Kapitola 1

Grafy, stromy

V této kapitole definujeme graf jakožto matematickou strukturu, popíšeme základní pojmy týkající se grafů a nastíníme možné vztahy mezi grafem a maticí. Dále definujeme strom, jakožto speciální případ grafu.

1.1 Základní grafová terminologie

Definice 1. Mějme množinu V a množinu $E = \{\{u, v\} \,|u, v \in V\}$. Uspořádanou dvojici $G = (V, E)$, nazveme neorientovaný graf. Množinu V nazýváme množinou vrcholů grafu G, jejím prvkům říkáme vrcholy, množinu E nazýváme množinou hran grafu G, jejím prvkům říkáme hrany. Prvky hrany e označujeme jako vrcholy incidentní hraně e nebo koncové body hrany e. Říkáme, že hrana $e = \{v, w\}$ spojuje vrcholy v a w.

Poznámka 1. Pokud uvažujeme hrany jako uspořádané dvojice, nazýváme odpovídající graf orientovaný.

V neorientovaném grafu $G = (V, E)$ platí, že jeho množina hran E je podmnožinou $\binom{V}{2}$, kde $\binom{V}{2}$ značí množinu všech dvouprvkových podmnožin množiny V. V orientovaném grafu $H = (W, F)$ je F podmnožinou množiny $W \times W$, tj. všech uspořádaných dvojic vrcholů z W.

Obvykle uvažujeme orientované a neorientované grafy zvlášť, ale je možné uvažovat i jejich kombinaci. Graf, v němž se vyskytují jak orientované tak neorientované hrany, nazýváme smíšený.

Povšimněme si, že v definici grafu není vyloučen případ, kdy jsou oba koncové body hrany shodné. Takové hrany nazýváme smyčkami v grafu.

Definice 2. Stupněm vrcholu $v \in V$ rozumíme počet vrcholů spojených s vrcholem v, značíme $d(v)$. Množinu všech vrcholů, které jsou v grafu G spojeny s vrcholem v značíme $\mathrm{adj}_G(v)$.

Definice 3. Řekneme, že graf G je úplný, pokud $\forall u, v \in V \; (\{u, v\} \in E)$.

Definice 4. Podgrafem grafu G nazveme libovolný graf $H = (W, F)$ který splňuje: $W \subseteq V$, $F \subseteq E$ a všechny vrcholy incidentní hranám z F náleží do W. Úplný podgraf grafu G nazýváme klikou v grafu G. Podgrafem G indukovaným množinou vrcholů W nazveme takový podgraf G, který obsahuje všechny hrany G, jejichž oba koncové body náleží do W, značíme $G(W)$.

Definice 5. Mějme graf $G = (V, E)$ a zobrazení $\omega : V \to \mathbb{R}$, resp. $c : E \to \mathbb{R}$. Přidáním zobrazení ω, resp. c ke grafu G dostaneme graf, který nazýváme ohodnocený, resp. vážený reálným ohodnocením.

[TODO potrebuju bipartitni?] [TODO potrebuju ctvercovou sit?]
souvislý
cesta (bez cyklů!), cyklus, vzdálenost dvou vrcholů, vzdálenost od množiny
podgraf

1.2 Strom

Nyní zaveďme základní pojmy týkající speciální třídy grafů nazývané stromy **??**[???]

Definice 6. Stromem T nazveme konečný souvislý neorientovaný graf bez cyklů s vyznačeným bodem, který budeme nazývat kořenem stromu. [TODO Co s tim korenem? V originalni definici stromu neni, mam zavadet specialne korenovy strom?]

Z definice stromu je patrné, že každý vrchol v stromu T spojuje s kořenem tohoto stromu právě jedna cesta.

