МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.К. АММОСОВА»
Якутское отделение Регионального научно-образовательного математического центра
Дальневосточный центр математических исследований

VII Всероссийская олимпиада студентов образовательных организаций высшего образования (ВСО) в 2021-2022 году

Олимпиада по математике XXIV Лаврентьевских чтений

Составители:
Федотов Егор Дмитриевич
Шарин Евгений Федорович

Якутск 2022г.

VII Всероссийская олимпиада студентов образовательных организаций высшего образования (ВСО) в 2021-2022 году

Олимпиада по математике XXIV Лаврентьевских чтений

1. На каждом лотерейном билете есть 9-значный номер, в котором используются только цифры 1, 2 и 3 (не обязательно все три должны присутствовать). Каждый билет имеет один из трех цветов: розовый, голубой или белый. Известно, что если два билета не совпадают ни по одной из цифр во всех 9 позициях, то они разного цвета. Билет 122222222 розовый, 222222222 белый, какого цвета билет 123123123?

2. Решите уравнение

$$3\lfloor x\rfloor + 2\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor = 2023.$$

3. Докажите, что сумма $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}$ для любого целого $n>0$ иррациональна.

4. Пусть d_n будет наибольшим общим делителем элементов матрицы A^n+2^nE, где

$$A=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 3 & 5\end{pmatrix}, \quad E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Докажите, что $d_n\to\infty$ при $n\to\infty$.

5. Найдите все функции $f(x,y,z)$ определенные в $\mathbb{R}^3$, для которых выполняются равенства

$$f(a,b,c)+f(a+2\sqrt{3}d,b,c)+f(a+\sqrt{3}d,b\pm 3d,c)+f(a+\sqrt{3}d,b\pm d,c+2\sqrt{2}d)=2024$$

для любых $a,b,c,d\in\mathbb{R}/\{0\}$, $\pm$ в обоих случаях менятся одновременно.

6. В прямоугольном треугольнике ABC (C-прямой угол), через точки A и B провели параболу, так что прямые CA и CB являются касательными к ней. Докажите, что точка C лежит на директрисе этой параболы, а также что фокус этой параболы совпадает с проекцией точки C на гипотенузу.

В случае параболы $y^2=2px$, $p>0$ фокус находится в точке $(p/2,0)$, уравнение директрисы $x=-p/2$, при этом (по определению) расстояния от точек параболы до фокуса и директрисы равны.

7. Пусть $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, неубывающая и непрерывная функция. Докажите, что

$$\int\limits_0^1 x^2 f(x)dx \le \int\limits_{1/2}^1 f(x)dx.$$

Найдите все такие $f(x)$, при которых выполняется равенство.

Решение задач

Решение задачи 1.

Билеты под номерами $A = 311311311$ и $B = 333113113$ будут белыми, так как они не сопадают по всем цифрам с билетами из условия. Тогда билет с номером $C = 211331331$ голубой, так как он не совпадает с билетом номер B и розовым билетом из условия. Откуда получам что билет 123123123 розовый так как не совпадает с билетом A и C.

Критерии

- Если участник не доказывает цвет одного билета и использует в дальнейшем его - 3 балла
- Если участник доказывает, что искомый билет не голубой, но не доказывает, что он не белый, ссылаясь на аналогичные рассуждения (либо неправльно доказывает) - 2 балла
- Если участник не доказывая пишет цвета билетов - 1 балл

Решение задачи 2.

Пусть $x = m + y$, где m-целое и $0 \leq y < 1$. Тогда задача разбивается на два случая, $m \geq 0$ и $m < 0$. Начнем с случая когда $m \geq 0$.

$$3\lfloor m + y \rfloor + 2\lfloor (m + y)\lfloor m + y \rfloor \rfloor = 3m + 2\lfloor m^2 + my \rfloor = 3m + 2m^2 + 2\lfloor my \rfloor = 2023.$$

Так как $0 \leq y < 1$, то $0 \leq \lfloor my \rfloor < m$. Или же

$$0 \leq 2\lfloor my \rfloor = 2023 - 3m - 2m^2 < 2m$$

Решая данную систему неравенств, получим что, m может равняться только 31. Подставляя его в исходное уравнение, получим

$$2\lfloor 31y \rfloor = 8, \quad \lfloor 31y \rfloor = 4, \quad 5 > 31y \geq 4, \quad \frac{5}{31} > y \geq \frac{4}{31}, \quad 31 + \frac{5}{31} > x \geq 31 + \frac{4}{31}.$$

