

SII 21902

O Autorach:

Tadeusz Kaczorek jest absolwentem Wydziału Elektrycznego Politechniki Warszawskiej. Tytuł profesora uzyskał w 1971 roku, a od 1974 roku jest profesorem zwyczajnym Politechniki Warszawskiej. Jest doktorem honoris causa Uniwersytetu Zielonogórskiego (2002 r.), Politechniki Lubelskiej (2004 r.), Politechniki Szczecinińskiej (2004 r.) i Politechniki Warszawskiej (2004 r.).

Zajmował wiele odpowiedzialnych stanowisk. W latach 1970-1973 był projektorem Politechniki Warszawskiej, a w latach 1988-1991 dyrektorem Stacji Naukowej PAN w Rzymie.

Jest uznany specjalistą z automatyki i inżynierii komputerowej, informatyki, robotyki oraz teorii sterowania i systemów. Jest twórcą szkoły naukowej teorii sterowania i systemów. Wyprawił 61 doktorów. Opublikował 17 książek, w tym 5 w języku angielskim. Ma w dorobku przeszło 650 artykułów i referatów naukowych.

Jest członkiem Komitetu Elektrotechniki oraz Komitetu Automatyki i Robotyki PAN, następcą przewodniczącego Centralnej Komisji ds. Stopni i Tytułów, redaktorem naczelnym Biuletynu PAN. Pełni funkcję redaktora naczelnego *Rozpraw Elektrotechnicznych* oraz *Archiwum Elektrotechniki*.

Jest członkiem Rady Programowej *Przeglądu Elektrotechnicznego* i innych czasopism naukowych. Otrzymał wiele nagród, między innymi dwie Nagrody Ministra Edukacji za podręcznik „Teoria sterowania i systemów”. Został uhonorowany Medalem Komisji Edukacji Narodowej, Krzyżem Kawalerskim Orderu Odrodzenia Polski i innymi odznaczeniami państwowymi.

Andrzej Dzielinski jest absolwentem Wydziału Elektrycznego Politechniki Warszawskiej.

W 2002 roku uzyskał stopień naukowy doktora habilitowanego. Od 1983 roku pracuje w Instytucie Sterowania i Elektrotechniki Przemysłowej Politechniki Warszawskiej. Jest profesorem Prywatnej Wyższej Szkoły Businessu i Administracji w Warszawie. Pracował naukowo także we Francji, Włoszech, Wielkiej Brytanii i USA. Zajmuje się sterowaniem układami dwuwymiarowymi, adaptacyjnymi, nieliniowymi, sieciami neuronowymi i przetwarzaniem obrazów. Opublikował na ten temat 87 artykułów w czasopismach naukowych i materiałach konferencyjnych.

Włodzimierz Dabrowski ukończył Wydział Elektryczny Politechniki Warszawskiej. Ma stopień naukowy doktora, który uzyskał w 1999 roku. Obecnie jest związany z Instytutem Sterowania i Elektroniki Przemysłowej Politechniki Warszawskiej oraz Katedrą Systemów Informacyjnych Polsko-Japońskiej Wyższej Szkoły Technik Komputerowych w Warszawie. Zajmuje się projektowaniem dużych systemów informacyjnych, zarządzaniem przedsięwzięciami programistycznymi oraz wielowymiarowymi układami dynamicznymi. Jest autorem licznych artykułów i referatów naukowych z zakresu informatyki.

Rafał Łopatka ma tytuł magistra, który uzyskał w 1999 roku na Wydziale Elektrycznym Politechniki Warszawskiej. Obecnie pracuje na stanowisku asystenta w Instytucie Sterowania i Elektroniki Przemysłowej Politechniki Warszawskiej. W 2000 roku rozpoczął studia doktoranckie w zakresie teorii sterowania. Jest autorem 5 artykułów z dziedziny sterowania.

Wszelkie uwagi na temat książki prosimy kierować pod adresem poczty elektronicznej Autorów:

kaczorek@isep.pw.edu.pl

adzie@isep.pw.edu.pl

w.dabrowski@isep.pw.edu.pl

łopatka@isep.pw.edu.pl

Podstawy teorii sterowania

Tadeusz Kaczorek
Andrzej Dzielinski
Włodzimierz Dąbrowski
Rafał Łopatka

Podstawy teorii sterowania

Wydanie drugie zmienione



Wydawnictwa Naukowo-Techniczne
Warszawa

SPIS TREŚCI

Opiniodawcy:
prof. dr hab. inż. Jerzy Klamka
prof. dr hab. inż. Wojciech Mitkowski

Redaktor Lech Oleksiak

Do drugiego wydania przygotowała Maria Kasperska

Oktadkę i strony tytułowe projektował Paweł G. Rubaszewski

Redaktor techniczny Grażyna Miazek

Korekta Zespół

Przygotowanie do druku IMTEX



Przedmowa

1. Wprowadzenie

1.1. Pojęcia podstawowe i istota układu regulacji automatycznej	1
1.2. Klasyfikacja układów regulacji automatycznej	4
1.3. Zarys treści książki i jak z niej korzystać	8
1.4. Opis liniowych układów dynamicznych	10
1.5. Układy statyczne oraz dynamiczne stacjonarne i niestacjonarne	14
1.5.1. Behawiorystyczna definicja układu	14
1.5.2. Relacyjna definicja układu	17
1.6. Linearyzacja układów nieliniowych	19
1.6.1. Metoda rozwinięcia w szereg	19
1.6.2. Metoda optymalnej linearyzacji	23
1.6.3. Metoda nieliniowego sprzężenia zwrotnego	27
1.7. Modele układów dynamicznych	29
1.7.1. Układy elektryczne	29
1.7.2. Układy mechaniczne	32
1.7.3. Układy elektromechaniczne	33
1.7.4. Procesy mieszane substancji	37
1.7.5. Układy o parametrach rozłożonych	39
1.7.6. Równanie logistyczne w biologii	42
1.7.7. Model Lotka-Volterry układu drapieżnik – ofiara	43
1.7.8. Model May'a układu drapieżnik – ofiara	43
1.7.9. Model Solowa wzrostu gospodarczego	44
1.7.10. Model Leontiefa produkcji w n sektorach	45
1.8. Zadania	46

2. Modele matematyczne liniowych układów dynamicznych ciągły

2.1. Wprowadzenie	49
2.2. Modele czasowe	50
2.2.1. Równania różniczkowe i różnicowe	50
2.2.2. Zmienne stanu	50

Wydawnictwa Naukowo-Techniczne

048 Warszawa, ul. Mazowiecka 2/4
tel. 0-22 826 72 71, e-mail: wnt@wnt.pl
www.wnt.pl

2. Własności układów	153
4.1. Stabilność układów dynamicznych	153
4.1.1. Pojęcia związane ze stabilnością	153
4.1.2. Badanie stabilności liniowych układów ciągłych	159
4.1.3. Kryteria stabilności układów ciągłych	161
4.1.4. Badanie stabilności liniowych układów dyskretnych	189
4.1.5. Teoria Lapunowa badania stabilności układów nieliniowych	195
4.1.6. Metody doboru funkcji Lapunowa	213
4.1.7. Podsumowanie	218
4.1.8. Jak to zrobić w MATLAB-ie	219
3. Modele matematyczne nieliniowych układów dynamicznych	131
3.1. Wprowadzenie	131
3.1.1. Analiza metoda płaszczyzny fazowej	132
3.2.1. Pojęcia analizy metodą płaszczyzny fazowej	132
3.2.2. Sporządzanie portretu fazowego	137
3.2.3. Analiza układów liniowych metoda płaszczyzny fazowej	141
3.2.4. Analiza układów neliniiowych metodą płaszczyzny fazowej	144
3.2.5. Podsumowanie	147
3.2.6. Jak to zrobić w MATLAB-ie	147
4. Własności układów	403
4.1. Stabilność układów dynamicznych	403
4.1.1. Pojęcia związane ze stabilnością	403
4.1.2. Badanie stabilności liniowych układów ciągłych	403
4.1.3. Kryteria stabilności układów ciągłych	403
4.1.4. Badanie stabilności liniowych układów dyskretnych	403
4.1.5. Teoria Lapunowa badania stabilności układów nieliniowych	403
4.1.6. Metody doboru funkcji Lapunowa	403
4.1.7. Podsumowanie	403
4.1.8. Jak to zrobić w MATLAB-ie	403
A. Podstawy rachunku macierzowego	393
A.1. Podstawowe rodzaje macierzy	393
A.2. Wyznacznik macierzy i jego własności	393
A.3. Podstawowe działania na macierzach	396
A.4. Minory i wyznacznik iloczynu macierzy oraz rząd macierzy	398
A.5. Jądro i obraz macierzy	400
A.6. Lewa i prawa odwrotność macierzy	401
A.7. Rozwiązywanie układu równań liniowych	403
A.8. Wartości własne i wektory własne macierzy	405

PRZEDMOWA

A.9.	Rozkład macierzy względem wartości własnych i wartości szczególnych	406
A.10.	Formy kwadratowe dodatnio określone	409
A.11.	Normy wektorów i macierzy	412
A.12.	Macierz pseudoodwrotna Moore'a-Penrose'a	414
A.13.	Wielomian zerujący i minimalny macierzy oraz wzór Sylvestera	415
A.14.	Macierze blokowe	418
A.15.	Iloczyn Kroneckera macierzy	420
A.16.	Jak to zrobić w MATLAB-ie	421
 B. Równania różniczkowe i różnicowe		 429
B.1.	Różniczkowanie i całkowanie macierzy	429
B.2.	Równania różniczkowe	432
B.3.	Równania różnicowe	435
B.4.	Macierzowe równanie różniczkowe Riccatiego	438
B.5.	Pochodna Liego funkcji skalarnej wzdłuż wektora pola	440
B.6.	Nawias Liego pól wektorowych	442
B.7.	Dystrybucje, dystrybucje inwolutywne i dystrybucje invariантne	445
B.7.1.	Dystrybucje	445
B.7.2.	Dystrybucje inwolutywne	447
B.7.3.	Dystrybucje invariантne	448
 C. Przekształcenia całkowe		 451
C.1.	Przekształcanie i całkowanie macierzy	451
C.1.1.	Przekształcanie Laplace'a	451
C.1.2.	Podstawowe własności przekształcania Laplace'a	455
C.1.3.	Odwrotne przekształcanie Laplace'a oraz wyznaczenie oryginalu danej transformaty	458
C.1.4.	Rozwiązywanie równań różniczkowych metodą operatorową	460
C.2.	Przekształcanie \mathcal{Z} i jego własności	463
C.2.1.	Przekształcanie \mathcal{Z}	463
C.2.2.	Podstawowe własności przekształcania \mathcal{Z}	465
C.2.3.	Odwrotne przekształcanie \mathcal{Z} oraz wyznaczenie oryginalu danej transformaty	467
C.2.4.	Rozwiązywanie równań różniczkowych metodą operatorkową	470
C.2.5.	Jak to zrobić w MATLAB-ie	472
 D. Elementy logiki i dowodzenie twierdzeń		 475
D.1.	Zdania proste i złożone	475
D.2.	Prawa logiczne	477
D.3.	Dowodzenie twierdzeń	479
 Bibliografia		 483
 Skorowidz		 493

Książka ta jest podręcznikiem podstaw teorii sterowania. Pisaliśmy ją z myślą o studentach studiów inżynierskich i magisterskich kierunków technicznych, takich jak elektrotechnika, elektronika i mechatronika, automatyka i robotyka, mechaniczna, informatyka itp. Obejmuje ona podstawy teorii sterowania zarówno układów liniowych, jak i nieliniowych, ciągłych i dyskretnych, standaryzowanych i singularnych, optymalnych i adaptacyjnych.

Książka składa się z 4 rozdziałów, 4 dodatków oraz wykazu literatury. Rozdział 1 stanowi obszerne wprowadzenie w problematykę książki. Rozdział 2 poświęciłszy modelom matematycznym liniowych układów dynamicznych ciągłych i dyskretnych. W rozdziale 3 przedstawiliśmy modele matematyczne nielinijowych układów dynamicznych. W rozdziale 4 opisaliśmy podstawowe własności układów dynamicznych, takie jak stabilność, osiągalność, sterowalność, obserwowalność, zera i bieguny. W trzech dodatkach podaliśmy podstawowe właściwości \mathcal{Z} rachunku macierzowego, równań różniczkowych i różnicowych, obliczania pochodnych Liego i rachunku operatorowego opartego na przekształceniu Laplace'a i przekształcaniu \mathcal{Z} . W drugim wydaniu, w nowym czwartym dodatku, przedstawiliśmy elementy logiki i metody dowodzenia twierdzeń. Wykładany materiał zilustrowaliśmy licznymi przykładami. Duży nacisk położyliśmy na możliwość realizacji algorytmów na komputerze, zwłaszcza w programie MATLAB. Przybliżony podział materiału podręcznika na materiał zgodny z programem nauczania na studiach inżynierskich i magisterskich przedstawiony na rysunku 1.5.

Chcielibyśmy skorzystać z okazji i złożyć tu serdeczne podziękowania Recenzentom – Profesorom Jerzemu Klamce i Wojciechowi Miftkowskiemu za wnioskowanie uwagi i sugestie, które pomogły nam usunąć usterki oraz zwiększyć jasność i precyzję wykładu.

Rozdział 1

WPROWADZENIE

1.1. Pojęcia podstawowe i istota układu regulacji automatycznej

Sterowaniem nazywamy celowe oddziaływanie (wpływanie) na przebieg procesów. Sterowanie dzielimy na sterowanie ręczne i automatyczne. Sterowaniem ręcznym nazywamy sterowanie realizowane przez człowieka, a sterowaniem automatycznym – sterowanie realizowane za pomocą odpowiednich urządzeń sterujących. Przykładem sterowania ręcznego jest prowadzenie samochodu. Rozróżniamy sterowanie w układzie otwartym i sterowanie w układzie zamkniętym, czyli w układzie ze sprzężeniem zwrotnym. Przykładem sterowania w układzie otwartym jest stabilizacja napięcia, oparta na wykorzystaniu nieliniowej zależności napięcia od prądu (dużym zmianom prądu odpowiadają małe zmiany napięcia). Sterowanie w układzie zamkniętym nazywamy *regulacją*. Regulacja jest więc pojęciem węższym od sterowania. Regulacją automatyczną nazywamy sterowanie w układzie zamkniętym realizowane samooczynnie (bez udziału człowieka) za pomocą odpowiednich urządzeń sterujących. Urządzenia te, wykorzystując różnice między odpowiednimi sygnałami (wielkościami) zadanymi i mierzonymi, wytwarzają sygnały oddziaływujące celowo na przebieg procesów; zwane są wielkościami sterującymi, krótko – sterowaniami.

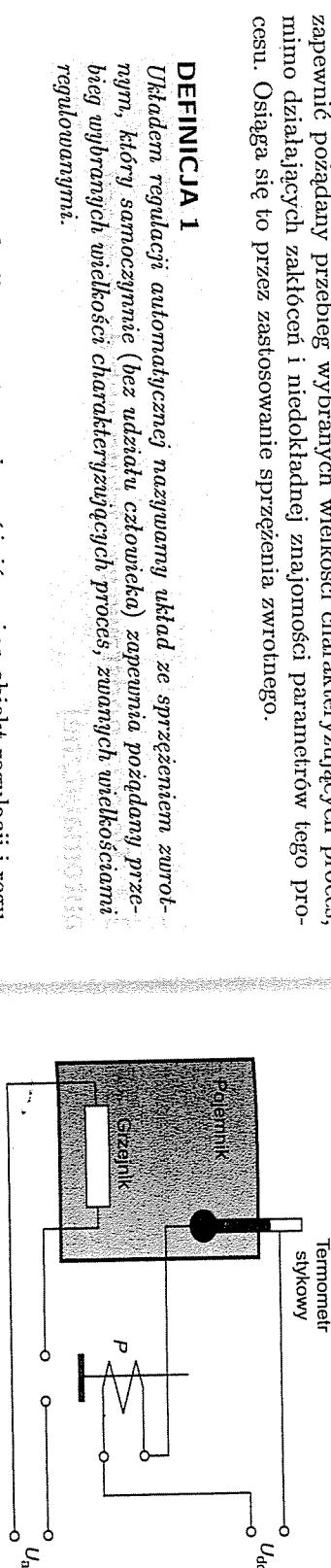
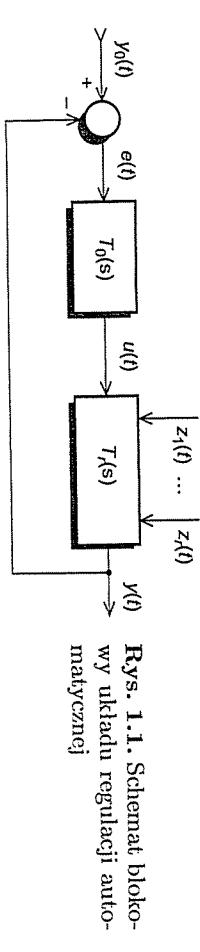
Za pojęcia pierwotne (których nie definiujemy) przyjmujemy pojęcia środowiska i układu fizycznego. Układem nazywać będziemy umownie wyodrębniony ze środowiska układ fizyczny lub jego część. Wielkości charakteryzujące oddziaływanie środowiska na wyodrębniony układ nazywają się wielkościami sterującymi (sygnałami) wejściowymi. Wymuszenia dzielimy na wielkości sterujące (sterowania) i wielkości zakłócające (zakłócenia). *Wielkościami sterującymi* nazywamy wielkości które dla osiągnięcia pożądanego zachowania układu są zmieniane celowo, a *wielkościami zakłócającymi* – wielkości podlegające zmianom przypadkowym (losowym). Wielkości charakteryzujące oddziaływanie układu na środowisko nazywamy odpowiedziami lub wielkościami (sygnałami) wyjściowymi układu.

Stanem układu nazywać będziemy najmniej licznie zbiór wielkości, którego znajomość w chwili początkowej t_0 oraz znajomość wymuszeń w przedziale $[t_0, t]$ pozwala wyznaczyć stan i odpowiedź układu w dowolnej chwili $t > t_0$. Dla szerokiej klasy układów dynamicznych znajomość stanu układu w chwili początkowej t_0 oraz wymuszenia $u(t)$, $t \geq t_0$ pozwala wyznaczyć stan oraz odpowiedź tego układu dla $t > t_0$. Układ regulacji automatycznej powinien zapewnić pożądany przebieg wybranych wielkości charakteryzujących proces, mimo działających zakłóceń i niedokładnej znajomości parametrów tego procesu. Osiaga się to przez zastosowanie sprzężenia zwrotnego.

DEFINICJA 1

Układem regulacji automatycznej nazywamy układ ze sprzężeniem zwrotnym, który samoczynnie (bez udziału człowieka) zapewnia pożądany przebieg wybranych wielkości charakteryzujących proces, zwanymi wielkościami regulowanymi.

W układzie regulacji automatycznej wyróżnić można obiekt regulacji i regulator (urządzenie sterujące). *Obiektem regulacji* (krótko – obiektem) nazywamy proces technologiczny lub urządzenie, w którym zachodzi proces podlegający regulacji. Obiektem regulacji może być na przykład: samolot, proces chemiczny, maszyna elektryczna, obrabiarka, robot. *Regulatorem* nazywać będziemy urządzenie, które wykorzystując różnice między odpowiednimi wielkościami zadanymi i mierzonymi, tak oddziaływa – za pomocą wielkości sterujących – na obiekt, aby wielkości regulowane miały pożądany przebieg. Schemat blokowy układu regulacji automatycznej jednej wielkości regulowanej $y(t)$ przedstawiono na rys. 1.1.

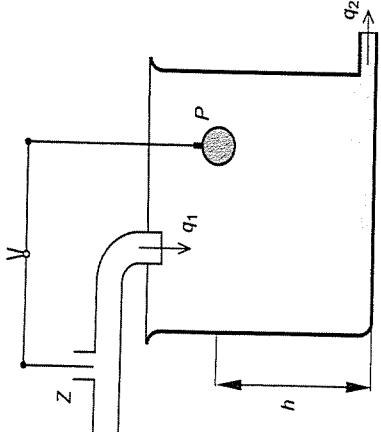


W schemacie tym obiekt jest reprezentowany przez człon o transmitancji operatorowej $T_0(s)$, a regulator – przez człon o transmitancji operatorowej $T_r(s)$. Porównanie wielkości regulowanej $y(t)$ z jej wartością zadaną $y_0(t)$ (wielkość różnicę $e(t) = y_0(t) - y(t)$ nazywamy *uchybą regulacji*). Układ regulacji automatycznej pracuje dobrze (idealnie), jeżeli mimo działających na obiekt zakłóceń $z_1(t), \dots, z_r(t)$ uchyb regulacji $e(t)$ jest możliwie mały (teoretycznie równy

wartości zero). Podstawowym celem układu regulacji automatycznej jest więc samo- czynne zerowanie uchybu regulacji, wywołanego zmianą $y_0(t)$ lub działających na obiekt zakłóceń $z_1(t), \dots, z_r(t)$. Zadaniem regulatora jest wytworzenie na podstawie uchybu regulacji $e(t)$ takiego sygnału sterującego (sterowania) $u(t)$, aby uchyb ten teoretycznie zmalał do zera. Na rysunku 1.2 przedstawiono schemat ideowy prostego układu regulacji temperatury. W układzie tym obiektem jest grzejnik, a regulatorem – termometr stykowy. Pojernik wewnętrzny temperatury o wartości t_0 wyższej niż temperatura otoczenia t_z . W układzie tym rolę elementu pomiarowego i porównującego odgrywa termometr stykowy, który ma wbudowane dwie elektrody. Góra elektroda, ruchoma, pozwala nastawić zadaną wartość temperatury t_0 . Układ ten działa w następujący sposób. Gdy temperatura wewnętrzna pojernika przekroczy wartość zadaną t_0 , wówczas zostaje otwarty obwód przekaźnika P i przekaźnik ten wyłącza grzejnik. Jeżeli natomiast temperatura wewnętrzna pojernika obniży się do wartości mniejszej niż zadana t_0 , to wówczas zostanie otwarty obwód przekaźnika P i przekaźnik ponownie włącza grzejnik. W tym przypadku obiektem regulacji jest pojernik wraz z grzejnikiem, a regulatorem – termometr stykowy i przekaźnik P . Wielkość regulowaną jest temperatura t wewnętrzna pojernika, sterowaniem – napięcie zasilające grzejnik U , a zakłóceniem – zmieniająca się temperatura otoczenia t_z .

