Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

# Álgebra Lineal Computacional

1er Cuatrimestre 2024

**Laboratorio N° 3: Transformaciones Lineales.**

## 1 Introducción

Sean $(w, z)$ y $(x, y)$ dos sistemas coordenados, denominados el espacio de entrada y espacio de salida respectivamente. Una transformación geométrica de coordenadas define al mapeo desde el espacio de entrada al de salida de la forma:

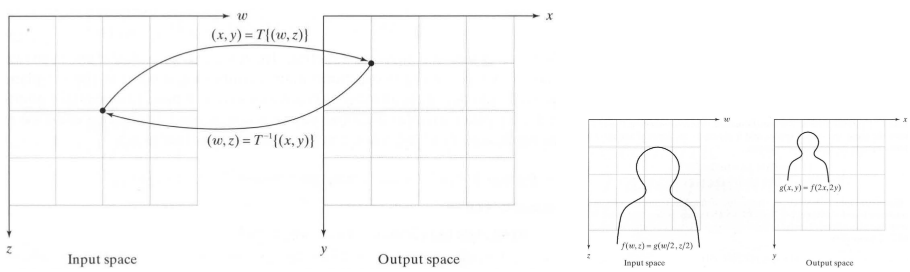
$$(x, y) = T\{(w, z)\}$$

donde $T\{\cdot\}$ se llama transformación o mapeo directo. Si $T\{\cdot\}$ posee una inversa, el mapeo inverso es aquel que traslada los puntos desde el espacio de salida al de entrada:

$$(x, y) = T^{-1}\{(w, z)\}$$

En la fig. 1 se ilustra el mapeo directo e inverso para el ejemplo:

$$\begin{aligned} (x, y) &= T\{(w, z)\} = (w/2, z/2) \\ (w, z) &= T^{-1}\{(x, y)\} = (2x, 2y) \end{aligned}$$




(a) (b)

Figure 1: Transformación lineal

Las transformaciones geométricas de las imágenes se definen en términos de la transformación de coordenadas.

La fig. 1 (b) muestra el efecto de aplicar la transformación lineal definida por $(x, y) = T\{(w, z)\} = (w/2, z/2)$ que escala la figura origina encogiéndola a la mitad.

De forma matricial, la proyección (y su inversa) se puede formalizar como:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 1** (Reescalamiento)**.** Si consideramos la transformación lineal

$$(x, y) = T\{(w, z)\} = (2w, 3z),$$

Se pide:

1. Encontrar la expresión de la matriz $T$ y $T^{-1}$.
2. Usar estas transformaciones para aplicarlas en los vectores canónicos, a un punto arbitrario y a una circunferencia. ¿Qué sucede en cada caso?

**Ejercicio 2** (Deformación)**.** En este caso se trasladan las coordenadas horizontales un factor que depende de las verticales, y las coordenadas verticales quedan sin modificación, provocando una deformación de la salida:

$$(x, y) = T\{(w, z)\} = (w + (0.4)z, z)$$

Se pide:

(a) Encontrar la expresión de la matriz $T$ y $T^{-1}$.

(b) Desarrollar una función en Python `proyectarPunto(ptos, T)`, donde ptos es un array de $2 \times n$ dimensiones, donde $n$ es la cantidad de puntos a proyectar, y $T$ tiene $2 \times 2$ dimensiones. La función devuelve la proyección de los puntos a partir de la transformación lineal definida por $T$. Utilizar el template de Python dado por la cátedra.

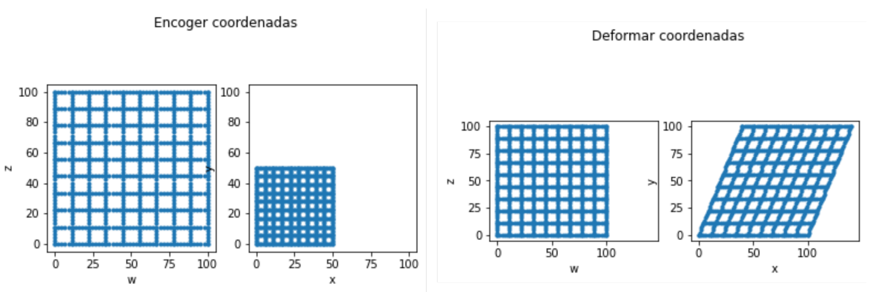



Figure 2: Salida del script de Python

**Ejercicio 3** (Rotación)**.** Sea $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota la rotación de un ángulo $\theta$ alrededor del origen, como muestra la figura 3.

$$\begin{pmatrix} X_\theta \\ Y_\theta \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

Se pide:

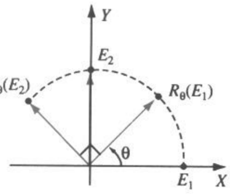



Figure 3: Transformación de rotación

(a) Encontrar la expresión matemática de la matriz $R$, para cualquier valor de $\theta$.

(b) Validar R utilizando el script Python.

**Ejercicio 4** (Rotación y reescalamiento)**.** Supongamos que quiero construir la siguiente transformación. En primer lugar dado un $(x, y)$ que lo rote 45º, luego haga un reescale de la forma $T(u, v) = (2u, 3v)$ y vuelva a rotar en sentido contrario a la primer rotación.

(a) Encontrar la expresión de la matriz que haga las tres transformaciones. *Sugerencia: Considerar una composición de transformaciones y la matriz hallada en el ejercicio anterior.*

(b) Usar dicha transformación para una circunferencia.

# 2 Transformación afín

En los ejercicios precedentes se estudió el caso de matrices de transformación que encogían, dilataban o rotaban la posición de puntos iniciales, en un nuevo espacio a través del álgebra lineal.

Estas transformaciones son un caso particular de la transformación denominada *afín* . En general se puede formalizar las operaciones a través de:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

al cual hemos agregado la posibilidad de hacer una traslación lineal de las coordenadas origen en los dos ejes utilizando los valores constantes $(b_1, b_2)$. A través de estas transformaciones se puede: escalar, rotar, trasladar o deformar. Como una conveniencia matemática y computacional, todas estas transformaciones pueden ser efectuadas utilizando una matriz de $3 \times 3$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

agregarle el 1 a las coordenadas, nos permite seguir trabajando en coordenadas cartesianas (2D) con una matriz cuadrada de $3 \times 3$.

**Ejercicio 5.** Se pide:

(a) Modificar la función proyectarPts para que sea capaz de realizar la operación de transformación afín, o sea con matrices de $3 \times 3$.

(b) Encontrar la expresión para hacer cada una de estas operaciones con las coordenadas **{escalar, trasladar, rotar, deformar}**, usando la matriz afín. Chequear con el script de Python.