Matrices

Las matrices se utilizan para representar información dada por variables que se relacionan, como por ejemplo la cantidad de kilocalorías y proteínas que aportan una porción de alimento fortificante y una porción de leche en polvo:

	kilocalorías	Proteínas
Alimento fortificante	120	4
Leche en polvo	450	20

Teniendo en cuenta que por columnas (línea vertical) se ubican las kilocalorías y proteínas y que por filas (línea horizontal) se ubican los dos tipos de alimento la tabla se puede escribir:

$$\begin{pmatrix} 120 & 4 \\ 450 & 20 \end{pmatrix}$$

<u>Definición</u>: Una matriz de tamaño m x n es una tabla rectangular o cuadrada formada por mxn elementos dispuestos en m filas y n columnas.

Forma general de una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$

Donde los subíndices indican la posición del elemento en la matriz, es decir en qué fila y columna se encuentra ubicado.

Forma general simplificada

$A = (a_{ij})_{mxn}$ da la ubicación general de un elemento ubicado en la "fila i" y "columna j"

Ejemplos

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2/3 & 1/2 \end{pmatrix}_{2x2} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & \sqrt{3} \\ -3 & 4 & 7 \end{pmatrix}_{2x3} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}_{3x2} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 8 & e & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 5 \\ -6 & e & 4 & 7 \\ 4 & \pi & 20 & -9 \end{pmatrix}_{4x4}$$

Tipos de Matrices

Matriz nula: Es la matriz que tiene todos sus elementos iguales a cero. Es el elemento neutro en la suma de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3x3} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{3x2}$$

Matriz o vector fila: Es toda matriz formada por una sola fila.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}_{1x3} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 4 & 6 \end{pmatrix}_{1x4}$$

Matriz o vector columna: Es toda matriz formada por una sola columna.

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}_{2x1} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}_{3x1}$$

Matriz opuesta: Es la matriz que se obtiene de multiplicar cada elemento por (-1). Dada la matriz A, su opuesta se indica por –A.

Si $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, entonces $-A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$

Matriz Traspuesta: Es la matriz que resulta de intercambiar filas por columnas. Si $A = (a_{ij})_{mxn}$, entonces $A^t = (a_{ji})_{mxn}$, es decir, el elemento ubicado en la fila i y columna j pasa a estar ubicado en la fila j y columna i.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}_{3x2}$; $A^t = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -4 & 7 & 8 \end{pmatrix}_{2x3}$

Matrices cuadradas: Una matriz es cuadrada cuando posee igual número de filas que de columnas. En ellas se distingue la diagonal principal (la diagonal leída de izquierda a derecha) y la diagonal secundaria (la diagonal leída de derecha a izquierda).

Al tener igual número de filas que de columnas, m = n por la tanto se dice que la matriz es de orden n

Ejemplos

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_2$ Matriz de orden 2. Diagonal principal: 1 y 4. Diagonal segundaria: 2 y 3

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}_3$ Matriz de orden 3. Diagonal principal: 1, 5 y 9. Diagonal secundaria: 3, 5 y 7

Tipos de matrices cuadradas

1. ***Matriz unidad o identidad***: Es la matriz cuyos elementos ubicados en la diagonal principal son iguales a uno y el resto cero. Es el elemento neutro en la multiplicación de matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_2 \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_1$$

2. ***Matriz Simétrica***: Es la matriz donde todos los elementos ubicados simétricamente (a la misma distancia) respecto de la diagonal principal son iguales.

- **Propiedad**: Si A es una matriz simétrica, resulta $A = A^t$.

Ejemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ es simétrica

3. ***Matriz Antisimétrica***: Es la matriz que tiene en su diagonal principal todos los elementos iguales a cero y los elementos ubicados simétricamente respecto de ella son opuestos.

- **Propiedad**: Si A es una matriz antisimétrica, resulta $A = -A^t$

Ejemplo $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

4. ***Matriz triangular superior***: Es la matriz que tiene todos sus elementos ubicados por debajo de la diagonal principal iguales a cero.

Ejemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

5. ***Matriz triangular inferior***: Es la matriz que tiene todos sus elementos ubicados por encima de la diagonal principal iguales a cero.

Ejemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

- **Ejercicios**

Escribe una matriz que resulte:

a) De orden: 2 x 3, donde los elementos ubicados en la primera fila sean múltiplos de la segunda.
b) Columna de 4 filas cuyos elementos son todos iguales a $\sqrt{23}$.
c) Simétrica de orden 4, verifica realizando la trasposición.
d) Antisimétrica de orden 3. Verifica efectuando la operación que la satisface.
e) Unidad de orden 5
f) Cuadrada de orden 4 cuyos elementos de la diagonal principal sean iguales a -2.
g) Triangular superior, de orden 4 cuyos elementos ubicados en la diagonal principal resulten números primos menores a 17
h) Triangular inferior cuyos elementos ubicados en la diagonal principal sean irracionales menores a 10

Igualdad de matrices

Dos o más matrices son iguales si, tienen el mismo orden y sus elementos igualmente ubicados son iguales:

Ejemplo: Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ entonces $A = S \Leftrightarrow x = -2; y = 5; z = 1; t = 3$

Ejercicio: Halla los valores de las incógnitas para que las matrices sean iguales:

$$\begin{pmatrix} a-b & b+c \\ 3d+c & 2a-4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Operaciones con Matrices

Suma de matrices

Supongamos la siguiente situación: Dos personas, J y A son vendedores de dos productos (x e y) de una línea de artículos. Cada uno gana $ 45 por unidad vendida del artículo x y $20 por unidad vendida del artículo y. En la primer semana J vendió 120 artículos del producto x y 130 artículos del producto y; mientras que en la segunda semana vendió 210 del artículo x y 140 del artículo y. Por otro lado, Andrés en la primera semana vendió 210 artículos del producto x y 410 artículos del producto y; y en la segunda semana vendió 320 del artículo x y 810 del artículo y.

a) Expresa la situación de cada vendedor en forma matricial.
b) Halla una matriz que exprese el total de unidades vendidas de cada uno
c) ¿Cuál es el significado en ella del elemento en la posición 1º fila 2º columna?
d) Halla una matriz para cada uno que exprese la ganancia de cada uno.

(Resolución en clase)

Entonces para poder sumar matrices es necesario que tengan la misma dimensión u orden. Es decir si $A = (a_{ij})_{mxn}$ y $B = (b_{ij})_{mxn}$, entonces $A + B = (d_{ij})_{mxn}$.

Se obtiene sumando cada elemento igualmente ubicado en la matriz.