Теперь рассмотрим случай когда целая часть будет отрицательной, для простоты обозначим $x = -m - y, m > 0$ и $0 \leq y < 1$

$$3\lfloor -m - y \rfloor + 2\lfloor (-m - y)\lfloor -m - y \rfloor \rfloor = 3(-m - 1) + 2(m^2 + m) + 2\lfloor y(m + 1) \rfloor = 2023,$$

$$2m^2 - m - 3 + 2\lfloor y(m + 1) \rfloor = 2023.$$

Аналогично как и в предыдущем случае, в силу $m+1 > \lfloor (m+1)y \rfloor \geq 0$ получим следующую систему неравенств

$$2(m + 1) > 2\lfloor y(m + 1) \rfloor = 2026 - 2m^2 + m \geq 0.$$

У него снова будет единственное решение $m = 32$. Подставляя его в исходное уравнение получим

$$2\lfloor 33y \rfloor = 10, \quad \lfloor 33y \rfloor = 5, \quad 6 > y \geq 5, \quad \frac{6}{33} > y \geq \frac{5}{33}, -32 - \frac{6}{33} < x \leq -32 - \frac{5}{33}$$

Ответ:

$$x \in \left(-32 - \frac{6}{33} \ ; \ -32 - \frac{5}{33}\right] \bigcup \left[31 + \frac{4}{31} \ ; \ 31 + \frac{5}{31}\right)$$

Критерии

- Вычислительная ошибка - 6 баллов
- Рассмотрена только положительная (отрицательная) часть решения - 4 балла
- Рассмотрена только положительная (отрицательная) часть решения с небольшой вычислительной ошибкой - 3 балла
- Целое число равняется 31 (или 32) составлено верное неравенство - 1 балл

Решение задачи 3.
Докажем от противного, пусть для некоторого n данная сумма рациональна, также упростим себе жизнь, сделав замену $m = n + 1$.

$$\sqrt{m-1} + \sqrt{m} + \sqrt{m+1} = a, \quad a \in \mathbb{Q}.$$

Проведем несколько возведений в квадрат

$$(\sqrt{m-1} + \sqrt{m})^2 = (a - \sqrt{m+1})^2, \quad 2m - 1 + 2\sqrt{m(m-1)} = a^2 + m + 1 - 2a\sqrt{m+1},$$

$$(2\sqrt{m(m-1)} + 2a\sqrt{m+1})^2 = (a^2 - m + 2)^2, \quad b + c\sqrt{m(m-1)(m+1)} = d.$$

Где b, c и d некоторые рациональные числа.

$$\sqrt{m(m-1)(m+1)} = \frac{d-b}{c} = r \in \mathbb{Q}.$$

С другой стороны $\sqrt{N}$, при натуральном N, является рациональным, тогда и только тогда когда N полный квадрат. Иными словами $m(m-1)(m+1)$ также должен являться полным квадратом. Заметим что

$$\text{НОД}(m, m-1) = \text{НОД}(m, m+1) = \text{НОД}(m, m^2-1) = 1.$$

Тогда и m и $m^2 - 1$ должны быть полными квадратами. Пусть $m^2 - 1 = N_1^2$, но у данного уравнения только два решения в целых числах $m = \pm 1, N_1 = 0$, что нам не подходит.

Критерии

- Решение полное с недочетами - 5-6 баллов
- Неполное решение с прописыванием (или выделением) частных случаев - 3 балла.
- Неполное решение с прописыванием (или выделением) частных случаев - 3 балла.
- Правильные преобразования, приводящие в дальнейшем к некоторым выделенным (если, когда...) частным случаям - 4 балла.
- Безосновательное применение положения о том, что те или иные слагаемые (или же их сумма) должны быть рациональными - 0 баллов.

В том числе, здесь идет речь о частных случаях без указания их таковыми, т.е. неверно доказывают на основании ложного предубеждения о том, что "если сумма двух (трех) чисел является рациональным числом, то каждое слагаемое будет рациональным." - 0 баллов. К примеру если сказано без доказательств, что число равное сумме (корень из 2) плюс (корень из 3) - иррационально, то это необосновано. Также утверждение вида "число равное сумме (корень из n+1) плюс (корень из n+2) - иррационально для всех n=k*k, где k - натуральное" является необоснованным - а вдруг для какого то n все-таки эта сумма рациональное число.

