Eletrostática - Potencial Elétrico.

Nome: Mateus Sousa Araújo.
Matrícula: 374858.
Professor: Antônio Joel Ramiro de Castro.
Curso: Engenharia de Computação.

1. **Griffiths - Cap. 2 - Problema 2.25.**

Usando as equações 2.27 e 2.30, encontre o potencial a uma distância z acima do centro das distribuições de carga da figura abaixo. Em cada caso, calcule $E = -\vec{\nabla} V$. Suponha que alteramos a carga do lado direito da Figura a para $-q$; qual será, então, o potencial em P? Que campo isso sugere?

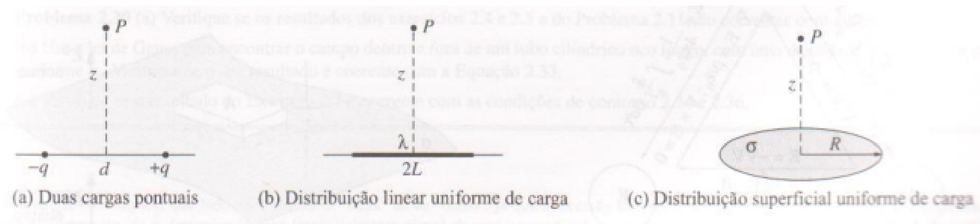

Figura 1: Distribuições de carga em diferentes configurações.

RESOLUÇÃO

(a) Como temos uma distribuição discreta de cargas, então temos pelo princípio da superposição a seguinte relação:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}$$

Somando a contribuição das duas cargas pela fórmula acima, chegamos em:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{\sqrt{z^2+(d/2)^2}}$$

.

Fazendo $E = -\vec{\nabla} V$, temos:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2qz}{(z^2+(d/2)^2)^{3/2}}\hat{\boldsymbol{z}}$$

.

(b) Como nesse caso temos uma distribuição contínua de cargas, temos a seguinte relação:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r}$$

Para a distribuição linear, temos:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-L}^{L}\frac{\lambda dx}{\sqrt{z^2+x^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ln(x+\sqrt{z^2+x^2})|_{-L}^{L}$$

$$V(r) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left[\frac{L+\sqrt{z^2+L^2}}{-L+\sqrt{z^2+L^2}}\right] = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{L+\sqrt{z^2+L^2}}{z}\right).$$

Fazendo $E = -\vec{\nabla}\ V$, temos:

$$E = \frac{2L\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{z\sqrt{z^2+L^2}}\hat{\boldsymbol{z}}$$

.

Se fizermos a carga da direita ser $-q$ então o potencial no ponto desejado será 0. Logo, isso também sugere que $E = -\vec{\nabla}\ V = 0$.

(c) Como no item anterior, temos que assumir uma unidade infinitesimal de área e colocar na integral. Dessa forma, temos:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R \frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}2\pi\sigma(\sqrt{r^2+z^2})|_0^R$$

$$V(r) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2}-z\right).$$

Fazendo $E = -\vec{\nabla}\ V$, temos:

$$E = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0}\left[1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]\hat{\boldsymbol{z}}$$

.

2. **Griffiths - Cap. 2 - Problema 2.28.**

Use a equação 2.29 para calcular o potencial dentro de uma esfera sólida de raio R com densidade de carga uniforme e carga total q.

RESOLUÇÃO

Integrando em coordenadas esféricas, temos:

$$V(r) = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{r^2\sin\theta\ dr\ d\theta\ d\phi}{\sqrt{z^2+r^2-2rz\cos\theta}}$$

$$\frac{\rho}{4\pi\epsilon_0}\int_0^\pi \frac{\sin\theta}{\sqrt{z^2+r^2-2rz\cos\theta}}\ d\theta = \frac{1}{rz}(\sqrt{r^2+z^2-2rz\cos\theta})|_0^\pi = \frac{1}{rz}(\sqrt{r^2+z^2+2rz}-\sqrt{r^2+z^2-2rz})$$

3. **Griffiths - Cap. 2 - Problema 2.29.**

Verifique se a Equação 2.29 satisfaz a equação de Poisson, aplicando o laplaciano e usando a Equação 1.102.

RESOLUÇÃO

$$\nabla^2 V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \nabla^2\int\frac{\rho}{r}\ dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\rho(r')\left(\nabla^2\frac{1}{r}\right)\ dr$$

Aplicando a propriedade da função Delta de Dirac temos:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\rho(r')[-4\pi\delta^3(r-r')]\ dr = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(r).$$

Logo, a equação acima satisfaz a equação de Poisson.