- **Propiedades**

Sean α, β escalares y A, B, C matrices donde su tamaño permite las operaciones y O la matriz nula, se cumplen las siguientes propiedades:

a) Propiedad Conmutativa: $A + B = B + A$

b) Propiedad Asociativa: $(A+B)+C=A+(B+C)$
c) Existencia del elemento neutro: $A+O=O+A=A$
d) Leyes distributivas: $\alpha.(A+B)=\alpha.A+\alpha.B$; $(\alpha+\beta).A=\alpha.A+\beta.A$
e) Existencia del inverso aditivo u opuesto: $A+(-A)=O$

Ejemplos

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -3\\ -3 & 4 & 0\end{pmatrix}_{2x3}$; $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}_{3x2}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$

Halla, si es posible: $A+B$; $A+B^t$; A^t+C^t

Diferencia o resta entre matrices

A partir de la definición de opuesta, la diferencia o resta entre matrices se obtiene sumando a una matriz, la matriz opuesta de otra:

Si $A=(a_{ij})_{mxn}$ y $B=(b_{ij})_{mxn}$, entonces $A-B=A+(-B)=(d_{ij})_{mxn}$

(Se obtiene restando cada elemento igualmente ubicado en la matriz.

Ejemplo 1

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -6 & 4\end{pmatrix}$, halla A-B

Ejemplo 2

Si C es la matriz nula ¿Cuál matriz corresponde a la matriz X? $\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\end{pmatrix}+X=C$

Producto de una matriz por un escalar (número real)

Si λ es un número real y $B=(b_{ij})_{mxn}$, entones $\lambda.B$ es otra matriz que se obtiene de multiplicar cada elemento de B por el escalar λ

Ejemplo: Si $\lambda=-2$, y $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}$, entonces $\lambda.B=\begin{pmatrix}4 & -2 & -6\\ -2 & 0 & 8\end{pmatrix}$

Propiedades

Si λ y α son números reales y A y B matrices de tamaño mxn, se cumple:

1) $\alpha.A$ es una matriz mxn.
2) $1.A = A$
3) $(-1).A = -A$
4) $\alpha.(A+B) = \alpha.A + \alpha.B$.
5) $\alpha.(\lambda.A) = (\alpha.\lambda).A$
6) $(\alpha+\lambda).A = \alpha.A + \lambda.A$

Producto entre matrices

Suponemos la siguiente situación: La matriz M muestra los consumos promedio anuales de luz (Kwh), gas (m^3) y teléfono (pulsos) de dos familias estándar. La matriz N muestra los costos, en sus unidades respectivas, en los años 2003, 2004, 2005 y 2006.

$$M = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1953 & 2084 & 3400 \\ 1800 & 1950 & 3200 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \end{array} \end{array} \qquad N = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0{,}10 & 0{,}12 & 0{,}13 & 0{,}15 \\ 0{,}11 & 0{,}11 & 0{,}13 & 0{,}14 \\ 0{,}06 & 0{,}08 & 0{,}07 & 0{,}07 \end{pmatrix} \begin{array}{l} luz \\ gas \\ tel \end{array} \end{array}$$

Efectuar una operación que refleje el gasto total de cada familia por año. (Resolución en clase)

Para poder multiplicar matrices, es necesario que el número de columnas de la primer matriz factor sea igual al número de filas de la segunda matriz factor. Es decir, dada $A = (a_{ij})_{mxp}$ y $B = (b_{ij})_{pxn}$, el producto $A.B = (d_{ij})_{mxn}$, la matriz producto tiene el número de filas de la primer matriz factor y el número de columnas de la segunda matriz factor. Se observa que el producto no es conmutativo.

Propiedades

Si A, B y C son matrices para las cuales están definidas las operaciones indicadas, se verifica:

1) $(A.B).C = A.(B.C)$ Propiedad asociativa.
2) $A.(B + C = A.B + A.C)$ Distributiva, a la izquierda del producto con respecto a la suma.
3) $(A + B).C = A.C + B.C$ Distributiva, a la derecha del producto con respecto a la suma.
4) $A.I = I.A = A$, la matriz identidad es elemento neutro de la multiplicación entre matrices, esto significa que a toda matriz puede asociarse una matriz identidad correspondiente de manera que pueda multiplicarse.
5) $(AB)^t = B^t.A^t$

Ejercicio 1: Dadas las matrices**,** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$ **Calcula** $(AB)^t$ **y** $B^t A^t$

Ejercicio 2: Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$**,** $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$**,** halla si es posible A.B

Ejercicio 3: Asocia a cada matriz del ejercicio 1 una matriz identidad y verifica que es elemento neutro en la multiplicación.

Determinante de una matriz

En el conjunto de matrices cuadradas, se define una función que a cada matriz le hace corresponder un número real, al que se llama Determinante de dicha matriz y se simboliza $|A|$

Determinante de orden 2

El determinante de orden 2 es el determinante asociado a una matriz de orden 2:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

Ejemplo: Calcular el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Propiedades de los determinantes

a) El determinante de una matriz es igual al determinante de su traspuesta. $|A| = |A^t|$.
b) Si la matriz tiene una línea (fila o columna) de ceros, entonces su determinante vale cero.
c) Si a una matriz se la multiplica toda una línea (fila o columna) por un escalar, entonces el determinante de la matriz resultante es múltiplo escalar del determinante de la matriz original.
d) Si a una matriz se le intercambian dos líneas (filas o columnas), el determinante asociado a dicha matriz cambia de signo. **Corolario**: Si una matriz tiene dos líneas iguales, su determinante vale cero.
e) Si a una línea (fila o columna) se le suma un múltiplo escalar de otra línea, su determinante no cambia.

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2-12=-14$

Si hacemos $F_1' = F_1 + 2F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = 14-28=-14$

a) Dadas las matrices $A=(a_{ij})_p$ y $B=(b_{ij})_p$, entonces el determinante del producto A.B es igual al producto de los determinantes de cada matriz factor. $|A.B| = |A|.|B|$.
b) Si los elementos de una línea (fila o columna) son suma de m términos, entonces el determinante asociado puede descomponerse en la suma de m determinantes.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} a+b & c+d & e+f \\ 2a & 2c & 2e \\ -b & -d & -f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c & e \\ 2a & 2c & 2c \\ -b & -d & -f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d & f \\ 2a & 2c & 2e \\ -b & -d & -f \end{vmatrix}$$

Menor complementario de un elemento

Se llama menor complementario de un elemento a_{ij} en una matriz, al valor del determinante de orden $n-1$ que se obtiene de suprimir en la matriz la fila i y la columna j

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=2-3=-1$

De esa manera se pueden hallar los menores complementarios de todos los elementos de la matriz.

Adjunto o cofactor de un elemento

Se llama adjunto o cofactor de un elemento a_{ij} al menor complementario anteponiendo el factor $(-1)^{i+j}$.

