Eletrostática - Lei de Coulomb.

Nome: Mateus Sousa Araújo.
Matrícula: 374858.
Professor: Antônio Joel Ramiro de Castro.
Curso: Engenharia de Computação.

1. **Griffiths - Cap. 2 - Problema 2.2.**

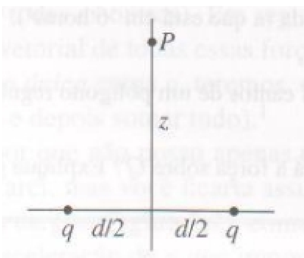

Figura 1: Cargas separadas a uma distância d.

(a) Encontre o campo elétrico (magnitude, direção e sentido) a uma distância z acima do ponto central entre duas cargas iguais, q, que estão separadas por uma distância d. Verifique se o resultado é coerente com o que se espera quando $z >> d$.

RESOLUÇÃO

Primeiramente, é preciso verificar a atuação dos campos elétricos gerados pelas duas cargas no ponto P.

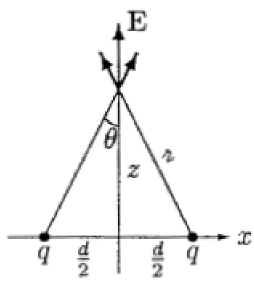

Figura 2: Campos elétricos gerados pelas duas cargas no ponto P.

Pode-se perceber que, pela decomposição de forças, as componentes horizontais se cancelam. Apenas duas componentes no eixo vertical se somarão, e dessa forma podemos descobrir o campo resultante E_z neste ponto . Dessa forma, podemos escrever:

$$\vec{E_z} = 2E\cos\theta.$$
$$\vec{E_z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{r^2}\cos\theta.$$
$$r^2 = z^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2.$$

Substituindo $\cos\theta$ e o valor de r temos:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2qz}{\left(z^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right)^{3/2}}.$$

Quando $z >> d$, temos que a contribuição de campo no ponto P é dado pela soma das duas cargas, ou seja, $2q$. Logo, o campo elétrico na direção z fica:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{(z^2)}.$$

(b) Repita a parte (a), só que desta vez faça a carga do lado direito igual a $-q$ em vez de $+q$.
RESOLUÇÃO
Quando a carga da direita assume sinal negativo, temos que o campo resultante no ponto P atuará de forma diferente como foi visto no item a. Dessa vez, as componentes na direção vertical se cancelam, resultando apenas a soma das componentes na direção x.

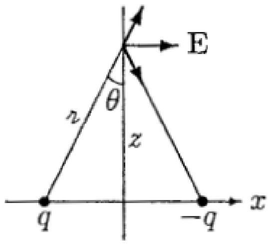

Figura 3: Atuação do campo resultante no ponto P após a carga da direita ficar com sinal negativo.

Dessa forma, podemos escrever:

$$\vec{E_z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{r^2}\sin\theta.$$

Assim como no item a, podemos substituir os valores de $\sin\theta$ e o valor de r. Dessa forma, temos:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qd}{\left(z^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right)^{3/2}}.$$

Se fizermos $z >> d$, o campo elétrico na direção $\hat{x}$ se torna:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qd}{(z^3)}.$$

2. **Griffiths - Cap. 2 - Problema 2.3.**

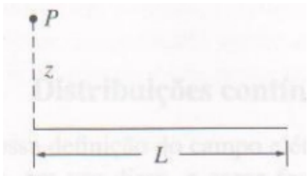

Figura 4: Segmento linear de cargas.

Encontre o campo elétrico a uma distância z acima de uma das extremidades de um segmento de linha reta L e que tem uma distribuição linear de carga uniforme, de densidade λ. Verifique se a sua fórmula é coerente com o que seria de se esperar para o caso de $z >> L$.