Definice 7. Vrcholy ležící na cestě spojující vrchol v s kořenem nazveme předchůdci vrcholu v. Vrcholy ležící na této cestě, které jeou různé od v nazýváme vlastními předchůdci vrcholu v. (Pokud v není kořen, nazýváme předchůdce vrcholu v, který je s vrcholem v spojen hranou, otcem vrcholu v, značíme $otec(v)$.) Vrcholy, jejichž předchůdcem je vrchol v, nazýváme následníky vrcholu v. (Speciálně pokud v je otcem u, říkáme, že u je synem v.) Vrcholy bez následníků nazýváme listy stromu T, vrcholy alespoň s jedním následníkem nazýváme vnitřní vrcholy stromu.

Definice 8. Podstromem určeným vrcholem v nazveme úplný podgraf stromu tvořený vrcholem v a a všemi jeho následníky.

Kapitola 2

Různé

2.1 Číslování

2.1.1 Číslování vrcholů grafu v závislosti na vzdálenosti od separátoru

V této podkapitole popíšeme nejjednodušší metodu číslování vrcholů podgrafu, který vznikl rozdělením původního grafu na n částí. Tuto metodu lze používat samostatně, ale vzhledem k její povaze ji lze využít i pro vylepšení ostatních metod očíslování grafu, například ji lze kombinovat s metodou minimálního stupně.

Mějme graf $G = (V, E)$ a jeho vrcholový separátor [TODO znaceni], jehož odebráním se graf rozpadne na n podgrafů $G_1, \ldots, G_n$. Popišme číslování vrcholů podgrafu G_i:

1. Položme `j := 1`.
2. Nalezneme neočíslovaný vrchol v grafu G_i takový, že jeho vzdálenost od vrcholového separátoru v grafu G je maximální.
3. Tomuto vrcholu dáme číslo `j`, položíme `j := j + 1`.
4. Pokud jsou všechny vrcholy očíslovány, skončíme, jinak se vrátíme na krok 2

Z algoritmu je vidět, že výsledné očíslování vrcholů grafu nemusí být jednoznačné, protože pokud nalezneme dva nebo více vrcholů, jejichž vzdálenost od separátoru je shodná, můžeme je očíslovat v libovolném pořadí.

2.1.2 Číslování vrcholů pomocí metody minimálního stupně

Metoda minimálního stupně je jednoduchým algoritmem pro nalezení očíslování grafu. Algoritmus pro hledání očíslování grafu pomocí této metody je následující:

1. Mějme graf $G = (V, E)$ a položme $j := 1$.
2. Nalezneme neočíslovaný vrchol v grafu G s nejmenším stupněm a přiřadíme mu číslo j.

3. Přidáme hrany mezi vrcholy z $\mathrm{adj}_G(v)$ tak, aby $\mathrm{adj}_G(v)$ byla klika v grafu G.
4. Pokud nejsou všechny vrcholy očíslované, zvětšíme j o 1 a vrátíme se na krok 2.

Očíslování vrcholů grafu G pomocí tohoto algoritmu není jednoznačné, protože vrcholů s minimálním stupněm může být více.

Pokud máme rozdělení $G_1, \ldots, G_n$ grafu G s vrcholovým separátorem [TODO znaceni], můžeme pro očíslování části G_i použít číslování vrcholů pomocí metody minimálního stupně, kde při výběru vrcholu ve 2. kroku přidáme kritérium vzdálenosti od separátoru popsané v 2.1.1. Nejprve tedy nalezneme množinu všech vrcholů grafu G, které mají minimální stupeň a poté mezi nimi zvolíme ten, který má nejmenší stupeň.

2.1.3 Topologické číslování vrcholů stromu

Definice 9. Mějme graf $G = (V, E)$, který je stromem. Očíslování jeho vrcholů nazveme topologickým právě tehdy, když pro každý vrchol $v \in V$ platí, že libovolný následník vrcholu v ve stromu G má nižší číslo než vrchol v.

