Lehrstuhl für Regelungstechnik
PD Dr.-Ing. habil. J. Deutscher

FRIEDRICH-ALEXANDER UNIVERSITÄT ERLANGEN-NÜRNBERG
TECHNISCHE FAKULTÄT

Vorlesung: „Regelung nichtlinearer Systeme“

Flachheit nichtlinearer Mehrgrößensysteme

1. Definition
Ein nichtlineares Mehrgrößensystem n-ter Ordnung

$$\dot{x} = f(x, u) \quad \text{mit} \quad \operatorname{rang} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} = p, \quad \forall x \in U(x_0), \quad \forall u \in U(u_0) \tag{1}$$

mit p Eingangsgrößen u heißt *flach*, wenn es einen fiktiven Ausgang $y_f = [y_{f1} \quad \dots \quad y_{fp}]^T$ gibt, der die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. Die Komponenten y_{fi}, $i = 1, 2, \dots, p$, des fiktiven Ausgangs lassen sich als Funktion der Zustandsgrößen x_ν, $\nu = 1, 2, \dots, n$, und u_i, $i = 1, 2, \dots, p$, sowie einer endlichen Anzahl von Zeitableitungen $u_i^{(k_i)}$, $k_i = 1, 2, \dots, \alpha_i$, ausdrücken, d. h.

$$y_f = \Phi(x, u_1, \dot{u}_1, \dots, u_1^{(\alpha_1)}, \dots, u_p, \dot{u}_p, \dots, u_p^{(\alpha_p)}) = \Phi(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) \tag{2}$$

   mit dem Ableitungstupel $u^{(k)} = (u_1^{(k_1)}, \dots, u_p^{(k_p)})$ und $k = (k_1, \dots, k_p)$.

2. Die Zustandsgrößen x_ν, $\nu = 1, 2, \dots, n$, und die Eingangsgrößen u_i, $i = 1, 2, \dots, p$, lassen sich als Funktion der y_{fi}, $i = 1, 2, \dots, p$, und einer endlichen Anzahl von deren Zeitableitung $y_{fi}^{(k_i)}$, $k_i = 1, 2, \dots, \kappa_i$, darstellen, d. h.

$$\begin{aligned} x &= \psi_x(y_{f1}, \dots, y_{f1}^{(\kappa_1 - 1)}, \dots, y_{fp}, \dots, y_{fp}^{(\kappa_p - 1)}) = \psi_x(y_f, \dots, y_f^{(\kappa - 1)}) && (3) \\ u &= \psi_u(y_{f1}, \dots, y_{f1}^{(\kappa_1)}, \dots, y_{fp}, \dots, y_{fp}^{(\kappa_p)}) = \psi_u(y_f, \dots, y_f^{(\kappa)}). && (4) \end{aligned}$$

3. Die Komponenten von y_f sind *differentiell unabhängig*, d. h. sie erfüllen keine Differentialgleichung der Form

$$\varphi(y_f, \dots, y_f^{(\gamma)}) = 0. \tag{5}$$

Wenn der fiktive Ausgang y_f die Bedingungen 1–3 erfüllt, so ist er ein *flacher Ausgang* des Systems (1). Ist Bedingung 2 erfüllt, dann ist Bedingung 3 äquivalent zu $\dim y_f = \dim u = p$.

2. Anmerkungen zur Flachheitsdefinition

- Die Beziehungen (3) und (4) besagen, dass für jede beliebige aber hinreichend oft differenzierbare Trajektorie $y_{f\star}(t)$ des flachen Ausgangs y_f die Trajektorien

$$\begin{aligned} x_\star(t) &= \psi_x(y_{f\star}(t), \ldots, y_{f\star}^{(\kappa-1)}(t)) \\ u_\star(t) &= \psi_u(y_{f\star}(t), \ldots, y_{f\star}^{(\kappa)}(t)) \end{aligned}$$

  Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \text{DGL:} \quad \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), \quad t > 0 && (7) \\ \text{AB:} \quad x(0) &= x_0 && (8) \end{aligned}$$

  für $x_0 = \psi_x(y_{f\star}(0), \ldots, y_{f\star}^{(\kappa-1)}(0))$ sind. Dabei muss die Systemdifferentialgleichung (7) nicht gelöst werden. Da sich somit die Systemdynamik (d.h. alle Trajektorien des Systems) durch y_f und endlich viele von dessen Zeitableitungen darstellen lässt, spricht man auch von einer *(endlichen) differentiellen Parametrierung* des Systems (7) durch den flachen Ausgang y_f.

- Die differentielle Unabhängigkeit der Komponenten y_{fi} des flachen Ausgangs (siehe Bedingung 3 in Abschnitt 1) bedeutet, dass die Trajektorien der Komponenten beliebig und unabhängig voneinander vorgegeben werden dürfen, da sie keine Lösung einer Differentialgleichung sind. Die Trajektorien müssen jedoch hinreichend oft differenzierbar sein, damit die Trajektorien von x und u gemäß (3) und (4) existieren.

- Die Bedingung rang $\frac{\partial f(x,u)}{\partial u} = p$ an das System (1) stellt sicher, dass die Eingangsgrößen u des System zumindest lokal voneinander (differentiell) unabhängig sind.

- Der flache Ausgang ist nicht eindeutig, d. h. für ein System kann es mehrere flache Ausgänge geben. Verschiedene flache Ausgänge für dasselbe System können jedoch stets gemäß

$$y_f = \theta(\bar{y}_f, \dot{\bar{y}}_f, \ldots, \bar{y}_f^{(s)}) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{y}_f = \bar{\theta}(y_f, \dot{y}_f, \ldots, y_f^{(s)}) \tag{9}$$

  ineinander umgerechnet werden.

- Die Funktion ψ_u in (4) hängt von den Zeitableitungen des flachen Ausgangs bis zur Ordnung κ ab, da aufgrund von (3) und (1) die Beziehung $\dot{\psi}_x = f(\psi_x, \psi_u)$ gelten muss.

- Regelgrößen $y = h(x)$, die nicht mit dem flachen Ausgang übereinstimmen, lassen sich stets unter Verwendung von (3) gemäß

$$y = h(\psi_x) = \psi_y(y_f, \ldots, y_f^{(\beta)}) \tag{10}$$

  differentiell parametrieren. Dabei gilt $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p)$ mit $\beta_i \leq \kappa_i - 1$.

- Wenn Bedingung 2 erfüllt ist, dann lässt sich (4) als p Differentialgleichungen für den flachen Ausgang y_f in Abhängigkeit von u interpretieren. Folglich kann der flache Ausgang y_f nicht die Differentialgleichung (5) erfüllen, da er Lösung der Differentialgleichung (4) ist.