lab07

jm

2023-11-12

Przekształcenia rozkładu jednostajnego

Niech F będzie dystrybuantą pewnego rozkładu prawdopodobieństwa. Zakładamy, że F jest ciągła i ściśle rosnąca na nośniku rozkładu. (Dzięki temu istnieje funkcja odwrotna do F.) Można pokazać, że jeśli $U \sim \mathrm{U}(0,1)$, a $X = F^{-1}(U)$, to X ma rozkład o dystrybuancie F. Sprawdzić empirycznie prawdziwość tego stwierdzenia w poniższych przypadkach, za każdym razem wyznaczając gęstość zmiennej losowej o dystrybuancie F i rysując jej wykres na histogramie próby wygenerowanej z rozkładu jednostajnego przekształconego przez F^{-1}.

1. **(Rozkład logistyczny)** Dystrybuantą rozkładu logistycznego jest

$$F(x) = \frac{e^x}{1+e^x},\ x \in \mathbb{R}.$$

Wygenerowaną próbę można porównać z próbami wygenerowanymi za pomocą jednej z komend R do obsługi rozkładu logistycznego:

```
dlogis(x, location = 0, scale = 1, log = FALSE)
plogis(q, location = 0, scale = 1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
qlogis(p, location = 0, scale = 1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
rlogis(n, location = 0, scale = 1)
```

Narysować w szczególności histogram (na podstawie wygenerowanej próby) z opcją `freq=FALSE` (przeskalowuje wysokości słupków tak, aby pole pod wykresem histogramu wynosiło 1). Na histogramie narysować wykres gęstości rozkładu logistycznego, używając odpowiednio zmodyfikowanej wersji kodu

```
hist(wektor, breaks = seq(min(wektor), max(wektor), length.out = k+1),freq=FALSE)
curve(dlogis(x),from=min(wektor),to=max(wektor),add=TRUE,col='red')
```

2. **(Rozkład Rayleigha)** Dystrybuantą rozkładu Rayleigha jest

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - \exp(-x^2/2), & x \geq 0 \end{cases}$$

Wygenerowaną próbę można porównać z próbami wygenerowanymi za pomocą jednej z komend R do obsługi rozkładu Rayleigha (do ich użycia trzeba zainstalować pakiet `VGAM` komendą `install.packages("VGAM")`, a potem go załadować komendą `library(VGAM)`).

```
drayleigh(x, sigma = 1, log = FALSE)
prayleigh(q, sigma = 1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
qrayleigh(p, sigma = 1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
rrayleigh(n, sigma = 1)
```

Porównać histogram z wykresem gęstości.

3. Jaki rozkład będzie miała zmienna losowa, której realizacje zawiera poniższy wektor w?

```
u<-runif(1e6,0,1)
w<--log(u)
```

Po sformułowaniu hipotezy, porównać histogram wektora w z wykresem odpowiedniej gęstości.

Zadanie

1. Niech $E_0, E_1, E_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ. Jaki rozkład będzie miała zmienna losowa N zdefiniowana jako

$$N := \min_{n=0,1,2,\ldots} \{E_0 + \ldots + E_n > 1\}$$

2. Niech $U_0, U_1, U_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0, 1)$. Jaki rozkład będzie miała zmienna losowa N zdefiniowana jako

$$N := \min_{n=0,1,2,\ldots} \{\prod_{k=0}^{n} U_k < e^{-\lambda}\}$$

Rozkład Cauchy'ego

1. Wyznaczyć rachunkowo dystrybuantę i gęstość rozkładu zmiennej losowej X zdefiniowanej jako $X = \tan U$, gdzie $U \sim \mathrm{U}(-\pi/2, \pi/2)$ (jest to szczególny przypadek **rozkładu Cauchy'ego**).
2. Wygenerować próbę z rozkładu X, przekształcając odpowiednio próbę z rozkładu jednostajnego.
3. Porównać wygenerowaną próbę z próbą wygenerowaną za pomocą jednej z komend R do obsługi rozkładu Cauchy'ego:

```
dcauchy(x, location = 0, scale = 1, log = FALSE)
pcauchy(q, location = 0, scale = 1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
qcauchy(p, location = 0, scale = 1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
rcauchy(n, location = 0, scale = 1)
```

W szczególności porównać histogram z wygenerowanej próby z wykresem gęstości rozkładu Cauchy'ego.

Generowanie zmiennych losowych o rozkładach dyskretnych

Dla zmiennej losowej dyskretnej o rozkładzie zadanym dystrybuantą F, która nie jest ciągła i ściśle rosnąca możemy zdefiniować:

$$F^{-1}(t) = \inf\{x : t \leq F(x)\}.$$

Wtedy liczby losowe $X_1, X_2, \ldots$ o rozkładzie dyskretnym o nośniku w zbiorze $S = \{x_1, x_2, \ldots\}$ (gdzie $x_1 < x_2 < \ldots$) zadanym dystrybuantą F możemy generować za pomocą liczb losowych $U_1, U_2, \ldots$ o rozkładzie jednostajnym $U(0,1)$ za pomocą wzoru:

$$X_n = \min\{x_k : U_n \leq F(x_k)\}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

1. Wygenerować próbę z rozkładu dyskretnego o funkcji prawdopodobieństwa postaci:

$$p(1) = p(2) = \frac{1}{8}, \ \ p(3) = \frac{1}{4}, \ \ p(4) = \frac{1}{2}.$$

   Sprawdzić, że wygenerowane wartości odpowiadają zadanemu rozkładowi.

2. Wygenerować próbę z rozkładu dyskretnego o funkcji prawdopodobieństwa postaci:

$$p(-1) = \frac{1}{6}, \ \ p(2) = \frac{2}{3}, \ \ p(4) = \frac{1}{6}.$$

   Wykonać odpowiednie sprawdzenie.