- Propiedades de los logaritmos:

1. Definición: $\text{Log}_a(b) = C \Longleftrightarrow a^C = b$

Con a, b y c $\in \Re \wedge a \neq 1 \wedge a>0 \wedge b>0$

✔ Ejemplo: $\log_2(8) = 3 \Longleftrightarrow 2^3 = 8$

2. El **logaritmo de un producto** es la **suma de los logaritmos.**

$\text{Log}_a(X.Y) = \text{Log}_a X + \text{Log}_a Y$

✔ Ejemplo:

$\log(5 \cdot 2) = \log(5) + \log(2)$

3. El **logaritmo de un cociente** es la **resta de los logaritmos.**

$\text{Log}_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \text{Log}_a X - \text{Log}_a Y$

✔ Ejemplo:

$\log(5/2) = \log(5) - \log(2)$

4. El logaritmo de una potencia: El exponente pasa a multiplicar como una constante al logaritmo.

$\text{Log } X^Y = Y . \text{Log } X$

$Y \text{ Log } X$

El exponente "BAJA" y queda multiplicando al logaritmo.

✔ Ejemplo:

$\log(10)^2 = 2 \cdot \log(10)$

Nota: al logaritmo de una raíz lo puedo ver como el logaritmo de una potencia fraccionaria.

Ejemplos: $\text{Log } X^3 = 3 . \text{Log } X$ $\quad$ $\text{Log } (X+1)^{3a} = 3a . \text{Log } (X+1)$

$\log \sqrt[3]{7} = \frac{1}{3}\log 7$ $\quad$ $\log_a \sqrt[3]{(5X+1)^2} = \frac{2}{3}\log_a (5X+1)$

- **Cambios de base**: $\Rightarrow \log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

Con "a" y "c" $\in \Re \wedge$ "a" y "c" > 0

Para pasar un logaritmo de base, hago el logaritmo en "base c" de lo que tenía adentro del logaritmo, dividido el logaritmo en "base c" de la base.

✔ Ejemplo:

$\log_3 5 = \dfrac{\log_c 5}{\log_c 3}$

- **Las calculadoras**: Con las calculadoras sólo puedo calcular en forma directa dos tipos de logaritmos:
- Los de base 10: La tecla "Log" (cuando no se aclara la base de un logaritmo es de base 10).
- Los de base 2,71 "base e" que se llaman logaritmos naturales o neperianos. En la calcu están como "ln".

Pero esto no significa que yo no pueda calcular el logaritmo de base 7 de 4 con la calculadora.
Veamos como ejemplo dos maneras de hacer **Log $_7$ (4) con la calculadora**:

Paso a base 10	*Paso a base "e"*
$\log_7(4) = \dfrac{\log 4}{\log 7} = \dfrac{0{,}602}{0{,}845} = 0{,}712$	$\log_7(4) = \dfrac{\ln 4}{\ln 7} = \dfrac{1{,}386}{1{,}945} = 0{,}712$

Otros ejemplos de cambio de base: $\log_{\left(\frac{3}{5}\right)}(X+2) = \dfrac{\ln\ (X+2)}{\ln\left(\dfrac{3}{5}\right)}$ $\qquad$ $\log_{(x+1)}(3X+2) = \dfrac{\log\ (3X+2)}{\log\ (X+1)}$

<u>Ecuaciones exponenciales</u>: Veamos como se resuelven con un ejemplo. Despejemos: $8 = 2^{(x^2+1)}$

La mejor manera es aplicar logaritmos. Pero OJO! no cualquiera, sino el de la base que más me conviene. En este caso, como hay un 8 y un 2 (ambos potencias de 2) voy a aplicar logaritmos en base 2 a ambos lados de la ecuación. OJO de nuevo!! no puedo aplicar distintos logaritmos en los dos lados. Tienen que ser de la misma base!!!