Na rysunku 1.3 przedstawiono schemat ideowy prostego układu regulacji automatycznej poziomu cieczy w zbiorniku. Zadaniem tego układu jest utrzymanie stałego poziomu h_0 cieczy w zbiorniku przy zmieniającej się w sposób przypadkowy wartości q_2 strumienia cieczy wpływającej ze zbiornika. Układ ten działa następująco.

Jeżeli z jakiegokolwiek powodu poziom cieczy h się obniży, to pływak P , opadając w dół, za pomocą dźwigni i zaworu Z zwiększa wartość q_1 strumienia cieczy dopływającej do zbiornika, co powoduje stopniowe podwyższenie poziomu cieczy h . W tym przypadku obiektem regulacji jest zbiornik, a regulatorem



Rys. 1.3. Schemat układu regulacji poziomu cieczy

$$y = \sum_{i=1}^m a_i y_i \quad (1.2)$$

odpowiedzi y_1, y_2, \dots, y_m , przy czym y_i jest odpowiedzią tego układu na wymuszenie u_i .

Układy liniowe są opisane liniowymi równaniami algebraicznymi, różniczkowymi (zwykłymi lub częstotliwymi), różnicowymi, całkowymi – ogólnie operatorami liniowymi. Latwo wykazać, że warunkiem koniecznym, ale nieodmiennym, liniowością układu jest liniowość jego charakterystyki statycznych. Układ o charakterystyce statycznej $y = au + b$, dla $b \neq 0$ nie spełnia zasadu superpozycji. Układ regulacji automatycznej, który nie spełnia zasadu superpozycji, nazywać będziemy nieliniowym. Układy nieliniowe są opisane nieliniowymi równaniami algebraicznymi, różniczkowymi (zwykłymi lub częstotliwymi), różnicowymi, całkowymi – ogólnie operatorami nieliniowymi. Ze względu na liczbę wejść i wyjść (wielkości regulowanych) układy regulacji automatycznej dzielimy na:

- układy o jednym wejściu i jednym wyjściu,
- układy o wielu wejściach i wielu wyjściach.

Przykładem układu o jednym wejściu i jednym wyjściu (jednej wielkości regulowanej) jest układ regulacji automatycznej poziomu cieczy w zbiorniku, którego schemat ideoowy pokazano na rys. 1.3. Ze względu na liczbę zmiennych niezależnych operatorów opisujących układy te dzielimy na:

- układy jednowymiarowe,
- układy wielowymiarowe.

Układy jednowymiarowe są opisywane operatorami jednej zmiennej niezależnej, która zwykle jest czas ciągły (układy ciągłe) lub dyskretny (układy dyskretne). Układy wielowymiarowe są opisywane operatorami zależnymi od przymajennej dwóch zmiennych niezależnych. Przykładem układu dwuwymiarowego jest linia dłuża, w której napiecie $u(x, t)$ i natężenie prądu $i(x, t)$ są zależne od czasu t i od odległości x od początku linii.

Ze względu na charakter sygnałów układów regulacji automatycznej dzielimy na:

- układy ciągłe,
- układy dyskretne,
- układy hybrydowe (ciągło-dyskretne).

Układami ciągłymi nazywamy układy, w których sygnały mają charakter ciągły. Dynamiczne układy ciągłe są zwykle opisane równaniami różniczkowymi zwyczajnymi lub częstotliwościowymi. Układy dyskretnymi nazywamy układy

1.2. Klasifikacja układów regulacji automatycznej

Układ regulacji automatycznej można klasyfikować według różnych kryteriów, takich jak: liniowość, liczba wejść i wyjść, charakter sygnałów, zadania układu, zdolność samoczynnego dopasowywania parametrów i charakterystyk do zmieniających się właściwości obiektów i zakładów itp.

Ze względu na cechę (właściwość) liniowości układów regulacji automatycznej dzielimy na:

- liniowe,
- nieliniowe.

Układ regulacji automatycznej będziemy nazywać liniowym, jeżeli spełnia on następującą zasadę superpozycji.

DEFINICJA 2 *Układ spełnia zasadę superpozycji, jeżeli odpowiedź na wymuszenie*

$$u = \sum_{i=1}^m a_i u_i \quad (a_i - \text{liczby rzeczywiste}) \quad (1.1)$$

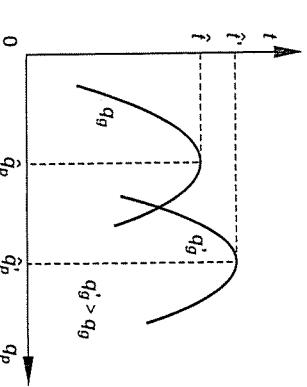
będąca kombinacją liniową wymuszeń u_1, u_2, \dots, u_m , równa się kombinacji liniowej

w których sygnały mają charakter dyskretny. Dynamiczne układy dyskretnie są zwykle opisane równaniami różnicowymi. W układach hybrydowych część sygnałów ma charakter ciągły, a część dyskretny. Na przykład pomiar pewnych wielkości może być dyskretny, komputer sterujący może oddziaływać na proces tylko w dyskretnych chwilach itp.

Ze względu na zadanie, jakie mają spełniać, układy regulacji automatycznej dzielimy na:

- układy regulacji stalowartościowej (stabilizacji automatycznej),
- układy regulacji programowej,
- układy regulacji nadzornej (układy nadzorne lub śledzące),
- układy regulacji ekstremalnej.

Układami regulacji stalowartościowej nazywamy układy, których wielkość zadająca $y_0(t)$ ma stałą wartość. Przykładem układu regulacji stalowartościowej jest układ regulacji automatycznej poziomu cieczy w zbiorniku (rys. 1.3) oraz temperatury w pojemniku (rys. 1.2). Układy regulacji programowej nazywamy układy, których wielkość zadająca $y_0(t)$ jest znana z góry funkcją czasu ($y_0(t)$ zmienia się według znanego z góry programu). Przykładem układu regulacji programowej jest automatyczna obrabiarka wykonująca element o zadanym kształcie (profilu). Układy regulacji nadzornej nazywamy układy, których wielkość zadająca $y_0(t)$ nie jest znana z góry funkcją czasu, ale zależy od zjawisk występujących na zewnątrz układu. W układzie nadzornym wielkość regulowana $y(t)$ nadaje za zmianami $y_0(t)$. Przykładem układu nadzornego jest radarowy układ artylerii przeciwlotniczej, śledzący ruch samolotu. Układy regulacji ekstremalnej nazywamy układy, w których wielkości regulowane przybierają wartości ekstremalne. Regulacje ekstremalne stosuje się do obiektów o charakterystykach statycznych ekstremalnych, tzn. będących krzywymi mającymi maksima i minima. Przykładem charakterystyki ekstremalnej jest wykres temperatury t w komorze spalania w zależności od wartości strumienia powietrza q_p , przy ustalonej wartości strumienia gazu palnego q_g i ustalonej wartości opałowej tego gazu. Dla różnych wartości strumienia gazu palnego q_g i różnej wartości opałowej tego gazu otrzymamy różne krzywe (rys. 1.4).



Rys. 1.4. Wykres temperatury w zależności od wartości strumienia powietrza

Przy zbyt małym dopływie powietrza nie występuje całkowite spalanie gazu i część niespalonego gazu uchodzi wraz ze spalinami do komina. Jeżeli natomiast dopływ powietrza jest zbyt duży, to nadmiar powietrza niebiorącego udziału w spalaniu działa jako czynnik chłodzący. Istnieje więc wartość strumienia powietrza q_p , przy której temperatura w komorze spalania osiąga wartość największą \hat{t} (rys. 1.4) (przy ustalonej wartości strumienia gazu q_g i ustalonej wartości opałowej gazu). W układzie regulacji ekstremalnej procesu spalania gazu regulator tak dobiera wartość strumienia, aby przy danej wartości strumienia gazu i danej wartości opałowej tego gazu temperatura w komorze spalania była najwyższa.

Ze względu na zdolność samoczynnego dopasowania parametrów i charakterystyk do zmieniających się właściwości obiektów i zakłóceń, przykładem układu adaptacyjnego jest układ regulacji automatycznej kursu samolotu (tzw. autopilot), którego parametry samoczynnie dopasowują się do zmieniających się właściwości samolotu na skutek zmian prędkości lotu, gęstości atmosfery, oblodzenia samolotu itp.

Przyjmując za kryterium jakości (wskaźnik jakości) układów regulacji automatycznej funkcję Q , możemy układy te podzielić na:

- optymalne,
- nieoptymalne.

Układami optymalnymi nazywamy układy zapewniające ekstremalną (maksymalną lub minimalną) wartość wskaźnika jakości Q , a układami nieoptymalnymi – układy, które nie zapewniają ekstremalnej wartości tego wskaźnika.

Ze względu na sposób realizacji sterowania układy dzielimy na:

- układy jednowarstwowe,
- układy wielowarstwowe.

W układach wielowarstwowych (zwanych również układami wielopoziomowymi lub hierarchicznymi) występują przynajmniej dwie warstwy (poziomy). W typowym układzie wielowarstwowym występuje warstwa stabilizacji, warstwa optymalizacji (lub adaptacji) i warstwa koordynacji. Regulator najniższej warstwy (poziomu) stabilizacji stabilizuje wielkość regulowaną na zadanym poziomie, który jest wyznaczony przez regulator warstwy optymalizacji (adaptacji). Regulator (komputer sterujący) warstwy najwyższej koordynuje współdziałanie poszczególnych regulatorów lokalnych.

1. Wprowadzenie

1.3. Zarys treści książki i jak z niej korzystać

Książka składa się z 4 rozdziałów, 4 dodatków (A, B, C, D) i wykazu literatury. Rozdział 1 stanowi obszerne wprowadzenie w tematykę książki. Obejmuje on pojęcia, podstawowe, istotę układu regulacji automatycznej, opis liniowych układów dynamicznych, metody linearyzacji układów nieliniowych oraz modele matematyczne układów dynamicznych elektrycznych, mechanicznych, elektromechanicznych, chemicznych, biologicznych, ekonomicznych. Rozdział 2 jest poświęcony modelom matematycznym liniowych układów dynamicznych ciągłych i dyskretnych w postaci równań różniczkowych, równań stanu oraz modeli AR, ARMA. Omówiono tu charakterystyki czasowe, transmitancje operatorowe i widmowe, charakterystyki częstotliwościowe oraz podstawowe członki dynamiczne.

Modele matematyczne nieliniowych układów dynamicznych opisano w rozdziale 3. W rozdziale 4 wprowadzono pojęcie piaszczystego fazowej, portretu fazowego i ich zastosowania do analizy układów nieliniowych, osiągalność, sterowalność i obserwowałość układów liniowych ciągłych i dyskretnych, zera i bieguna układów liniowych, postać Smitha i MacMillana macierzy transmitemancji operatorowych oraz różne postacie kanoniczne macierzy układów liniowych.

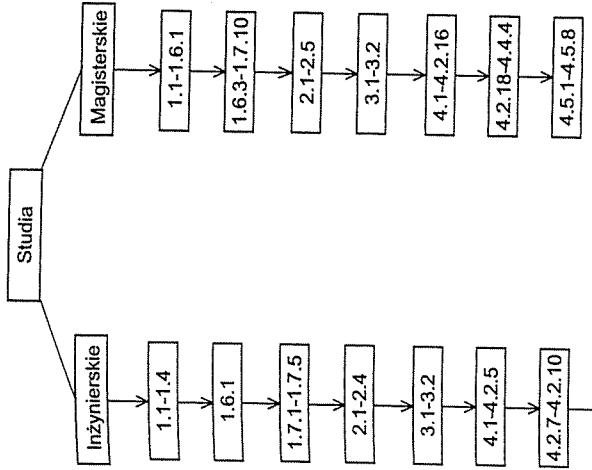
W dodatku A podano podstawowe wiadomości z rachunku macierzowego, a w dodatku B zebrane podstawowe wiadomości dotyczące różniczkowania macierzy, równań różniczkowych i różnicowych oraz obliczania pochodnych Liego. Dodatek C zawiera podstawy rachunku operatorowego opartego na przekształceniach Laplace'a i przekształceniu \mathcal{Z} . W dodatku D omówiono elementy logiki i metody dowodzenia twierdzeń.

Wykładany materiał jest ilustrowany licznymi przykładami. Na końcu rozdziałów znajdują się zadania do samodzielnego rozwiązywania wraz, w większości przypadków, z odpowiedziami i wskazówkami. Książka obejmuje podstawowe zagadnienia teorii sterowania zarówno układów liniowych, jak i nieliniowych. Szczególną uwagę zwrócono na możliwość numerycznej realizacji algorytmów na komputerze, zwłaszcza w programie MATLAB.

Książka zawiera podstawy teorii sterowania i jest przeznaczona przede wszystkim dla studentów studiów inżynierskich, magisterskich i częściowo doktoranckich kierunków technicznych, takich jak elektrotechnika, elektronika i mechanika, automatyka i robotyka, mechanika, informatyka.

Przybliżony podział materiału zgodny z programem poszczególnych rozdziałów pokazano na rys. 1.5. Na rysunku tym są wyodrębnione dwie ścieżki studiowania: odpowiadające studiom inżynierskim i magisterskim. Słuchacz studiów doktoranckich powinien materiał tej książki traktować jako wprowadzenie do samodzielnego studiów i przewodnik po literaturze przedmiotu.

1.3. Zarys treści książki i jak z niej korzystać



Rys. 1.5. Ścieżki studiowania

Każdy student, niezależnie od poziomu na jakim studiuje, powinien zwrócić uwagę na następujące elementy:

- sformułowanie zagadnienia,
- warunki istnienia rozwiązania zagadnienia,
- algorytm (procedury) wyznaczania rozwiązania.

W sformułowaniu zagadnienia szczególną uwagę należy zwrócić na:

- założenia upraszczające model procesu lub zagadnienia,
- jakie wielkości lub/ oraz parametry są dane (znane),
- jakie wielkości lub/ oraz parametry są poszukiwane (niewiadome).

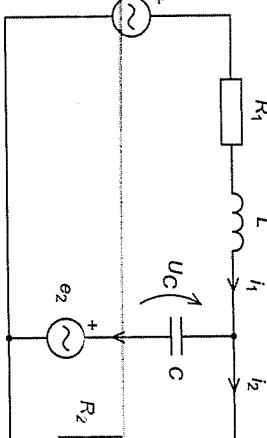
Przy formułowaniu warunków istnienia rozwiązania zagadnienia szczególną uwagę należy zwrócić na:

- czy podane warunki są tylko dostateczne, czy tylko konieczne lub wreszcie konieczne i dostateczne,
- metody dowodu tych warunków.

Algorytmy (procedury) wyznaczania rozwiązania zagadnienia jest wygodnie podawać w postaci kolejnych kroków oraz należy zwrócić uwagę na możliwość ich realizacji numerycznej na komputerze np. w programie MATLAB. Przy porównywaniu różnych algorytmów istotna jest ich ogólność, prostota i złożoność obliczeniowa.

1.4. Opis liniowych układów dynamicznych

Właściwości liniowych układów dynamicznych można opisywać w różny, nie zawsze równoważny, sposób. Do najczęściej stosowanego opisu zakładamy opis za pomocą równań różniczkowych, wynikających z odpowiednich praw fizyki. Równiąc z równaniami tych pewne zmienne, możemy otrzymać równania różniczkowe odpowiadające zmiennym w czasie wybranej wielkości. Możemy też, wybierając odpowiednią liczbę zmiennych, równania te zapisać w postaci układu równań różniczkowych pierwszego rzędu. Pokażemy to na prostym przykładzie obwodu elektrycznego, którego schemat pokazano na rys. 1.6. W obwodzie tym dane są rezystancje R_1 , R_2 , induktywność L cewki, pojemność C kondensatora oraz zmienne w czasie napięcia źródłowe e_1 i e_2 .



Rys. 1.6. Schemat obwodu elektrycznego

Niech interesującymi nas wielkościami w tym obwodzie będą prady i_1 , i_2 oraz napięcie u_C na kondensatorze. Korzystając z praw Kirchhoffa, możemy dynamikę tego obwodu opisać równaniami

$$\begin{aligned} e_1 - R_1 i_1 - L \frac{di_1}{dt} - R_2 i_2 &= 0 \\ e_2 + u_C - R_2 i_2 &= 0 \\ i_1 - i_2 - C \frac{du_C}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Rugując z równań (1.3) prąd i_2 oraz napięcie u_C , otrzymamy równanie różniczkowe opisujące zmiany w czasie prądu i_1

$$\begin{aligned} \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \left(\frac{R_1}{L} + \frac{1}{R_2 C} \right) \frac{di_1}{dt} + \left(\frac{1}{LC} + \frac{R_1}{R_2 L C} \right) i_1 &= \frac{e_1}{LC} - \frac{de_1}{L dt} - \frac{de_2}{L dt} \quad (1.4) \\ \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R_1 R_2 C + L}{R_2 L C} \frac{du_C}{dt} + \frac{R_2 + R_1}{R_2 L C} u_C &= \\ = \frac{e_1}{LC} - \frac{R_1 + R_2}{R_2 L C} e_2 - \frac{1}{R_2 C} \frac{de_2}{dt} & \end{aligned}$$

W celu wyznaczenia z równania różniczkowego (1.4) przebiegu napięcia u_C musimy znać wartości napięć źródłowych e_1 i e_2 , parametry obwodu R_1 , R_2 , L i C oraz warunki początkowe w chwili t_0

$$i_1(t_0) = i_{10}, \quad \frac{du_C}{dt} \Big|_{t=t_0} = u_{C1} \quad (1.5)$$

Rugując natomiast z równań (1.3) prąd i_1 oraz prąd i_2 , otrzymamy równanie różniczkowe opisujące zmiany w czasie napięcia u_C

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \left(\frac{R_1}{L} + \frac{1}{R_2 C} \right) \frac{du_C}{dt} + \left(\frac{1}{LC} + \frac{R_1}{R_2 L C} \right) u_C &= \\ = \frac{e_1}{LC} - \frac{R_1 + R_2}{R_2 L C} e_2 - \frac{1}{R_2 C} \frac{de_2}{dt} & \end{aligned} \quad (1.6)$$

Do wyznaczenia z równania różniczkowego (1.6) przebiegu prądu i_2 musimy znać również wartości napięć źródłowych e_1 i e_2 , parametry obwodu R_1 , R_2 , L i C oraz warunki początkowe w chwili t_0

$$i_2(t_0) = i_{20}, \quad \frac{di_2}{dt} \Big|_{t=t_0} = i_{21} \quad (1.9)$$

Zauważmy, że równanie charakterystyczne równań różniczkowych (1.4), (1.6) i (1.8) ma taką samą postać

$$s^2 + \frac{R_1 R_2 C + L}{R_2 L C} s + \frac{R_2 + R_1}{R_2 L C} = 0 \quad (1.10)$$

Zależy ono od struktury i parametrów R_1 , R_2 , L i C obwodu, a nie zależy od wielkości, którą wyznaczamy.

UWAGA 1. Zauważmy, że znając wartości napięć źródłowych e_1, e_2 , parametry R_1, R_2, L i C , charakterystyczne napięcie u_C oraz prąd i_1 , możemy wyznaczyć dwojące napięcie i prąd w tym obwodzie.

Na przykład z drugiego z równań (1.3) mamy $i_2 = \frac{1}{R_2}(e_2 + u_C)$. A więc znając R_2, u_C i e_2 , możemy wyznaczyć i_2 . Podobnie, znając prąd i_1 , możemy wyznaczyć napięcie na rezystorze R_1 równe $R_1 i_1$ oraz napięcie na cewce $u_L = L \frac{di_1}{dt}$.

Przyjmując za zmienne stanu napięcie u_C oraz prąd i_1 , po wyregulowaniu prądu i_2 z równań (1.3), otrzymamy układ równań różniczkowych pierwszego rzędu postaci

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_C \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 C} & \frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{R_2 C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Niech poszukiwaną wielkością w tym obwodzie będzie prąd i_2 , określony równaniem

$$i_2 = \left[\frac{1}{R_2} \ 0 \right] \begin{bmatrix} u_C \\ i_1 \end{bmatrix} + \left[0 \ \frac{1}{R_2} \right] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Napięcie u_C oraz prąd i_1 , których znajomość wartości w dowolnej wybranej chwili t_0 , $u(t_0), i_1(t_0)$ oraz napięć źródłowych e_1 i e_2 i parametrów obwodu R_1, R_2, L, C wystarczy do wyznaczenia dowolnych napięć i prądów w dowolnej chwili $t > t_0$, nazywanym zmiennym stanem tego obwodu i oznaczanym przez x_1 i x_2 . Korzystając z tych zmiennych stanu, równania (1.11), (1.12) możemy napisać w postaci

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.13)$$

$$y = Cx + Du \quad (1.14)$$

przy czym

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_C \\ i_1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 C} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_1}{L} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{R_2 C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

$$C = [C_1 \ C_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} & 0 \end{bmatrix}, \quad D = [d_1 \ d_2] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix}$$

a warunek początkowy ma postać

$$x_0 = x(t_0) = \begin{bmatrix} u(t_0) \\ i_1(t_0) \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

Równanie (1.13) nazywamy równaniem stanu, a równanie (1.14) równaniem wyjścia. Znając wymuszenie u dla $t > t_0$ oraz warunek początkowy (1.15), możemy wyznaczyć rozwiązanie równania różniczkowego (1.13) ze wzoru

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (1.16)$$

a następnie podstawiając (1.16) do równania (1.14), wyznaczyć poszukiwaną wielkość

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)} x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t) \quad (1.17)$$

Pierwsza składowa

$$y_s(t) = Ce^{A(t-t_0)} x_0 \quad (1.18)$$

określa składową swobodną, wywołaną niezerowymi warunkami początkowymi, a druga składowa

$$y_w(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t) \quad (1.19)$$

składową wymuszoną wywołaną zewnętrznym wymuszeniem u . Równanie charakterystyczne macierzy A rozpatrywanego obwodu ma postać

$$\det [|s - A|] = \begin{vmatrix} s + \frac{1}{R_2 C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & s + \frac{R_1}{L} \end{vmatrix} = s^2 + \frac{R_1 R_2 C + L}{R_2 LC} s + \frac{R_1 + R_2}{R_2 LC} = 0$$

i pokrywa się z równaniem charakterystycznym (1.10) równań różniczkowych (1.4), (1.6) i (1.8).

