Álgebra Lineal Computacional

1er Cuatrimestre 2024

Práctica N° 2: Aritmética de punto flotante. Número de condición.

Transformaciones lineales

Ejercicio 1. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales.

(a)) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - 3x_1 + \sqrt{2}x_3\,,\, x_1 - \frac{1}{2}x_2)$

(b)) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2\,,\, |x_1|)$

(c)) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}\,,\ f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

(d)) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 3},\ f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$

Ejercicio 2. Escribir la matriz de las siguientes transformaciones lineales en base canónica. Interpretar geométricamente cada transformación.

(a) $f(x, y) = (x, 0)$

(b) $f(x, y) = (x, -y)$

(c) $f(x, y) = (\frac{1}{2}(x + y), \frac{1}{2}(x + y))$

(d) $f(x, y) = (x.\cos t - y.\operatorname{sen} t\,,\, x.\operatorname{sen} t + y.\cos t)$

Ejercicio 3. (a) Probar que existe una única transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (-5, 3)$ y $f(-1, 1) = (5, 2)$. Para dicha f, determinar $f(5, 3)$ y $f(-1, 2)$.

(b) ¿Existirá una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (2, 6)$, $f(-1, 1) = (2, 1)$ y $f(2, 7) = (5, 3)$?

(c) Sean f, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que

$$\begin{array}{lll} f(1,0,1) = (1,2,1), & f(2,1,0) = (2,1,0), & f(-1,0,0) = (1,2,1), \\ g(1,1,1) = (1,1,0), & g(3,2,1) = (0,0,1), & g(2,2,-1) = (3,-1,2). \end{array}$$

Determinar si $f = g$.

Ejercicio 4. Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales exista una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaga que $f(1, -1, 1) = (2, a, -1)$, $f(1, -1, 2) = (a^2, -1, 1)$ y $f(1, -1, -2) = (5, -1, -7)$.

Ejercicio 5. Calcular bases del núcleo y de la imagen para cada tranformación lineal de los ejercicios 2 y 3. Decidir, en cada caso, si f es epimorfismo, monomorfismo o isomorfismo. En el caso que sea isomorfismo, calcular f^{-1}.

Ejercicio 6. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, 0, 0)$ y $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2)$. Calcular el núcleo y la imagen de f, de g y de $g \circ f$. Decidir si son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.

Aritmética de punto flotante

Ejercicio 7. Algunos experimentos: Realizar las siguientes operaciones en `Python`. En todos los casos, pensar: ¿cuál es el resultado esperado? ¿coincide con el obtenido? ¿a qué se debe el problema (si lo hay)? (Notamos ε al épsilon de la máquina. Puede obtenerse importando la librería `numpy` como `np` y ejecutando el comando `np.finfo(np.float).eps`).

a) Tomando $p =$1e34, $q = 1$, calcular $p + q - p$.

b) Tomando $p = 100$, $q =$1e$-$15, calcular $(p + q) + q$ y $((p + q) + q) + q$. Comparar con $p + 2q$ y con $p + 3q$ respectivamente.

c) `0.1+0.2 == 0.3`

d) `0.1+0.3 == 0.4`

e) 1e$-$323

f) 1e$-$324

g) $\frac{\varepsilon}{2}$

h) $(1 + \frac{\varepsilon}{2}) + \frac{\varepsilon}{2}$

i) $1 + (\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2})$

j) $\big((1 + \frac{\varepsilon}{2}) + \frac{\varepsilon}{2}\big) - 1$

k) $\big(1 + (\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2})\big) - 1$

l) $\operatorname{sen}(10^j \pi)$ para $1 \leq j \leq 25$.

m) $\operatorname{sen}(\pi/2 + \pi 10^j)$ para $1 \leq j \leq 25$.

Ejercicio 8. Mostrar que una serie divergente de términos que tienden a 0 (e.g.: $\sum_n \frac{1}{n}$) podría resultar convergente en aritmética de punto flotante. ¿Qué debería ocurrir para que el resultado numérico sea Inf? ¿Cuál es la mejor estrategia para realizar numéricamente una sumatoria de términos positivos?

Ejercicio 9. Para las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 - \varepsilon & 2 + \varepsilon \\ 0 & 1 + \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$

a) Tomando $\varepsilon = 0.001$, resolver el sistema $Ax = b$ mediante eliminación gaussiana sin intercambio de filas usando aritmética de punto flotante en base 10 con 3 dígitos de mantisa y sistema de redondeo.

b) Para $\varepsilon = 0.001$, hallar la solución exacta x del sistema y comparar con la solución del ítem anterior ¿Cómo explica la diferencia?