Kapitola 3

Eliminační stromy

V této kapitole se budeme zabývat eliminačními stromy a jejich významem pro rozklady řídkých matic. Eliminační stromy při rozkladu matic hrají důležitou roli, protože nám dávají informaci o zaplnění v Choleského faktoru matice bez toho, abychom museli počítat jednotlivé numerické hodnoty. Lze tedy díky nim jednoduše porovnávat vhodnost zvoleného uspořádání řádků a sloupců matice pro Choleského rozklad.

V této kapitole bez újmy na obecnosti předpokládáme, že matice, jejíž Choleského rozklad chceme napočítávat, je ireducibilní, a tedy přidružený graf této matice je souvislý.

3.1 Definice eliminačního stromu matice

Nejprve se omezme na ireducibilní, pozitivně definitní, symetrickou matici A_T o rozměrech $n \times n$, jejíž přidružený graf $G(A_T)$ je strom. V tomto případě je A_T tzv. perfektní eliminační matice, tj. existuje permutační matice P taková, že Choleského rozklad matice PA_TP^T nebude obsahovat žádné zaplnění [?] (Matici PA_TP^T můžeme vnímat pouze jako přečíslování řádků a sloupců matice A_T). Aby při choleského rozkladu matice A_T nedošlo k žádnému zaplnění, stačí když pomocí topologického číslování očíslujeme vrcholy jí přidruženého grafu (z předpokladu se jedná o strom) a řádky a sloupce matice A_T seřadíme odpovídajícím způsobem. Pak zjevně platí, že matice A_T má, s výjimkou posledního řádku, pod diagonálou vždy právě jeden nenulový prvek. Díky tomu můžeme definovat pro matici A_T funkci $\texttt{PARENT} : \{1, \ldots, n\} \to 1, \ldots, n$ následovně:

$$\begin{aligned} \forall j \in \{1, \ldots, n-1\} \quad \texttt{PARENT}[j] := p \quad &\Leftrightarrow \quad a_{p,j} \neq 0 \wedge p > j \\ \text{a speciálně:} \quad \texttt{PARENT}[n] := 0.& \end{aligned}$$

Zřejmě ve stromu přidruženém k matici A_T platí, že předchůdcem vrcholu x_j je vrchol $x_{\texttt{PARENT}[j]}$.

Většinou však nepracujeme s maticemi, jejichž přidružený graf by byl stromem. Zavedeme tedy konstrukci pro libovolnou řídkou, ireducibilní, pozitivně definitní, symetrickou matici A o rozměrech $n \times n$. Předpokládejme, že známe Choleského rozklad této matice, tj. $A = LL^T$. Maticí se zaplněním nazveme matici F definovanou jako $F = L + L^T$. Dále zavedeme matice L_t a F_t následovně. L_t je matice vzniklá z L tím, že v každém sloupci vynulujeme všechny prvky pod diagonálou kromě prvku s nejnižším řádkovým indexem a $F_t = L_t L_t^T$.

Z definice F_t vidíme, že se jedná o matici, jejíž přidružený graf $G(F_t)$ je strom.

Definice 10. Eliminačním stromem matice A nazveme graf $G(F_t)$ popsaný výše, značíme $T(A)$. Podstrom $T(A)$ s kořenem x_j značíme $T[x_j]$. Množinu vrcholů tohoto stromu značíme také $T[x_j]$.

Díky této definici můžeme definici funkce `PARENT` přirozeně rozšířit na matici A následovně:

$$\texttt{PARENT}[j] := \min\{i > j | l_{i,j} \neq 0\},$$

kde $l_{i,j}$ označuje i, j-tý prvek matice L.

Pozorování 1. Přímo z definice plyne, že $T(A)$ a $T(F)$ jsou identické.

Pozorování 2. Pokud x_i je vlastním předchůdcem x_j v eliminačním stromu, pak $i > j$.

Tvrzení 1. *Pro $i > j$ závisí numerické hodnoty sloupce $L_{\bullet i}$ na sloupci $L_{\bullet j}$ právě tehdy, když $l_{i,j} \neq 0$.*

Důkaz. Tvrzení plyne přímo ze sloupcového algoritmu [???] □