Korzystając z analogii istniejącej między obwodami elektrycznymi a układami mechanicznymi, hydraulicznymi, pneumatycznymi, biologicznymi, ekonomicznymi itp. możemy dynamikę tych układów opisać odpowiednimi równaniami różniczkowymi na podstawie odpowiednich praw rządzących tymi układami oraz dokonać redukcji niektórych zmiennych z tych równań. Wybierając odpowiednie zmienne za zmienne stanu, możemy dymamikę tych układów opisać równaniami stanu postaci (1.13), (1.14). Przechodziąc do przypadku ogólnego, wprowadzamy następujące ważne pojęcia stanu: *wektora stanu i zmiennych stanu*.

DEFINICJA 3 Stanem układu (procesu) nazywamy zbiór liniowo niezależnych wielkości x_1, x_2, \dots, x_n określających w pełni skutki przeszłych oddziaływań ($t < t_0$) na układ, który jest wystarczający do wyznaczenia przebiegów chwilowych dowolnych wielkości w tym układzie dla $t > t_0$, gdy znane są wymuszenia i parametry tego obwodu. Wielkości x_1, x_2, \dots, x_n nazywamy zmiennymi stanu, a wektor $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ wektorem stanu tego układu.

Za zmienne stanu można wybrać różne wielkości w układzie. W liniowych obwodach elektrycznych najczęściej za zmienne stanu przyjmuje się napięcia na kondensatorach i prądy w cewkach. Można za zmienne stanu wybrać też ładunki ($q = Cu_C$) kondensatorów i strumienie magnetyczne ($\psi = L\dot{i}$) cewek. Własności dynamiczne układów liniowych o stałych parametrach można również opisać za pomocą transmitancji operatorowych, charakterystyk częstotliwościowych i charakterystyk czasowych. Należy podkreślić, że nie wszyskie te opisy są w pełni równoważne. Pełną informację o właściwościach dynamicznych układu daje układ równań różniczkowych napisanych na podstawie praw rządzących tym układem oraz opis za pomocą równań stanu (1.13), (1.14). Często w procesie eliminacji pewnych zmiennych z układu równań różniczkowychtrzymamy istotne informacje o właściwościach dynamicznych układu (patrz p. 4.2.11 Dekompozycja Kalmana układów liniowych).

1.5. Układy statyczne oraz dynamiczne stacjonarne i niestacjonarne

Układy (modele) można definiować różnie. Nizzej są przedstawione dwie najczęściej spotykane definicje. Pierwsza z nich o charakterze ogólnym, podana przez J. Willensa [198] nie wymaga pojęć wejścia i wyjścia i jest oparta na pojęciu zachowania (trajektorii), stąd jej nazwa – behawiorystyczna.

1.5.1. Behawiorystyczna definicja układu

Niech \mathbb{R} będzie zbiorem (całkiem) liczb rzeczywistych, a $\mathbb{R}^{p \times q}$ zbiorem macierzy o wymiarach $p \times q$ i elementach ze zbioru \mathbb{R} . Oznaczmy literą Z zbiór liczb całkowitych, a literą Z_+ – zbiór liczb całkowitych nieujemnych, $Z_+ := \{0, 1, 2, \dots\}$.

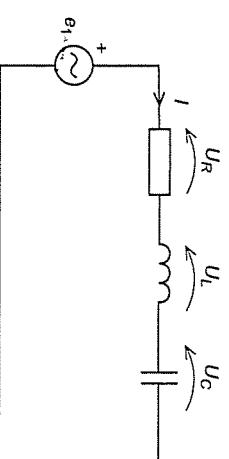
DEFINICJA 4

Układem S nazywamy następującą trójkę:

$$S := \{T, W, B\}$$

1.5. Układy statyczne oraz dynamiczne stacjonarne i niestacjonarne

gdzie T jest zbiorem chwil czasowych, W jest zbiorem (przestrzenią) wartości sygnałów, za pomocą których otoczenie oddziałuje na układ i układ oddziałuje na otoczenie, B jest zbiorem trajektorii $w := T \mapsto W$ spełniających prawa rządzące tym układem i określające zachowanie tego układu.



Rys. 1.7. Schemat obwodu elektrycznego

W tym przypadku $T \subset \mathbb{R}$, W jest zbiorem wartości, jakie przybieraają napięcia na poszczególnych elementach R, L, C i natężenie prądu w tym dwójniku, a B jest zbiorem przebiegów czasowych tylko tych napięć u_R, u_L, u_C na elementach R, L, C oraz natężenia prądu i , które spełniają równania

$$c = Ri + L \frac{di}{dt} + u_C, \quad u_R = Ri, \quad (1.20)$$

$$u_L = L \frac{di}{dt}, \quad u_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

Szeroką klasę liniowych układów dynamicznych można opisać równaniem

$$\mathbf{R}(\rho)\mathbf{w} = 0 \quad (1.21)$$

gdzie

$$\mathbf{R}(\rho) := \mathbf{R}_n \rho^n + \mathbf{R}_{n-1} \rho^{n-1} + \dots + \mathbf{R}_1 \rho + \mathbf{R}_0,$$

$$\mathbf{R}_i \in \mathbb{R}^{p \times q}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

ρ jest operatorem różniczkowania $\rho = z$, $zf(z) = f(z+1)$, dla układów ciągłych, oraz operatorem różnicowania $\rho = s$, $sf = \frac{df}{dt}$, dla układów dyskretnych, $W = \mathbb{R}^q$ (zbiór q -wymiarowych wektorów o składowych ze zbiorem \mathbb{R}), a zbiór B jest określony następująco:

$$B := \{\mathbf{w} : T \mapsto \mathbb{R}^q \text{ spełniający równanie 1.21 dla każdego } t \in T\}$$

DEFINICJA 5
Model określony równaniem (1.21) nazywany modelem typu AR (autoregresyjnym) układu dynamicznego.

Ważną klasę modeli układów dynamicznych tworzą modele wejściowo-wyjściowe, w których wyróżniono zbiór sygnałów wejściowych $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^m$ i zbiór sygnałów wyjściowych $\mathbf{Y} \subset \mathbb{R}^p$. Wielkości u_1, u_2, \dots, u_m , określające oddziaływanie otoczenia na układ, nazywać będziemy wymuszeniami lub sygnałami wejściowymi, a miejsca ich oddziaływania – wejściowymi układu. Wielkości y_1, y_2, \dots, y_p , określające oddziaływanie układu na otoczenie, nazywać będziemy odpowiedziami lub sygnałami wyjściowymi, a miejsca ich oddziaływania – wyjściowymi układu (rys. 1.8). Tę klasę liniowych układów dynamicznych można opisać równaniem

$$P(\rho)\mathbf{y} = Q(\rho)\mathbf{u} \quad (1.22)$$

gdzie

$$P(\rho) := P_{n_1}\rho^{n_1} + P_{n_1-1}\rho^{n_1-1} + \dots + P_1\rho + P_0,$$

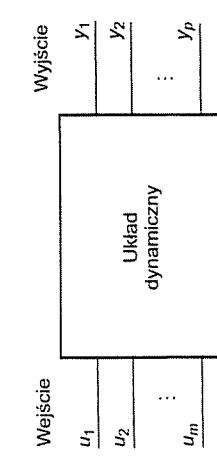
$$P_i \in \mathbb{R}^{k \times p}, \quad i = 0, 1, \dots, n_1$$

$$Q(\rho) := Q_{n_2}\rho^{n_2} + Q_{n_2-1}\rho^{n_2-1} + \dots + Q_1\rho + Q_0,$$

$$Q_i \in \mathbb{R}^{k \times m}, \quad i = 0, 1, \dots, n_2$$

$$\mathbf{u} := \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{y} := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} \in Y \subset \mathbb{R}^p$$

a ρ jest określone w ten sam sposób jak w równaniu (1.21).



Rys. 1.8. Schemat blokowy układu dynamicznego

Na przykład równania w postaci operatorowej dwójnika RLC z rysunku 1.7 można napisać następująco

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & R+sL & & \\ 1 & 0 & 0 & -R & & \\ 0 & 1 & 0 & -sL & & \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{sC} & & \\ & & & & I & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_R \\ U_L \\ U_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} E \quad (1.23)$$

gdzie U_R, U_L, U_C, I i E są transformataami Laplace'a odpowiednio u_R, u_L, u_C , u oraz e . W równaniu (1.23) nie są uwzględnione warunki początkowe dwójnika.

UWAGA 2. Zauważmy, że równanie (1.22) stanowi przypadek szczególny równania (1.21) dla

$$\mathbf{w} := \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{R}(\rho) := \mathbf{w} := [P(\rho) \quad -Q(\rho)]$$

1.5.2. Relacyjna definicja układu

DEFINICJA 7

Układem nazywanym następującą trójką $(\mathbf{U}, \mathbf{Y}, \mathbf{F})$, gdzie \mathbf{U} jest zbiorem wejść, \mathbf{Y} jest zbiorem wyjść, a \mathbf{F} jest zbiorem odwzorowań (operacji, funkcji, transformacji) określonych na zbiorze \mathbf{U} i przyjmujących wartości w zbiorze \mathbf{Y} , $\mathbf{y} = f(\mathbf{u}), \mathbf{u} \in \mathbf{U}, \mathbf{y} \in \mathbf{Y}, f \in \mathbf{F}$.

Zbiór wejść \mathbf{U} obejmuje w przypadku ogólnym zbiór sterowań, zbiór zakłóceń i zbiór warunków początkowych. Układ nazywamy liniowym, jeżeli \mathbf{U} i \mathbf{Y} są przestrzeniami liniowymi, a \mathbf{F} jest zbiorem operacji liniowych. W wypadku przeciwnym układ nazywamy nieliniowym. Układ taki nie spełnia zasadu superpozycji (definicja 2). Niech $\mathbf{U} = (\mathbf{u} : T \mapsto \mathbf{W}_u)$ będzie przestrzenią funkcji określonych na zbiorze T o wartościach w zbiorze \mathbf{W}_u , gdzie T jest zbiorem (liniowo uporządkowanym) chwil, a \mathbf{W}_u jest zbiorem wartości sterowań. Analogicznie, niech $\mathbf{Y} = (\mathbf{y} : T \mapsto \mathbf{W}_y)$ będzie przestrzenią funkcji określonych na zbiorze T o wartościach w zbiorze \mathbf{W}_y , gdzie \mathbf{W}_y jest zbiorem wartości wyjścia, jeżeli T jest półprosta, lub odcinkiem osi liczb rzeczywistych, to układ taki nazywamy układem ciągłym (dokładniej ciągłym w czasie), a jeżeli T jest zbiorem liczb całkowitych lub liczb całkowitych nieujemnych, to układ nazywamy układem dyskretnym (dokładniej dyskretnym w czasie). Układ nazywamy statycznym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\bar{u} \in \mathbf{W}_u$ zachodzi

DEFINICJA 6
Model określony równaniem (1.22) nazywany modelem typu ARMA (ang. AutoRegressive Moving Average).

$\bar{y} = f(\bar{u}) \in W_y$. W układzie statycznym wartość odpowiedzi \bar{y} w chwili t zależy wyłącznie od wartości wymuszenia \bar{u} w tej samej chwili, nie zależy natomiast od wymuszeń w innych chwilach oraz warunków początkowych układu. Przykładem układu statycznego jest czwórnik złożony tylko z rezystancji niezależnych od czasu. Wyjście (odpowiedź) tego czwórnika w każdej chwili zależy tylko od wejścia (wymuszenia) w tej samej chwili.

DEFINICJA 8

Układem dynamicznym nazywamy następujące trójki: (U, X, Y, f_1, f_2) , przy czym U jest przestrzenią sterowania, $U = (u : T \mapsto W_u)$, T jest zbiorem chwili, W_u jest zbiorem wartości sterowania, X jest przestrzenią stanów, $Y = (y : T \mapsto W_y)$ jest przestrzenią odpowiedzi, W_y jest zbiorem wartości odpowiedzi, $f_1 : X \times U \times T \times T \mapsto X$ jest funkcją przejścia stanu w stan, a $f_2 : X \times W_u \times T \mapsto W_y$ jest funkcją wyjścia (odpowiedzi).

Jeżeli dany jest stan początkowy $x(t_0) = x_0$ ($t_0 \in T$ jest chwilą początkową) oraz chwilowe wartości sterowania $u(t)$ dla $t \geq t_0$, to stan układu $x(t)$ jest określony zależnością

$$\dot{x}(t) = f_1(x(t), u(t), t_0, t), \quad t \geq t_0 \quad (1.24)$$

a odpowiedź układu $y(t)$ odpowiednio zależnością

$$y(t) = f_2(x(t), u(t), t), \quad t \geq t_0 \quad (1.25)$$

Równanie (1.24) nazywamy równaniem stanu, a równanie (1.25) równaniem wyjścia układu dynamicznego.

Trajektorią układu na odcinku $[t_0, t_1]$ nazywamy następujący podzbiór iloczynu kartezjańskiego $X \times T \setminus \{(x(t), t) \in X \times T, t \in [t_0, t_1]\}$, a trajektorią fazową układu na odcinku $[t_0, t_1]$ nazywamy podzbiór $\{x(t) \in X, t \in [t_0, t_1]\}$. Trajektoria fazowa jest więc rzutem trajektorii układu na przestrzeń stanu X . Układ dynamiczny nazywany liniowym wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{aligned} f_1(ax_1 + bx_2, au_1 + bu_2, t_1, t_2) &= af_1(x_1, u_1, t_1, t_2) + \\ &\quad + bf_1(x_2, u_2, t_1, t_2) \end{aligned} \quad (1.26)$$

dla $a, b \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in X$, $u_1, u_2 \in U$, $t_1, t_2 \in T$ oraz

$$f_2(ax_1 + bx_2, au_1 + bu_2, t) = af_2(x_1, u_1, t) + bf_2(x_2, u_2, t) \quad (1.27)$$

dla $a, b \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in X$, $u_1, u_2 \in U$, $t \in T$. Układ dynamiczny nazywamy stacjonarnym wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{aligned} f_1(x, u, t_1 + \tau, t_2 + \tau) &= f_1(x, u, t_1, t_2) \\ \text{dla } x \in X, u \in U, t_1, t_2, \tau \in T \end{aligned} \quad (1.28)$$

oraz

$$f_2(x, \bar{u}, t + \tau) = f_2(x, \bar{u}, t) \quad \text{dla } x \in X, \bar{u} \in W_u, t, \tau \in T \quad (1.29)$$

W wypadku przeciwnym układ dynamiczny nazywamy niestacjonarnym. W układzie niestacjonarnym funkcje f_1 i f_2 zależą jawnie od zmiennej t (parametry układu zależą od czasu). Przykładem układu dynamicznego stacjonarnego jest obwód przedstawiony na rys. 1.6. Jeżeli rezystancja R (lub induktywność L , pojemność C) zależałaby od czasu t , to obwód ten byłby przykładem układu dynamicznego niestacjonarnego.

1.6. Linearyzacja układów nieliniowych

Linearyzacją układów nieliniowych nazywamy zastąpienie układu nieliniowego jego liniowym przybliżeniem. Liniowe przybliżenie układu nieliniowego powinno możliwie dobrze odwzorowywać własności statyczne i dynamiczne układu nieliniowego. Niżej są omówione następujące trzy podstawowe metody linearyzacji układów nieliniowych:

- metoda rozwinięcia w szereg,
- metoda linearyzacji optymalnej,
- metoda nieliniowego sprzężenia zwrotnego.

1.6.1. Metoda rozwinięcia w szereg

Metoda ta polega na rozwinięciu prawych stron równań stanu układu nieliniowego w szereg Taylora i pominięciu członów nieliniowych tego rozwinięcia.

Weśmy pod uwagę układ nieliniowy opisany równaniami

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(0) = x_0 \quad (1.30)$$

$$y = g(x, u, t) \quad (1.31)$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ są odpowiednio wektorami stanu, wymuszenia i odpowiedzi, a

$$f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(x, u, t) \\ f_2(x, u, t) \\ \vdots \\ f_n(x, u, t) \end{bmatrix}, \quad g(x, u, t) = \begin{bmatrix} g_1(x, u, t) \\ g_2(x, u, t) \\ \vdots \\ g_n(x, u, t) \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

Skł nieliniowymi funkcjami wektorowymi różniczkowalnymi ciągle względem wektorów x i u . Niech (x_u, u_u, y_u) będzie ustalonym (nominalnym) punktem pracy układu (1.30), (1.31), tzn.

$$\dot{x}_u = f(x_u, u_u, t), \quad y_u = g(x_u, u_u, t) \quad (1.33)$$

lub punktem równowagi ($f(x_u, u_u) = 0$). Ponadto niech

$$\Delta x = x - x_u, \quad \Delta u = u - u_u, \quad \Delta y = y - y_u \quad (1.34)$$

będą odpowiednio małymi odchyleniami wektorów stanu, wymuszenia i odpowiedzi od ich wartości ustalonych. Biorąc pod uwagę, że

$$\Delta \dot{x} = \dot{x} - \dot{x}_u = \dot{x} - f(x_u, u_u, t) \quad (1.35)$$

oraz rozwijając w szereg Taylora prawe strony równań (1.30), (1.31) w małym otoczeniu punktu (x_u, u_u) , otrzymamy

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x} &= \dot{x} - f(x_u, u_u, t) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_u \\ u=u_u}} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{\substack{x=x_u \\ u=u_u}} \Delta u + R_f(x, u, t) = \\ &= A(t) \Delta x + B(t) \Delta u + R_f(x, u, t) \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} \Delta y &= y - g(x_u, u_u, t) = \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_u \\ u=u_u}} \Delta x + \frac{\partial g}{\partial u} \Big|_{\substack{x=x_u \\ u=u_u}} \Delta u + R_g(x, u, t) = \\ &= C(t) \Delta x + D(t) \Delta u + R_g(x, u, t) \end{aligned} \quad (1.37)$$

przy czym

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_u \\ u=u_u}} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right] \Big|_{\substack{x=x_u \\ u=u_u}} \quad (1.38) \\ B(t) &= \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{array} \right] \Big|_{\substack{x=x_u \\ u=u_u}} \quad (1.39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(t) &= \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_u \\ u=u_u}} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_p}{\partial x_n} \end{array} \right] \Big|_{\substack{x=x_u \\ u=u_u}} \quad (1.40) \\ D(t) &= \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right], \quad u_u = 0 \end{aligned}$$

Δ macierzami w przypadku ogólnym o elementach zależnych od czasu t , a $R_f(x, u, t)$ i $R_g(x, u, t)$ są nelinowymi członami rozwinieć spełniającym warunki

$$\lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \frac{\|R_f(x, u, t)\|}{\|\Delta x\|} = 0, \quad \lim_{\|\Delta u\| \rightarrow 0} \frac{\|R_f(x, u, t)\|}{\|\Delta u\|} = 0 \quad (1.42)$$

$$\lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \frac{\|R_g(x, u, t)\|}{\|\Delta x\|} = 0, \quad \lim_{\|\Delta u\| \rightarrow 0} \frac{\|R_g(x, u, t)\|}{\|\Delta u\|} = 0 \quad (1.43)$$

W przypadku stacjonarnego układu nelinowego, gdy funkcje f i g nie zależą jawnie od czasu t , macierze (1.38)÷(1.41) są stałe, niezależne od czasu, tzn. $A(t) = A$, $B(t) = B$, $C(t) = C$, $D(t) = D$.

Układ liniowy

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x} &= A(t) \Delta x + B(t) \Delta u \quad (1.44) \\ \Delta y &= C(t) \Delta x + D(t) \Delta u \quad (1.45) \end{aligned}$$

otrzymany z (1.36), (1.37) przez pominięcie członów nelinowych $R_f(x, u, t)$ i $R_g(x, u, t)$ (1.31). Równania (1.44), (1.45) piszemy zwykle w postaci

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.46)$$

$$y = Cx + Du \quad (1.47)$$

przyjmując, że x , u , y oznaczają małe odchylenia wektorów od ich wartości ustalonych (nominalnych).

PRZYKŁAD 1

$$\begin{aligned} \text{Dla układu nelinowego} \\ \dot{x}_1 &= -2x_1 - 1 + e^{2x_2} + u \\ \dot{x}_2 &= -3x_2 + x_1 x_2 + x_2^3 + u^2 \\ y &= x_2 + 2u \end{aligned} \quad (1.48) \quad (1.49) \quad (1.50)$$

wyznaczmy liniowe przybliżenie dla następujących dwóch przypadków:
a) dla punktu

b) stanu ustalonego układu zlinearyzowanego dla $u_u = 1$.

W tym przykładzie

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1 - 1 + e^{x_2} + u \\ -3x_2 + x_1 x_2 + x_2^3 + u^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = x_2 + 2u$$

Przypadek a. Korzystając z zależności (1.38)÷(1.41) i (1.48)÷(1.50), otrzymamy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{x=0 \\ u=0}} = [0 \ 1], \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} \end{bmatrix}_{\substack{x=0 \\ u=0}} = 2$$

Poszukiwane przybliżenie liniowe układu nieliniowego (1.48)÷(1.50) ma więc postać

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (1.51)$$

$$y = [0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 2u \quad (1.52)$$

Przypadek b. Macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

ma wartości własne $s_1 = -2, s_2 = -3$. Liniowe przybliżenie (1.51), (1.52) jest więc stabilne asymptotycznie. Wektor stanu w stanie ustalonym dla $u_u = 1$ jest równy

$$\mathbf{x}_u = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u}_u = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

Korzystając z zależności (1.38)÷(1.41) i (1.48)÷(1.50), otrzymamy macierze liniowe przybliżenia dla

$$\mathbf{x}_u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_u = 1$$

1.6. Linearyzacja układów nieliniowych

Otrzymamy wtedy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{x_1=\frac{1}{2} \\ x_2=0}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{\substack{x_1=\frac{1}{2} \\ x_2=0}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{x_1=-\frac{1}{2} \\ x_2=0}} = [0 \ 1], \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} \end{bmatrix}_{\substack{x_1=-\frac{1}{2} \\ x_2=0}} = 2$$

Macierze \mathbf{A}, \mathbf{C} i \mathbf{D} są takie same jak w przypadku a, inna jest tylko macierz \mathbf{B} . Poszukiwane przybliżenie ma więc postać

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \quad (1.54)$$

$$y = [0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 2u \quad (1.55)$$

□

Metodę tę można stosować również do linearyzacji nieliniowych układów dyskretnych.

1.6.2. Metoda optymalnej linearyzacji

Metoda ta polega na takim dobiorze elementów macierzy liniowego przybliżenia, aby błąd średniokwadratowy różnicy między układem nieliniowym a jego liniowym przybliżeniem dla całego okresu stanu przejściowego był minimalny.