Entonces del ejemplo anterior: $C_{22}=(-1)^{2+2}(-1)=-1$. En general: $C_{i,j}=(-1)^{i+j}.\gamma_{i,j}$

De esta manera también puede calcularse todos los cofactores de los elementos de una matriz y formar una nueva matriz llamada "Matriz de cofactores"

Ejemplo: Calcular la matriz de los cofactores del ejemplo anterior.

Determinantes de orden 3. Regla de Sarrus

La regla de Sarrus permite resolver sólo determinantes de orden tres. La regla implica formar diagonales agregando las dos primeras filas en la parte inferior o bien las dos primeras columnas a la dereche.

Luego se opera realizando la diferencia de la suma de los productos de los elementos ubicados en dichas diagonales.

Ejemplo

Calcular el valor del determinante de la matriz A si:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Agregando las dos primeras filas en la parte inferior resulta:

$$A=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=(2.3.1+1.2.1+(-2).0.(-1))-(1.3.(-2)+(-1).2.2+1.0.1)=(6+2+0)-(-6-4+0)$$

Entonces: $|A| = 8 - (-10) = 8 + 10 = 18$

Agregando las dos primeras columnas a la derecha resulta:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (2.3.1 + 0.(-1).(-2) + 1.1.2) - (0.1.1. + 2.(-1).2 + 1.3.(-2)) \Rightarrow$$

$$|A| = (6 + 0 + 2) - (0 - 4 - 6) = 8 - (-10) = 8 + 10 = 18$$

Matriz Adjunta

La matriz adjunta de una matriz A, es la que resulta de trasponer la matriz de los cofactores, es decir

$$\boldsymbol{AdjA = (MC)^t}$$

- **Propiedad**:

$$\boldsymbol{A.Adj(A) = Adj(A).A = |A|I} \quad (I\text{: matriz identidad del mismo orden del de la matriz } A)$$

Ejemplo: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calcula su adjunta y verifica la propiedad.

Matriz inversa

Dada una matriz A, si existe otra B tal que la multiplicación de $A.B = I$ (matriz identidad, entonces se dice que B es inversa de A, o bien que las matrices son invertibles y se dice que $B = A^{-1}$

Ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *entonces existe* $B = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$ *tal que*: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Por definición de producto:

$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 2z + 3t = 0 \\ -x + y = 0 \\ -z + t = 1 \end{cases}$ Reordenando en dos sistemas de ecuaciones: $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -x + y = 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} 2z + 3t = 0 \\ -z + t = 1 \end{cases}$

Resolviendo resulta $\begin{cases} x = 1/5 \\ y = 3/5 \\ z = 3/5 \\ t = 2/5 \end{cases} \Rightarrow B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$

Verificación: $A.A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\boldsymbol{A^{-1}.A = ?}$$

Cálculo de la matriz inversa por el método del adjunto

El método de la definición aplicado en el ejemplo anterior resulta poco práctico si se trabajan con matrices de orden superior a 2, por esto existen otros métodos de cálculo, uno de ellos es el método del adjunto.

Aplicando la propiedad de la matriz adjunta: $A.Adj = |A|.I$ y dividiendo ambos miembros por $|A|$ resulta:

$$\frac{A.AdjA}{|A|} = I \Rightarrow A.\frac{AdjA}{|A|} = I \Rightarrow A^{-1} = \frac{AdjA}{|A|} \text{ ya que } A.A^{-1} = A^{-1}A = I$$

<u>Observación: La condición necesaria y suficiente para que una matriz presente inversa es que su determinante sea distinto de cero.</u>

Ejemplo 1: Usamos el método para la matriz del ejercicio anterior:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2-(-3) = 5 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

Entonces: $MC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ y $Adj = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{AdjA}{|A|} = \begin{pmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$

Ejemplo 2: Cuál debe ser el valor de "t" en la matriz para que no presente inversa?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3: Calcula, si existe, la matriz inversa de la matriz por el método del adjunto.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4: Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 9/2 & -17/2 & 5/2 \\ 1/2 & -3/2 & 1/2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ comprueba que sus inversas son:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Luego, con $\lambda = 2$ verifica las siguientes propiedades:

a) $(A+B)^t = A^t + B^t$ b) $(\lambda.A)^t = \lambda.A^t$

c) $(A.B)^t = B^t.A^t$ d) $B^{-1}.A^{-1} = (A.B)^{-1}$

e) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ f) $(\lambda.A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}.A^{-1}$

Propiedades de la trasposición e inversión de matrices:

1) $(A+B)^t = A^t + B^t$
2) $(\lambda.A)^t = \lambda.A^t$
3) $(A^t)^t = A$
4) $(A.B)^t = B^t.A^t$
5) $(A^{-1})^{-1} = A$
6) $B^{-1}.A^{-1} = (A.B)^{-1}$
7) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
8) $(\lambda.A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}.A^{-1}$
9) $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

Ecuaciones Matriciales

Las expresiones algebraicas que en sus términos contienen matrices y las operaciones posibles entre ellas representan ecuaciones.
Resolver una ecuación matricial significa encontrar la matriz incógnita que la verifica.

Casos:

1) $A+X=B$ donde A, X y B son matrices mxn y las operaciones son posibles resulta:

$$A+X=B$$
$$A+X-A=B-A$$
$$\boldsymbol{X=B-A}$$

2) $X.A=B$ o $A.X=B$

Para poder encontrar los coeficientes de la matriz X procedemos de la siguiente manera según el caso:

2.1) $X.A=B$

$$X.A.\boldsymbol{A^{-1}} = B.\boldsymbol{A^{-1}}$$
$$X.I = B.A^{-1}$$
$$\boldsymbol{X = B.A^{-1}}$$

2.2) $A.X=B$

$$\boldsymbol{A^{-1}}.A.X = \boldsymbol{A^{-1}}B$$
$$I.X = A^{-1}.B$$
$$\boldsymbol{X = A^{-1}.B}$$

Se debe tener en cuenta la no conmutatividad de la operación de producto.

Ejercicio: Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

$$D=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -3\\ 1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} \qquad E=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & -3\end{pmatrix} \qquad F=\begin{pmatrix}-2\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$

Halla:

a) $A.X+B=C^t$ b) $D.X=F$ c) $X.D+E=D^t$

Operaciones elementales por renglón o fila

En toda matriz es posible realizar las siguientes operaciones por renglón o fila:

I. Intercambiar dos renglones o filas: $R_i \leftrightarrow R_j$, significa intercambiar la fila i por la fila j.

Ejemplo: $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$

II. Multiplicar toda una fila o renglón por un escalar $\lambda \neq 0$. $R_i \leftrightarrow \lambda R_i$, significa reemplazar la fila i por esa misma multiplicada por el escalar λ.