Решение задачи 4.
Заметим что $AA^n = A^nA$, тогда матрица A^n будет иметь вид

$$A^n = \begin{pmatrix} a & 7b \\ 3b & a \end{pmatrix}.$$

Тогда нам необходимо будет найти только НОД$(a+2^n, b)$. Так как $det(A) = 4$, то $det(A^n) = 4^n$ или же

$$a^2 - 21b^2 = 4^n, \quad (a+2^n)(a-2^n) = 21b^2, \quad b = \sqrt{\frac{(a+2^n)(a-2^n)}{21}},$$

тогда

$$\text{НОД}(a+2^n, b) \geq \sqrt{\frac{a+2^n}{21}}.$$

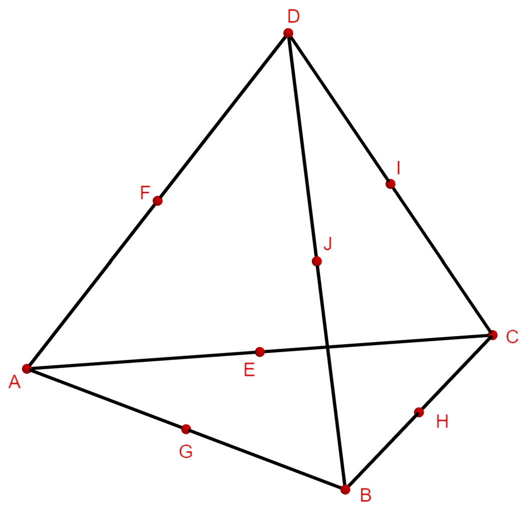
Откуда видим что $d_n \to \infty$, при $n \to \infty$.

Критерии

- Верно, но есть ошибки при переходе шага мат индукции, оценка правильная - 5 баллов
- Верно, но есть ошибки при переходе шага мат индукции, оценка неполная - 3-4 балла
- Рассмотрен частный случай, который привёл бы к решению в случае обобщения, но ошибка в обобщении - 2 балла
- Рассмотрен частный случай, не раскрывающий общую картину - 1 балл

Решение задачи 5.

Обозначим аргументы функций через соответствующие точки A, B, C, D. Рассмотрим вектора $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$. Все их попарные скалярные произведения равны $6d^2$, а все их длины равны $2\sqrt{3d^2}$. Откуда мы можем заключить что все попарные углы между этими векторами равны 60^o. Тогда выходит что A, B, C, D являются вершинами правильного тетраэдра с ребром длины $2\sqrt{3d^2}$. И при этом AB всегда параллелен оси Ox и плоскость ABC параллельна плоскости Oxy. А также $\pm$ в точках C и D отвечает за зеркальную симметрию через плоскость Oxz. Значит, что правильный тетраэдр $ABCD$ может принимать два вида, любого размера и любого параллельного переноса.



Рассмотрим правильный тетраэдр $ABCD$. Отметим на серединах всех ребер точки. Обозначим их как показано ниже на рисунке. Так как наше условие верно для всех правильных тетраэдров, то распишем условие задачи по полученным тетраэдрам.

$$f(A) + f(B) + f(C) + f(D) = 2024,$$

$$f(A) + f(F) + f(G) + f(E) = 2024,$$
$$f(B) + f(G) + f(J) + f(H) = 2024,$$
$$f(C) + f(E) + f(H) + f(I) = 2024,$$
$$f(D) + f(F) + f(J) + f(I) = 2024.$$

Немножко преобразовав их, мы получим следующее.

$$f(D) - f(G) - f(E) - f(H) = -1012.$$

Также заметим, что точки G, E и H являются как раз частью второго типа правильных тетраэдров что обсуждали выше. Тогда выписав для него условие задачи, то

$$f(L) + f(G) + f(E) + f(H) = 2024, \text{ получаем } f(D) + f(L) = 1012.$$

В силу свободы выбора размера изначального тетраэдра, то длина отрезка DL ничем не ограничена. Откуда не хитрыми манипуляциями устанавливаем, что $f(P) = 506$, для всех точек P в пространстве.