Niech

$$\hat{\mathbf{A}} = [\hat{a}_{ij}]_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}}, \quad \hat{\mathbf{B}} = [\hat{b}_{ij}]_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$$

$$\hat{\mathbf{C}} = [\hat{c}_{ij}]_{\substack{i=1, \dots, p \\ j=1, \dots, n}}, \quad \hat{\mathbf{D}} = [\hat{d}_{ij}]_{\substack{i=1, \dots, p \\ j=1, \dots, m}} \quad (1.56)$$

bedą stałymi (niezależnymi od czasu) poszukiwanymi macierzami optymalnego liniowego przybliżenia (1.46), (1.47) układu nieliniowego (1.30), (1.31). Elementy tych macierzy dobrzymy tak, aby błąd średniokwadratowy różnicy między układem nieliniowym (1.30), (1.31) a jego liniowym przybliżeniem (1.46), (1.47)

dla całego okresu stanu przejściowego T był minimalny, tzn.

$$\begin{aligned} \min_{\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}} J_1(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}) &= \min_{\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}} \left\{ \int_0^T |Ax + Bu - f(x, u, t)|^2 dt \right\} \\ \min_{\hat{\mathcal{C}}, \hat{\mathbf{D}}} J_1(\hat{\mathcal{C}}, \hat{\mathbf{D}}) &= \min_{\hat{\mathcal{C}}, \hat{\mathbf{D}}} \left\{ \int_0^T |Cx + Du - g(x, u, t)|^2 dt \right\} \end{aligned} \quad (1.57)$$

Dalsze szczegółowe rozważania przeprowadzimy tylko dla przypadku wyznaczania macierzy $\hat{\mathbf{A}}$ i $\hat{\mathbf{B}}$, gdyż rozważania dla macierzy $\hat{\mathcal{C}}$ i $\hat{\mathbf{D}}$ są analogiczne. Wskaznik jakości przybliżenia $J_1(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}})$ dla $f(x, u, t) = \mathbf{f}$ możemy napisać w postaci

$$\begin{aligned} J_1(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= \int_0^T |Ax + Bu - \mathbf{f}|^2 dt \\ &= \int_0^T [Ax + Bu - \mathbf{f}]^T [Ax + Bu - \mathbf{f}] dt = \int_0^T (x^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} x + \\ &\quad + u^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} u + \mathbf{f}^T \mathbf{f} + 2x^T \mathbf{A}^T \mathbf{B} u - 2x^T \mathbf{B}^T \mathbf{f}) dt \end{aligned} \quad (1.58)$$

gdzie $x^T \mathbf{A}^T \mathbf{f} = \mathbf{f}^T \mathbf{A} x$ i $u^T \mathbf{B}^T \mathbf{f} = \mathbf{f}^T \mathbf{B} u$. Z warunku koniecznego minimalizacji wskaźnika (1.59)

$$\frac{\partial J_1(\mathbf{A}, \mathbf{B})}{\partial \mathbf{A}} \Big|_{\mathbf{A} = \hat{\mathbf{A}}} = 0, \quad \frac{\partial J_1(\mathbf{A}, \mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} \Big|_{\mathbf{B} = \hat{\mathbf{B}}} = 0 \quad (1.60)$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} \int_0^T x x^T dt &= \int_0^T f x^T dt - \mathbf{B} \int_0^T u x^T dt \\ \hat{\mathbf{B}} \int_0^T u u^T dt &= \int_0^T f u^T dt - \mathbf{A} \int_0^T x u^T dt \end{aligned} \quad (1.61) \quad (1.62)$$

gdzie

$$\frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}{\partial \mathbf{A}} = 2 \mathbf{A} \mathbf{x} \mathbf{x}^T, \quad \frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{B} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{B} \mathbf{u} \mathbf{x}^T, \quad \frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{f}}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{f} \mathbf{x}^T \quad (1.63)$$

Rozwiążając równania (1.61), (1.62) względem $\hat{\mathbf{A}}$ i $\hat{\mathbf{B}}$, otrzymamy

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &= \int_0^T (\mathbf{f} - \mathbf{B} \mathbf{u}) \mathbf{x}^T dt \left[\int_0^T x x^T dt \right]^{-1} \\ \hat{\mathbf{B}} &= \int_0^T (\mathbf{f} - \mathbf{A} \mathbf{x}) \mathbf{u}^T dt \left[\int_0^T u u^T dt \right]^{-1} \end{aligned} \quad (1.64) \quad (1.65)$$

We wzorach (1.64) i (1.65) po prawej stronie na miejsce macierzy \mathbf{A} i \mathbf{B} oraz wektora \mathbf{x} podstawiamy odpowiednie macierze i wektor \mathbf{x} otrzymane metodą rozwinięcia w szereg. Wykażemy, że jeżeli składowe wektora \mathbf{x} (\mathbf{u}) są liniowo

niezależne, to macierz

$$\int_0^T x x^T dt = \left(\int_0^T u u^T dt \right) \quad (1.66)$$

jest nieosobliwa.

Jeżeli składowe wektora \mathbf{x} są liniowo niezależne, to dla každego niezerowego wektora $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ funkcje $v(t) = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{x}(t)$ nie są liniowo niezależne na przedziale $[0, T]$ i forma kwadratowa zbudowana na macierzy (1.66) jest dodatnio określona, gdyż

$$\boldsymbol{\alpha}^T \int_0^T \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^T(t) dt \boldsymbol{\alpha} = \int_0^T \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^T(t) \boldsymbol{\alpha} dt = \int_0^T v^2(T) dt > 0$$

Z założenia składowe wektora \mathbf{x} (zmienne stanu) oraz składowe wektora \mathbf{u} są liniowo niezależne. Tak więc macierze (1.66) są nieosobliwe. Wychodząc z zależności (1.58), w analogicznym sposobie jak dla zależności (1.57) otrzymamy

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{C}} &= \int_0^T (\mathbf{g} - \mathbf{D} \mathbf{u}) \mathbf{x}^T dt \left[\int_0^T x x^T dt \right]^{-1} \\ \hat{\mathbf{D}} &= \int_0^T (\mathbf{g} - \mathbf{C} \mathbf{x}) \mathbf{u}^T dt \left[\int_0^T u u^T dt \right]^{-1} \end{aligned} \quad (1.67) \quad (1.68)$$

Z powyższych rozważań wynika następująca procedura wyznaczania optymalnego przybliżenia układu nieliniowego.

PROCEDURA 1

Krok 1. Korzystając z zależności (1.38)÷(1.41), wyznaczamy liniową aproksymację (1.44), (1.45) układu nieliniowego (1.30), (1.31).

Krok 2. Korzystając ze wzoru

$$\mathbf{x}(t) = e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (1.69)$$

wyznaczamy rozwiązanie równania (1.44) spełniające warunek początkowy $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ (taki sam jak dla układu nieliniowego (1.30), (1.31)).

Krok 3. Korzystając ze wzorów (1.64), (1.65), (1.67), (1.68), wyznaczamy poszukiwane macierze $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{C}}$, $\hat{\mathbf{D}}$ optymalnego przybliżenia.

PRZYKŁAD 2

Dla układu nieliniowego

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -2x_1 + 2x_1 x_2 + u^2 \\ -2x_2 + u \end{bmatrix} \\ g &= x_2 + u \end{aligned}$$

wyznaczamy optymalne przybliżenie liniowe w otoczeniu punktu stanu ustalonego dla $u = 1, T = 1$ i zerowych warunków początkowych.

Korzystając z procedury 1, otrzymamy kolejno:

Krok 1. Liniowe przybliżenie dla zerowych warunków początkowych ma postać

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = 1$$

a dla stanu ustalonego otrzymamy

$$\mathbf{x}_u = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}u = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = 1$$

Krok 2. Dla macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

many

$$\mathbf{e}^{\mathbf{At}} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

oraz

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t \mathbf{e}^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}u(t-\tau) d\tau = \begin{bmatrix} 1 - e^{-2t} \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Krok 3. Korzystając ze wzorów (1.64)÷(1.68) oraz biorąc pod uwagę, że

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} e^{-4t} - e^{-2t} + 1 \\ e^{-2t} - 1 \end{bmatrix}$$

$$g(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + 2$$

$$\int_0^T \mathbf{x}\mathbf{x}^T dt = \begin{bmatrix} 0,664 & -0,46 \\ -0,46 & 0,38 \end{bmatrix}$$

otrzymamy

$$\hat{\mathbf{A}} = \int_0^T (\mathbf{f} - \mathbf{Bu}) \mathbf{x}^T dt \left[\int_0^T \mathbf{x}\mathbf{x}^T dt \right]^{-1} = \begin{bmatrix} -16,59 & -22,48 \\ -22,75 & -30,78 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \int_0^T (\mathbf{f} - \mathbf{Ax}) \mathbf{u}^T dt \left[\int_0^T \mathbf{uu}^T dt \right]^{-1} = \begin{bmatrix} 1,95 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \int_0^T (\mathbf{g} - \mathbf{Du}) \mathbf{x}^T dt \left[\int_0^T \mathbf{x}\mathbf{x}^T dt \right]^{-1} = [11,37 \ - 15,39]$$

$$\hat{\mathbf{D}} = \int_0^T (\mathbf{g} - \mathbf{Cx}) \mathbf{u}^T dt \left[\int_0^T \mathbf{uu}^T dt \right]^{-1} = 1$$

Metoda ta polega na odpowiedniej zamianie zmiennych i doborze nieliniowego sprzężenia zwrotnego. Weźmy pod uwagę układ nieliniowy o wymuszeniu skalarnym u i odpowiedzi skalarnej y opisany równaniami

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \quad (1.70)$$

$$y = h(\mathbf{x})$$

gdzie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem stanu.

Niech dla tego układu istnieje gładkie przekształcenie zmiennych stanu $\mathbf{z} = \mathbf{P}(\mathbf{x})$ takie, że

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \dots, \dot{z}_{n-1} = z_n, \quad \dot{z}_n = a(\mathbf{z}) + b(\mathbf{z})u \quad (1.72)$$

gdzie $a(\mathbf{z})$ i $b(\mathbf{z})$ są skalarnymi funkcjami wektora $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T$. Przyjmując sprzężenie zwrotne w postaci

$$u = \frac{1}{b(\mathbf{z})} (v - a(\mathbf{z})) \quad (v - \text{nowe wymuszenie}) \quad (1.73)$$

z zależności (1.72) otrzymamy następujący układ liniowy

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ z_2 \\ \vdots \\ 0 \\ v \end{bmatrix}$$

czyli

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Az} + \mathbf{bv} \quad (1.74)$$

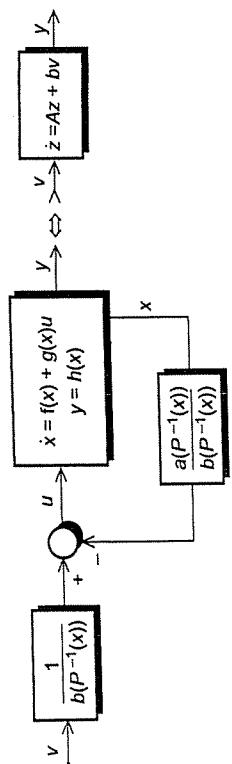
gdzie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ z_2 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Podstawiając $\mathbf{z} = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x})$ do (1.73), otrzymamy poszukiwane sprzężenie zwrotne

$$u = \frac{1}{b(\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}))} (v - a(\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}))) \quad (1.75)$$

□



Rys. 1.9. Schemat blokowy układu z nieliniowym sprzężeniem zwrotnym

Latwo sprawdzić, że para (A, b) jest sterowalna. Otrzymany układ z nieliniowym sprzężeniem zwrotnym (1.75) we współrzędnych z_1, z_2, \dots, z_n jest sterowalnym układem liniowym (rys. 1.9).

PRZYKŁAD 3

Dany jest układ nieliniowy

$$\dot{x}_1 = ax_1^2 + x_2 \quad (1.76)$$

$$\dot{x}_2 = -2ax_1^3 - 2ax_1x_2 + ax_1x_2^2 + u \quad (1.77)$$

$$y = x_1$$

Nowe zmienne wybieramy $z_1 = x_1, z_2 = ax_1^2 + x_2$, czyli

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ ax_1^2 + x_2 \end{bmatrix} = P(x)$$

Przekształcenie to jest odwracalne, gdyż $x_1 = z_1, x_2 = z_2 - az_1^2$, czyli

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 - az_1^2 \end{bmatrix} = P^{-1}(z)$$

Układ nieliniowy (1.76)÷(1.78) w nowych zmiennych przyjmuje postać

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_1 = ax_1^2 + x_2 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = 2ax_1\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 2ax_1(ax_1^2 + x_2) - 2a^2x_1^3 - 2ax_1x_2 + ax_1x_2^2 + u =$$

$$= az_1(z_2 - az_1^2)^2 + u$$

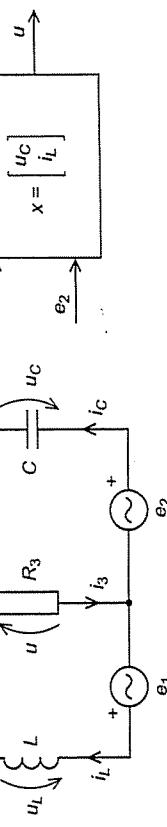
czyli

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (1.79)$$

$$\dot{z}_2 = az_1(z_2 - az_1^2)^2 + u, \quad a(z) = az_1(z_2 - az_1^2)^2, \quad b(z) = 1 \quad (1.80)$$

$$y = z_1 \quad (1.81)$$

$$u = \frac{1}{b(z)}(v - a(z)) = v - a z_1(z_2 - az_1^2)^2 = v - ax_1x_2^2 \quad (1.82)$$



Rys. 1.10. Obwód elektryczny: schemat elektryczny i schemat blokowy

Układ nieliniowy (1.76)÷(1.78) z nieliniowym sprzężeniem zwrotnym (1.82) we wspólnie zmiennych z_1, z_2 jest układem liniowym opisanym równaniami $\dot{z}_1 = z_2, \dot{z}_2 = v, y = z_1$. \square

1.7. Modele układów dynamicznych

Przystępując do budowy modelu matematycznego danego procesu (układu), czyli do napisania równań matematycznych opisujących ten proces, należy zaprzedstawić wszystkie sprecyzowujące założenia upraszczające, określić zakresy zmian poszczególnych parametrów i wielkości oraz dokonać wyboru zmiennych opisujących ten proces. Należy podkreślić, że wybór tych zmiennych nie jest jednoznaczny, istnieje wiele równoważnych sposobów wyboru zmiennych opisujących rozpatrywany proces. Następnie korzystając z odpowiednich praw fizyki (takich jak podstawowe prawa mechaniki, prawa obwodów elektrycznych, równania bilansu masy i energii), chemii, biologii, ekonomii itd., piszemy równania wiążące zmiany w czasie procesów, zachodzące pod wpływem zewnętrznych oddziaływań lub nagromadzonej w układzie energii (niezerowych warunków poczatkowych lub brzegowych). W przypadku układów złożonych z elementów o różnej naturze fizycznej, np. układów elektromechanicznych, przy wypisywaniu równań dynamiki wygodnie jest skorzystać z zasadą Hamiltona, zwanej również zasadą ekstremum działania. Sposoby układania równań dynamiki opisujących układy o parametrami skupionymi i rozłożonymi objaśnimy na prostych przykładach tych układów o różnej naturze fizycznej (elektrycznej, mechanicznej, elektromechanicznej) występujących w technice, biologii, ekonomii itp.

1.7.1. Układy elektryczne

W układach (obwodach) elektrycznych nieliniowych za zmienne stanu wygodnie jest przyjać ładunki na kondensatorach i strumienie skojarzone cewek, a w liniowych — napięcia na kondensatorach i prądy w cewkach.

Metodą bezpośrednią układania równań dynamiki układów elektrycznych jest metoda oparta na pierwszym i drugim prawie Kirchhoffa. Metoda ta polega na napisaniu na podstawie praw Kirchhoffa odpowiednich równań i przekształceniu ich do postaci równań stanu. Istotę tej metody objaśnimy na przykładzie obwodu elektrycznego, którego schemat podano na rys. 1.10. Za zmienną stanu przyjmujemy napięcie u_C na kondensatorze i prąd i_L w cewce, a za odpowiedź — napięcie u na oporniku o rezystancji R_3 . Wymuszeniami w tym obwodzie są napięcia źródłowe e_1 i e_2 . Na podstawie pierwszego i drugiego prawa Kirchhoffa dla obwodu tego możemy napisać równania

$$i_L + i_C - i_3 = 0 \quad (1.83)$$

$$e_1 - L \frac{di_L}{dt} - R_1 i_L - R_3 i_3 = 0 \quad (1.84)$$

$$e_2 - u_C - R_2 i_C - R_3 i_3 = 0 \quad (1.85)$$

Biorąc pod uwagę, że

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} \quad (1.86)$$

oraz korzystając z równania (1.83), rugujemy z równań (1.84) i (1.85) prądy i_C i i_3 . Otrzymamy wówczas

$$e_1 - L \frac{di_L}{dt} - R_1 i_L - R_3 \left(i_L + C \frac{du_C}{dt} \right) = 0 \quad (1.87)$$

$$e_2 - u_C - R_2 C \frac{du_C}{dt} - R_3 \left(i_L + C \frac{du_C}{dt} \right) = 0 \quad (1.88)$$

Z równania (1.88) many

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{(R_2 + R_3)C} u_C - \frac{R_3}{(R_2 + R_3)C} i_L + \frac{1}{(R_2 + R_3)C} e_2 \quad (1.89)$$

Podstawiając zależność (1.89) do równania (1.87), otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{di_L}{dt} &= \frac{R_3}{(R_2 + R_3)L} u_C - \frac{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3}{(R_2 + R_3)L} i_L + \\ &+ \frac{1}{L} e_1 - \frac{R_3}{(R_2 + R_3)L} e_2 \end{aligned} \quad (1.90)$$

Zapisując równania (1.89), (1.90) w postaci jednego równania macierzowego, otrzymamy

Z porównania równania (1.91) z równaniem $\dot{x} = Ax + Bu$ wynika, że w tym

przypadku $x = \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix}$, macierze A i B są równe

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{(R_2 + R_3)C} & -\frac{R_3}{(R_2 + R_3)C} \\ \frac{R_3}{(R_2 + R_3)L} & -\frac{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3}{(R_2 + R_3)L} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{(R_2 + R_3)C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_3}{(R_2 + R_3)L} \end{bmatrix}$$

Aby wyznaczyć równanie wyjścia $y = Cx + Du$ oraz elementy macierzy C i D dla tego obwodu, na podstawie drugiego prawa Kirchhoffa, piszemy równanie

$$u = -u_C - R_2 C \frac{du_C}{dt} + c_2 \quad (1.92)$$

Podstawiając zależność (1.89) do równania (1.92), otrzymamy następujące równanie wyjścia

$$u = -\frac{R_3}{R_2 + R_3} u_C + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} i_L + \frac{R_3}{R_2 + R_3} c_2$$

W tym przypadku macierze C i D są równe

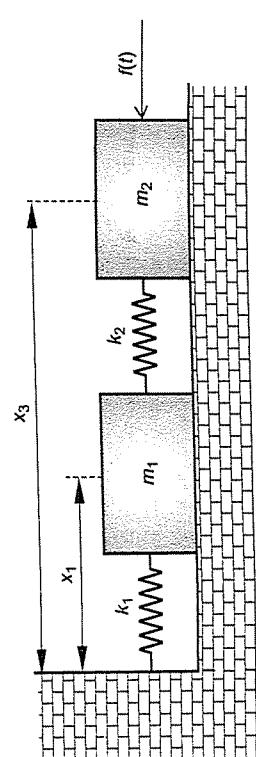
$$C = \begin{bmatrix} -\frac{R_3}{R_2 + R_3} & \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & \frac{R_3}{R_2 + R_3} \end{bmatrix}$$

W wielu przypadkach metoda wygodniejsza i szybszą od omówionej wyżej metody bezpośredniej, jest metoda włączania idealnych źródeł napięcia i prądu, podana w [115].

1.7.2. Układy mechaniczne

W układach mechanicznych za zmienne stanu wygodnie jest przyjąć współrzędne określające położenia poszczególnych ciał oraz prędkości tych ciał. Metoda bezpośrednia układania równań mechanicznych jest metodą opartą na prawach Newtona (lub na zasadzie d'Alamberta).



Rys. 1.11. Układ mechaniczny złożony z dwóch ciał o masach m_1 i m_2 oraz z dwóch sprężyn.

Metoda ta polega na napisaniu na podstawie praw Newtona odpowiednich równań i przekształcaniu tych równań do postaci równań zmiennych stanu. Istotę tej metody objaśnimy na przykładzie prostego układu mechanicznego, złożonego z dwóch ciał o masach odpowiednio m_1 i m_2 i dwóch sprężyn o współczynnikach sprężystości k_1 i k_2 (rys. 1.11). Z zakładamy, że na ciało o masie m_2 działa sila zewnętrzna $f(t)$, a opory tarcia ciał są proporcjonalne do prędkości, przy czym r_1 i r_2 są współczynnikami tarcia odpowiednio ciała o masie m_1 i m_2 . Wyniesieniem w tym przypadku jest sila zewnętrzna $f(t)$, a za zmienne stanu przyjmujemy:

x_1 – współrzędna określająca położenie ciała o masie m_1 ,

x_2 – prędkość ciała o masie m_1 ($x_2 = \dot{x}_1$),

x_3 – współrzędna określająca położenie ciała o masie m_2 ,

x_4 – prędkość ciała o masie m_2 ($x_4 = \dot{x}_3$).