Ejercicio 10. Considerar las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & n & 5n \\ 1 & 3n & 3n \\ 1 & n & 2n \end{pmatrix} \qquad \text{y } b = \begin{pmatrix} \frac{2n}{3} \\ \frac{2n}{3} \\ \frac{n}{3} \end{pmatrix},$$

con $n \in \mathbb{N}$.

a) Para $n = 10^4$, resolver el sistema $Ax = b$ por eliminación gaussiana sin intercambio de filas utilizando aritmética de 4 dígitos con redondeo (en base 10).

b) Verificar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, la solución exacta del sistema es $x = \left(0, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right)$ y comparar, para $n = 10^4$, la solución aproximada con la solución exacta.

Normas vectoriales y sucesiones

Ejercicio 11. Si $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, probar que las constantes de equivalencia entre las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ y entre las normas $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ vienen dadas por:

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\boldsymbol{x}\|_\infty$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{x}\|_1 \leq \|\boldsymbol{x}\|_2 \leq \|\boldsymbol{x}\|_1$$

Ejercicio 12. Para cada una de las siguientes sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, determinar si existe $\lim_{n\to\infty} x_n$, y en caso afirmativo hallarlo.

a) $x_n = \frac{1}{n}$,

b) $x_n = \frac{n^2+1}{n^2-1}$,

c) $x_n = (-1)^n$

d) $x_n = (-1)^n e^{-n}$

Ejercicio 13. Para cada una de las siguientes sucesiones de vectores $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^2$, determinar si existe $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n$, y en caso afirmativo hallarlo.

a) $\boldsymbol{x}_n = (1 + \frac{1}{n}, 3)$,

b) $\boldsymbol{x}_n = ((-1)^n, e^{-n})$,

c) $\boldsymbol{x}_n = \begin{cases} (1/n, 0) & \text{si } n \text{ es par} \\ (0, -1/n) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$,

d) $\boldsymbol{x}_n = (\frac{1}{2^n}, 4, \operatorname{sen}(\pi n))$.

Ejercicio 14. Dada una sucesión de vectores $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$ y dos normas $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ de $\mathbb{R}^k$, usando la equivalencia de normas, probar

$$\|\boldsymbol{x}_n\|_a \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|\boldsymbol{x}_n\|_b \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ejercicio 15. Dada una sucesión de vectores $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$ probar

$$\|\boldsymbol{x}_n\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\boldsymbol{x}_n)_i \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ para todo } 1 \leq i \leq k,$$

donde $(\boldsymbol{x}_n)_i$ es la i-ésima coordenada de $\boldsymbol{x}_n$.

Normas matriciales

Ejercicio 16. Si $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, probar que las constantes de equivalencia entre las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ y entre las normas $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ vienen dadas por:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{A}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{A}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\boldsymbol{A}\|_\infty$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{A}\|_1 \leq \|\boldsymbol{A}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\boldsymbol{A}\|_1$$

Calcular los coeficientes para la equivalencia vectorial y matricial entre las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$.

Ejercicio 17. Probar que para toda $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\text{(a) } ||\boldsymbol{A}||_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \qquad \text{(b) } ||\boldsymbol{A}||_1 = \max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|.$$

Ejercicio 18. Se quiere estimar la norma 2 de una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ como el máximo del valor $\|\boldsymbol{Ax}\|_2/\|\boldsymbol{x}\|_2$ entre varios vectores $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ no nulos generados al azar. Hacer un programa que reciba una matriz $\boldsymbol{A}$ y luego

- genere los primeros 100 términos de la siguiente sucesión:

  $$s_1 = 0, \quad s_{k+1} = \max\left\{s_k, \frac{\|\boldsymbol{Ax}_k\|_2}{\|\boldsymbol{x}_k\|_2}\right\}$$

  donde los $x_k \in \mathbb{R}^3$ son vectores no nulos generados al azar en la bola unitaria: $B = \{\boldsymbol{x} : \|\boldsymbol{x}\|_2 \leq 1\}$.

- grafique la sucesión calculada, junto con el valor exacto de la norma de la matriz.

Recordar que tanto la norma 2 puede calcularse con el comando np.linalg.norm. Tener en cuenta que los vectores generados al azar (comando np.random.random) tienen coordenadas en el intervalo $[0, 1]$.

