Singular Value Decomposition

Algoritmos Para Data Science - Eduardo Laber

Daniel Menezes, Guilherme Varela, Matheus Telles

23 de outubro de 2017

Provar

$$\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j^T = -\frac{1}{2}\left[d_{ij}^2 - \frac{1}{n}\sum_i^n d_{ij}^2 - \frac{1}{n}\sum_j^n d_{ij}^2 + \frac{1}{n^2}\sum_i^n \sum_j^n d_{ij}^2\right] \tag{1}$$

$$d_{ij}^2 = \left[\sum_k^d \left(x_{ik} - x_{jk}\right)^2\right] \Leftrightarrow \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_j - 2\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_i^n d_{ij}^2 &= \frac{1}{n}\sum_i^n \left(\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_j - 2\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j\right) \\
&= \frac{1}{n}\Big(\sum_i^n \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i + n\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_j - 2\mathbf{x}_j \sum_i^n \mathbf{x}_i\Big) \\
&= \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_j + \frac{1}{n}\Big(\sum_i^n \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i\Big) \\
&= \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_j + MSQ
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{j}^{n} d_{ij}^2 = \mathsf{x}_i \cdot \mathsf{x}_i + MSQ \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2}\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{n} d_{ij}^2 &= \frac{1}{n^2}\sum_{i}^{n}\left(n\mathsf{x}_i \cdot \mathsf{x}_i + SSQ\right)\\ &= \frac{1}{n^2}\left(nSSQ + nSSQ\right)\\ &= 2MSQ \end{aligned}\tag{5}$$

Substituindo 3, 4, 5 em 2 completamos a prova

$$
\begin{aligned}
X &= U\Sigma V^T \\
XX^T &= \left(U\Sigma V^T\right)\left(U\Sigma V^T\right)^T = \left(U\Sigma V^T\right)\left(V\Sigma^T U\right) \\
&= \left(U\Sigma\Sigma^T U\right) \\
X &= U\Sigma
\end{aligned} \tag{6}
$$

Pegando os dois primeiros vetores colunas de tamanho n de 6 obtemos a melhor representação da matrix D em duas dimensões.

Data: Matriz XXT n-por-n das normas ao quadrado das posições.
d número de dimensões do vetor posições
Result: A matriz X n-por-d cujas linhas são as coordenadas (x_i com $i = 1...d$) das cidades.

```
begin
    U, S, V ⟵ svd(XXT)
    //Compute X
    for i=1..n do
        for j=1..d do
            X[i, j] = U[i, j] * S[j, j]
        end
    end
    return X
end
```