Niech wektorem odpowiedzi \mathbf{y} będzie

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Biorąc pod uwagę siły działające na poszczególne ciała, na podstawie drugiego prawa Newtona (lub zasady d'Alamberta) możemy napisać równania

$$m_1 \ddot{x}_2 + r_1 x_2 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_3) = 0 \quad (1.93)$$

$$m_2 \ddot{x}_4 + r_2 x_4 + k_2 (x_3 - x_1) = f(t) \quad (1.94)$$

Uwzględniając, że $\dot{x}_1 = x_2$ i $\dot{x}_3 = x_4$ oraz przekształcając równania (1.93), (1.94) w równania zmiennych stanu, otrzymamy

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & -\frac{r_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{r_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} f(t) \end{bmatrix}$$

W tym przypadku macierze \mathbf{A} i \mathbf{B} są równe

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & -\frac{r_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{r_2}{m_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}$$

Równanie wyjścia ma postać

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

a macierz \mathbf{C} i \mathbf{D} są równe

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = 0$$

1.7.3. Układy elektromechaniczne

Układając równania dynamiki układów złożonych, wygodnie jest skorzystać z zasad Hamiltona. Zgodnie z tą zasadą układ holonomiczny i zachowawczy (układ, w którym nie występuje rozpraszanie energii oraz energia nie jest dostarczana do układu) jest określony funkcją skalarną L , zwaną funkcją Lagrange'a, wspólnie z dwoma uogólnionymi q_1, q_2, \dots, q_n , prędkości uogólnionych $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ i czasu t

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$$

Funkcja ta jest różnicą energii kinetycznej T i energii potencjalnej U układu

$$L = T - U$$

1.7.2. Układy mechaniczno-elektryczne

W układach mechaniczno-elektrycznych mechaniczne i elektryczne zmienne opisane są przez wektory. W tym przypadku wektorami są wektory pozycji i prędkości wektora. W przypadku ogólnym, gdy do układu jest dostarczana energia i występuje rozpraszanie energii, układ jest określony dwiema funkcjami skalarnymi: funkcją Lagrange'a i funkcją Rayleigha F , będącą różnicą energii rozproszonej w układzie F_r i energii F_d dostarczonej do układu

$$\frac{\partial L}{\partial q^T} = 0$$

z tym q jest wektorem o składowych q_1, q_2, \dots, q_n , a T oznacza transpo-

nyjęcie wektora. W przypadku ogólnym, gdy do układu jest dostarczana energia i występuje rozpraszanie energii, układ jest określony dwiema funkcjami skalarnymi: funkcją Lagrange'a i funkcją Rayleigha F , będącą różnicą energii rozproszonej w układzie F_r i energii F_d dostarczonej do układu

$$F = F_r - F_d$$

W tym przypadku równania Lagrange'a przyjmują postać

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n$$

lub

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^T} \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^T} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}^T} = 0$$

Sposób korzystania z równań Lagrange'a przy układaniu równań dynamiki układu wyjaśnimy na przykładzie przetwornika elektromechanicznego, przedstawionego schematycznie na rys. 1.12. Nadrzeń ruchomy o masie m i przekroju A , osadzony w rdzeniu nieruchomym, działa sila przyciągania elektromagnetycznego, zależna od natężenia prądu i , oraz sila sprężyny o współczynniku sprężystości k . Przyjmujemy następujące założenia upraszczające:

- pomijany opór magnetyczny rdzeni jako wielokrotnie mniejszy niż opór szczeliny,
- pomijany tarcie statyczne,
- zakładamy, że sila tarcia jest wprost proporcjonalna do prędkości.

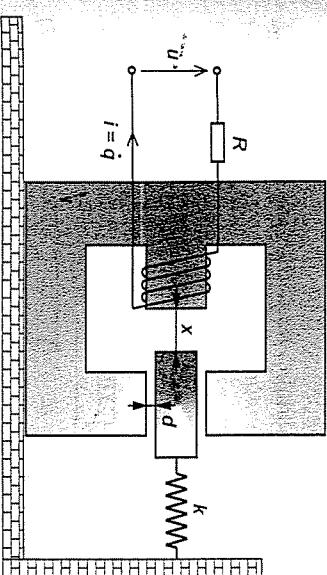
Obliczamy energię kinetyczną i potencjalną dla obwodu elektrycznego i mechanicznego. Energia kinetyczna obwodu elektrycznego

$$T_e = \frac{1}{2} L(t) i^2 = \frac{1}{2} L(t) \dot{q}^2$$

przy czym inducyjność uzwojenia przetwornika jest określona zależnością

$$L(t) = \frac{D}{d + x}$$

gdzie: D – stała zależna od przekroju rdzenia, liczby zwojów oraz przenikalności magnetycznej powietrza; d – grubość przekładki antymagnetycznej, $x = x(t)$ – odległość rdzenia ruchomego od rdzenia nieruchomego; $i = \dot{q}$ – natężenie prądu w uzwojeniu przetwornika, q – ładunek elektryczny.



Rys. 1.12. Schemat przetwornika elektromechanicznego

Obwód elektryczny nie zawiera elementów pojemnościowych, wobec tego energia potencjalna równa się零

$$U_e = 0$$

Energia kinetyczna obwodu mechanicznego

$$T_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

a energia potencjalna

$$U_m = \frac{1}{2} k (x - x_0)^2$$

przy czym x to jest odległość rdzenia ruchomego od nieruchomego w położeniu neutralnym sprężyny (sila sprężyny równa zero). Funkcja Lagrange'a w tym przypadku jest równa

$$L = \frac{1}{2} \frac{D}{d+x} \dot{q}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k (x - x_0)^2$$

Aby z kolei wyznaczyć funkcję Rayleigha, obliczamy różnicę energii rozproszonej i dostarczonej do układu dla obwodu elektrycznego i mechanicznego. Dla

obwodu elektrycznego

$$F_e = \frac{1}{2} R \dot{q}^2 - u \dot{q}$$

przy czym R jest rezystancją uzwojenia, a $u = u(t)$ napięciem doprowadzonym do uzwojenia. Z kolei dla obwodu mechanicznego mamy

$$F_m = \frac{1}{2} R_m \dot{x}^2$$

przy czym R_m jest oporem mechanicznym. Funkcja Rayleigha w tym przypadku równa się więc

$$F = F_e + F_m = \frac{1}{2} R \dot{q}^2 - u \dot{q} + \frac{1}{2} R_m \dot{x}^2$$

Za składowe wektora \mathbf{q} przyjmujemy ładunek elektryczny q oraz odległość rdzenia ruchomego od nieruchomego x

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q \\ x \end{bmatrix}$$

Na podstawie (1.96) dla $i = 1$ oraz $i = 2$ otrzymamy

$$\frac{D}{d+x} \ddot{q} + R \dot{q} - \frac{D}{d+x} \dot{q} \dot{x} = u \quad (1.97)$$

$$m \ddot{x} + R_m \dot{x} + k(x - x_0) + \frac{D}{2(d+x)^2} \dot{q}^2 = 0 \quad (1.98)$$

Przyjmując za zanienne stanu $x_1 = q$, $x_2 = \dot{q} = i$, $x_3 = x$, $x_4 = \dot{x}$, równania (1.97), (1.98) możemy napisać w postaci

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (1.99)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{x_2 x_4}{d+x_3} - \frac{R}{D} x_2 (d+x_3) + \frac{d+x_3}{D} u \quad (1.100)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (1.101)$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{k}{m} (x_3 - x_0) - \frac{D x_2^2}{2m(d+x_3)^2} - \frac{R_m}{m} x_4 \quad (1.102)$$

W tym przypadku równania stanu układu (1.99)÷(1.102) są równaniami nieiniowymi. Przyjmując za składowe wektora odpowiedzi \mathbf{x} ratowanie prądu w uzwojeniu przetwornika i oraz odległość x rdzenia ruchomego od nieruchomego, otrzymamy równanie wyjścia w postaci

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

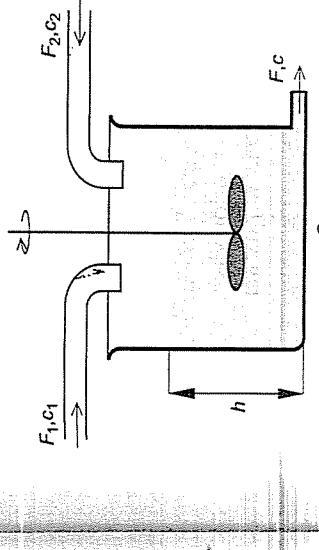
Powyższe rozważania podane dla układów elektromechanicznych można uogólnić również na układy elektropneumatyczne, elektrohydrauliczne, elektroakustyczne itp.

1.7.4. Procesy mieszania substancji

W opisie dynamiki procesów mieszania substancji za zmienné stanu można przyjmować różne wielkości. Często za zmienné stanu przyjmuje się:

- ilość danej substancji,
- temperaturę substancji,
- stężenie określonego składnika substancji itp.

Przy układaniu równań opisujących dynamikę procesów mieszania najczęściej korzysta się z równań bilansu masy i ciepła. Sposób układania równań opisujących w przestrzeni stanów dynamikę procesów mieszania objaśniamy na przykładzie idealnego mieszania dwóch cieczy w zbiorniku (rys. 1.13).



Rys. 1.13. Schemat procesu mieszania dwóch cieczy

Nateżenia przepływu cieczy dopływających do zbiornika wynoszą $F_1 = F_1(t)$ i $F_2 = F_2(t)$, a ich stężenia odpowiednio $c_1 = c_1(t)$ i $c_2 = c_2(t)$. Natomiast nateżenie przepływu cieczy wypływającej ze zbiornika wynosi $F = F(t)$, a jej stężenia $c = c(t)$. Za zmienné stanu przyjmujemy objętość cieczy w zbiorniku V oraz stężenie c cieczy wypływającej ze zbiornika. Wymuszeniami w tym przypadku są nateżenia przepływu cieczy dopływających F_1 i F_2 . Z równań bilansu masy mamy

$$\dot{V} = F_1 + F_2 - F \quad (1.103)$$

$$\frac{d}{dt} [cV] = c_1 F_1 + c_2 F_2 - cF \quad (1.104)$$

Z prawa wypływów swobodnego cieczy wynika

$$F = k_1 \sqrt{h} \quad (1.105)$$

przy czym: k_1 – współczynnik zależny od przekroju otworu odpływowego i przy spieszenia ziemskiego, h – wysokość shupa cieczy w zbiorniku.

Po uwzględnieniu, że

$$\begin{aligned} h &= \frac{V}{S} \\ F &= k\sqrt{V} \end{aligned} \quad (1.106)$$

przy czym: $k = \frac{k_1}{\sqrt{S}}$, S – pole powierzchni przekroju zbiornika.

Podstawiając zależność (1.106) do równań (1.103), (1.104) i obliczając pochodną iloczynu, otrzymamy

$$\dot{V} = F_1 + F_2 - k\sqrt{V}$$

$$\dot{c}V + c\dot{V} = c_1F_1 + c_2F_2 - ck\sqrt{V}$$

Podstawiając z kolei zależność (1.107) do równania (1.108) i rozwiązuając to równanie względem \dot{c} , będziemy mieli

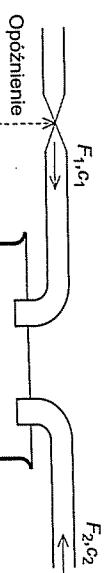
$$\dot{c} = \frac{1}{V} [(c_1 - c)F_1 + (c_2 - c)F_2] \quad (1.107)$$

$$\dot{c}V + c\dot{V} = c_1F_1 + c_2F_2 - ck\sqrt{V} \quad (1.108)$$

Równania (1.107), (1.109) są poszukiwanymi nieliniowymi równaniami stanu procesu mieszania idealnego dwóch cieczy. Biorąc za odpowiedź wysokość h shupa cieczy w zbiorniku, otrzymamy równanie wyjścia w postaci

$$h = \left[\frac{1}{S}, \quad 0 \right] \begin{bmatrix} V \\ c \end{bmatrix} \quad (1.110)$$

Weźmy pod uwagę zbiornik, do którego dopływają dwie substancje ciekłe o natężeniach przepływu $F_1 = F_1(t)$ i $F_2 = F_2(t)$, a wyplyna substancja cieka o natężeniu przepływu $F = F(t)$ (rys. 1.14).



Rys. 1.14. Schemat układu regułacji poziomu cieczy w zbiorniku

Załóżmy, że natężenie przepływu F_1 jest zależne od wysokości poziomu cieczy $h(t)$ w zbiorniku i jest regulowane za pomocą zaworu w taki sposób, aby utrzymać stały poziom cieczy w zbiorniku. Mamy zatem

$$F_1(t) = kh(t - T_0) \quad (1.111)$$

przy czym: k – współczynnik proporcjonalności, T_0 – czas opóźnienia, tj. odstęp czasu między chwilą zmiany położenia zaworu a chwilą zmiany poziomu cieczy w zbiorniku. Natężenie przepływu substancji wypluwającej F zależy od wysokości poziomu cieczy h w zbiorniku i jest określone zależnością (1.105). Za zmienną stanu przyjmujemy wysokość poziomu cieczy $h(t)$ w zbiorniku, a za wymuszenie natężenie przepływu F_2 . Równanie bilansu masy w zbiorniku ma postać

$$\rho Sh(t) = F_1(t) + F_2(t) - F(t) \quad (1.112)$$

przy czym: ρ – gęstość substancji, S – pole przekroju zbiornika.

Podstawiając zależności (1.111) i (1.105) do równania (1.112), otrzymamy poszukiwane równanie stanu

$$h(t) = \frac{k}{\rho S}h(t - T_0) - \frac{k_1}{\rho S}\sqrt{h(t)} + \frac{1}{\rho S}F_2(t) \quad (1.113)$$

Równanie (1.113) jest nieliniowym równaniem różniczkowo-różnicowym. Model matematyczny układów z opóźnieniami skupionymi mają postać równań różniczkowo-różnicowych, zwanych również równaniami z opóźnionym argumentem. W przypadku ogólnym układ nieliniowych równań różniczkowo-różnicowych ma postać

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - T'_1), \dots, \mathbf{x}(t - T'_k); \\ \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t - T_1), \dots, \mathbf{u}(t - T_m), t] \end{aligned} \quad (1.114)$$

przy czym $T'_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$) i $T_j > 0$ ($j = 1, 2, \dots, m$) są opóźnieniami odpowiednio stanu i sterowania (wymuszenia). Aby wyznaczyć rozwiązanie $\mathbf{x}(t)$ dla $t > t_0$, nie wystarcza znajomość stanu $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ i sterowania $\mathbf{u}(t)$ w przedziale $[t_0, t]$; niezbędna jest jeszcze znajomość $\mathbf{x}(t)$ w przedziale $[t_0 - \max_i T'_i, t_0]$ oraz $\mathbf{u}(t)$ w przedziale $[t_0 - \max_j T_j, t_0]$, które łącznie z \mathbf{x}_0 stanowią stan uogólniony procesu.

1.7.5. Układy o parametrach rozłożonych

Sygnały (zmienne) określające układy o parametrach rozłożonych zależą nie tylko od czasu, ale również od współrzędnych przestrzennych. Układy o parametrach rozłożonych, będące układami o opóźnieniach rozłożonych, są opisane równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Przykładami układów o parametrach rozłożonych są linie długie, wymienniki ciepla, reaktory rurowe itd. Sposób

1.7. Modele układów dynamicznych

Składania, równań dynamiki układów o parametrach rozłożonych wyjaśnimy na podanych nizęj trzech prostych przykładach.

ZYGŁAD 4

Dana jest linia dłuża dwuprzewodowa o parametrach $R(x), L(x), G(x), C(x)$ zależnych od współrzędnej położenia x . Niech $u = u(x, t)$ oraz $i = i(x, t)$ będą napięciem między przewodami i natężeniem prądu w punkcie odległym o x od początku linii chwilą t . Elementarny odcinek tej linii o długości Δx można zastąpić czwórnikiem parametrycznym skupionym w punktach $R(x)\Delta x, L(x)\Delta x, G(x)\Delta x, C(x)\Delta x$.

The diagram illustrates a distributed system model. It features a horizontal timeline at the bottom labeled $i(x, t)$. Above it, a vertical axis represents spatial position x . A current source $I(x, t)$ is connected to the timeline. A resistor $R(x)\Delta x$ is placed along the timeline. The voltage across this resistor is labeled $L(x)\Delta x$. This voltage is fed into a dependent current source $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\Delta x$, which is connected to the timeline. The output of this source is labeled $i(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\Delta x$. This signal is then processed by a capacitor $C(x)\Delta x$, represented by a box with a diagonal line. The final output is labeled $u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\Delta x$.

rys. 1.15. Czwórnik przedstawiający elementarny odcinek o długości Δx . Linii dłuższej ujemnej i krótszej dodatniej.

$$\begin{aligned} u(x, t) - R(x)\Delta x i(x, t) - L(x)\Delta x \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} - \left[u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Delta x \right] \\ i(x, t) = \left[i(x, t) + \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \Delta x \right] - G(x)\Delta x \left[u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Delta x \right] + \dots \\ = C(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \left[u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Delta x \right] \end{aligned}$$

redukcji, podzieleniu przez Δx i przejściu do granicy przy $\Delta x \rightarrow 0$ otrzymamy szukany układ równań różniczkowych cząstkowych (1.115)

od x , równania (1.1.15) przyjmują postać

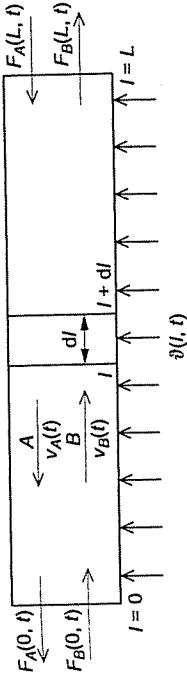
Do jednoznacznego rozwiązyania równań (1.115) są potrzebne, w przypadku ogólnego, dwie warunki początkowe i dwa warunki brzegowe. Warunki początkowe podaje się na rysunkach w rozdz. 1.

dwa warunki początkowe i dwa jąździecier w postaci

Warunki brzegowe mogą być zadane w różny sposób, zależnie od sposobu zaniesienia i obciążenia linii długiej. Na przykład mogą być dane napięcie $u(x, t)$ i natężenie prądu $i(x, t)$ na początku ($x = 0$) lub na końcu ($x = l$) limii długiej. Może być też dane napięcie na początku linii i impedancja obciążenia na koncu linii itp. □

PRZYKŁAD 5

W reaktorze rurowym o długości L przesuwa się materiał A z prędkością $v_A = v_A(t)$, a w przeciwny kierunek materiał B z prędkością $v_B = v_B(t)$.



Rys. 1.16. Schemat reaktora rurowego

Miedzy tymi materiałami zachodzi z predkością v reakcja endotermiczna przekształcania materiału A w materiał B. Reaktor jest ogrzewany z zewnątrz w sposób wy-muszający poziomy rozkład temperatury $\vartheta = \vartheta(l, t)$ w czasie wzduż całej długości reaktora. Za zmienne stanu, zależne od współrzędnej położenia l i czasu t , przyjmiemy gestość $x_1 = x_1(l^y, t)$ zapelnienia materiałem A oraz gestość $x_2 = x_2(l, t)$ zapelnienia materiałem B. Wymuszeniami w tym przypadku będą predkoscie przesuwu materialow v_A i v_B oraz temperatura ϑ . Na podstawie równań bilansu masy dla elementu reaktora o dlugosci dl možemy napisac dla materiału A równanie

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 \mathrm{d}l) = y_A \frac{\partial x_1}{\partial l} \mathrm{d}l - v x_1 \mathrm{d}l \quad (1.116)$$

z dla materiału. Równanie

(1.117) $\frac{\partial}{\partial t} (x_2 \mathrm{d}l) = -v_B \frac{\partial x_2}{\partial l} \mathrm{d}l + vx_1 \mathrm{d}l$

Po podzieleniu obu stron równań (1.116), (1.117) przez dl otrzymamy poszukiwanie rozwiązania

(1.118) $\frac{\partial x_1}{\partial t} = v_A \frac{\partial x_1}{\partial l} - vx_1, \quad \frac{\partial x_2}{\partial t} = -v_B \frac{\partial x_2}{\partial l} + vx_1$

Do rozwiązania równań (1.118) są potrzebne w przypadku ogólnym dwa warunki początkowe i dwa warunki brzegowe. Warunki początkowe mają postać

$$\text{lowline}_\alpha = \frac{\partial x_1}{\partial x_1} - \frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial x_2}{\partial x_n} - \frac{\partial x_1}{\partial x_n} \quad (1.1.18)$$

Do rozwiązania równania (1.18) są potrzebne w przypadku ogólnym dwa warunki

$$x_1(l, 0) = \phi(l) \} \quad \text{dla } l \in [0, L]$$

Wszelkie błędy w tym momencie były dane nn w postaci

$$x_1(L, t) = \frac{F_A(L, t)}{F_B(0, t)}, \quad x_2(0, t) = \frac{F_B(0, t)}{F_A(L, t)}$$

przy czym $F_A(L, t)$ i $F_B(0, t)$ są natążeniami dopływu materiału A i B odpowiednio na koniec i na początek reaktora w chwili t . \square

PRZYKŁAD 6

Pręt metalowy o promieniu r , wykonany z materiału jednorodnego, znajduje się w ośrodku jednorodnym o temperaturze ϑ_0 . Początek ($x = 0$) tego pręta jest ogrzewany. Niech $\vartheta(x, t)$ będzie temperaturą w dowolnym punkcie przekroju pręta odległym o x od początku w chwili t . Ilość ciepła $dQ(x, t)$ przepływającego przez elementarną powierzchnię dS w czasie dt w kierunku osi przewodu jest określona zależnością

$$dQ(x, t) = -k \frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial x} dS dt$$

przy czym: k – współczynnik przewodnictwa cieplnego, $\frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial x}$ – gradient temperatury w kierunku osi x . Wobec tego ilość ciepła dostarczona do elementu pręta o polu przekroju $S = \pi r^2$ i o długości dx w czasie dt jest określona zależnością

$$dQ_1(x, t) = -kS \left[\frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial x} \Big|_x - \frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial x} \Big|_{x+dx} \right] dt = kS \frac{\partial^2 \vartheta(x, t)}{\partial x^2} dx dt \quad (1.119)$$

Aby temperatura elementu pręta o długości dx w czasie dt wzrosła o $d\vartheta(x, t)$, potrzebna jest ilość ciepła

$$dQ_2(x, t) = h\rho S \frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial x} dx dt \quad (1.120)$$

przy czym: h – ciepło właściwe pręta, ρ – gęstość materiału pręta. Ilość ciepła odprawadzona w czasie dt z elementu pręta o długości dx do ośrodka jest wprost proporcjonalna do różnicy temperatur pręta i ośrodka, do powierzchni tego elementu pręta i do czasu dt :

$$dQ_3(x, t) = 2\pi r\gamma [\vartheta(x, t) - \vartheta_0] dx dt \quad (1.121)$$

przy czym γ jest współczynnikiem wymiany ciepła. Z równania bilansu ciepła mamy $dQ_1(x, t) = dQ_2(x, t) + dQ_3(x, t)$ (1.122)

Podstawiając zależności (1.119), (1.120), (1.121) do (1.122) i dzieląc obie strony równania przez $h\rho S dx dt$, otrzymamy poszukiwanie równanie różniczkowe cząstkowe

$$\frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \vartheta(x, t)}{\partial x^2} - b [\vartheta(x, t) - \vartheta_0] \quad (1.123)$$

przy czym

$$a = \frac{k}{h\rho}, \quad b = \frac{2\pi r\gamma}{h\rho S}$$

Znając temperaturę na początku pręta $\vartheta(0, t) = \phi(t)$ oraz rozkład temperatury wzduż całego pręta $\vartheta(x, 0) = \psi(x)$ w chwili początkowej $t = 0$, możemy rozwiązyując równanie (1.123) wyznaczyć temperaturę w dowolnym punkcie pręta w chwili $t > 0$. □

1.7.6. Równanie logistyczne w biologii

Niech b będzie współczynnikiem urodzeń (liczba dzieci urodzonych w ciągu roku na 1000 mieszkańców), a d współczynnikiem zgonów. Równanie wzrostu

populacji ma postać

$$\dot{x} = (b - d)x \quad (1.124)$$

którego rozwiązaaniem jest

$$x(t) = x_0 e^{(b-d)t} \quad (1.125)$$

Jeżeli zmodyfikujemy współczynnik zgonów, zakładając, że rośnie on wraz z liczebnością populacji $d = ax$ (a stały współczynnik), to równanie wzrostu populacji przyjmuje postać

$$\dot{x} = x(b - ax) \quad (1.126)$$

DEFINICJA 9

Równanie (1.126) nazywamy równaniem logistycznym.

