Qual dessas respostas mudaria se uma terceira carga, q_c, fosse aproximada do condutor?
RESOLUÇÃO
Se uma terceira carga se aproximasse do condutor, então essa carga entraria na região da Gaussiana, e portanto, o campo externo à esfera muda. Seguindo a mesma ideia, se uma carga de qualquer sinal se aproxima do condutor, então essa carga irá polarizar o condutor, e dessa forma a densidade do condutor muda, uma vez que há uma maior concentração de cargas em uma região que antes não apresentava. Como há apenas uma polarização no condutor, e esse condutor ainda continua neutro, o campo interno a ele ainda é zero, e não temos força entre q_a e q_b.

2. **Griffiths - Cap. 3 - Problema 3.14.**

Um tubo retangular que corre paralelo ao eixo z (de $-\infty$ a $+\infty$), tem três lados de metal aterrados, em $y = 0$, $y = a$ e $x = 0$. O quarto lado, em $x = b$, é mantido em um potencial específico $V_0(y)$.

(a) Desenvolva uma fórmula geral para o potencial no interior do tubo.
(b) Encontre o potencial explicitamente, para o caso $V_0(y) = V_0$ (uma constante).

RESOLUÇÃO



(a) Com a figura acima, temos as seguintes condições de contorno:

i. $V(x, 0) = 0$
ii. $V(x, a) = 0$

iii. $V(0, y) = 0$
iv. $V(b, y) = V_0(y)$

Precisamos resolver a equação de Laplace para esse caso:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Podemos considerar duas funções em x e y que compõem o potencial.

$$V(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$$

Fazendo as derivadas segundas de cada função de acordo com a equação de Laplace, temos:

$$V_{xx} = \psi(y)\varphi''(x)$$
$$V_{yy} = \varphi(x)\psi''(y)$$

Somando na equação de Laplace e dividindo ambos temos por $1/V$, obtemos:

$$\frac{1}{V}(\psi(y)\varphi''(x) + \varphi(x)\psi''(y)) = 0$$

$$\frac{1}{\varphi(x)}\varphi''(x) + \frac{1}{\psi(y)}\psi''(y) = 0$$

$$f(x) + g(y) = 0$$

Podemos chamar $f(x)$ de uma constante c_1 e $g(y)$ de outra constante c_2. Dessa forma:

$$c_1 + c_2 = 0$$
$$c_1 = -c_2$$
$$c_1 = k^2$$

Temos duas equações de 1 ordem:

$$\frac{1}{\varphi(x)}\varphi''(x) = c_1 \tag{1}$$

$$\frac{1}{\psi(y)}\psi''(y) = c_2 \tag{2}$$

Em 1 temos:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = k^2 \varphi$$

Para esse caso, temos uma solução da seguinte forma:

$$\varphi(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx} \tag{3}$$

Em 2 temos:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -k^2 \psi$$

Para esse caso, temos uma solução da seguinte forma:

$$\psi(y) = C\sin(ky) + D\cos(ky) \tag{4}$$

Aplicando a 3ª condição em 3, temos:

$$V(0, y) = \varphi(0)\psi(y) = 0$$

Da condição acima, temos que $\varphi(0) = 0$. Aplicando esse resultado em 3, temos:

$$B = -A$$

Aplicando a 1ª condição em 4, temos:

$$V(0, y) = \varphi(x)\psi(0) = 0$$

Da condição acima, temos que $\psi(0) = 0$. Aplicando esse resultado em 4, temos:

$$D = 0$$

Aplicando a 2ª condição em 4, temos:

$$V(0, y) = \varphi(x)\psi(a) = 0$$

Da condição acima, temos que $\psi(a) = 0$. Substituindo esse valor em 4, temos que:

$$ka = n\pi$$

$$k = \frac{n\pi}{a}$$

onde, $n = 0, 1, 2, 3, ...$
Retornando para $V(x, y)$, temos:

$$V(x, y) = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C\sin(ky) + D\cos(ky))$$

$$V(x, y) = (2AC)(e^{n\pi x/a} - e^{-n\pi x/a})\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

$$V(x, y) = (2AC)\sinh\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

Já que $2AC$ é uma constante arbitrária, temos:

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \tag{5}$$

Aplicando a última condição em 5, temos:

$$\sum C_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) = V_0(y)$$

Por definição, temos:

$$C_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) = \frac{2}{a}\int_0^a V_0(y)\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\ dy$$