Ejemplo: $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \leftrightarrow (-2)F_1 \begin{pmatrix}0 & -2 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$

III. Reemplazar una fila por el resultado de sumarla con otra. $R_i \leftrightarrow R_i + R_j$ significa reemplazar la fila i por el resultado de haberla sumado con la fila j.

Ejemplo: $\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix} F_1 \leftrightarrow F_1 + F_2 \begin{pmatrix}5 & 5\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

IV. Combinar las dos operaciones anteriores, es decir, reemplazar una fila por el resultado de haberla sumado con un múltiplo escalar de otra fila. $R_i \leftrightarrow R_i + \lambda R_j$ o bien $R_i \leftrightarrow \lambda R_i + R_j$.

Ejemplo

$$\begin{pmatrix}1 & -5 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ 3 & -1 & 4\end{pmatrix} F_3 \leftrightarrow -3F_1 + F_1 \begin{pmatrix}1 & -5 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ 0 & 14 & 1\end{pmatrix}$$

Una matriz está escalonada si:

1) El primer elemento no nulo de cada fila llamado pivote está a la derecha del pivote de la fila anterior, es supone que todos los elementos por debajo de un pivote son ceros.
2) Si hubiese toda una fila de ceros se la ubica en la parte inferior de la matriz.
3) Si en cada fila el pivote es el único elemento no nulo de su columna se dice que la matriz es **Matriz escalonada reducida.**

Ejemplos

Matriz Escalonada reducida	Matriz escalonada	Matriz no escalonada
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 01 \\ 0 & 0 & 0 & 00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Observación: La variación horizontal puede tener cualquier longitud pero la variación vertical de solo un renglón.

Rango de una matriz

Al número de renglones que tiene una matriz escalonada, se le denomina Rango de esa matriz.

Ejemplo: Calcular el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>Trabajo Práctico de Ejercitación: Matrices y Determinantes</u>

1. Analiza y justifica cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas para las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$

a) A es simétrica.

b) $(A+B)^t = A^t + B^t$

c) $(A^t)^t = A$

d) B es antisimétrica

e) $A + A^t = 2A^t$

f) $(A.B)^t = B^t.A^t$

g) $(A.A^t)$ es simétrica

h) $(A^t.A)$ es antisimétrica

i) $(A + A^t)$ es simétrica

j) $(A - A^t)$ es antisimétrica

k) $A.B = I$

l) $B.A = I$

2. Indica los valores de a y b para que el resultado de la operación $\begin{pmatrix} a^2 & -7 \\ b+2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 7 \\ a & b \end{pmatrix}$ sea la matriz identidad.

3. Halla la matriz traspuesta de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} -1 & -9 & -5 & -7 \\ 0 & 8 & 4 & 4 \\ 3 & 7 & -3 & -5 \\ 5 & -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -10 \\ 3 & 7 & 1 \\ 1 & -8 & 2 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -8 \\ -4 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

e) $E = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -6 \\ -9 & 3 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$ f) $F = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -6 \\ -10 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

4. En caso de ser posible efectuar las siguientes operaciones entre matrices:

a) A + B b) C + D c) -2C+ 3D, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -5 & \sqrt{3} \\ 7 & \pi \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ calcula $3A^t - B^t$.

6. Teniendo en cuenta las dimensiones de las siguientes matrices dadas en forma general para las operaciones que están definidas, escribe la dimensión de la matriz resultante:

$$A = (a_{i,j})_{4x5} \ ; \ B = (a_{i,j})_{4x5} \ ; \ C = (c_{i,j})_{5x2} \ ; \ D = (d_{i,j})_{4x2} \ ; \ E = (e_{i,j})_{5x4}$$

a) B.A b) A.C + D c) A.E + B d) A.B + B e) E. (A + B) f) E.A + C

7. Una fábrica produce dos modelos de lavadoras, A y B, en tres terminaciones: N, L y S. La terminación N lleva 25 horas de taller y 1 hora de administración. La terminación L lleva 30 horas de taller y 1.2 horas de administración. La terminación S lleva 33 horas de taller y 1.3 horas de administración. Produce del modelo A: 400 unidades en la terminación N, 200 unidades en la terminación L y 50 unidades en la terminación S. Produce del modelo B: 300 unidades en la terminación N, 100 unidades en la terminación L y 30 unidades en la terminación S.
   a) Representa la información en dos matrices.
   b) Halla una matriz que exprese las horas de taller y de administración empleadas para cada uno de los modelos. Ayuda: $\begin{array}{c|cc} & MA & MB \\ T & & \\ A & & \end{array}$

8. MATRIZ DE PRODUCCIÓN: Una empresa que fabrica televisores produce tres modelos con distintas características en tres tamaños diferentes. La capacidad de producción en su planta número uno es de: 5000 TV pequeños del modelo 1, 3000 del modelo 2 y 2000 del modelo 3; 7000 TV medianos del modelo 1, 4000 del modelo 2 y 5000 del modelo3; 10000 TV grandes del modelo 1, 8000 del modelo 2 y 4000 del modelo3. En su planta número dos la producción es de: 4000 TV pequeños del modelo 1, 5000 del modelo 2 y 3000 del modelo 3; 9000 TV medianos del modelo 1, 6000 del modelo 2 y 4000 del modelo 3; 8000 TV grandes del modelo 1, 12000 TV del modelo 2 y 2000 del modelo 3.
   c) Vuelca la información en dos matrices P1 y P2(una por planta)
   d) Halla la capacidad de producción total en las dos plantas mediante operaciones con matrices.
   e) Si la empresa decide incrementar su producción en la planta Nº1 en un 20%, por cuánto debes multiplicar a P1? ¿Qué cantidad de TV medianos se producirán con este incremento?

9. Un constructor hace una urbanización con tres tipos de viviendas: S (Sencillas), N (Normales) y L (Lujo). Cada vivienda sencilla tiene 1 ventana grande, 7 medianas y 1 pequeña. Cada vivienda normal tiene 2 ventanas grandes, 9 medianas y 2 pequeñas, y cada vivienda de lujo tiene 4 ventanas grandes, 10 medianas y 3 pequeñas. Cada ventana grande tiene 4 cristales y 8 bisagras, cada ventana mediana tiene 2 cristales y 4 bisagras y cada ventana pequeña tiene 1 cristal y 2 bisagras.

a) Escribe una matriz A que describa el número y tamaño de ventana de cada tipo de vivienda.
   i) ¿Qué representa el elemento $a_{2,3}$?
   ii) ¿Qué lugar ocupa el 9?
b) Escribe una matriz B que exprese el número de cristales y el número de bisagras en cada tipo de ventana.
   i) ¿En qué fila y en qué columna está ubicado el número 8 y qué representa?
   ii) ¿Es cierto que $b_{1,2} = b_{2,3}$?
c) Calcula una matriz que exprese el número de cristales y de bisagras necesarias en cada tipo de vivienda, ¿será A.B ó B.A? Justifica.