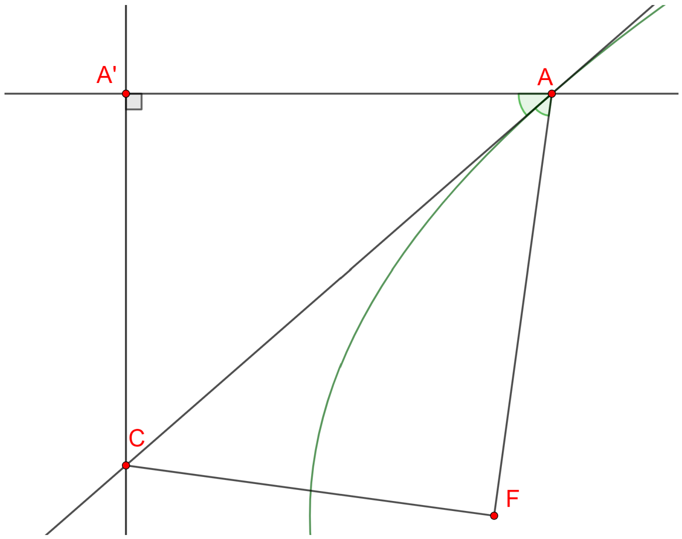
Критерии

- Выяснили что координаты это вершины тетраэдра но есть существенные ошибки - 3 балла
- За верный ответ без доказательства или неверное доказательство - 1 балл

Решение задачи 6.

Не теряя общности, пусть уравнение нашей параболы будет в каноническом виде $y^2 = 2px$. Тогда уравнение директрисы будет иметь вид $x = -p/2$, а фокус $F(p/2, 0)$.

Отметим на директрисе точку C и проведем через него касательные к параболе. Точки касания обозначим за A и B.

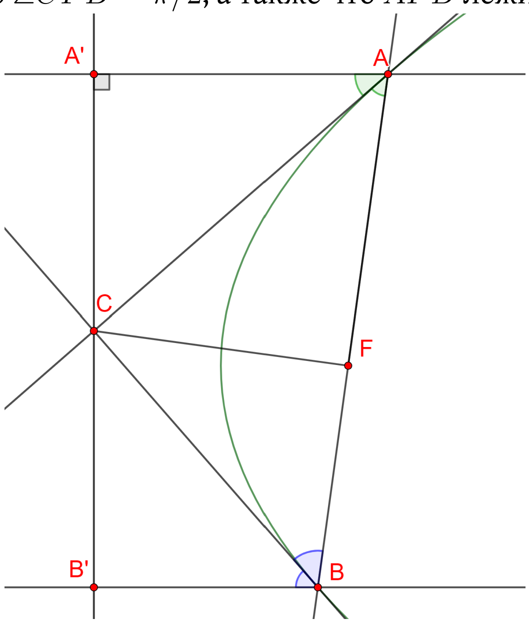


Отметим на директрисе проекцию точки A за A'. Координаты точки $A(x_0, y_0)$. Тогда направляющий вектор касания будет иметь вид $\overrightarrow{AC} = \lambda(y_0, p)$. Также распишем вектора $\overrightarrow{AA'} = (-p/2 - x_0, 0)$ и $\overrightarrow{AF} = (p/2 - x_0, -y_0)$. По свойству параболы видно что $|\overrightarrow{AF}| = |\overrightarrow{AA'}|$. Также заметим что

$$\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AA'} = (-2x_0, -y_0) = -\frac{y_0}{p}(y_0, p)$$

$$\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AA'} = \mu\overrightarrow{AC}$$

Из последнего равенства видно, что AC является биссектрисой угла $\angle FAA'$. Тогда в силу того, что $FA = AA'$ видим, что $\triangle AA'C = \triangle AFC$. Или же $\angle CFA = \pi/2$. Аналогично мы получим и то, что $\angle CFB = \pi/2$, а также что AFB лежит на одной прямой.



В силу равенств треугольников $\triangle AA'C = \triangle AFC$ и $\triangle BB'C = \triangle BFC$. Найдем что $\angle ACB = \pi/2$. Также заметим, что

$$Cos(\angle CAB) = \frac{y_0(x_0 - p/2) + py_0}{\sqrt{y_0^2 + p + 2}\sqrt{(x_0 - p/2)^2 + y_0^2}},$$

$$Cos(\angle CAB) = \frac{y_0}{\sqrt{y_0^2 + p^2}}.$$

Откуда в силу свободы выбора точки A мы можем менять $\angle CAB$ как угодно. И тем самым покроем все возможные прямоугольные треугольники.

Критерии

- Доказан один из двух пунктов - 4 балла

Решение задачи 7.

Задача некорректна!

В первом случае один из контрпримеров $f(x) = -1$.

Во втором случае можно было найти контрпример $f(x) = x - c$

$$\int\limits_{1/2}^{1} (x-c)^2 dx - \int\limits_{0}^{1} x^2 (x-c)^2 dx = \frac{c^2}{6} - \frac{c}{4} + \frac{11}{120} = P(c).$$

Где дискриминант последнего равен $1/720$. Откуда существует c_0 такое что $P(c_0) < 0$

Критерии

- 7 баллов за второй контрпример
- 2 балла за первый контрпример