Laboratorium 8

MAT4 - Stosowany rachunek prawdopodobieństwa

Wersja: 2023-11-19

1 Rozkład normalny a rozkład Cauchy'ego

1. Narysować (w jednym układzie współrzędnych) wykresy gęstości rozkładu standardowego normalnego i rozkładu Cauchy'ego.
2. Wygenerować próby liczności 10^4 z rozkładów standardowego normalnego i Cauchy'ego. Napisać funkcje rysujące histogramy tych elementów wygenerowanych prób, które (co do modułu) nie są większe niż argument funkcji (drugim argumentem powinna być liczba przedziałów klasowych). Napisać analogiczne funkcje rysujące histogramy tych elementów prób, które są większe niż zadana liczba dodatnia. Za pomocą napisanych funkcji zbadać obie próby.
3. Porównać minima i maksima obu prób.
4. Czy istnieje $u \in (0, 10)$ takie, że
$$\mathbb{P}(|Y| < u) > \mathbb{P}(|X| < u),$$
gdzie Y jest zmienną losową o rozkładzie Cauchy'ego, a X jest zmienną losową o rozkładzie standardowym normalnym?

Podać wnioski wynikające z każdego z powyższych punktów.

Estymacja wartości oczekiwanej - wstęp

Jeśli, mając daną próbkę losową z pewnego rozkładu, chcemy oszacować wartość oczekiwaną tego rozkładu, obliczamy średnią arytmetyczną wartości z próby, np. mając wyniki 10 rzutów zwykłą kostką do gry

```
kostka<-sample(c(1:6),10,replace = TRUE)
print(kostka)
```

```
##  [1] 6 5 5 3 2 6 2 6 3 6
```

szacujemy wartość oczekiwaną jako

```
mean(kostka)
```

```
## [1] 4.4
```

Intuicyjnie jest jasne, że jakość szacowania zależy od wielkości próbki. Mając wyniki 1000 rzutów

```
kostka<-sample(c(1:6),1000,replace = TRUE)
```

szacujemy wartość oczekiwaną liczby wyrzuconych oczek jako

```
mean(kostka)
```

```
## [1] 3.54
```

(przypomnijmy, że wartość oczekiwana liczby oczek wyrzuconych w jednym rzucie to 3.5).

2 Zadanie

W każdym z poniższych przykładów należy porównać (rysując je jeden obok drugiego) wykresy zależności

$$\mathbb{N} \ni k \mapsto \frac{x_1 + \ldots + x_k}{k} - \mu$$

dla $k = 1, \ldots, N$ i dla wektorów $(x_1, \ldots, x_N)$ zawierających próby losowe z zadanych rozkładów o wartości oczekiwanej μ. Podobnie porównać wykresy powyższej zależności dla podanych par rozkładów dla $k = N/2, \ldots, N$.

1. $N = 10^3$, rozkłady jednostajne (dyskretne) na zbiorze $\{-n, -n+1, \ldots, -1, 1, \ldots, n-1, n\}$ dla $n = 1$ i $n = 1000$,
2. $N = 10^3$, rozkłady jednostajne na przedziale $(-a, a)$ dla $a = 1$ i $a = 1000$,
3. $N = 10^3$, rozkłady normalne $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, gdy $\sigma^2 = 1$ i $\sigma^2 = 1000$.

Podać wnioski wynikające z każdego z powyższych punktów.

3 Zadanie - zachowanie ciągu średnich próbkowych w przypadku rozkładu bez wartości oczekiwanej

Niech $N = 10^3$. Narysować wykres zależności

$$\mathbb{N} \ni k \mapsto \frac{x_1 + \ldots + x_k}{k}$$

dla $k = 1, \ldots, N$ i dla wektora $(x_1, \ldots, x_N)$ zawierającego próbę losową z rozkładu Cauchy'ego. Porównać go z analogicznym wykresem dla $k = N/2, \ldots, N$. Porównać otrzymane wykresy z wykresami stworzonymi w poprzednim zadaniu.

Sformułować wnioski.

4 Zadanie

W każdym z poniższych przykładów należy oszacować (na podstawie 10^4 symulacji) prawdopodobieństwo

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \mu\right| < \varepsilon\right)$$

dla (niezależnych) zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_n$ z zadanego rozkładu o wartości oczekiwanej μ:

1. $n = 100$, $\varepsilon = 1/100$, rozkład jednostajny (dyskretny) na zbiorze $\{-k, -k+1, \ldots, -1, 1, \ldots, k-1, k\}$, gdy $k = 1, 10, 100$,
2. $n = 100$, $\varepsilon = 1/100$, rozkład jednostajny na przedziale $(-a, a)$, gdy $a = 1, 10, 100$
3. $n = 100$, $\varepsilon = 1/100$, rozkład normalny $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, gdy $\sigma^2 = 1, 10, 100$,

Podać wnioski wynikające z każdego z powyższych punktów.

5 Zadanie

Na podstawie 10^4 symulacji oszacować prawdopodobieństwa

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_{100}}{100}\right| < \varepsilon\right)$$

dla (niezależnych) zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_{100}$ z rozkładu Cauchy'ego, dla $\varepsilon = 1/100, 1/10, 1$. Porównać je z prawdopodobieństwami otrzymanymi w poprzednim zadaniu oraz z teoretycznymi prawdopodobieństwami

$$\mathbb{P}(|X| < \varepsilon)$$

dla X o rozkładzie Cauchy'ego, dla tych samych wartości ε.

Sformułować wnioski.