10. Dadas las matrices siguientes, resolver las operaciones indicadas cuando sea posible:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad E=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) A.B b) D + E c) D – E d) D.E e) E.D f) -7.B g) 3.C – D h) A.B.C i) (4B).C + 2B j) D + E. E

11. Si A es una matriz cuadrada, entonces A^2 se define como A. A. Calcula A^2, A^3, siendo $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

12. Calcula el valor del determinante de las matrices dadas:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & -8 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}$$

13. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 8$, calcula los siguientes determinantes aplicando propiedades:

a) $\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ 2d & 2e & 2f \\ 5g & 5h & 5i \end{vmatrix}$

14. Encuentra el valor de $x \in R$ de manera tal que se cumpla:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

15. Dada la matriz A, determina la matriz de sus cofactores.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

16. Para cada una de las matrices hallar la adjunta, verificar la propiedad que las relaciona.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

17. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & k^2+2k & 1 \\ -2-k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, halla los valores de k para que A sea simétrica e invertible.

Completa la tabla:

Para que sea:	**Simétrica**	**Invertible**	**Simétrica e invertible**
El valor de k es:			

18. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & k & 5 \\ -1 & -3 & -9 \end{pmatrix}$

a) Halla los valores de k para los cuales A es inversible.
b) Determina los valores de k para los cuales Det(A)= -7
c) Para los valores de k obtenidos en b) encuentra las matrices $B \in^{3x3} / Det(A.B) = -56$, sabiendo que Det(A.B)=detA.DetB

19. Halla si existe la inversa de las siguientes matrices por método del adjunto.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

20. Halla, si existe, la matriz inversa por la definición (método directo):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

21. Si A es una matriz de orden 3 cuyo determinante es igual a 2.

a) Indica si A es invertible. Justifica
b) Calcula el $\det(A^{-1})$
c) Calcula $\det(5.A^{-1})$
d) Calcula $\mathrm{Det}(5.A)^{-1}$

22. Resuelve las siguientes ecuaciones matriciales. Verifica en todos los casos.

a) $A.X + B = C$ si, $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $X.A - B = C$ si, $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$

c) $A.X^{-1} = B^t - (X.A^{-1})^{-1}$ *siendo* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

d) $X A = A^{-1}$ *siendo* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

e) $X^{-1}(A+B) = 3B^{-1} + (2BX)^{-1}$ *siendo* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

23. Determina el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & -10 & -6 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 6 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 12 & 8 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 9 & 3 \\ 3 & 6 & 4 & 12 & 11 \\ 4 & 8 & 5 & 15 & 15 \end{pmatrix}$$

24. Halla el valor de x (x<0) para que el rango de la siguiente matriz valga 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2x \\ x & 1 & 3 \\ 1 & 7 & x \end{pmatrix}$$

25. Halla el rango de la siguiente matriz según los distintos valores de x:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & x \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

Respuestas Matrices

1) a) Falso. b) Verdadero. c) Verdadero. d) Falso. e) Falso. f) Verdadero. g) Verdadero.
h) Falso. i) Verdadero. j) Verdadero. k) Verdadero. l) Verdadero

2) a = -3 ; b = 1   3) a) $A^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$; b) $B^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 5 \\ -9 & 8 & 7 & -4 \\ -5 & 4 & -3 & 3 \\ -7 & 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $C^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -6 & 7 & -8 \\ -10 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ d) $D^t = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 3 \\ 3 & -2 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$ e) $E^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -9 & 4 \\ -2 & -6 & 3 & 11 \end{pmatrix}$ f) $F^t = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 2 & 4 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$

4) a) No es posible. b) $C + D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 9 \\ 0 & -1 & 2+\sqrt{3} \end{pmatrix}$; c) $-2C + 3D = \begin{pmatrix} -8 & -15 & 2 \\ 0 & 7 & 6-2\sqrt{3} \end{pmatrix}$

5) $3A^t - B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 8 & 12 & 10 \\ 7 & 10 & 12 \end{pmatrix}$ 6) a) No es posible- b) Si es posible: 4x2 . c) Si es posible: 4x5 d) No es posible.
e) Si es posible: 5x5. f) No es posible

7) a) $\begin{pmatrix} & N & L & S \\ T & 25 & 30 & 33 \\ Ad & 1 & 1.2 & 1.3 \end{pmatrix}$; $\begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} N & 400 & 300 \\ L & 200 & 100 \\ S & 50 & 30 \end{pmatrix} \end{array}$; b) $\begin{pmatrix} & A & B \\ T & 17650 & 11490 \\ Ad & 705 & 459 \end{pmatrix}$

8) A cargo del estudiante

9)a) A= $\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & N & L \end{array} \\ \begin{pmatrix} G & 1 & 2 & 4 \\ M & 7 & 9 & 10 \\ P & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$; ai) En una vivienda de lujo hay 10 ventanas medianas. aii) 9=a_{22}

c) B= $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $donde\ f1\ son\ cristales, f2\ bisagras, C1{:}\ ventanas\ G; \dots \dots$

bi) $b_{2,1}$ una ventana grande lleva 8 bisagras. bii) si

d) Es B.A 2X3.3x3= 2x3, de donde: $B.A = \begin{pmatrix} 19 & 28 & 39 \\ 38 & 56 & 78 \end{pmatrix}$

10)

a) $A.B=\begin{pmatrix}12 & -3\\ -4 & 5\\ 4 & 1\end{pmatrix}$; b) $D+E=\begin{pmatrix}7 & 6 & 5\\ -2 & 2 & 4\\ 7 & 3 & 7\end{pmatrix}$; c) $D-E=\begin{pmatrix}-5 & 4 & -1\\ 0 & -2 & -2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$;

d) $D.E=\begin{pmatrix}9 & 13 & 24\\ -2 & 0 & 0\\ 32 & 11 & 27\end{pmatrix}$ e) $E.D=\begin{pmatrix}14 & 36 & 25\\ 6 & 1 & 12\\ 12 & 26 & 21\end{pmatrix}$; f) $(-7)B=\begin{pmatrix}-28 & 7\\ 0 & -14\end{pmatrix}$;

g) No es posible ; h) $A.B.C=\begin{pmatrix}3 & 45 & 9\\ 11 & -11 & 17\\ 7 & 17 & 13\end{pmatrix}$ i) No es posible ; j) $D+E.E=\begin{pmatrix}48 & 16 & 32\\ 3 & 6 & 13\\ 38 & 11 & 28\end{pmatrix}$

