Задание 1. Асимптотические сложности.

Определение: $f(n) = \Omega(g(n))$ - это то же самое, что $f(n) = O(g(n))$, только последнее неравенство заменено на $\geq$. Произносится как 'омега большое'.

Определение: $f(n) = \Theta(g(n))$ (тета-оценка или тета-асимптотика) эквивалентно одновременному выполнению $f(n) = O(g(n))$ и $f(n) = \Omega(g(n))$. Это комбинация O-оценки и Ω-оценки, когда они обе выполняются для функций $f(n)$ и $g(n)$.

1 Известно, что $f(n) = O(n^2),\ g(n) = \Omega(1),\ g(n) = O(n)$. Положим

$$h(n) = \frac{f(n)}{g(n)}.$$

1. Возможно ли, что **а)** $h(n) = \Theta(n \log n)$; **б)** $h(n) = \Theta(n^3)$? Если да, приведите конкретные функции. Если нет, докажите, что это невозможно.

$$\begin{cases} \forall\ C_1 > 0\ \forall n \geq N_1\ f(n) \leq n^2 \\ \forall\ C_2 > 0\ \forall n \geq N_2\ g(n) \leq n \\ \forall\ C_3 > 0\ \forall n \geq N_3\ g(n) \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \forall C > 0\ \forall n \geq N \begin{cases} f(n) \leq n^2 \\ g(n) \leq n \\ g(n) \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \forall C > 0\ \forall n \geq N \begin{cases} h(x) = \dfrac{f(n)}{g(n)} \\ n \leq h(x) \leq n^2 \end{cases}$$

a) Возможно, достаточно взять $f(n) = n$ и $g(n) = logn$ - удовлетворяют первоначальным условиям. Тогда $h(x) = nlogn = \Theta(nlogn)$

b) Невозможно. Если $h(n) \leq n^2$, то $\exists C = 1,\ \exists N = 1,\ \forall n \geq N:\ h(n) \leq Cn^2 < Cn^3 \Rightarrow h(n) \neq \Omega(n^3)$

2. Приведите наилучшие (из возможных) верхние и нижние оценки на функцию $h(n)$ и приведите пример функций $f(n)$ и $g(n)$, для которых ваши оценки на $h(n)$ достигаются.

Верхняя оценка: Из $f(n) = O(n^2) \Rightarrow f(n) \leq C_1 n^2$, из $g(n) = \Omega(1) \Rightarrow g(n) \geq C_2 > 0$. Тогда $h(n) = \dfrac{f(n)}{g(n)} \leq \dfrac{C_1 n^2}{C_2} = C_3 n^2$, т.е. $h(n) = O(n^2)$.

Пример: $f(n) = n^2$, $g(n) = 1 \Rightarrow h(n) = n^2 = \Theta(n^2)$.

Из $g(n) = O(n) \Rightarrow g(n) \leq C_3 n$, из $f(n) = O(n^2)$ не следует нижняя граница $f(n)$, но $f(n)$ может быть константой. Тогда $h(n) = \dfrac{f(n)}{g(n)} \geq \dfrac{f(n)}{C_3 n}$. Если взять $f(n) = 1$, то $h(n) \geq \dfrac{1}{C_3 n}$, т.е. $h(n) = \Omega(\dfrac{1}{n})$.

Пример: $f(n) = 1$, $g(n) = n \Rightarrow h(n) = \dfrac{1}{n} = \Theta(\dfrac{1}{n})$.

2 Найдите Θ-асимптотику $\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{i^3 + 2i + 5}$.

При достаточно больших i, $i^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + \frac{2}{i} + \frac{5}{i^3}} \sim i^{\frac{3}{2}}$

Оценим сумму с помощью интегральной оценки: $\int_1^n x^{\frac{3}{2}}\, dx = n^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{2} \Rightarrow \Theta(n^{\frac{5}{2}})$ Значит $\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{i^3 + 2i + 5} = \Theta(n^{\frac{5}{2}})$

3 Докажите, не используя интегрального исчисления, что асимптотика $\sum_{i=1}^n i^\alpha = \Theta(n^{1+\alpha})$, если $\alpha > 0$.

1) O: $\sum_{i=1}^n i^\alpha \leq \sum_{i=1}^n n^\alpha = n \cdot n^\alpha = n^{1+\alpha}$

2) Ω: $\sum_{i=1}^n i^\alpha \geq \sum_{i=n/2+1}^n i^\alpha \geq \sum_{i=n/2+1}^n \left(\frac{n}{2}\right)^\alpha = \left(\frac{n}{2}\right)^\alpha \cdot (n - n/2)$

4 Найдите Θ-асимптотику функции $g(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$;

Из курса мат.анализа есть один общеизвестный факт: асимптотическое поведение гармонического ряда выражается следующим образом: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = ln(n) + \gamma + O(1)$ Тогда $\exists N : \forall n \geq N\quad ln(n) > \gamma + O(1)$. Тогда $ln(n) \leq g(n) \leq 2ln(n) \Rightarrow g(n) = O(logn)$