Laboratorium 13

MAT4 - Stosowany rachunek prawdopodobieństwa

Wersja: 2024-01-07

1 Obliczanie całek metodą Monte Carlo

Dla poniższych funkcji f i granic całkowania (a, b) wyznaczyć metodą Monte Carlo, na podstawie próbki losowej N punktów z dziedziny f, przybliżone wartości całek oznaczonych $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. W przypadku, gdy $(a, b) \neq (0, 1)$, zmodyfikować opis metody na wykładzie tak, aby uwzględnić konieczność generowania liczb z rozkładu jednostajnego na (a, b).

Porównać wartości wyznaczone metodą Monte Carlo z prawdziwymi:

- $f(x) = x^2$, $a = 0, b = 1$, $N = 10^2, 10^5$,
- $f(x) = 1/x$, $a = 1, b = 10$, $N = 10^2, 10^5$,
- $f(x) = \exp(-x^2/2)$, $a = -1, b = 1$, $N = 10^2, 10^5$, (w tym przypadku należy porównać wartość wyznaczoną metodą MC z otrzymaną za pomocą do odwołania do funkcji `pnorm`),
- $f(x) = \sin(1/x)/x$, $a = 0.001, b = 0.011$, $N = 10^2, 10^5$, (w tym przypadku należy porównać wartość wyznaczoną metodą MC z otrzymaną za pomocą całkowania numerycznego w programie Mathematica lub podobnym).

Powtórzyć kilkukrotnie powyższe eksperymenty i ocenić stabilność otrzymywanych oszacowań nieznanej całki.

2 Fluktuacje losowe w rzutach monetą symetryczną

Rzucamy 1000 razy monetą symetryczną. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że uzyskamy liczbę orłów z przedziału $[475, 525]$:

- dokładnie, tzn. korzystając z faktu, że rozkład liczby orłów jest dwumianowy,
- korzystając z ogólnej wersji CTG pokazanej na wykładzie,
- korzystając z tzw. twierdzenia de Moivre'a-Laplace'a, które jest szczególnym przypadkiem CTG dla schematu Bernoulliego (a więc dla przypadku, gdy S_n ma rozkład dwumianowy):

Twierdzenie (de Moivre-Laplace) Jeśli $S_n \sim \mathrm{bin}(n, p)$ i $a \leq b$, to wraz z $n \to \infty$

$$\left| \mathbb{P}\left(a \leq S_n \leq b\right) - \Phi\left(\frac{b + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) + \Phi\left(\frac{a - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \right| \to 0.$$

Twierdzenie de Moivre'a-Laplace'a daje bardziej precyzyjną aproksymację rozkładu dwumianowego niż ogólna wersja CTG, ponieważ uwzględnia tzw. poprawkę na ciągłość, wynikającą z faktu przybliżania rozkładu dyskretnego rozkładem ciągłym.

3 Centralne Twierdzenie Graniczne

Pojedyncze doświadczenie polega na wylosowaniu próbki n-elementowej $(x_1, \ldots, x_n)$ z zadanego poniżej rozkładu o średniej μ i wariancji σ^2 i obliczeniu

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}.$$

W każdym z poniższych przypadków powtórzyć doświadczenie $N = 10^4$ razy, otrzymując N wartości. Następnie narysować ich histogramy (z opcją `freq=F`) z nałożonym wykresem gęstości standardowej normalnej (komenda `curve(dnorm(x,mean=0,sd=1),add=T)`).

- rozkład jednostajny na odcinku $(0, 1)$, $n = 2, 10, 100, 1000$,
- rozkład Poissona z parametrem $\lambda = 1$, $n = 2, 10, 100, 1000$,
- rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda = 1$, $n = 2, 10, 100, 1000$.

Dla każdego z powyższych rozkładów, w przypadku $n = 1000$, oszacować na podstawie otrzymanych N wartości prawdopodobieństwo tego, że

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq 1$$

i porównać je z wartością $\Phi(1)$.