11) $A^2=\begin{pmatrix}7 & 6\\ 9 & 22\end{pmatrix}$; $A^3=\begin{pmatrix}11 & 38\\ 57 & 106\end{pmatrix}$. 13) a) $|A|=-6$; b) $|B|=-104$; $|C|=-116$; $|D|=50$

12) a) -6 b) -104 c) 28 d) 50

13) a) -8 b) 8 c) -240

14) $\nexists\, x \in R$

15) $MC=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 2\\ 14 & -10 & 8\\ 8 & 0 & 6\end{pmatrix}$ 16) a) $AdjA=\begin{pmatrix}0 & -2 & -2\\ -9 & 2 & 5\\ -6 & 4 & 4\end{pmatrix}$; $AdjB=\begin{pmatrix}-12 & 4 & -8\\ -6 & -11 & -4\\ -2 & 5 & 16\end{pmatrix}$;

$AdjC=\begin{pmatrix}-2 & 14 & 13\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 9 & 3\end{pmatrix}$, $A.AdjA=-6.Id_3$; $B.AdjB=-52.Id_3$; $C.AdjC=15.Id_3$.

17)

Para que sea:	Simétrica	Invertible	Simétrica e invertible
Valor de k	$k=\{-2,-1\}$	$\forall k\neq -2,0$	-1

18) a) $k\neq -3$ b) $k=-2$ c) $B=2I$

19) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-9/10 & -17/10 & -7/5\\ -3/5 & -4/5 & -3/5\\ 1/5 & 3/5 & 1/5\end{pmatrix}$ 20) $B^{-1}=\begin{pmatrix}11 & 4 & 17\\ -6 & -2 & -9\\ -3 & -1 & -5\end{pmatrix}$; $C^{-1}=\begin{pmatrix}5/2 & 4\\ 1/2 & 1\end{pmatrix}$; $D^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$

20) $A^{-1}=\begin{pmatrix}3/5 & -2/5\\ 1/5 & 1/5\end{pmatrix}$; $M^{-1}=\begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

21) a) Si b) 1/2 c) 125/2 d) 1/250

22) a) $X = \begin{pmatrix} 4/5 & -9/5 \\ 6/5 & -11/5 \end{pmatrix}$; b) $X = \begin{pmatrix} 10/3 & 11/3 \\ 13/3 & 5/3 \end{pmatrix}$; c) $X = \begin{pmatrix} -10/3 & -4/3 \\ 1/3 & 7/3 \end{pmatrix}$

d) $X = \begin{pmatrix} \frac{13}{72} & \frac{1}{36} & \frac{-7}{72} \\ \frac{-1}{144} & \frac{11}{72} & \frac{-5}{144} \\ \frac{-19}{144} & \frac{-7}{72} & \frac{49}{144} \end{pmatrix}$; e) $X = \begin{pmatrix} -19/6 & 12 \\ -4/3 & 13/2 \end{pmatrix}$

23) a) R(A)= 2 ; b) R(B)=3 ; c) R(C)= 2 ; d) R(D)= 2 ; e) R(E) = 1 ; f) R(F)= 3

24) $x = -1$

25) $\forall x \neq -2$, $RgA = 2$. $Si\ x = -2$, $RgA = 1$

Sistemas de Ecuaciones lineales

Problema: La suma de las edades de tres primos es 120. La edad del mayor es cuatro veces la edad del menor disminuido en 10. El del medio tiene la diferencia entre el mayor y el menor y éste tiene la suma entre la mitad de la edad del mayor y el del medio.

Planteo de las ecuaciones que representan las condiciones del problema: $\begin{cases} x + y + z = 120 \\ x = 4z - 10 \\ y = x - z \\ z = \frac{1}{2}x + y \end{cases}$

Definición general de un sistema de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones lineales es 2 o más variables o incógnitas. Resolver un sistema de este tipo consiste en hallar el/los valores que satisfacen las ecuaciones de manera simultánea.

Expresión general

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Tipos de soluciones

Un sistema de ecuaciones puede tener solución, o no:

Sistemas de ecuaciones →
- Con solución:
  - Única → Compatible Determinado
  - Infinitas → Compatible Indeterminado
- Sin Solución → Sistema Incompatible

Sistemas Homogéneos: Son aquellos sistemas en los que el término independiente en sus ecuaciones es nulo.

Ejemplo: $\begin{cases} 2x+3y+z-4t=0 \\ -x+2y+3z=0 \\ -x+3y-4t=0 \end{cases}$. Estos sistemas resultan siempre compatibles.

Sistemas triviales

Son aquellos cuya única solución para cada una de sus incógnitas es cero.

Sistemas Equivalentes

Son aquellos que tienen la misma solución. A partir de un sistema se obtiene un equivalente mediante las operaciones fundamentales vista en matrices, las cuales son:

- Cambiar el orden de las ecuaciones.
- Reemplazar una ecuación por el resultado de haberla multiplicado por un escalar distinto de cero.
- Reemplazar una ecuación por el resultado de haberla sumado a otra.

Teorema fundamental para la compatibilidad de sistemas

"En todo sistema de ecuaciones, si el número de ecuaciones es menor al número de incógnitas, el mismo resulta Compatible indeterminado"

Ejercicios

1. Aplica las operaciones fundamentales al siguiente sistema para obtener otros equivalentes: $\begin{cases} -x-2y-z=-5 \\ 2x+y+3z=2 \\ -x+3y=0 \end{cases}$
2. Escribe un par de sistemas de ecuaciones que resulten compatibles indeterminados.

Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones

Los métodos que se utilizan, según el tipo de sistema, son los siguientes:

- Método de Igualación
- Método de sustitución
- Regla de Cramer.
- Método de Rouche-Frobenius
- Método de Inversión de matrices

Ejercicios

3. En cada caso se pide que averigües cuáles de los pares de valores son soluciones de la ecuación correspondiente:

Ecuación	*Par 1*	*Par 2*	*Par 3*	*Par 4*
$2x-y=8$	$x=2\ ;\ y=4$	$x=2\ ;\ y=-4$	$x=5\ ;\ y=2$	$x=0\ ;\ y=-8$
$-0.5\,x+0{,}1\,y=0.8$	$x=1\ ;\ y=1$	$x=-1\ ;\ y=3$	$x=0\ ;\ y=8$	$x=4\ ;\ y=0$

