Laboratorium 10

MAT4 - Stosowany rachunek prawdopodobieństwa

Wersja: 2023-12-10

1 Wartości oczekiwane funkcji od wektora losowego rozłożonego jednostajnie na kole jednostkowym

Obliczyć (teoretyczną) wartość oczekiwaną $\mathbb{E}(|XY|)$, jeśli (X, Y) jest wektorem losowym rozłożonym jednostajnie na kole jednostkowym w $\mathbb{R}^2$. Potwierdzić empirycznie swoje obliczenia teoretyczne.

2 Metoda eliminacji dla generowania zmiennych losowych o rozkładzie z zadaną gęstością

Załóżmy, że f jest gęstością, która jest dodatnia na pewnym przedziale ograniczonym (a, b), zeruje się poza tym przedziałem i na tym przedziale jest ograniczona przez pewną stałą dodatnią d. Rozważmy algorytm:

- wygenerować dwie niezależne zmienne losowe U_1 i U_2 o rozkładach jednostajnych $\mathcal{U}(a, b)$ i $\mathcal{U}(0, d)$,
- jeśli $U_2 \leq f(U_1)$, to przyjąć $X = U_1$; w przeciwnym razie odrzucić wygenerowaną parę (U_1, U_2) i wrócić do poprzedniego punktu.

Okazuje się, że tak stworzona zmienna losowa X ma rozkład o gęstości f.

1. Sprawdzić powyższy algorytm generując próby z rozkładów ciągłych o gęstościach

- $f(x) = (2/\pi)\sqrt{1 - x^2}$ dla $x \in [-1, 1]$, $f(x) = 0$ dla $x \notin [-1, 1]$,
- $f(x) = 1 - |x|$ dla $x \in [-1, 1]$, $f(x) = 0$ dla $x \notin [-1, 1]$.

3 Inny wariant metody eliminacji

Następujący algorytm generuje liczby losowe o rozkładzie z gęstością f, określoną na niekoniecznie ograniczonym zbiorze w przestrzeni d-wymiarowej $\mathbb{R}^d$ (może więc być przydatny w szczególności do generowania liczb losowych z ciągłych rozkładów dwuwymiarowych):

- dobrać taką gęstość g, aby można było łatwo generować próby losowe z rozkładu o tej gęstości i żeby istniała stała $c > 0$ taka, że
$$f(x) \leq cg(x)$$
dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^d$,
- wygenerować punkt losowy X o rozkładzie z gęstością g oraz liczbę losową U z rozkładu jednostajnego $\mathcal{U}(0, 1)$,

- jeżeli
$$cUg(X) \leq f(X),$$
to zaakceptować X; w przeciwnym razie odrzucić wygenerowaną parę (X, U) i wrócić do poprzedniego punktu.

Okazuje się, że tak stworzona zmienna losowa X ma rozkład o gęstości f.

1. Sprawdzić działanie powyższego algorytmu dla rozkładu łącznego o gęstości
$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy, & (x, y) \in [0, 1]^2, \\ 0, & (x, y) \notin [0, 1]^2. \end{cases}$$
W szczególności, wyznaczyć teoretycznie i empirycznie

- $\mathbb{P}((X, Y) \in [0, 1/2]^2)$,
- $\mathbb{E}(XY)$,

następnie wyznaczone wielkości porównać.

4 Metoda rozkładów warunkowych

Czasem do generowania liczb losowych z rozkładów dwuwymiarowych ciągłych wykorzystuje się fakt, że gęstość łączną f wektora losowego (X, Y) można zapisać jako iloczyn gęstości warunkowej f_X i brzegowej $f_{Y|X}$:
$$f(x, y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x).$$
Zastosować tę metodę do wygenerowania próby z rozkładu jednostajnego na kole jednostkowym w $\mathbb{R}^2$, obliczając uprzednio gęstość brzegową f_X i gęstość warunkową $f_{Y|X}$ (obliczenia te dołączyć do raportu).