




Bundesamt
für Eich- und
Vermessungswesen

bev.gv.at

Messunsicherheit nach GUM

Präliminarien

Michael Matus
Wien, 2022




Bundesamt
für Eich- und
Vermessungswesen

bev.gv.at

Überblick

- Arithmetisches Mittel
Was ist das? Warum verwendet man das?
- Standardabweichung
Empirische Standardabweichung der Stichprobe, Streuung der Einzelwerte
- In Excel
Verwendung der eingebaute Funktionen
- Partielle Differentiation
Keine Einführung



Bundesamt
für Eich- und
Vermessungswesen


bev.gv.at

Arithmetisches Mittel

Motivation

Man misst eine Größe mehrmals. Man glaubt, dass diese Größe einen Größenwert besitzt. Den kennt man zwar nicht (sonst bräuchte man keine Messung), aber es soll ein einziger Wert angegeben werden.

Wie könnte der aussehen?



Bundesamt
für Eich- und
Vermessungswesen

bev.gv.at


Arithmetisches Mittel

Beispiel: Massendifferenz zweier Gewichtsstücke wird dreimal bestimmt

$x_1 = +4 \mu\text{g}$
 $x_2 = -7 \mu\text{g}$
 $x_3 = +6 \mu\text{g}$

Im Weiteren rechnen wir mit den Zahlenwerten.
(wir werden später sehen, warum das erlaubt ist)

4



Bundesamt
für Eich- und
Vermessungswesen

bev.gv.at

Arithmetisches Mittel


Beispiel

$x_1 = +4$
 $x_2 = -7$
 $x_3 = +6$

Wir könnten irgendeine der drei Zahlen auswählen und für das Weitere als Repräsentant verwenden.

Oder einen der (vielen) Mittelwerte heranziehen.

5



Bundesamt
für Eich- und
Vermessungswesen

bev.gv.at

Arithmetisches Mittel


Beispiel

$x_1 = +4$
 $x_2 = -7$
 $x_3 = +6$

$(x_1 + x_2 + x_3)/3 = 1$

Oder allgemein: $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

6



Bundesamt
für Eich- und
Vermessungswesen

bev.gv.at


Arithmetisches Mittel

Ersatzwert-Eigenschaft

$x_1 = +4$	$+1$
$x_2 = -7$	$+1$
$x_3 = +6$	$+1$
Σ	$+3 \quad +3$

Die Summe aller n Einzelwerte kann man sich ersetzt denken durch n gleiche Werte von der Größe des arithmetischen Mittels.

7



Bundesamt
für Eich- und
Vermessungswesen

bev.gv.at


Arithmetisches Mittel

Ersatzwert-Eigenschaft

$x_1 = +4$	$+1$	$+4$
$x_2 = -7$	$+1$	$+4$
$x_3 = +6$	$+1$	$+4$
Σ	$+3 \quad +3$	$+12$

Die Summe aller n Einzelwerte kann man sich ersetzt denken durch n gleiche Werte von der Größe des arithmetischen Mittels. (geht nicht beim Median)

8



Bundesamt
für Eich- und
Vermessungswesen

bev.gv.at

Arithmetisches Mittel

Schwerpunkt-Eigenschaft

$x_1 = +4$	$+4 - 1 = +3$
$x_2 = -7$	$-7 - 1 = -8$
$x_3 = +6$	$+6 - 1 = +5$
Σ	0

Die Summe der Abweichungen („Fehler“) aller beobachteten Messwerte vom arithmetischen Mittel ist gleich Null.

9

Arithmetisches Mittel

Lineare Transformationseigenschaft

$$y_i = a + b \cdot x_i \Rightarrow \bar{y} = a + b \cdot \bar{x}$$

Invariant gegenüber linearen Transformationen.

b ist oft eine Maßeinheit!

10

Arithmetisches Mittel

Optimalitätseigenschaft

→ Betrachten vorher die Standardabweichung

11

Standardabweichung

Motivation

Ein Maß für die Streuung der Einzelwerte um den Mittelwert.