Condición de matrices

Ejercicio 19. Se tiene el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

a) Sea $\boldsymbol{x}$ la solución exacta y $\tilde{\boldsymbol{x}}$ la solución obtenida numéricamente. Se llama *residuo* al vector $\mathbf{r} := \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}$. Si notamos $\mathbf{e} = \boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}$, mostrar que:

$$\frac{1}{\text{cond}(\boldsymbol{A})}\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \leq \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \text{cond}(\boldsymbol{A})\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}.$$

¿Cómo se puede interpretar este resultado?

b) En lugar del dato exacto $\boldsymbol{b}$ se conoce una aproximación $\tilde{\boldsymbol{b}}$. $\tilde{\boldsymbol{x}}$ es tal que $\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}$. Probar que:

$$\frac{1}{\operatorname{cond}(\boldsymbol{A})} \frac{\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \leq \frac{\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \operatorname{cond}(\boldsymbol{A}) \frac{\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}.$$

¿Cómo se puede interpretar este resultado?

Ejercicio 20. Sea

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

a) Calcular $\operatorname{cond}_\infty(\boldsymbol{A})$.

b) ¿Cuán chico debe ser el error relativo en los datos ($\frac{\|\boldsymbol{b}-\tilde{\boldsymbol{b}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$), si se desea que el error relativo en la aproximación de la solución ($\frac{\|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}$) sea menor que 10^{-4} (en $\|\cdot\|_\infty$)?

c) Realizar experimentos numéricos para verificar las estimaciones del ítem anterior. Considerar $\boldsymbol{b} = (3, 2, 2)^t$, que se corresponde con la solución exacta $\boldsymbol{x} = (1, 1, 1)^t$. Generar vectores de error aleatorios, normalizarlos para que su norma sea tan chica como la estimada en el item anterior y perturbar $\boldsymbol{b}$ obteniendo $\tilde{\boldsymbol{b}}$. Finalmente, resolver $\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}$ y verificar que $\|\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\| < 10^{-4}$.

Ejercicio 21. Probar que si $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz inversible y $\|\cdot\|$ es una norma matricial, la condición de $\boldsymbol{A}$ verifica la desigualdad:

$$\frac{1}{\operatorname{cond}(\boldsymbol{A})} \leq \inf\left\{\frac{\|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\|}{\|\boldsymbol{A}\|} : \boldsymbol{B} \text{ es singular}\right\}.$$

Deducir que

$$\operatorname{cond}(\boldsymbol{A}) \geq \sup\left\{\frac{\|\boldsymbol{A}\|}{\|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\|} : \boldsymbol{B} \text{ es singular}\right\}.$$

Nota: En ambos casos, vale la igualdad, pero la otra desigualdad es un poco más complicada de probar. De la igualdad se puede concluir que $\operatorname{cond}(\boldsymbol{A})$ mide la distancia relativa de $\boldsymbol{A}$ a la matriz singular más próxima.

Ejercicio 22. (a) Estimar la $\operatorname{cond}_\infty(\boldsymbol{A})$ de las siguientes matrices en función ε (cuando $\varepsilon \to 0$).

$$\text{(i)} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(ii)} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+\varepsilon \\ 2 & 3 & 4 \\ 1-\varepsilon & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Concluir que la condición de las matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ del ítem anterior tienden a infinito, cualquiera sea la norma considerada.

Ejercicio 23. Para la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & n & 5n \\ 1 & 3n & 3n \\ 1 & n & 2n \end{pmatrix}$$

con $n \in \mathbb{N}$, probar que existe una constante $c > 0$ tal que $\operatorname{cond}_\infty(\boldsymbol{A}) \geq cn$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y deducir que $\operatorname{cond}_\infty(\boldsymbol{A}) \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

Ejercicio 24. Sea $\boldsymbol{D}_n = \frac{1}{10} I_n$. Verificar que $\det(\boldsymbol{D}_n) \to 0$ si $n \to \infty$. ¿$\boldsymbol{D}_n$ está mal condicionada? ¿Es el determinante un buen indicador de cuán cerca está una matriz de ser singular?

Ejercicio 25. Sea $\boldsymbol{A}_n \in \mathbb{R}^n$ la matriz dada por $\boldsymbol{A}_n = (a_{i,j})$,

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \text{ o } j = 1 \\ 1/i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Probar que $\text{cond}_\infty(\boldsymbol{A}_n) \geq f(n)$ para alguna función $f(n) \in \mathcal{O}(n^2)$.

b) Probar que $\text{cond}_2(\boldsymbol{A}_n) \longrightarrow \infty$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

Temas:

- Transformaciones lineales: Lipschutz, Capítulo 9.
- Punto Flotante: Kincaid, Capítulos 2.1 y 2.2.
- Normas y número de condición: Kincaid, Capítulo 4.4.

Todos estos temas están incluidos en el Capítulo 1 del apunte Acosta-Laplagne.

Bibliografía:

1. Numerical Analysis. D.R. Kincaid, E.W. Cheney. Brooks/Cole Publishing Company. 1991.
2. Algebra lineal. Seymour Lipschutz, Editorial Mcgraw Hill Editorial, Serie Schaum, 1992.