Opisuje ono dość dobrze wzrost pojedynczej populacji w środowisku o ograniczonych zasobach.

1.7.7. Model Lotki-Volterry układu drapieżnik – ofiara

Niech w tym samym środowisku żyją dwa gatunki, jeden, zwany drapieżnikiem, żywi się osobnikami drugiego gatunku, zwanego ofiarą. Niech $x_1(t)$ będzie liczebnością populacji ofiar, a $x_2(t)$ liczebnością populacji drapieżników. Dla populacji ofiar przyjmujemy model wykładniczego wzrostu zgodnie z zależnością (1.125), zakładając, że współczynnik zgonów jest wprost proporcjonalny do liczebności populacji drapieżników $d = cx_2$ (ofiary są pożerane przez drapieżnika). Zakładamy, że wzrost liczebności drapieżników jest wprost proporcjonalny do liczebności ofiar $c x_1$. Zakładając dalej, że pewna ilość pożywienia σ jest niezbędna do utrzymywania przy życiu istniejącej populacji i nie prowadzi do jej wzrostu, otrzymamy

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (b - ax_2) x_1 \\ \dot{x}_2 &= (cx_1 - \sigma) x_2 \end{aligned} \quad (1.127)$$

DEFINICJA 10

Układ równań różniczkowych (1.127) nazywamy modelem Lotki-Volterry układu drapieżnik – ofiara.

1.7.8. Model Maya układu drapieżnik – ofiara

W modelu tym równanie wzrostu populacji ofiar przyjmujemy w postaci równania (1.126) i zakładamy współczynnik śmiertelności ofiar w postaci $\frac{hx_2}{1+hx_1}$

(drapieżnik nie zabija więcej niż może zjeść). Równanie wzrostu populacji ofiar ma wtedy postać

$$\dot{x}_1 = x_1 (b - ax_1) - \frac{hx_1x_2}{1+hx_1} \quad (1.128)$$

Równanie wzrostu populacji drapieżników przyjmujemy również w postaci równania (1.126) i zakładamy, że współczynnik a jest odwrotnie proporcjonalny do liczebności ofiar mx_1 (liczba drapieżników może być większa niż jest w stanie wyżywić populację ofiar). Otrzymamy wówczas następujące równanie wzrostu populacji drapieżników

$$\dot{x}_2 = b_2x_2 \left(1 - \frac{x_2}{mx_1}\right) \quad (1.129)$$

Załóżmy, że:

DEFINICJA 11
Układ równań (1.128) i (1.129) nazywamy modelem May'a i kładu drapieżnik - ofiara.

1.7.9. Model Solowa wzrostu gospodarczego

DEFINICJA 12
Gospodarkę nazywaną zamkniętą, jeżeli cały wytworzony produkt jest zużywany tylko na konsumpcję i akumulację.

Niech K będzie kapitałem znajdującym się w gospodarce.

DEFINICJA 13
Akumulacyję kapitału nazywamy pochodną kapitału K względem czasu

$$\dot{K} = \frac{dK}{dt}$$

Niech X oznacza wytworzony produkt, a C jego konsumpcję. Równanie równowagi (bilansu) zamkniętego systemu ekonomicznego ma postać

$$X = C + \dot{K} \quad (1.130)$$

Wytwarzony produkt X zależy od włożonego kapitału K oraz sily roboczej L , czyli

$$X = F(L, K) \quad (1.131)$$

Zakładamy, że konsumpcja C podlega tylko stała część s ($s < 1$) wytworzonego produktu

$$C = sX \quad (1.132)$$

a na akumulację (inwestycje) jest przeznaczona reszta wytworzonego produktu

$$\dot{K} = (1 - s)X \quad (1.133)$$

DEFINICJA 14
Układ równań (1.130)÷(1.133) nazywamy modelem Solowa wzrostu gospodarczego.

1) wzrost sily roboczej jest wykładniczy

$$L(t) = L_0 e^{rt} \quad (1.134)$$

2) $F(K, L)$ jest funkcją jednorodną L , tzn. $F(K, L) = LF\left(\frac{K}{L}, 1\right)$,

3) $F(K, L)$ jest rosnącą, monotonickie wkleśta, funkcją kapitału K (zwiększenie K przynosi coraz mniejszy wzrost produkcji).

Wprowadzając nową zmienną $k = \frac{K}{L}$ (kapitał na głowę ludności) oraz korzystając z zależności (1.131), (1.133) i (1.134), otrzymamy

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} = \frac{(1-s)X}{K} - \frac{r}{L} \quad (1.134)$$

a po pomnożeniu przez k i uwzględnieniu, że $F(k) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = \frac{F(K, L)}{L} = \frac{X}{L}$

$$\dot{k} = (1 - s)F(k) - rk$$

1.7.10. Model Leontiefa produkcji w n sektorach

DEFINICJA 15

Model Leontiefa opisujący produkcję w n związanych ze sobą sektorach ma postać

$$x_i = Ax_i + B(x_{i+1} - x_i) + d_i \quad (1.135)$$

W równaniu tym k -ta składowa wektora $x_i \in \mathbb{R}^n$ opisuje poziom produkcji w k -tym sektorze w okresie (chwili) i . Wyrażenie Ax_i określa ilość produktu z użytku bezpośrednio do bieżącej produkcji. Wyrażenie $B(x_{i+1} - x_i)$ określa możliwości rozwoju produkcji tak, aby w następnym okresie wynosiła ona x_{i+1} . Wreszcie d_i określa ilość produktu zużytego na pokrycie bieżącego popytu.

Macierze A i B mają elementy nieujemne. Zwykle macierz B jest osobliwa, ponieważ ma ona niezerowe elementy tylko w niektórych wierszach. Wynika to z faktu, że kapitał rozwoju produkcji pochodzi zwykle tylko z niektórych sektorów. Przepisując równanie (1.135) w postaci typowej, otrzymamy

$$Bx_{i+1} = [\mathbb{I} + B - A]x_i - d_i$$

Model Leontiego jest więc przykładem dyskretnego układu singularnego.

1.8. Zadania

Zadanie 1. Dany jest układ

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

ze sprzężeniem zwrotnym $u = v - Fy$. Wykaż, że układ zamknięty jest układem singularnym wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det [\mathbb{I} + BFC] = 0$$

Zadanie 2. Dany jest układ z ujemnym sprzężeniem zwrotnym, który w trze głównym zawiera człon opisany równaniami

$$\dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u_1$$

$$y_1 = C_1x_1 + D_1u_1$$

a w pętli sprzężenia zwrotnego człon opisany równaniami

$$\dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2u_2$$

$$y_2 = C_2x_2 + D_2u_2$$

Przyjmując za wektor stanu układu zamkniętego

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

wykaż, że układ ten jest układem standardowym wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det [\mathbb{I} + D_2D_1] \neq 0$$

WSKAZÓWKA. Do równania (węzła sumacyjnego) $u_1 = u - y_2$ podstawiamy $y_2 = C_2x_2 + D_2u_2$ oraz $u_2 = C_1x_1 + D_1u_1$ i otrzymamy

$$u_1 = u - (C_2x_2 + D_2C_1x_1 + D_2D_1u_1)$$

czyli

$$[\mathbb{I} + D_2D_1]u_1 = u - D_2C_1x_1 - C_2x_2$$

Zadanie 3. Wyznacz liniowe przybliżenie modelu Lotki-Volterry

$$\dot{x}_1 = (b - ax_2)x_1$$

$$\dot{x}_2 = (cx_1 - \sigma)x_2$$

w otoczeniu następujących dwóch punktów:

- 1) $x_1 = 0, x_2 = 0$
- 2) $x_1 = \frac{a}{c}, x_2 = \frac{b}{a}$

WSKAZÓWKA. Skorzystaj z zależności

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

w rozpatrywanym punkcie.

Zadanie 4. Dla nieliniowego układu dyskretnego

$$\begin{aligned} x_1(i+1) &= e^{x_1(i)} + x_1(i)x_2(i) + u^2(i) \\ x_2(i+1) &= x_1^2(i) + x_2(i) + x_2^2(i) + u(i) \end{aligned}$$

wyznacz liniowe przybliżenie w otoczeniu punktu $x_1 = 0, x_2 = 0, u = 0$.

WSKAZÓWKA. Skorzystaj z zależności

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}$$

w rozpatrywanym punkcie.

Rozdział 2

MODELE MATEMATYCZNE LINIOWYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH CIĄGŁYCH I DYSKRETNYCH

2.1. Wprowadzenie

W rozdziale tym zostaną przedstawione zagadnienia związane z liniowymi układami dynamicznymi, których modele tworzy się na podstawie zebranych informacji o obiekcie będącym w zakresie zainteresowania projektanta. Ilość zebrań informacji o obiekcie determinuje w większości przypadków rodzaj modelu, który należy wybrać. Jeżeli projektant ma jedynie informacje w postaci pomiarów, wtedy najczęściej stosuje się model typu wejście-wyjście w postaci transmitancji operatorowej. Pomiary konieczne do uzyskania modelu typu wejście-wyjście powinny być w formie par przebiegów: wymuszenie, odpowiedź obiektu. Dysponowanie pomiarami w tej formie jest podstawą do uzyskania modelu tego typu. Model obiektu w postaci wejście-wyjście pozwala na traktowanie modelowanego obiektu jako czarnej skrzynki, która jest w stanie opowiedzieć na dowolny sygnał wymuszający. Projektant czy użytkownik obiektu nie ma żadnych informacji o tym, co znajduje się w środku obiektu, ale jest w stanie wyznaczyć odpowiedź obiektu na wybrany sygnał wymuszający. Z tego wynika, że opis obiektu w postaci modelu wejście-wyjście nie jest w pełni satysfakcyjny dla projektanta, który oprócz możliwości określenia odpowiedzi obiektu na zadane wymuszenie chce wiedzieć, jak przebiegają procesy wewnętrz obiektu.

Decydując się (lub będąc skazanym) na wybór tego typu modelu, należy być świadomym ograniczeń. Model typu wejście-wyjście jest przeznaczony do opisu głównie układów liniowych. Jeżeli projektant dysponuje informacjami o fizycznych podstawach funkcjonowania obiektu, to wtedy do opisu obiektu można wykorzystać model zmiennych stanu. Czym są zmienne stanu i pozostałe szczególne dotyczące tego rodzaju modelu, zostanie wyjaśnione później. Z najważniejszych informacji na temat modelu zmiennych stanu należy zapamiętać, że model ten daje dużo więcej informacji o modelowanym obiekcie, jego sposobie funkcjonowania w porównaniu z modelem typu wejście-wyjście. Model wejście-wyjście daje informacje jedynie o reakcji obiektu na dowolne wymu-

szenie, bez informacji o tym, co się dzieje wewnętrz obiektu. Model zmiennych stanu, oprócz tych informacji, może dać odpowiedź na pytanie o procesy zachodzące wewnątrz obiektu. Model zmiennych stanu jest przeznaczony do opisu zarówno układów liniowych, jak i nieliniowych. W tym rozdziale model zmiennych stanu i model typu wejście-wyjście będzie omawiany na przykładzie układów liniowych o jednym wejściu i jednym wyjściu (ang. Single Input Single Output, SISO).

2.2. Modele czasowe

W tym podrozdziale zostana krótka omówione zagadnienia związane z modelowaniem układów dynamicznych w dziedzinie czasu. Jest to jedno z fundamentalnych zagadnień w teorii sterowania. Stworzenie odpowiedniego modelu matematycznego badanego obiektu jest kluczem do uzyskania oczekiwanych efektów, jeśli chodzi o zadania związane ze sterowaniem i analizą dynamicznych własności modelowanego obiektu.

2.2.1. Równania różniczkowe i różnicowe

Podstawowym narzędziem wykorzystywanym w teorii sterowania do konstruowania modeli układów dynamicznych w dziedzinie czasu są równania różniczkowe i różnicowe. Oba rodzaje równań znalazły zastosowanie w teorii sterowania dzięki temu, że są one w stanie scharakteryzować ilościowo dynamiczne własności obiektów ciągłych oraz dyskretnych. W literaturze krajowej i zagranicznej można znaleźć dziesiątki pozycji książkowych poświęconych wykorzystaniu równań różniczkowych i różnicowych do analizy dynamicznej wszelkiego rodzaju obiektów.

2.2.2. Zmienne stanu

Stworzenie modelu zmiennych stanu obiektu dynamicznego wymaga dużo większej wiedzy o modelowanym obiekcie niż na to miejsce w przypadku tworzenia modelu typu wejście-wyjście. Do utworzenia modelu zmiennych stanu obiektu jest konieczna wiedza o strukturze układu i prawach fizycznych rządzących jego zachowaniem. Ponieważ model zmiennych stanu dostarcza więcej informacji na temat dynamiki obiektu i procesów w tym obiekcie zachodzących, należy się spodziewać nieco bardziej złożonego aparatu pojęciowego w porównaniu do modelu typu wejście-wyjście. W dalszej części tego podrozdziału model zmiennych stanu będzie omawiany w odniesieniu do układów liniowych, choć model zmiennych stanu dotyczy również układów nieliniowych i jest podstawowym narzędziem analizy sposobu funkcjonowania tychże układów, ukazując imponującą złożoność otaczającego nas świata. Zmienne stanu zostały określone precyzyjnie

2.2. Modele czasowe

w definicji 3 (s. 14), z której wynika, że zmajomość wartości zmiennych stanu pozwala na wyznaczenie wszystkich innych wielkości, które opisują stan obiektu fizycznego.

W przypadku obwodów elektrycznych zmiennymi stanu są strumienie skojarzone z inducyjnościami oraz ładunki zgromadzone w pojemnościach. Znajomość tych wielkości pozwala obliczyć prądy płynące w pozostałych elementach obwodu i napięcia na tych elementach. Wynika stąd, że oprócz wartości zmiennych stanu i parametrów poszczególnych elementów obwodu nie trzeba wiedzieć nic więcej, aby w dowolnym czasie określić stan obwodu elektrycznego. Analogicznie można opisać inne układy dynamiczne, których modele wyrowadza się na podstawie informacji z innych dziedzin. Zmienne stanu mają jeszcze jedną ważną własność.

UWAGA 3. *Zmienne stanu najczęściej są powiązane między sobą zależnością różniczkową.*

Nieco więcej na ten temat zostanie podane przy okazji omawiania modelu zmiennych stanu.

2.2.3. Model zmiennych stanu układów ciągtych

DEFINICJA 16
Modelem opartym na zmiennych stanu nazywamy model opisany następującymi równaniami różniczkowymi:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.1)$$

Znaczenie poszczególnych symboli w równaniu (2.1) jest następujące: $x(t)$ – wektor zmiennych stanu układu, czyli zbiór wielkości niezbędnych do jednoznacznego opisania stanu modelowanego układu, jak wynika z przedstawionego zapisu, wartości poszczególnych zmiennych stanu są zmienne w czasie; $u(t)$ – sygnał wejściowy układu dynamicznego, który jest również funkcją czasu; A , B – macierze stałych współczynników, które odzwierciedlają strukturę modelowanego liniowego układu dynamicznego i parametry elementów tworzących ten układ.

Pierwszą istotną uwagę, którą należy uczynić na temat modelu zmiennych stanu, jest:

UWAGA 4. *Model zmiennych stanu opisuje, w odrożeniu od modelu typu wejście-wyjście, obiekt w dziedzinie zmiennej rzeczywistej t . Dla przypomnienia, model typu wejście-wyjście w postaci transmitancji operatorowej opisuje obiekt w dziedzinie zmiennej zespolonej.*

DEFINICJA 17
Macierz A nazywamy macierzą systemu, macierz B nazywamy macierzą wejścia.

Budowa modelu zmiennych stanu układów ciągłych

Zgodnie z tym, co napisano wcześniejszej, model zmiennych stanu tworzy się na podstawie znajomości wewnętrznej struktury obiektu i praw fizycznych, które determinują jego zachowanie się w czasie. Z tego też powodu proces tworzenia modelu zmiennych stanu dowolnego obiektu rozpoczyna się od wypisania równań wynikających z praw fizycznych funkcjonowania modelowanego obiektu. W kolejnym kroku należy wybrać zmienny stanu, czyli wielkości porządkujące jednoznacznie określąc stan układu. Wielkości te (zmienne stanu) jednocześnie muszą być powiązane ze sobą zależnością różniczkową. Po zakończeniu tego etapu konstrukcji modelu zmiennych stanu pozostałe wykonanie prostych przekształceń algebraicznych, które ostatecznie doprowadzą do uzyskania modelu zmiennych stanu w postaci równania (2.1).

PROCEDURA 2

Ogólna procedura konstrukcji modelu zmiennych stanu.

Krok 1. Wypisujemy równania wynikające z praw fizycznych funkcjonowania obiektu.

Krok 2. Wybieramy wielkości odgrywające rolę zmiennych stanu.

Krok 3. Porządkujemy otrzymane równania w celu wyróżnienia elementów opisanych w modelu zmiennych stanu (2.1).

Szczególnie kłopotliwy może wydawać się w procesie wyznaczania modelu zmiennych stanu etap wyboru wielkości, które będą zmiennymi stanu. W rzeczywistości etap ten nie jest aż tak kłopotliwy, jak się może wydawać. Na przykład w przypadku obwodów elektrycznych wybór zmiennych stanu jest prawie zawsze oczywisty. Za zmiennie stanu przyjmujemy strumienie skojarzone z indukcyjnościami i ładunki zgromadzone w pojemnościach. W celu rozjaśnienia i ilustrowania procesu tworzenia modelu zmiennych stanu przeanalizujemy poniższy przykład.

PRZYKŁAD 7

Zbudujemy model zmiennych stanu dla prostego obwodu RLC zasilanego ze źródła napięcia $e(t)$. Wykorzystując procedurę 2, wykonujemy następujące kroki:

Krok 1. Wypisujemy równania obwodu, tj. równanie oczka

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + u_C(t)$$

oraz równanie opisujące prąd płynący w oczku

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$$

przy czym: $i(t)$ – prąd płynący w oczku, $u_C(t)$ – napięcie na kondensatorze, R – rezystancja opornika, C – pojemność kondensatora, L – indukcyjność cewki.

Krok 2. Zgodnie z definicją rolę zmiennych stanu tego obiektu mogą odgrywać wielkości fizyczne jednoznacznie opisujące układ i powiązane ze sobą zależnością różniczkową. Zatem za zmiennie stanu przyjmuję się prąd $x_1(t) = i(t)$ oraz napięcie $x_2(t) = U_C(t)$. Latwo zauważyc, że wiedza o wartościach przyjmowanych przez zmiennie stanu pozwala obliczyć wszystkie pozostałe napięcia w tym prostym obwodzie.

Krok 3. Porządkujemy równania tak, aby po lewej stronie znaku równości mieć tylko pochodne wielkości, które zostały wybrane jako zmiennie stanu

$$\begin{aligned} \frac{di(t)}{dt} &= -\frac{R}{L}i(t) - \frac{1}{L}U_C + \frac{1}{L}e(t) \\ \frac{dU_C(t)}{dt} &= \frac{1}{C}i(t) \end{aligned}$$

Po wykorzystaniu przyjętych oznaczeń dla zmiennych stanu otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= -\frac{R}{L}x_1(t) - \frac{1}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}e(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= \frac{1}{C}x_1(t) \end{aligned}$$

i ostatecznie po przekształceniu równań w postać równań zmiennych stanu (2.1)

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} e(t)$$

gdzie

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad u(t) = e(t), \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

□

W celu uzupełnienia wiadomości na temat modelu zmiennych stanu należy podać ogólnie zależności zachodzące między wymiarami poszczególnych składników tego modelu.

UWAGA 5. Jeżeli wyróżnionych zostanie n zmiennych stanu ($x \in R^n$) i m sygnałów wymuszających ($y \in R^m$), to macierz $A \in R^{n \times n}$ i macierz $B \in R^{n \times m}$.

DEFINICJA 18

Rządem modelu zmiennych stanu nazywamy liczbę zmiennych stanu, która występuje w równaniu (2.1).

Dla układu podanego w przykładzie 7 określany rząd modelu układu. Biorąc pod uwagę liczby zmiennych stanu wyróżnionych w przykładzie 7, określany rząd modelu układu jest równy 2. \square

Płaszczyzna fazowa

DEFINICJA 19
Płaszczyzną fazową nazywamy płaszczyznę, na której jest przedstawiona zależność między zmiennymi stanu w postaci wykresu.

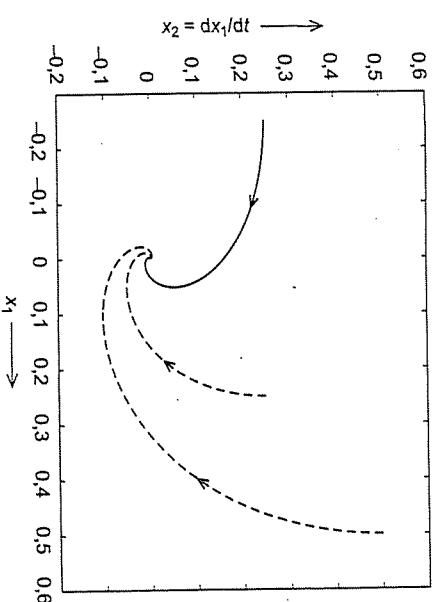
Nazwa płaszczyzna fazowa bierze się stąd, że na wykresie pokazującym zależność między zmiennymi stanu umieszcza się dwie zmienne stanu, każda z nich jest odkładana na jednej z osi. W ten sposób otrzymujemy wykres na płaszczyźnie. Z płaszczyzną fazową jest związane pojęcie trajektorii fazowej.