$8 = 2^{x^2+1}$ Aplico en los dos lados de la ecuación: $\mathbf{log_2}$

$$Log_2(8) = Log_2\left[2^{x^2+1}\right]$$

Aplico la propiedad de los logaritmos de una potencia y "BAJO" (X^2+1)

$$\log_2(8) = \log_2\left[2^{(x^2+1)}\right] \Longrightarrow \log_2(8) = (x^2+1)\cdot\log_2(2)$$

La ecuación me queda así:

$$\log_2(8) = (x^2+1)\cdot\log_2(2) \Longrightarrow \text{Resuelvo los logaritmos: } \begin{cases} \log_2(8) = 3 \text{ ya que } 2^3 = 8 \\ \log_2(2) = 1 \text{ ya que } 2^1 = 2 \end{cases} \Longrightarrow 3 = (x^2+1)\cdot 1$$

.... Y termino de despejar: $3 = (x^2+1) \Longrightarrow 3-1 = x^2 \Longrightarrow 2 = x^2 \Longrightarrow \sqrt{2} = |x| \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Sugerencia: Cada vez que en una ecuación aparezca la X como exponente la mejor manera de despejarla es aplicando logaritmos (ya que después, recurriendo a la Propiedad de Logaritmos de una Potencia, esa potencia va a "BAJAR" multiplicando y la voy a poder despejar fácilmente). OJO!, hay que ver bien en que base conviene aplicar los logaritmos.

<u>Ecuaciones Exponenciales con Cuadrática</u>: Vamos a resolver esta ecuación: $\frac{5}{2}\cdot 2^{2X} - 3\cdot 2^X - 4 = 0$

Primero la escribimos así: $\frac{5}{2}\cdot\left(2^X\right)^2 - 3\cdot\left(2^X\right) - 4 = 0$

Y ahora reemplazamos $\mathbf{2^X}$ por **W** $\Longrightarrow \frac{5}{2}\cdot W^2 - 3\cdot W - 4 = 0$

Y así como está, esta es una cuadrática...

$$\underbrace{\frac{5}{2}}_{a}\cdot W^2 \underbrace{-3}_{b}\cdot W \underbrace{-4}_{c} = 0$$

Aplicamos la formulita para resolver una cuadrática: $W_{12} = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$W_{12} = \frac{3\pm\sqrt{3^2-4\cdot\frac{5}{2}\cdot(-4)}}{2\cdot\frac{5}{2}} \Longrightarrow W_{12} = \frac{3\pm\sqrt{49}}{5} \Longrightarrow W_{12} = \frac{3\pm 7}{5}$$

$$W_1 = \frac{3-7}{5} \rightarrow W_1 = \frac{-4}{5}$$

$$W_2 = \frac{3+7}{5} \rightarrow W_2 = 2$$

Y acá todavía no termina la cosa, porque no te olvides que teníamos que hallar X, y en realidad hallamos W... Ahora sabemos que W puede tomar 2 valores: $W_1 = \frac{-4}{5}$ $W_2 = 2$

Lo que hay que ver ahora es cuanto vale X, para cada valor de W:

Recordemos que $\mathbf{W = 2^X}$ (Ya que cuando pusimos "**W**" fue porque la reemplazamos por $\mathbf{2^X}$)

Para $W_1 = \frac{-4}{5}$ $\Downarrow$ $2^X = \frac{-4}{5}$ ***Absurdo !***

... por mas que eleve 2 a cualquier potencia, nunca me va a dar un resultado negativo... Así que este resultado está descartado.

Para $W_2 = 2$ $\Downarrow$ $2^X = 2 \Longrightarrow \boxed{X = 1}$

Esta es la solución de la ecuación

Si bien encontré dos valores de W, en realidad sólo obtengo 1 valor "válido" de X.