4. Para cada caso encuentra un sistema equivalente de manera que los coeficientes sean sólo números enteros.

$$a)\begin{cases} 0.1x-0.5y=0.6 \\ 0.01x+0.05y=-0.04 \end{cases} \quad b)\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=0 \\ 0.01x+0.01y=0.01 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} \pi x+3\pi y=\pi \\ \frac{x}{e}+\frac{y}{2e}=\frac{1}{4e} \end{cases} \quad d)\begin{cases} 2\sqrt{2}x+3\sqrt{2}y=-\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=\frac{5}{6} \end{cases}$$

5. Lleva a la forma: $\mathrm{ax}+\mathrm{by}=\mathrm{c}$, con $a, b\ y\ c\ \in Q$

a) $\mathrm{y}=-2\mathrm{x}+4$ b) $\mathrm{y}=\frac{3\mathrm{x}-2}{4}$ c) $2.(\mathrm{x}-4)=3.(\mathrm{y}-3)$ d) $\mathrm{y}=\frac{1}{5}\mathrm{x}-2\mathrm{y}+3$

6. Plantea y resuelve los siguientes problemas aplicando un método que recuerdes:

a) El precio de una botella con tapón es de $102. Si el tapón vale la quinta parte de lo que vale la botella, ¿cuánto cuesta el tapón?

b) El precio de un teclado y un mousse es $1928. Si la suma entre el 20% de lo que cuesta el teclado y el 10% de lo que cuesta el mousse equivalen a $341.7, ¿cuánto cuesta cada uno de ellos?

c) Hoy la edad de Miguel es el doble de la de Juan. Dentro de 10 años la suma de sus edades será 65. ¿Cuántos años tiene cada uno actualmente?

Método de Cramer

La regla de Cramer utiliza determinantes y permite visualizar de manera rápida si un sistema tiene solución única o no al calcular el determinante de la matriz de sus coeficientes, ya que si el mismo resulta nulo, el sistema no tiene solución única.

En símbolos: Dado el sistema en forma general $S:\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$

Llamando Δ al determinante de los coeficientes de las incógnitas, se tiene:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & .. & \ldots & \ldots \\ . & .. & \ldots & \ldots \\ b_m & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix}}{\Delta}\ ;\ x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & .. & \ldots & \ldots \\ . & .. & \ldots & \ldots \\ a_{mn} & b_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix}}{\Delta}\ ;\ \ldots\ ;\ \ldots\ldots\ldots$$

Entonces, al saber que no se puede dividir un número real por cero y que la forma $\frac{0}{0}$ se llama indeterminada se concluye que:

- Si $\Delta \neq 0$, el sistema es compatible determinado (solución única)
- Si $\Delta = 0$, se debe calcular uno de los numeradores para concluir si el sistema no tiene solución o si posee infinitas.

Ejemplo

$$S: \begin{cases} 2x + y = 4 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

$MC = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $|MC| = \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2.1 - (-1).1 = 3 \neq 0$. Por lo tanto el sistema es compatible determinado.

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{4-1}{3} = 3 \ ; \ y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{2-(-4)}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Ejercicios

7. Plantea y resuelve los siguientes problemas utilizando la regla de Cramer:

a) El primo de Mariano tiene ahora la mitad de los años que tenía Mariano hace cuatro años. Mariano tiene cinco años más que su primo. Calcula cuantos años tiene Mariano y su primo.

b) La edad de Soledad es la cuarta parte de la edad de su madre. Dentro de 20 años, Soledad tendrá la mitad de la edad de su madre, ¿Cuántos años tienen ahora Soledad y su madre?

c) La suma de dos números es 26. La razón entre el doble del primero y el segundo es 7/3 (la razón es el cociente).Averigua cuáles son esos números.

d) En un salón hay alumnos y computadoras en cantidades tales que si se utiliza una computadora por alumno quedan 4 alumnos libres; si se ubican 3 alumnos por computadora, quedan 4 computadoras libres. ¿Cuántos alumnos y computadoras hay en el salón?

e) El perímetro de un rectángulo es de 72 cm., la diferencia entre su base y la altura es de 6 cm. ¿Cuál es su área?

8. Analiza la compatibilidad de los siguientes sistemas, halla la solución en caso que sea posible:

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ y - z = -1 \\ -2x + z = -1 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + 4y - z = -4 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} 2x + y - z = -5 \\ 3x + 2y = 4 \\ 2x + 6y - 2z = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x - y + 5z = -25 \\ 7x + 5y - z = 17 \\ 3x - y + z = -21 \end{cases}$ *e)* $\begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ 4x - y + 5z = 5 \\ x + z = 1 \end{cases}$ *f)* $\begin{cases} -x + 2y - 3z = -2 \\ -x + 8y - 27z = 0 \\ x - y - z = -1 \end{cases}$

9. Resuelve los siguientes problemas utilizando el método de Cramer:

a) Un equipo de fútbol jugó 10 partidos. Sabemos que la cantidad de partidos que perdieron es igual a la diferencia entre los que ganaron y los que empataron y que la suma de la cantidad de partidos que ganaron y los que perdieron es igual a la doble cantidad de partidos que empatados menos 2. Averigua cuantos partidos ganaron, cuantos perdieron y cuantos empataron.

b) Le preguntaron a Lucas qué notas se había sacado en las evaluaciones de historia, matemática y geografía. Lucas contestó: "las tres notas suman 20. El doble de la nota de historia es igual a la mitad de la suma de las otras dos. La nota de geografía es igual a la diferencia entre la nota de matemática y la de historia.". ¿Qué notas obtuvo Lucas en cada evaluación?

c) Un hotel europeo adquirió un total de 200 unidades entre almohadas, mantas y edredones, gastando un total de 7500 euros. El precio de una almohada es de 16 euros, el de una manta es de 50 euros y el de un edredón es de 80 euros. Además, el número de almohadas compradas es igual al número de mantas más el número de edredones. ¿Cuántas almohadas, mantas y edredones ha comprado el hotel?

d) Un videoclub está especializado en películas de tres tipos: infantiles, oeste americano y terror. Se sabe que: el 60% de las películas infantiles más el 50% de las del oeste representan el 30% del total de las películas. El 20% de las infantiles más el 60% de las del oeste más el 60% de las de terror representan la mitad del total de las películas. Hay 100 películas más del oeste que de infantiles. Halla el número de películas de cada tipo.