RESOLUÇÃO

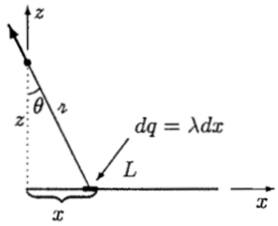

Figura 5: Campo resultante na contribuição de uma carga infinitesimal.

É preciso saber a contribuição de campo de um elemento infinitesimal de carga ao longo de toda linha e depois intregar num intervalo de 0 a L. O Campo resultante terá duas componentes em $\hat{z}$ e $\hat{x}$. É preciso calcular cada uma dessas componentes.

$$\vec{E_z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{\lambda\ dx}{r^2} \cos\theta\ \hat{z}.$$

Substituindo os valores de r e $\cos\theta$, temos:

$$\vec{E_z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda z \int_0^L \frac{1}{(x^2+z^2)^{3/2}}\ dx.$$

Essa integral basta escolher $z = x\tan\theta$ e fazer uma substituição trigonométrica. No final, retornando para a variável em x, temos nossa função em z aplicado de 0 a L:

$$\vec{E_z} = \frac{1}{z^2} \left[\frac{x}{\sqrt{z^2+x^2}} \right]_0^L.$$

No final, temos:

$$\vec{E_z} = \frac{1}{z^2} \left[\frac{L}{\sqrt{x^2+L^2}} \right].$$

Da mesma forma, para a direção $\hat{x}$, temos:

$$\vec{E_x} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{\lambda\ dx}{r^2} \sin\theta\ \hat{x}.$$

Substituindo os valores de r e $\sin\theta$ na função, obtemos:

$$\vec{E_x} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \int_0^L \frac{x}{(x^2+z^2)^{3/2}}\ dx.$$

Basta fazer uma susbtituição simples e aplicando os limites de integração podemos encontrar o campo na direção $\hat{x}$.

$$\vec{E_x} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2+L^2}} \right].$$

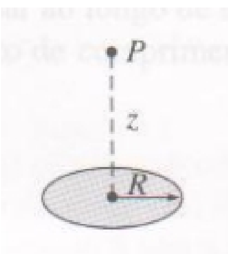

Figura 6: Disco circular plano de densidade superficial σ.

Agora basta juntar as duas componentes do campo resultante.

$$\vec{E}_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{z}\left[\left(-1+\frac{z}{\sqrt{z^2+L^2}}\right)\hat{x}+\left(\frac{L}{\sqrt{z^2+L^2}}\right)\hat{z}\right].$$

3. **Griffiths - Cap. 2 - Problema 2.6.**

Encontre o campo elétrico a uma distância z acima de um disco circular plano de raio R, que tem uma densidade superficial de carga uniforme σ. O que a sua fórmula revela no limite $R \to \infty$?

RESOLUÇÃO

A ideia é dividir o disco em anéis concêntricos elementares e calcular o campo elétrico no ponto P somando, ou seja, integrando as contribuições de todos os anéis. O campo elétrico resultante gerado por um anel é dado por:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq\ z}{(z^2+r^2)^{3/2}}.$$

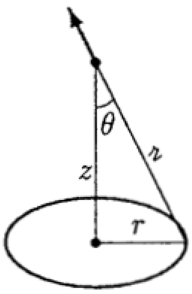

Figura 7: Carga infinitesimal gerando campo elétrico em um anel.

A área infinitesimal de um anel, é dado por $2\pi r dr$, onde dr é a largura infinitesimal do mesmo. Como temos vários anéis se somando, temos uma densidade superficial de cargas. Dessa forma, podemos escrever:

$$dq = \sigma\ dA.$$
$$dq = 2\sigma\pi r dr.$$

Podemos substituir a relação acima em dq no anel e fazer uma integração de 0 a R.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}2\pi\sigma z\int_0^R \frac{r}{(r^2+z^2)^{3/2}}\ dr.$$

Após uma substituição simples, temos:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi\sigma z \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right] \hat{z}.$$

Para $R \to \infty$, temos:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \hat{z}.$$