Квадратичные формы

Определение:

Квадратичной формой f от n неизвестных $x_1, x_2, \cdots, x_n$ называется выражение вида

(1) $f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, где коэффициенты формы удовлетворяют условиям $a_{ij} = a_{ji}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $i, j \in \{1, \cdots, n\}$.

Если $a_{ij} \in \mathbb{R}$, то квадратичная форма называется *действительной*, если $a_{ij} \in \mathbb{C}$, то *комплексной*.

Матрицей квадратичной формы называется матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Замечания:

1. Матрица квадратичной формы симметричная, т.е. $A^T = A$.
2. Для любой симметричной матрицы n-го порядка можно указать квадратичную форму от n неизвестных, для которой элементы этой матрицы будут коэффициентами.

Определение:

Рангом квадратичной формы называется ранг её матрицы.

Квадратичная форма называется *невырожденной*, если её матрица невырожденная.

Матричная запись квадратичной формы:

(1') $f = X^T A X$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Определение:

Линейным преобразованием квадратичной формы (1) называется преобразование вида:

(2) $\begin{cases} x_1 = q_{11} y_1 + \cdots + q_{1n} y_n \\ \cdots \\ x_n = q_{n1} y_1 + \cdots + q_{nn} y_n, \end{cases}$ где $q_{ij} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $y_1, y_2, \cdots, y_n$ – новые неизвестные.

В матричном виде линейное преобразование выглядит так:

(2') $X = QY$, где $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$ – *матрица линейного преобразования*.

Линейное преобразование квадратичной формы называется *невырожденным*, если его матрица Q невырожденная.

Применим преобразование (2') к квадратичной форме (1'):

$$f = X^T A X = (QY)^T A (QY) = (Y^T Q^T) A (QY) = Y^T \left(Q^T A Q \right) Y = g.$$

Заметим, что матрица $B = Q^T A Q$ – симметричная, поэтому g – квадратичная форма от n неизвестных $y_1, y_2, \cdots, y_n$, B – её матрица. Таким образом, можно сформулировать теорему:

Теорема о линейном преобразовании:

Квадратичная форма от n неизвестных с матрицей A после выполнения линейного преобразования неизвестных с матрицей Q превращается в квадратичную форму от новых неизвестных, причем матрицей этой квадратичной формы служит матрица $Q^T A Q$.

Утверждение:

Ранг квадратичной формы не меняется при выполнении невырожденного линейного преобразования.

Канонический вид квадратичной формы

Определение:

Квадратичная форма вида $g = \sum_{i=1}^{n} b_i\, y_i^2$ называется квадратичной формой *в каноническом виде*.

Основная теорема о квадратичных формах:

Всякая квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду некоторым невырожденным линейным преобразованием неизвестных.

Доказательство поведем индукцией по n.

1) *База индукции.* При $n = 1$ квадратичная форма имеет вид $f = a_{11}x_1^2$, который является каноническим.
2) *Предположение индукции.* Пусть к каноническому виду можно привести квадратичную форму от числа неизвестных меньшего, чем n.
3) *Индукционный переход.* Возьмем произвольную квадратичную форму от n неизвестных $f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$. Рассмотрим два случая:
   a. Хотя бы один из коэффициентов при квадратах неизвестных отличен от нуля. В этом случае можно считать $a_{11} \neq 0$. Тогда квадратичную форму можно записать в виде
   $$f = (a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n) + g(x_2, \cdots, x_n) =$$
   $$= a_{11}\left[x_1^2 + 2x_1\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right) + \left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2\right] -$$
   $$-a_{11}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + g(x_2, \cdots, x_n) =$$
   $$= a_{11}\left(x_1 + \tfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \tfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + h(x_2, \cdots, x_n),$$
   где $h(x_2, \cdots, x_n) = -a_{11}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + g(x_2, \cdots, x_n)$ – квадратичная форма от $(n-1)$ неизвестных, следовательно, по предположению индукции, её можно привести к каноническому виду невырожденным линейным преобразованием. Будем считать, что $h(x_2, \cdots, x_n)$ уже приведена к каноническому виду.

   Обозначим: $\begin{cases} y_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \\ y_2 = x_2 \\ \cdots \\ y_n = x_n \end{cases}$ (*)

   Матрица этого преобразования невырожденная, т.к. $\begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$

   Тогда $f = a_{11}{y_1}^2 + h(y_2, \cdots, y_n)$ – канонический вид. (**)
   Преобразование, приводящее исходную квадратичную форму f к виду (**), будет обратным к преобразованию (*), т.е. невырожденным.
   b. Все коэффициенты при квадратах неизвестных равны нулю, т.е. $a_{11} = \cdots = a_{nn} = 0$. Тогда f содержит произведение неизвестных, коэффициент при котором отличен от нуля. Можно считать, что $a_{12} \neq 0$ -коэффициент при произведении x_1x_2.
   Рассмотрим линейное преобразование неизвестных:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = y_3 \\ \cdots \\ x_n = y_n \end{cases}$$

Это преобразование невырожденное, т.к. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$

Тогда $f = 2a_{12}x_1x_2 + \cdots = 2a_{12}y_1^2 - 2a_{12}y_2^2 + \cdots$.