10. Determina para qué valores de k (o de a) el sistema:

a) $\begin{cases} x - 3y = -9 \\ 2x - 5ky = 7 \end{cases}$

No tiene solución real

b) $\begin{cases} 4x + 4y = 1 \\ x + ky = \frac{1}{2} \end{cases}$

Es compatible determinado

c) $\begin{cases} 2x + ky = -3 \\ kx + 2y = 1 \end{cases}$

Es compatible determinado

d) $\begin{cases} ax + y + 4z = 1 \\ -x + ay - 2z = 1 \\ y + z = a \end{cases}$

Es incompatible

e) $\begin{cases} (1-a)x + 2y = 3 \\ 3(1+a)x + 8y = 12 \end{cases}$

Tenga infinitas soluciones

f) $\begin{cases} x - y = 2 \\ ax + y + 2z = 0 \\ x - y + az = 1 \end{cases}$

Incompatible

Método de Rouche-Fröbenius

El método trabaja con el rango de la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada con los términos independientes y se define mediante el siguiente teorema:

Si en un sistema de ecuaciones el Rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada con los términos independientes, el sistema resulta compatible y va a resultar determinado o indeterminado dependiendo del número de incógnitas que figuren en la matriz resultante.
Si el Rango de la matriz de los coeficientes resulta menor al rango de la matriz ampliada con los términos independientes, el sistema resulta incompatible.

Es decir:

$$\mathbf{RangoA = RangoA' = R \ \ entonces\ el\ sistema\ es\ compatible} \begin{cases} \mathbf{R = n\ (nº\ de\ incógnitas)\ SCD} \\ \mathbf{R < n \quad SCI} \end{cases}$$

$$\mathbf{RangoA < RangoA'\,SI}$$

SCD: sistema compatible determinado. SCI: sistema compatible indeterminado.SI: sistema incompatible.

Veámoslo con el siguiente ejemplo:

Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones mediante Rouché Frobenius

$$\begin{cases} x+y-2z+v=-8 \\ 2x-y-z-2v=3 \\ 3x+2y+z-v=3 \\ -x+2y-z+3v=-1 \end{cases}$$

Método de Inversión de matrices

Consiste en formar una ecuación matricial formada por el producto de la matriz de los coeficientes y matriz columna, igualada a la matriz columna formada por los términos independientes:

Ejemplo: Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} -2x + y - z = 4 \\ -x - 3y + z = -1 \\ 2y + z = 2 \end{cases}$

Lo expresamos en forma de ecuación matricial de la siguiente manera:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} . \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}}$$

En donde si resolvemos el producto, obtenemos nuevamente el sistema de ecuaciones. Para hallar los valores de las variables se resuelve la ecuación matricial $\mathbf{A}.\mathbf{X} = \mathbf{B}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

11. Halla el valor de cada uno de los coeficientes de las matrices X e Y $\in R^{2x2}$ tal que verifiquen simultáneamente las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} 3X + 4Y = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -12 & 9 \end{pmatrix} \\ -2X + 3Y = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -9 & -6 \end{pmatrix} \end{cases}$$

12. Estudia la compatibilidad de cada sistema de ecuaciones mediante el método de Rouché Frobenius:

a) $\begin{cases} x+y-2z+v=-8 \\ 3x+y-z-3v=1 \\ -2x-z+4v=-9 \\ x+2y+z-2v=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3-x_4=3 \\ x_2-3x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2-2x_3=2 \\ 2x_1-2x_2+4x_3-x_4=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-y-2z=-2 \\ -x+y+z=0 \\ x-2y+z=8 \\ 2x-2y=6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+2y-2z=10 \\ -y+z+4x=4 \\ y+z-2x=-2 \\ -3y-x=-11 \end{cases}$

13. Dado el sistema:

$$\begin{cases} x-y=2 \\ ax+y+2z=0 \\ x-y+az=1 \end{cases}$$

a) Aplica primero el teorema de Rouche-Fröbenius para decir qué solución tendrá según los valores del parámetro "a". Luego analiza utilizando el método de Cramer.
b) Reflexiona sobre las respuestas de los incisos anteriores.
c) Resuelve para a=2.

14. Resuelve cada sistema mediante inversión de matrices:

a) $\begin{cases} x_1+x_2=4 \\ x_1+x_2+x_3=1 \\ 2x_2+x_3=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2z=1 \\ 2x+y+z=5 \\ x-2y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ -z+2y=1 \\ y-x=1 \end{cases}$

15. Si x, y, z son tres números reales que satisfacen el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2x+y+3z=5 \\ 3x+y+z=0 \\ x+3y+2z=6 \end{cases}$

Halla los valores de $x-2z$ y de $5x-y$ sin hallar los de las variables.

16. Lewis Carroll, autor de Alicia en el país de las maravillas, propone un problema que puede enunciarse así: el consumo en una cafetería de un vaso de limonada, tres sándwiches y siete bizcochos ha costado 1 chelín y 2 peniques, mientras que un vaso de limonada, cuatro sándwiches y diez bizcochos vale 1 chelín y 5 peniques. Si 1 chelín vale 12 peniques, calcula el costo:
    a) De un vaso de limonada, un sándwich y un bizcocho, resuelve operando con las ecuaciones.
    b) De dos vasos de limonada, tres sándwiches y cinco bizcochos, resuelve operando con las ecuaciones.

Respuestas sistemas de ecuaciones

1) y 2) A cargo del lector.

3)

Ecuación	Par 1	Par 2	Par 3	Par 4
$2x - y = 8$	No	Si	Si	Si
$-0.5\,x + 0{,}1\,y = 0.8$	No	Si	Si	No

4)

a) $\begin{cases} x - 5y = 6 \\ x + 5y = -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 4x + 2y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$

5)

a) $2x + y = 4$ b) $3x - 4y = 2$ c) $2x - 3y = -1$ d) –x+15y=15

6) a)t=$17 b) t=$1489 y m=$439 c) J=15 años y M=30 años

7) a) P=1 año y M=6 años b) S=10 años y M=40 años c) x=14, y=12 d) A cargo del lector
e) A=315 cm^2

8) a) (1,0,1) b) (0,-4/5,4/5) c) (-1/8,35/16,111/16) d) (-4,9,0) e) SCI (1-z, -1+z, z) f) S Inc.

9)
a) G=5;P=1; E=4 a) M=10; G=6 ; H=4 b) A=100; M=70; E=30 c) I=500; T=900; Oe=600

10) a) SInc k=6/5 b) SCD si $k \neq 1$ c) SCD si $k \neq \pm 2$ d) SI si a=-3 e) SCI si a=1/7 f) SI si a=0

11) $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

12)
a) SCI $rgA = rgA' = 3 < 4$
b) SCI $rgA = rgA' = 3 < 4$
c) SCD $rgA = rgA'$
d) SCD $rgA = rgA'$

13) Utilizando el método de Cramer es más fácil darse cuenta que si:

- a=0 el sistema es incompatible.
- a=-1 el sistema es compatible indeterminado
- $a \neq -1{,}0$ SCD
- $a = 2$ las respuesta es la terna (1,-1,-1/2)

14)

a) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

15) $x - 2z = -5$; $5x - y = -6$

16) a) 8 p; b) 19 p