- **Hallar el valor de "x"**

1) $\log_4 64 = X$

2) $\log_{10} 1000 = X$

3) $\log_{10} 0,01 = X$

4) $\log_a a^2 = X$

5) $\log_3 81 = X$

6) $\log_2 \frac{1}{4} = X$

7) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = X$

8) $\log_2 \frac{1}{32} = X$

9) $\log_3 \frac{1}{27} = X$

10) $\log_{\frac{1}{32}} 2 = X$

11) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = X$

12) $\log_{\frac{1}{2}} 2 = X$

13) $\log_{\frac{1}{2}} 1 = X$

14) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{128} = X$

15) $\log_5 \frac{1}{125} = X$

16) $\log_{125} 5 = X$

17) $\log_{16} \frac{1}{2} = X$

18) $\log_X 9 = 2$

19) $\log_X 5 = \frac{1}{2}$

20) $\log_X \left(\frac{1}{25}\right) = -2$

21) $\log_X \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

22) $\log_X \frac{1}{8} = -3$

23) $\log_X 16 = -4$

24) $\log_2 X = 3$

25) $\log_3 \frac{1}{X} = -2$

26) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{X} = \frac{1}{2}$

27) $\log_{\frac{16}{9}} \frac{X}{4} = -\frac{1}{2}$

28) $\log_{\frac{125}{27}} \frac{3}{5X} = -\frac{1}{3}$

29) $\log_{27} \frac{X}{5} = \frac{1}{3}$

30) $\log_{\frac{1}{16}} \frac{2X}{3} = -\frac{1}{2}$

31) $\log_4 (x) = 0$

32) $\log_2 (x+1) = 0$

33) $4\log_2 (x-1) = 0$

34) $\log (x-1)^2 = 0$

35) $\log_2 \left(x^2 + 2x - 3\right) = 0$

36) $\log_2 \left(x^2 + 3x - 2\right) = 1$

37) $\log_2 (x+1) = -3$

38) $\log_3 (8x+9) = 4$

39) $\log_5 (13x-18) = 3$

40) $\log_3 (x-1) = -1$

41) $\log_{\frac{1}{2}} \left(6x^2 + 5x + \frac{5}{3}\right) = -2$

<u>Hallar el valor de "x"</u> (Estos dos ejercicios son muy fáciles, solo hay que mirarlos bien!!!)

42) $\log_{\left(\frac{2X^3-3X^2+4X-5}{\sqrt{5X^3+3}+x-1}\right)} [1] = X$

43) $\log_{\left(\frac{2+5\sqrt{3}}{7}\right)} \left[\frac{7}{2+5\sqrt{X}}\right] = -1$

44) $\log_{\left(\frac{-2\sqrt{3x}+4x^3}{5x^3+3}\right)} \left[\frac{1}{2}x\right] = 0$

- <u>Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales</u>:

64) $3^x + 1 = 4$

65) $3^{x+1} - 2 = 25$

66) $7^{x+3} - 2 = -1$

67) $3^{2x-1} = 3$

68) $8^{x+1} = 2^{2x+7}$

69) $5 \cdot 2^x + 2^x = 24$

70) $3 \cdot 2^x - 2^x = 1$

71) $8 \cdot 3^{x+1} + 3^{x+1} = 1$

72) $2^{x+1} + 2^x = 12$

73) $5^{x+3} - 5^{x+2} = 4$

74) $3 \cdot 2^{x^2-1} = 3$

75) $8 \cdot 2^{3x-1} + 2^{3x} = \frac{5}{8}$

76) $4^{x+1} + 4^{x+2} = 1280$

77) $\frac{3}{32} \cdot 4^{x+2} - \frac{1}{8} \cdot 4^{x+1} = 1$

78) $2^x \cdot 2^{x+1} = 8$

79) $\frac{25}{3} \cdot 5^{3x-1} \cdot 5^{3-2x} = \frac{1}{3}$

80) $\frac{1}{5} \cdot \frac{3^{4x+2}}{3^{3x+1}} = \frac{1}{45}$

81) $7^x \cdot 7^{1-x} = 5x + 2$