Portanto, chegamos:

$$C_n = \frac{2}{a\sinh(n\pi b/a)}\int_0^a V_0(y)\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\ dy$$

(b)

$$C_n = \frac{2}{a\sinh(n\pi b/a)}V_0\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\ dy$$

No entanto, temos:

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\ dy = \begin{cases} 0, \text{ se n for par} \\ \dfrac{2a}{n\pi}, \text{ se n for ímpar} \end{cases}$$

Com as condições acima, podemos concluir:

$$V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\ldots}\frac{\sinh(n\pi x/a)\sin(n\pi y/a)}{n\sinh(n\pi b/a)}$$

3. **Griffiths - Cap. 3 - Problema 3.19.**

Suponha que o potencial $V_0(\theta)$ na superfície de uma esfera é especificado e que não há carga dentro ou fora da esfera. Mostre que a densidade de carga na esfera é dada por

$$\sigma(\theta) = \frac{\epsilon_0}{2R}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)^2 C_l P_l(\cos\theta)$$

onde

$$C_l = \int_0^\pi V_0(\theta)P_l(\cos\theta)\sin\theta\ d\theta.$$

RESOLUÇÃO

Podemos usar a seguinte relação:

$$\sigma(\theta) = \epsilon_0\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)A_l R^{l-1}P_l(\cos\theta)$$

Temos que:

$$A_l = \frac{2l+1}{2R^l}\int_0^\pi V_0(\theta)P_l(\cos\theta)\sin\theta\ d\theta$$

Juntando as duas, temos:

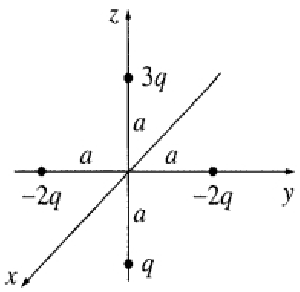
$$\sigma(\theta) = \epsilon_0\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)^2 C_l P_l(\cos\theta)$$

O valor para C_l, fica:

$$C_l = \int_0^\pi V_0(\theta) P_l(\cos\theta) \sin\theta \; d\theta.$$

4. **Griffiths - Cap.3 - Problema 3.27.**

Quatro partículas (uma de carga q, uma de carga $3q$ e duas de carga $-2q$) estão dispostas como mostra a figura abaixo, cada uma delas a uma distância a da origem. Encontre uma fórmula simples aproximada para o potencial, válida em pontos distantes da origem. (Expresse sua resposta em coordenadas esféricas.)



RESOLUÇÃO

$$p = (3qa - qa)\hat{\boldsymbol{z}} + (-2qa - 2q(-a))\hat{\boldsymbol{y}} = 2qa\hat{\boldsymbol{z}}$$

Para a fórmula do potencial, temos:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot \hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}$$

Temos também que:

$$p \cdot \hat{\boldsymbol{r}} = 2qa\hat{\boldsymbol{z}} \cdot \hat{\boldsymbol{r}} = 2qa\cos\theta$$

Dessa forma, concluímos que o dipolo fica:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qa\cos\theta}{r^2}$$

5. **Griffiths - Cap. 4 - Problema 4.10.**

Uma esfera de raio R tem uma polarização

$$P(r) = kr$$

onde k é uma constante e r é o vetor a partir do centro.

(a) Calcule as cargas de polarização σ_p e ρ_p.

(b) Encontre o campo dentro e fora da esfera.

RESOLUÇÃO

(a) Para encontrar σ_b temos:

$$\sigma_b = P \cdot \hat{n} = kR$$

Para ρ_b, temos:

$$\rho_b = -\nabla \cdot P = -\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 kr) = -\frac{1}{r^2}3kr^2 = -3k$$

.

(b) Para $r < R$, temos que o campo elétrico é:

$$E = \frac{1}{3\epsilon_0}\rho r \hat{r}$$

Para $r > R$, temos:

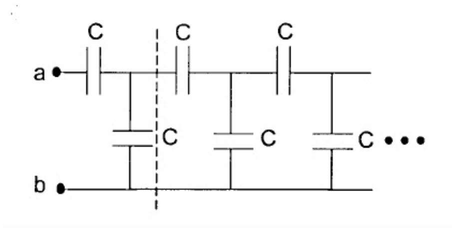
$$Q_{tot} = (kR)(4\pi R^2) + (-3k)(4/3\pi R^3) = 0$$

.