DEFINICJA 20
Trajektorią fazową nazywamy krzywą na płaszczyźnie fazowej spowodowaną przez czas, która reprezentuje przebieg zmiennych stanu w czasie zadanego przez czas, dla danego wymuszenia.

Zmienność w czasie na płaszczyźnie fazowej jest ilustrowana w postaci przedmiotami się punktu po trajektorii fazowej, od warunków początkowych. Płaszczyzna fazowa ma zastosowanie w procesie oceniania stabilności badanego układu i jest często stosowanym kryterium oceny. Wykonuje się to przez obserwanie trajektorii fazowej na oscyloskopie.

PRZYKŁAD 9

Na rysunku 2.1 pokazano trzy trajektorie fazowe pewnego układu liniowego drugiego rzędu wyznaczone dla różnych wymuszeń i warunków początkowych.



Rys. 2.1. Przykładowe trajektorie fazowe

2.2.4. Model zmiennych stanu układów dyskretnych

DEFINICJA 21
Modelem zmiennych stanu nazywamy model opisany następującymi równaniami różnicowymi.

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{Ax}(n) + \mathbf{Bu}(n) \quad (2.2)$$

Model zmiennych stanu opisuje, w odróżnieniu od modelu typu wejście-wyjście, obiekt w dziedzinie zmiennej dyskretnej t , która przyjmuje wartości całkowite. Chwilowa wartość zmiennej dyskretnej t jest oznaczana przez n . Widać zatem, że model zmiennych stanu dla układu dyskretnego podaje związek między aktualnymi wartościami zmiennych stanu i wymuszeniem, a wartością zmiennych stanu w kolejnej chwili dyskretniej. Znaczenie poszczególnych symboli w równaniu (2.2) jest takie samo jak w przypadku modelu zmiennych stanu dla układów ciągłych. Zmianie ulega jedynie dziedzina czasu; dziedzina czasu ciągłego następuje dziedziną czasu dyskretnego.

2.2.5. Równanie wyjścia modelu zmiennych stanu

Układy ciągłe

Równanie (2.1) opisuje ewolucję zmiennych stanu ciągłego układu dynamicznego, natomiast nie daje żadnych informacji na temat sygnałów wydostających się na zewnątrz modelu. Do opisania sygnałów wyjściowych modelu zmiennych stanu służy dodatkowe równanie, które nazywa się równaniem wyjścia modelu

EFINICJA 22

outrance

(2.3) *Zazwyczaj równaniem wyjścia modelu zmiennych stanu liniowego układu ogólnego jest*

w równaniu (2.3) pojawiają się dwie macierze $C \in R^{p \times n}$ i $D \in R^{p \times m}$, których znaczenie zdefiniowano niżej.

EENIGHE 22

DEFINICJA 23 Macierz C nazywamy macierzą wyjścia, macierz $D \in R^{p \times m}$ nazywamy

acierzą przenoszenia.

Zazwyczaj liczba p jest liczbą wyjścia modelu, a pozostałe oznaczenia są zdefiniowane wstępnie.

Vlasty dvekratna

układów dyskretnych w mocy pozostają uwagi poczynione wyżej z ta różnicą, że zmianie ulega dziedzina czasu; dziedzinę czasu ciągłego następuje dziedzina dyskretnego. Z tego względu równanie wejścia modelu zmiennych układy dyskretnego wygląda nieco inaczej.

EFINICJA 24

Óuvrages

$$x(n) = Cx(n) + Du(n) \quad (2.4)$$

z użyciem warunku wyjścia modelu zmiennych stanu liniowego układu

z względu na dużą swobodę, jaką daje model zmiennych stanu, budowa rozwiązania wyjścia modelu zmiennych jest stosunkowo prostym zadaniem. Polega ono na swobodnym wyborze macierzy C oraz macierzy D pod warunkiem, że fizyczna struktura obiektu nie wprowadza ograniczeń. Jeżeli nie zachodzi konieczność wykonania fizycznej realizacji modelu zmiennych stanu, to wstępny projektant ma całkowitą swobodę wyboru macierzy C i D . Najczęściej tworzących modele zakładają się $D = 0$. Oznacza to, że wejście modelu nie działa na wyjście. Poczytowane wyżej uwagi dotyczą zarówno modeli hadrowych ciało-

22.6 Modele AR-ARMA i ARMAX

W tym punkcie częstowo będą omówione dwa modele, które reprezentują szerzą rodzinę modeli układów dynamicznych przeznaczonych do modelowania obiektów, których funkcjonowanie (sygnały wymuszające) jest zakłócone przez czynniki zewnętrzne. Są to: model autoregresyjny AR (ang. AutoRegressive), model autoregresyjny o średniej ruchomej ARMA (ang. AutoRegressive Moving Average) oraz model autoregresyjny o średniej ruchomej z sygnałem wejściowym ARMAX (ang. AutoRegressive Moving Average with eXogenous input). Jeszcze inaczej można powiedzieć, że są to modele przeznaczone do opisu procesów zachodzących w układach dynamicznych pod wpływem sygnałów o charakterze stochastycznym, czyli przypadkowym.

Rozważania rozpoczęliśmy od zdefiniowania rodzaju zakłóceń, które będą rozpatrywane, następnie przejdziemy do najbardziej złożonego modelu AR-MAX, aby później przekonać się, że model ARMA jest jego szczególnym przypadkiem, a model AR jest szczególnym przypadkiem modelu ARMA. Modele te są modelami czasu dyskretnego.

DEFINICJA 25 Szumem białym \tilde{X} nazywamy ciąg wartości pewnej zmiennej losowej X , który spełnia następujący warunek

$$\tilde{X}\tilde{X}^T = \sum_{i,j=1}^t \tilde{X}(i)\tilde{X}(j)\delta_{ij} = \sigma^2 \quad (2.6)$$

UWAGA 6. Stosunkowo często można się spotkać z dodatkowym założeniem, dotyczącym definicji szumu białego. Założenie to polega na przyjęciu zerowej wartości średniej ciśnienia ciśnienia akustycznego. \bar{V}

Szum biały można inaczej określić jako sygnał, który nie jest w żaden sposób skorelowany sam ze sobą, a co za tym idzie jest całkowicie przypadkowy i to dość dobrze opisuje stochastyczny proces.

Po zdefiniowaniu pojęcia szumu białego można przejść do definicji modelu ARMAX. Próbę zdefiniowania tego modelu rozpoczęmy od przeanal-

zowania prostego układu dyskretnego, którego wyjście w danej chwili t zależy od:

- wartości wyjścia w chwilach poprzednich,
- szumu e w chwili t oraz chwilach poprzednich,
- sygnału wymuszenia u w chwili t oraz chwilach poprzednich.

Powyższe stwierdzenia można zapisać w postaci następującego równania:

$$y(t) = -a_1 y(t-1) - \dots - a_n y(t-n) + b_0 u(t) + \dots + b_m u(t-m) + c_0 e(t) + \dots + c_p e(t-p) \quad (2.7)$$

Zamiast wykorzystywać wartości sygnałów y , u i e o różnych argumentach (będących chwilami w dziedzinie czasu dyskretnego) będziemy wykorzystywać wartości tychże sygnałów w danej chwili pomnożonych przez pewien operator, nazwijmy go q^{-1} . W dziedzinie czasu dyskretnego operator ten będzie oznaczać wzięcie wartości sygnału, na który działa operator, z chwili poprzedniej. Niech ilustracją działania tego operatora będą następujące zależności:

$$q^{-1} y(t) = y(t-1)$$

$$q^{-2} y(t) = q^{-1} y(t-1) = y(t-2)$$

$$q^{-3} y(t) = q^{-2} y(t-1) = q^{-1} y(t-2) = y(t-3)$$

W tym przypadku operator q^{-1} działał na sygnał dyskretny y , ale jego działanie jest identyczne dla pozostałych sygnałów występujących w równaniu (2.7). W związku z poczynionymi uwagami można równanie (2.7) zapisać w postaci mu równoważnej

$$y(t) = -a_1 q^{-1} y(t) - \dots - a_n q^{-n} y(t) + b_0 u(t) + \dots + b_m q^{-m} u(t) + c_0 e(t) + \dots + c_p q^{-p} e(t) \quad (2.8)$$

Po przeniesieniu składników zależnych od $y(t)$ na lewą stronę i po wyłączeniu wielkości $y(t)$, $u(t)$ i $e(t)$ przed nawias otrzymujemy

$$(1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n}) y(t) = (1 + b_1 q^{-1} + \dots + b_m q^{-m}) u(t) + (1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_p q^{-p}) e(t)$$

Równanie to jest podstawą do sformułowania definicji modelu ARMAX.

DEFINICJA 26

Modelem ARMAX układu dynamicznego nazywamy model opisany następującym równaniem:

$$A(q^{-1}) y(t) = B(q^{-1}) u(t) + C(q^{-1}) e(t) \quad (2.9)$$

gdzie

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n}$$

$$B(q^{-1}) = 1 + b_1 q^{-1} + \dots + b_m q^{-m}$$

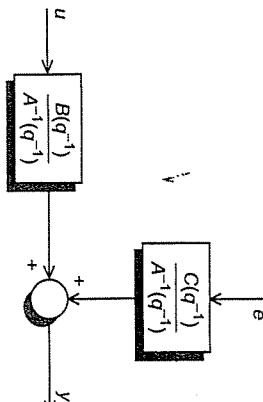
$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_p q^{-p}$$

szu wielomianami ($\deg A = n$, $\deg B = m$ i $\deg C = p$) operatora q^{-1} przesunięcia w tym, sygnał $y(t)$ jest traktowany jako wyjście modelu ARMAX, $u(t)$ jest wymuszeniem, a sygnał $e(t)$ jest szumem biakym.

Po przekształceniu równania (2.9) w postać

$$y(t) = A^{-1}(q^{-1}) B(q^{-1}) u(t) + A^{-1}(q^{-1}) C(q^{-1}) e(t)$$

można przedstawić model ARMAX za pomocą schematu pokazanego na rys. 2.2.



Rys. 2.2. Model ARMAX

Model ARMAX ze swojej natury jest modelem czasowym z czasem dyskretnym, czyli pokazuje jak są związane ze sobą w dyskretnych chwilach sygnały $u(t)$, $e(t)$ i $y(t)$, w którym współczynniki wielomianów A , B i C we wzorze 2.9 ilościowo definiują modelowany obiekt. Model ARMAX można również zdefiniować dla operatora odwrotnego względem q^{-1} , czyli dla operatora q .

DEFINICJA 27
Modelem ARMAX układu dynamicznego nazywamy model opisany następującym równaniem:

$$\bar{A}(q) y(t) = \bar{B}(q^{-1}) u(t) + \bar{C}(q) e(t)$$

gdzie

$$\bar{A}(q) = 1 + \bar{a}_1 q + \dots + \bar{a}_n q^n$$

$$\bar{B}(q) = 1 + \bar{b}_1 q + \dots + \bar{b}_m q^m$$

$\bar{C}(q) = 1 + \bar{c}_1 q + \dots + \bar{c}_p q^p$
 $\deg \bar{C} = p$ operatora q przesunięcia w przód, sygnał $y(t)$ jest traktowany jako wyjście modelu ARMAX, $u(t)$ jest wyruszeniem, a sygnał $e(t)$ jest szumem białym.

Obie definicje są sobie równoważne, a różnica między nimi polega na sposobie interpretacji funkcjonowania operatora przesunięcia. W przypadku operatora q^{-1} korzysta się z poprzednich wartości sygnału, na który działa operator. W przypadku operatora q korzysta się z przyszłych wartości sygnału, na który działa operator. O ile działanie operatora q^{-1} jest łatwe do wyobrażenia, o tyle działanie operatora q zda je się być trudniejsze do zrozumienia i wymaga kilku słów wyjaśnienia. Uzasadnieniem wprowadzenia operatora q może być fakt mniej skomplikowanego zapisu modelu ARMAX.

PRZYKŁAD 10

Weźmy pod uwagę model ARMAX w postaci

$$(1 + q^{-1} - 2q^{-2} + q^{-3})y(t) = (1 - q^{-1})u(t) + (1 - 2q^{-1} - 3q^{-2})e(t) \quad (2.10)$$

w którym t jest czasem dyskretnym, a wielomiany A i C mają postać

$$A(q^{-1}) = 1 + q^{-1} - 2q^{-2} + q^{-3}$$

$$B(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$$

$$C(q^{-1}) = 1 - 2q^{-1} - 3q^{-2}$$

Po pomnożeniu wyrazów występujących w zależności (2.10) otrzymamy

$$y(t) + q^{-1}y(t) - 2q^{-2}y(t) + q^{-3}y(t) = u(t) - u(t-1) + e(t) - 2q^{-1}e(t) - 3q^{-2}e(t)$$

Zwróćmy teraz uwagę na wpływ operatora q^{-1} na sygnał $y(t)$, który pokazują równania niżej

$$q^{-1}y(t) = y(t-1)$$

$$q^{-2}y(t) = q^{-1}y(t-1) = y(t-2)$$

$$q^{-3}y(t) = q^{-2}y(t-1) = q^{-1}y(t-2) = y(t-3)$$

W podobny sposób operator q^{-1} działa na sygnały $e(t)$ i $u(t)$

$$q^{-1}e(t) = e(t-1)$$

$$q^{-2}e(t) = q^{-1}e(t-1) = e(t-2)$$

$$q^{-1}u(t) = u(t-1)$$

Biorąc pod uwagę te wyniki, można napisać równanie (2.10) w następującej postaci:
 $y(t) = u(t) - u(t-1) + e(t) - 2e(t-1) - 3e(t-2) - y(t-1) + 2y(t-2) - y(t-3)$

Widać teraz, że sygnał $y(t)$ zależy od sygnału u w chwili t i od jego poprzedniej wartości, zależy również od sygnału e w chwili t i od jego poprzednich dwóch wartości oraz od poprzednich trzech wartości sygnału y . \square

Opierając się na interpretacji modelu ARMAX wykonanej w powyższym przykładzie, można uzasadnić nazwę tego modelu. Słowo autoregresyjny dotyczy faktu występowania wpływu poprzednich wartości sygnału y na wartość sygnału y w danej chwili; sformułowanie średnia ruchoma dotyczy faktu, że na wartość sygnału y w danej chwili mają wpływ obecna i dwie poprzednie wartości sygnału e . Średnia ta jest średnią ważoną, której wagi są współczynnikami wielomianu $C(q^{-1})$. Sygnał u powoduje obecność w nazwie modelu frazy „z sygnałem wejściowym”.

Po zapoznaniu się z modelem ARMAX można łatwo zdefiniować model AR i ARMA, co uczyliśmy się.

DEFINICJA 28

Modelem ARMA nazywamy model ARMAX przy założeniu

$$B(q^{-1}) \equiv 0$$

Na bazie definicji modelu ARMA można zdefiniować model AR.

DEFINICJA 29

Modelem AR nazywamy model ARMA przy założeniu

$$C(q^{-1}) \equiv 1$$

2.2.7. Charakterystyka skokowa i charakterystyka impulsowa

DEFINICJA 30
Charakterystyką skokową układu dynamicznego nazywamy odpowiedź układu na wymuszenie w postaci skoku jednostkowego przy zerowych warunkach poczatkowych modelu.

W zależności od modelu układu (model zmiennych stanu lub model typu wejście-wyjście) wyznaczenie charakterystyki skokowej polega na rozwiązaniu równań zmiennych stanu dla wymuszenia $1(t)$ lub znalezieniu transformaty odwrotnej transmisji obiektu, pomnożonej przez transformatę operatorową funkcji $1(t)$. Oczywiście, rodzaj stosowanej transformaty operatorowej zależy od charakteru badanego układu (ciągły lub dyskretny). Charakterystyka skokowa

pokazuje, w jaki sposób zachowuje się układ przy ciągłym dostarczaniu mu stałych porcji energii.

DEFINICJA 31

Charakterystyką impulsową układu dynamicznego nazywamy odpowiedź układu na wymuszenie w postaci impulsu Diraca przy zerowych warunkach początkowych modelu.

W zależności od modelu układu (model zmiennych stanu lub model typu wejście-wyjście) wyznaczenie charakterystyki skokowej polega na rozwiązaniu równan zmiennych stanu dla wymuszenia $\delta(t)$ lub waniu zrozumienia transformatora odwrotnej transmitancji obiektu pomnożonej przez transformatora operatorową funkcji $\delta(t)$. Oczywiście, rodzaj stosowanej transformatora zależy od charakteru badanego układu (ciągły lub dyskretny). W przypadku układu dyskretnego należy pamiętać o tym, że impuls Diraca jest zastępowany impulsem jednostkowym. Charakterystyka skokowa pokazuje, w jaki sposób zachowuje się układ przy jednorazowym dostarczaniu mu jednostkowej porcji energii.

2.2.8. Jak to zrobić w MATLAB-ie

W tym punkcie podany będzie opis kilku najważniejszych funkcji potrzebnych do tworzenia i analizowania modeli czasowych w MATLAB-ie. Oprócz wymienionych funkcji istnieją również funkcje o charakterze pomocniczym, których tutaj ze względu na ich dużą liczbę omawiać nie będzie, ograniczając się tylko do funkcji najważniejszych. Spory nacisk zostanie położony na wykorzystanie przeglądarki układów dynamicznych LTIVIEW, która jest bardzo wartościowym narzędziem, a dzięki swojej funkcjonalności sprawdzi praktycznie do minimum wymagania związane ze znajomością środowiska MATLAB-a, dając przy tym dostęp do pełnej gamy opracowanych funkcji związanych z działaniem układów dynamicznych. Po przedstawieniu podstawowych informacji o charakterze encyklopedycznym podano przykłady, w których opisane funkcje są wykorzystywane w realizacji prostych zadań związanych z analizą modeli dynamicznych.

Modele czasowe w MATLAB-ie definiuje się za pomocą następujących funkcji:

FUNKCJA SS:

Utworzenie modelu zmiennych stanu.

Tworzenie modelu zmiennych stanu:

$SYS = SS(A, B, C, D, T_s)$ tworzy dyskretny model zmiennych stanu o czasie próbkowania T_s (jeżeli czas próbkowania nie jest znany, to $T_s = -1$).
 $SYS = SS(D)$ tworzy pusty obiekt typu SS.

$SYS = SS(A, B, C, D, T_s)$ tworzy dyskretny model zmiennych stanu o czasie próbkowania T_s (jeżeli czas próbkowania nie jest znany, to $T_s = -1$).
 $SYS = SS$ tworzy pusty obiekt typu SS.

$SYS = SS(D)$ tworzy statyczny model zmiennych stanu w postaci macierzy D .

We wszystkich składniach wyżej listą parametrów wejściowych może być rozszerzona o ciąg parametrów w postaci par 'NazwaWłasności1', 'WartośćWłasności1', ...

które ustawiają różne właściwości obiektu typu SS (patrz funkcja LTIPROPS). Jeżeli transmitancia SYS ma odziedziczyć wszystkie właściwości od transmitancji REFSYS, to wtedy należy użyć składni $SYS = SS(A,B,C,D,REFSYS)$.

Tablice modeli zmiennych stanu:

Można stworzyć tablicę modeli zmiennych stanu z wykorzystaniem tablicy o rozmiarach $N \times D$ zawierających macierze A, B, C, D . Pierwsze dwa wymiary A, B, C, D określają liczbę zmiennych stanu, wejścia i wyjścia, podczas gdy pozostałe – rozmiary tablicy. Na przykład, jeżeli A, B, C, D są czterowymiarowymi tablicami o ostatnich dwóch wymiarach równych 2 i 5, to wtedy polecenie

$SYS = SS(A, B, C, D)$

tworzy tablicę 2×5 modeli SS

$SYS(:,:,k,m) = SS(A(:,:,k,m),\dots,D(:,:,k,m)),$
 $k = 1:2, m = 1:5.$

Wszystkie modele SS w tablicy mają identyczną liczbę wejść, wyjść i stanów. $SYS = SS(ZEROS([N_1 N_2 N_3 \dots S_k]))$ przydziela tablicę modeli SS o N_i wyjściach, N_u wejściach i rozmiarach $[S_1 \dots S_k]$.

Konwersja modelu na model zmiennych stanu:

$SYS = SS(SYS)$ konwertuje dowolny model LTI na model zmiennych stanu, tj. wyznacza realizację modelu SYS.

$SYS = SS(SYS,'min')$ wyznacza realizację minimalną modelu SYS.

FUNKCJA LTIPROPS:

Funkcja pozwala na uzyskanie nazw właściwości modeli typu LTI. LTIPROPS(MODELTYPE) pozwala na uzyskanie szczegółów dotyczących modelu MODELTYPE. Łącuch znaków MODELTYPE jest nazwą typu modelu i może być jednym z następujących łańcuchów:

- 'tf', transmitancja operatorowa; obiekt typu TF;
- 'zpk', model typu zera-bieguna-wzmocnienie; obiekt typu ZPK;
- 'ss', model zmiennych stanu; obiekt typu SS;
- 'frd', model danych częstotliwościowych odpowiedzi; obiekt typu FRD.

64 2. Modele matematyczne liniowych układów dynamicznych ciągłych i dyskretnych

2.2. Modele czasowe

FUNKCJA STEP:

Funkcja rysuje przebieg w czasie odpowiedzi skokowej podanego modelu LTI. **STEP(SYS)** rysuje odpowiedź skokową modelu SYS typu TF, SS, ZPK. W przypadku układu o wielu wejściach wymuszenie skokowe jest stosowane dla każdego wejścia.

STEP(SYS, TFINAL) rysuje odpowiedź skokową w przedziale (0, TFINAL). Dla modeli dyskretnych bez określonego czasu próbkowania TFINAL oznacza liczbę próbek. **STEP(SYS, T)** rysuje odpowiedź skokową dla wektora chwil T zdefiniowanych przez użytkownika. Dla układów dyskretnych T powinno być w formie $T_i : Ts : Tf$, gdzie Ts jest czasem próbkowania. Dla modeli ciągłych T powinno być w formie $T_i : dt : Tf$, gdzie dt będzie czasem próbkowania dyskretnego przybliżenia układu ciągłego. Chwila wystąpienia impulsu ma miejsce zawsze dla $t = 0$, niezależnie od T_i .