- Summe der Abweichungsquadrate
- Division durch $n - 1$
- Wurzel daraus

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

12

Bundesamt
für Eich- und
Vermessungswesen

bevg.vat

Standardabweichung

Beispiel

$x_1 = +4$

$(+4 - 1)^2 = 9$

$x_2 = -7$

$(-7 - 1)^2 = 64$

$x_3 = +6$

$(+6 - 1)^2 = 25$

$98 / (3 - 1) = 49 = 7^2$

Standardabweichung $s = 7$

13

Bundesamt
für Eich- und
Vermessungswesen

bevg.vat

Standardabweichung

Beispiel

$\{+4, -7, +6\}$

$m = 1$

$s = 7$

$\{+40, -70, +60\}$

$m = 10$

$s = 70$

$\{+11, +13, 0\}$

$m = 8$

$s = 7$

14

Bundesamt
für Eich- und
Vermessungswesen

bevg.vat


Standardabweichung

Eigenschaften

- Einzelwerte
- Mittelwert
- Standardabweichung

sind alle von der gleichen Dimension! Der Größenkalkül ist anwendbar!

15



Bundesamt
für Eich- und
Vermessungswesen

bev.gv.at

Arithmetisches Mittel

Optimalitätseigenschaft

Die Summe der Quadrate der Abweichungen aller Daten vom arithmetischen Mittelwert ist kleiner als die Summe der Quadrate der Abweichungen von einem beliebigen anderem Wert.

Arithmetischer Mittelwert ist Lösung der „Methode der kleinsten Fehlerquadrate“.

16




Bundesamt
für Eich- und
Vermessungswesen

bev.gv.at

Warum Arithmetisches Mittel?

In der Messtechnik

17



Bundesamt
für Eich- und
Vermessungswesen

bev.gv.at

Warum Arithmetisches Mittel?

In der Messtechnik

Weil man es kann!

Der Größenkalkül erlaubt die Summe zweier Größen zu bilden.

Nicht so bei:
Härtewerten, Postleitzahlen, Schulnoten, ...
Summe und damit arithmetischer Mittelwert ist nicht definiert!

18

Bundesamt
für Eich- und
Vermessungswesen

bev.gv.at

Warum Arithmetisches Mittel?

In der Messtechnik

- Weil man es kann! (Größenkalkül)
- Ersatzwert-Eigenschaft
- Schwerpunkts-Eigenschaft
- Lineare Transformationseigenschaft
- Optimalitätseigenschaft

19

Bundesamt
für Eich- und
Vermessungswesen

bev.gv.at

Microsoft Excel

Es gibt eingebaute Funktionen für Anzahl, Mittelwert und Standardabweichung. Diese ignorieren sogar fehlende Werte.

	C1	A	B	C	D
1		3		3	
2		5			
3		-8			
4					

=MITTELWERT(A1:B1)

	C1	A	B	C
1		3		7
2		5		
3		-8		
4				

=STABW(A1:A3)

=STABWN(A1:A3)

20

Bundesamt
für Eich- und
Vermessungswesen

bev.gv.at

Microsoft Excel

=STABW.S(...)

obsolet: =STABW(...)

$$\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

=STABW.N(...)

obsolet: =STABWN(...)

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Außerdem:
STABWA, STABWNA, VAR.P, VAR.S, VARIANZ, VARIANZA, VARIANZEN, VARIANZENA

21

Partielle Differentiation

Für die Anwendung der klassischen (Gauß'schen) Fehleranalyse wie auch beim GUM, ist der Begriff der Funktionsableitung (Differentiation) notwendig.

Der Einfluss mehrere Eingangsgrößen auf die Ausgangsgröße wird durch eine mathematische Funktion beschrieben.

Die Ableitung dieser Funktion nach einer dieser Eingangsgrößen beschreibt die Empfindlichkeit der Ausgangsgröße auf eben jene Eingangsgröße.

22

Partielle Differentiation

Eine partielle Ableitung ist die Ableitung einer Funktion mit mehreren Argumenten nach einem dieser Argumente (in Richtung dieser Koordinatenachse). Die Werte der übrigen Argumente werden konstant gehalten.

$$y = f(x) \qquad y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$$

$$y = f(x_1, x_2, x_3) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

23

Partielle Differentiation

Für das Verständnis des Moduls ist es nicht notwendig Differentiationen manuell durchführen zu können oder überhaupt Analysis zu verstehen.

Für die Praxis reicht die Verwendung der GUM Workbench.

Allerdings wird bei der schriftlichen Prüfung zu diesen Modul ein Rechenbeispiel verlangt. Daher gibt es einen Übungszettel: [GUM_Uebungsblatt_parAbl.pdf](#)

24