Появились квадраты сразу двух неизвестных с ненулевыми коэффициентами. Причем они не могут сократиться с остальными слагаемыми квадратичной формы, т.к. в каждый из остальных слагаемых входит в качестве множителя хотя бы одно из неизвестных $y_3, \cdots, y_n$.

Дальше в этом случае действуем так же, как в уже рассмотренном случае 3а.

Утверждение:

Число отличных от нуля коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы равно рангу этой квадратичной формы.

Нормальный вид для комплексной квадратичной формы

Рассмотрим комплексную квадратичную форму $f = X^T AX$, где A -матрица с комплексными элементами. По основной теореме о квадратичных формах существует невырожденное линейное преобразование, приводящее f к каноническому виду:

$$g = b_1y_1^2 + \cdots + b_my_m^2 = \left(\sqrt{b_1}y_1\right)^2 + \cdots + \left(\sqrt{b_m}y_m\right)^2 = z_1^2 + \cdots + z_m^2 = h.$$

Здесь $m = rg\ f = rg\ A$,

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{\sqrt{b_1}} z_1 \\ \cdots \\ y_m = \frac{1}{\sqrt{b_m}} z_m \\ y_i = z_i,\ i \in \{m+1, \cdots, n\} \end{cases}$$ – невырожденное линейное преобразование.

Определение:

Комплексная квадратичная форма называется квадратичной формой *в нормальном виде*, если она имеет вид $f = x_1^2 + \cdots + x_m^2$.

Утверждение:

Для любой комплексной квадратичной формы существует единственный нормальный вид, к которому данную квадратичную форму можно привести с помощью невырожденного линейного преобразования.

Следствие:

Равносильны три следующих утверждения:

1. Существует невырожденное линейное преобразование, переводящее некоторую комплексную квадратичную форму f в комплексную квадратичную форму g.
2. Комплексные квадратичные формы f и g приводятся к одинаковому нормальному виду с помощью невырожденных линейных преобразований.
3. $rg\ f = rg\ g$.

Нормальный вид для действительной квадратичной формы. Закон инерции.

Определение:

Действительная квадратичная форма f называется квадратичной формой *в нормальном виде*, если она имеет вид $f = y_1^2 + \cdots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \cdots - y_m^2$.

Утверждение:

Всякую действительную квадратичную форму можно привести к нормальному виду с помощью невырожденного линейного преобразования с действительными коэффициентами.

Доказательство: Любую действительную квадратичную форму f можно привести с помощью невырожденного линейного преобразования к каноническому виду:

$g = b_1 y_1^2 + \cdots + b_k y_k^2 - b_{k+1} y_{k+1}^2 - \cdots - b_m y_m^2$,

где $m = rg\, f = rg\, g$; $b_i > 0$ для любого $i \in \{1,2,\cdots,m\}$.

Тогда невырожденное линейное преобразование:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{b_1}} z_1 \\ \dots \\ y_m = \dfrac{1}{\sqrt{b_m}} z_m \\ y_i = z_i, \qquad i \in \{m+1, \cdots, n\} \end{cases}$$

приводит f к нормальному виду.

Теорема (закон инерции для действительных квадратичных форм):

Число положительных и число отрицательных квадратов в нормальном виде, к которому приводится данная действительная квадратичная форма невырожденным линейным преобразованием с действительными коэффициентами, не зависят от выбора этого преобразования.

Определение:

Число положительных квадратов в нормальном виде, к которому приводится данная действительная квадратичная форма, называется *положительным индексом инерции*, число отрицательных квадратов – *отрицательным индексом инерции*.

Сигнатура действительной квадратичной формы – это разность между положительным и отрицательным индексами инерции.

Следствие из закона инерции:

Две действительных квадратичных формы f и g можно перевести друг в друга невырожденными действительными линейными преобразованиями тогда и только тогда, когда эти формы имеют одинаковые ранги и сигнатуры.

Положительно определенные квадратичные формы

Определение:

Действительная квадратичная форма f от n неизвестных называется *положительно определенной*, если она приводится к нормальному виду, состоящему из n положительных квадратов, т.е. если и ранг и положительный индекс инерции этой формы равны числу неизвестных.

Теорема

Квадратичная форма $f = f(x_1, \cdots, x_n)$ с действительными коэффициентами является положительно определенной тогда и только тогда, когда эта форма принимает положительные значения при всяких действительных значениях неизвестных, хотя бы одно из которых отлично от нуля, т.е. $f(\propto_1, \cdots, \propto_n) > 0$ для любых $\propto_1, \cdots, \propto_n \in \mathbb{R}$ таких, что $\exists\ i \in \{1, \cdots, n\}:\ \propto_i \neq 0$.

Теорема (критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы)

Для того, чтобы действительная квадратичная форма f от n неизвестных была положительно определенной необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры её матрицы были строго положительными, т.е.

$$\Delta_1 = a_{11} > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \cdots,\ \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0, \cdots,$$

$$\Delta_n = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Замечание:

Аналогично можно ввести *отрицательно определенные формы*, т.е. такие невырожденные действительные квадратичные формы, нормальный вид которых содержит n отрицательных квадратов неизвестных.