Podemos concluir pela expressão acima que $E = 0$.

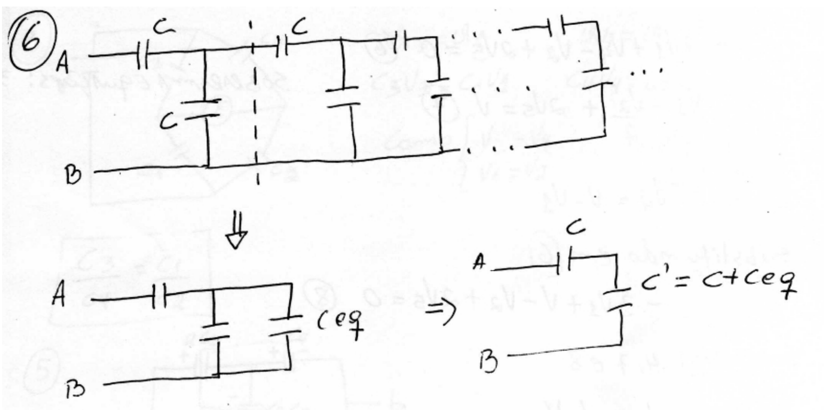
6. **Moysés Nussenzveig - Cap. 5 - Problema 6.**

Ache a capacitância equivalente ao sistema infinito de capacitores da figura, entre os pontos a e b. **Sugestão:** Note que a capacitância à direita da linha vertical interrompida equivale a do sistema todo, por ele ser infinito.



RESOLUÇÃO

Podemos reorganizar nosso circuito da seguinte forma:



Para o circuito resultante acima, podemos associar em série os capacitores:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C'}$$

$$C_{eq} = \frac{C * C'}{C + C'}$$

$$C_{eq}(C + C') = C * C'$$

Substituindo a relação encontrada para C', temos:

$$C_{eq}[2C + C_{eq}] = C[C + C_{eq}]$$

$$2C + C_{eq} + C_{eq}^2 = C^2 + CC_{eq}$$

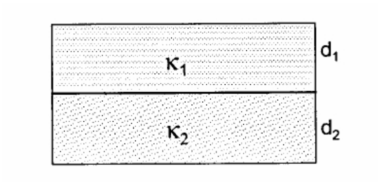
$$C_{eq}^2 + CC_{eq} - C^2 = 0$$

Acima temos uma equação do segundo grau em C_{eq}. Descobrindo as raízes, temos que a capacitância equivalente, vale:

$$C_{eq} = \frac{C(-1 + \sqrt{5})}{2}$$

7. **Moysés Nussenzveig - Cap. 5 - Problema 9.**

O espaço entre as placas (de área A) de um capacitor plano está preenchido por duas camadas dielétricas adjacentes, de espessuras d_1 e d_2 e constantes dielétricas k_1 e k_2, respectivamente. A diferença de potencial entre as placas é V e o campo aponta de 1 para 2. Encontre:



(a) A capacitância C do capacitor.

RESOLUÇÃO

Pela lei de Gauss, o campo elétrico da placa de um capacitor plano é da seguinte forma:

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

Se integrarmos esse campo para encontrarmos a diferença de potencial entre as placas do capacitor de 0 a d, obtemos:

$$V = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}$$

Aplicando esse resultado para achar a capacitância na relação $C = Q/V$, obtemos:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

A capacitância de um dielétrico C_{diel} depende de uma constante σ:

$$C_{diel} = \sigma C$$

$$C_{diel} = \sigma \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

A capacitância total do capacitor é a soma da capacitância dos dois dielétricos:

$$C_1 + C_2 = \frac{\sigma_0 \epsilon_0 A}{d_1} + \frac{\sigma_1 \epsilon_0 A}{d_2}$$

Simplificando, obtemos:

$$\frac{1}{C} = \frac{d_1}{\sigma_0 \epsilon_0 A} + \frac{d_2}{\sigma_1 \epsilon_0 A}$$

(b) A densidade superficial de carga livre σ nas placas.

RESOLUÇÃO

Pela relação geral para capacitores e considerando uma distribuição de cargas $Q = \sigma A$, temos:

$$Q = CV$$

$$\sigma A = CV$$

$$\sigma = \frac{CV}{A}$$