IMPULSE(SYS1, SYS2, ..., T) rysuje na jednym wykresie odpowiedzi impulsowe modeli SYS1, SYS2, ... T jest opcjonalnym wektorem czasu. Można określić kolor i styl, którym będzie rysowana odpowiedź danego układu, np.

`impulse(sys1, 'r', sys2, 'y--', sys3, 'gx')`

Przy wywołaniu w postaci

`[Y, T] = IMPULSE(SYS)`

funkcja zwraca odpowiedź impulsową Y i wektor czasu T wykorzystany do symulacji. Jeżeli SYS jest modelem o N_y wejściach i N_u wyjściach, LT jest długością wektora T , to Y jest tablicą o rozmiarach $LT \times N_x \times N_u$, gdzie $Y(:, :, j)$ jest odpowiedzią pochodząca od j -tego wejścia.

Dla modeli zmiennych stanu wywołanie w postaci

`[Y, T] = IMPULSE(SYS)`

funkcja zwraca odpowiedź skokową Y i wektor czasu T wykorzystany do symulacji. Jeżeli SYS jest modelem o N_y wejściach i N_u wyjściach, LT jest długością wektora T , to Y jest tablicą o rozmiarach $LT \times N_x \times N_u$, gdzie $Y(:, :, j)$ jest odpowiedzią skokową pochodzącą od j -tego wejścia.

Dla modeli zmiennych stanu wywołanie w postaci

`[Y, T] = STEP(SYS)`

funkcja zwraca odpowiedź skokową Y i wektor czasu T wykorzystany do symulacji. Jeżeli SYS jest modelem o N_y wejściach i N_u wyjściach, LT jest długością wektora T , to Y jest tablicą o rozmiarach $LT \times N_x \times N_u$, gdzie $Y(:, :, j)$ jest odpowiedzią skokową pochodzącą od j -tego wejścia.

FUNKCJA LSIM:

Funkcja rysuje przebieg w czasie odpowiedzi impulsowej podanego modelu LTI. **LSIM(SYS, U, T)** rysuje odpowiedź modelu SYS na wymuszenie U określone w chwilach T . Wektor T składa się z równomierne rozłożonych próbek czasu, macierz U składa się z wartości wymuszenia w chwilach zawartych w wektorze T i ma liczbę kolumn równą liczbie wejść. Wiersze macierzy U odpowiadają wartościom wymuszenia w danej chwili na odpowiednich wejściach. Na przykład

`t = 0:0.01:5; u = sin(t); lsim(sys, u, t)`

symuluje odpowiedź modelu SYS o jednym wejściu na wymuszenie $u(t) = \sin t$ dla $t \in [0, 5]$. Dla układów dyskretnych U powinno być próbka-wne z okresem próbkowania modelu SYS (wtedy T można pominać lub może ono być macierzą pustą). Dla układów ciągłych czas próbkowania powinien być tak dobrany, aby odpowiednio dokładnie odwzorować sygnał wymuszający. U. LSIM generuje ostrzeżenie, jeżeli okres próbkowania jest nieodpowiedni i mogą się nie pojawić ukryte oscylacje w odpowiedzi.

FUNKCJA IMPULSE:

Funkcja rysuje przebieg w czasie odpowiedzi impulsowej podanego modelu LTI. **IMPULSE(SYS)** rysuje odpowiedź impulsową modelu SYS typu TF, SS, ZPK. W przypadku układu o wielu wejściach wymuszenie impulsowe jest stosowane dla każdego wejścia.

IMPULSE(SYS, TFINAL) rysuje odpowiedź impulsową w przedziale (0, TFINAL). Dla modeli dyskretnych bez określonego czasu próbkowania TFINAL oznacza liczbę próbek.

2. Modele matematyczne liniowych układów dynamicznych ciągłych i dyskretnych

2.2. Modele czasowe

LSIM(SYS, U, T, X0) działa podobnie jak opisano wyżej, dodatkowo pozwalaając na podanie warunków początkowych **X0** dla zmiennych stanu (dotyczy tylko modelu typu SS). Jeżeli **X0** zostanie pominięte, to wtedy zakłada się zerowe warunki początkowe.

LSIM(SYS1, SYS2, ..., U, T, X0) rysuje odpowiedzi kilku modeli na wymuszenie **U** na jednym rysunku dla zadanego warunków początkowych **X0** (opcjonalnie). Można również określić kolor i styl, którym będą rysowane poszczególne odpowiedzi, np.

```
lsim(sys1, 'r', sys2, 'y--', sys3, 'gx', u, t)
```

Y = LSIM(SYS, U, T) zwraca macierz zawierającą odpowiedzi modelu SYS na wymuszenie **U**. Nie jest rysowany wykres. Macierz ma liczbę kolumn równą liczbie wyjść modelu SYS. Liczba wierszy macierzy **Y** odpowiada liczbie próbek czasu T. W przypadku modeli zmiennych stanu polecam

```
[Y, T, X] = LSIM(SYS, U, T, X0)
```

zwraca również macierz zawierającą przebieg zmiennych stanu. Macierz ma liczbę kolumn równą liczbie wyjść modelu SYS. Liczba wierszy macierzy **Y** odpowiada liczbie próbek czasu T. W przypadku modeli ciągłych lub

```
lsim(sys1, 'r', sys2, 'y--', sys3, 'gx', u, t)
```

LSIM(SYS, U, T, X0, 'zoh') zwraca również macierz zawierającą przebiegi zmiennych stanu. Dla modeli ciągłych zwraca również macierz zawierającą przebiegi zmiennych stanu. Dla modeli ciągłych lub

```
LSIM(SYS, U, T, X0, 'f0h')
```

LSIM(SYS, U, T, X0, 'f0h') zwraca również macierz zawierającą przebiegi zmiennych stanu. Dla modeli ciągłych zwraca sposób ekstrapolowania przebiegu wyjściowego. 'zoh' oznacza ekstrapolator zerowego rzędu, 'f0h' oznacza ekstrapolator pierwszego rzędu. Domyślne LSIM.dobiera sposób ekstrapolacji na podstawie gładkości funkcji wymuszenia U.

FUNKCJA INITIAL:

Funkcja wyznacza odpowiedź modelu zmiennych stanu na niezerowe warunki początkowe. **INITIAL(SYS, X0)** rysuje odpowiedź modelu zmiennych stanu SYS na niezerowe warunki początkowe **X0**. Przedział czasu i liczba próbek jest określana automatycznie.

INITIAL(SYS, X0, TFINAL) symuluje odpowiedź modelu SYS dla $t \in [0, TFINAL]$. Dla modeli dyskretnych bez określonego okresu próbowania **INITIAL(SYS, X0, T)** określa liczbę próbek.

INITIAL(SYS, X0, T) określa wektor czasu T, który ma być wykorzystany do symulacji. Dla układów dyskretnych T powinno być w postaci 0:Ts:Tf, gdzie dt staże się okresem deli ciągły T powinno być w postaci 0:dt:Tf, gdzie dt staże się okresem próbkowania modelu dyskretnego wykorzystywanego do przybliżenia modelu SYS.

INITIAL(SYS1, SYS2, ..., X0, T) rysuje odpowiedzi kilku modeli na jednym rysunku dla zadanego warunków początkowych **X0**. Można również określić kolor i styl, którym będą rysowane poszczególne odpowiedzi, np.

```
initial(sys1, 'r', sys2, 'y--', sys3, 'gx', x0)
```

[Y, T, X] = INITIAL(SYS, X0) zwraca macierz zawierającą odpowiedzi modelu SYS na niezerowe warunki początkowe **X0**. Nie jest rysowany wykres. Macierz ma liczbę kolumn równą liczbie wyjść modelu SYS. Liczba wierszy macierzy **Y** odpowiada liczbie próbek czasu T. W przypadku modeli zmiennych stanu polecam

```
[Y, T, X] = INITIAL(SYS, U, T, X0)
```

wyznacza rozwiązanie.

```
[Y, T, X] = LSIM(SYS, U, T, X0)
```

FUNKCJA GENSIG:

Funkcja generuje przebiegi okresowe do symulacji za pomocą funkcji LSIM. **[U, T] = GENSIG(TYPE, TAU)** generuje sygnał okresowy klasy TYPE o okresie **TAU**. Parametr **TYPE** może przyjmować jedną z niżej wymienionych wartości:

- 'sin' odpowiada sygnałowi sinusoidalnemu,
- 'square' odpowiada sygnałowi kwadratowemu,
- 'pulse' odpowiada sygnałowi impulsowemu.

Funkcja zwraca wektor T chwil i wektor Y zawierający odpowiadające danym chwilom wartości sygnału. Generowane sygnały mają amplitudę jednostkową. **[U, T] = GENSIG(TYPE, TAU, TF, TS)** generuje sygnał o czasie trwania **TF** i okresie próbkiowania **TS**.

FUNKCJA LTVIEW:

Funkcja otwiera przeglądarkę lub graficzny interfejs użytkownika ułatwiający sporządzenie charakterystyk modeli dynamicznych.

LTVIEW otwiera pusty interfejs, który jest obsługiwany w sposób graficzny i pozwala na sporządzenie charakterystyk czasowych i częstotliwościowych różnych modeli dynamicznych oraz porównywanie ich. **LTVIEW(SYS1, SYS2, ..., SYSN)** otwiera przeglądarkę zawierającą odpowiedzi skokowe modeli SYS1, SYS2, ..., SYSN na jednym wykresie. Do wykresu każdej odpowiedzi skokowej można przypisać inny kolor, np.

```
ltvview(sys1, 'r-*', sys2, 'm-');
```

LTVIEW(PLOTTYPE, SYS1, SYS2, ..., SYSN) otwiera przeglądarkę zawierającą odpowiedzi typu PLOTTYPE modeli SYS1, SYS2, ..., SYSN na jednym wykresie. PLOTTYPE określa typ odpowiedzi, która będzie na rysowaną. Możliwości są następujące:

- 'step' odpowiedź skokowa,
- 'impulse', odpowiedź impulsowa,
- 'bode', diagramy Bodego, czyli charakterystyka amplitudowa i fazowa,
- 'bodemag', charakterystyka amplitudowa,
- 'nyquist', charakterystyka amplitudowo-fazowa nażywana również w kresem Nyquista,
- 'nichols' logarytmiczna charakterystyka amplitudowo-fazowa nazywana również wykresem Nicholsa,
- 'sigma' wykres wartości singularnych,
- 'pzmap' wykres zer i biegunów.

Na przykład polecenie

```
ltvview('step';'bode') , sys1, sys2)
```

otwiera przeglądarkę i tworzy w niej charakterystykę skokową modeli SYS1 oraz SYS2 na jednym wykresie, na drugim wykresie powstają diagramy Bodego dla obu modeli.

LTVIEW(PLOTTYPE, SYS, EXTRAS) pozwala określić różne argumenty charakterystyczne dla różnego rodzaju wykresów. Składnię w tej formie można również wykorzystać do umieszczenia w przeglądarce wyników działania takich funkcji jak LSIM, czy INITIAL. Weźmy jako przykład pole-

łecenie

```
ltvview('lsim',sys1,sys2,u,t,x0)
```

które w przeglądarce umieści wykres odpowiedzi układów SYS1, SYS2 na wynuszeniu **u** w przedziale czasu określonego przez **t** dla warunków początkowych **x0**.

Dodatkowo istnieją dwie opcje pozwalające zarządzać otwartymi już oknami przeglądarki LTVIEW.

LTVIEW('clear', VIEWERS, ... , SYSN, VIEWERS) dodaje odpowiedzi modeli SYS1, SYS2, ..., SYSN do aktywnego okienka przeglądarki. Jeżeli nowe modele nie są zgodne z modelami umieszczonymi już w przeglądarce, to wtedy jest usuwany stary wykres i na jego miejsce powstaje nowy wykres zawierający odpowiedzi nowych modeli.

Podane niżej przykłady ilustrują sposób wykorzystania omówionych funkcji analizy modeli czasowych układów dynamicznych.

Podane niżej przykłady ilustrują sposób wykorzystania omówionych funkcji analizy modeli czasowych układów dynamicznych.

PRZYKŁAD 11

Dla układu dynamicznego opisanego modelem zmiennych stanu

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0,3686 & 0,2027 & 0,1493 \\ -0,2364 & -0,6478 & 0,5150 \\ 0,0866 & -0,5292 & -0,5992 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -0,1364 \\ 0,1139 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & -0,0956 & -0,8323 \end{bmatrix} x$$

wyznaczmy charakterystykę skokową, impulsową.

Do narysowania charakterystyki skokowej wykorzystujemy funkcję STEP, do narysowania charakterystyki impulsowej wykorzystujemy funkcję IMPULSE. W wyniku wykonania następującej sekwencji polecen:

```
A=[-.3686 .2027 .1493; -.2364 -.6478 .515; .0866 -.5292 -.5992];
B=[.1364;.1139;0];
C=[0 .0956;-.8323];
sys=ss(A,B,C,0);
```

zostanie utworzony model typu SS o odpowiednich parametrach. Polecenie subplot(211); oznacza, że wykresy będą rysowane w 2 wierszach (pierwsza cyfra) i 1 kolumnie (druga cyfra). Ostatnia cyfra argumentu określa aktywny wykres, w którym będą rysowane charakterystyki. Polecenie

```
step(sys);
```

powoduje wykreszenie odpowiedzi skokowej modelu zawartego w zmiennej sys. Pole-

```
ncie
```

```
subplot(212);
```

ustala aktywny wykres drugi, w którym powstanie charakterystyka impulsowa. Pole-

```
cenie
```

```
impulse(sys);
```

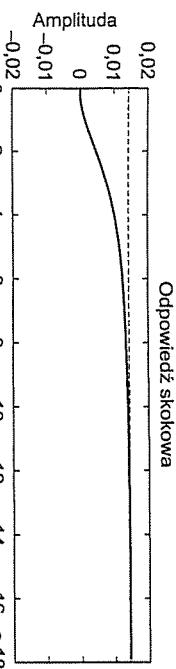
powoduje wykreszenie odpowiedzi impulsowej modelu zawartego w zmiennej sys.

W wyniku wykonania wyżej zaproponowanej sekwencji polecień MATLAB wygeneruje wykres pokazany na rys. 2.3.

UWAGA 7. Opisy osi są standardowo wykonywane w języku angielskim. Użykanie napisów w języku polskim wymaga przetworzenia napisów oryginalnych przez użytkownika.

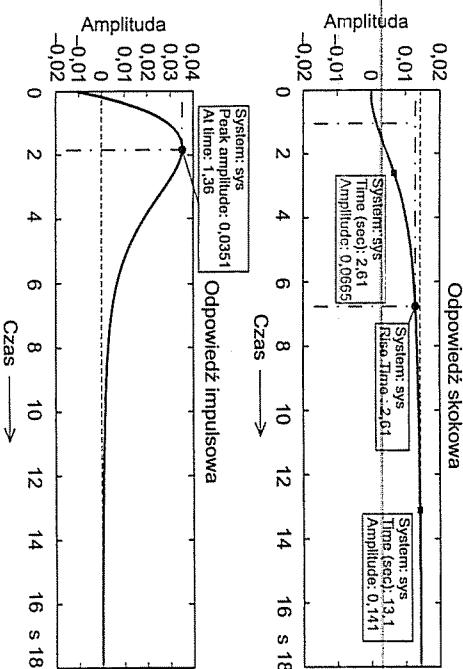
Ten sam wynik można uzyskać za pomocą przeglądarki LTVIEW. Wystarczy wpisać polecenie

```
ltview({'step', 'impulse'}, sys)
```



Rys. 2.3. Charakterystyka otrzymana po wykonaniu zaproponowanego ciągu poleceń

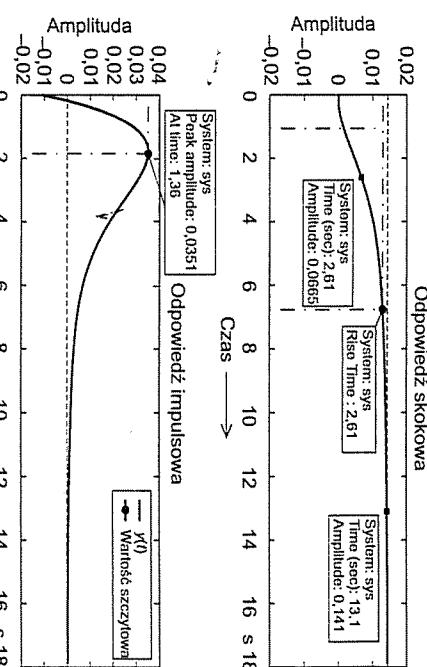
Na rysunku 2.4 zamieszczono charakterystyki modelu sys opatrzone dodatkowymi informacjami, które można szybko i wygodnie wydobyć za pomocą przeglądarki. Zamieniono również opisy w języku angielskim na opisy w języku polskim.



Rys. 2.4. Charakterystyki uzupełnione o informacje udostępniane przez przeglądarkę LTIVIEW. Na wykresie odpowiedzi skokowej zaznaczono dwa przypadkowo wybrane punkty oraz czas narastania. Na wykresie odpowiedzi impulsowej zaznaczono wartość szczytową przebiegu. Każdy punkt jest identyfikowany przez etykietę z dokładnymi danymi

UWAGA 8. Okno przeglądarki LTIVIEW również ma możliwość edycji opisów generowanych wykresów. Chcąc dokonać zmian, np. ustawić komentarze w języku polskim, należy dokonać edycji utasnosti danego wykresu. Okno przeglądarki daje kilka dodatkowych możliwości w zakresie przetwarzania wykresów różnych przebiegów. Można zaznaczać na wykresie pewne charakterystyczne punkty, określić podstawowe parametry charakteryzujące uzyskane przebiegi.

Na rysunku 2.5 przedstawiono te same charakterystyki uzupełnione o informacje możliwe do uzyskania za pomocą zwykłego okna MATLAB-a, do którego skopiowano wykresy z przeglądarki LTIVIEW za pomocą opcji Print to Figure z menu File.



Rys. 2.5. Charakterystyki uzupełnione o informacje udostępniane ze zwykłego okna, w którym rysowane są wykresy pakietu MATLAB. Należy zwrócić uwagę na legende, która pojawiła się w prawym górnym narożniku wykresu odpowiedzi impulsowej

W kolejnym przykładzie wyznaczmy przebieg odpowiedzi układu o wielu wejściach i wielu wyjściach na wymuszenie sinusoidalne oraz wymuszenie zmieniające się skokowo.

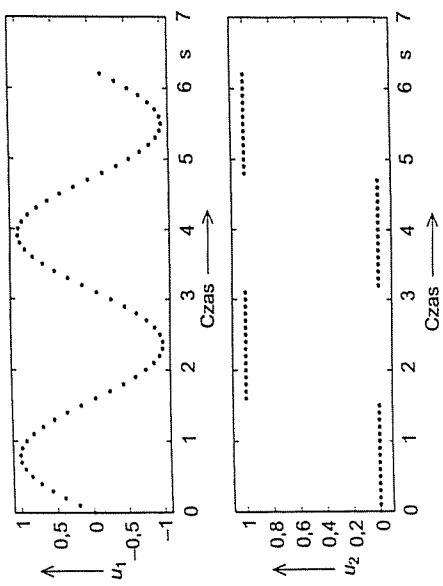
PRZYKŁAD 12

Układ dyskretny opisany następującym modelem:

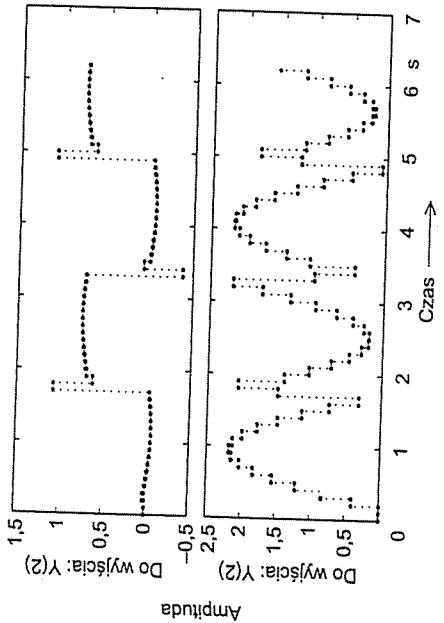
$$\mathbf{x}_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_n + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}_n$$

został poddany działaniu dyskretnego wymuszenia sinusoidalnego o okresie π na wejściu u_1 oraz wymuszenia zmieniającego się skokowo na wejściu u_2 . Okres próbkiowania wynosi 0,1 s. Wyznaczmy przebiegi odpowiedzi układu na jego wyjściach.



Rys. 2.6. Sygnały wymuszające dla obu wejść, tj. (rys. 2.6)



Rys. 2.7. Odpowiedzi uzyskane na wyjściach modelu

Rozpoczynamy od wygenerowania przebiegów wymuszających dla obu wejść, tj. (rys. 2.6)

```
[u1,t]=gensig('sin',pi,2*pi,0,1);
[u2,t]=gensig('square',pi,2*pi,0,1);
```

Oba sygnały wymuszające mają ten sam okres równy π , czas trwania równy 2π oraz ten sam okres próbkiowania.

Przystępujemy do zdefiniowania macierzy dyskretnego modelu zmiennych stanu

```
A=[-1 -3; .2 -.3];
B=[1 1; 0 -1];
C=[-1 -1; 2 -4];
```

a następnie do zdefiniowania modelu

```
sys=ss(A,B,C,0,0,1);
```

Model sys jest opisany macierzmi A, B, C , macierz D jest zerowa, a okres próbkiowania wynosi 0,1. Po zdefiniowaniu modelu przystępujemy do narysowania odpowiedzi modelu sys na jednoceśnie zadane wymuszenia: u_1 na wejście pierwsze i u_2 na wejście drugie. Polecam

```
ltiview('lsim',sys,[u1 u2],t);
```

wykorzystując do wykresienia przebiegów odpowiedzi przeglądarkę LTIVIEW. Równie dobrze można użyć polecenia

```
lsim(sys,[u1 u2],t);
```

i otrzymać ten sam wykres (rys. 2.7). Korzystając z zastosowania przeglądarki polega na możliwości oznaczenia na wykresie wybranych punktów i dokladnego wskazania wartości sygnałów im odpowiadających oraz możliwości określenia parametrów przebiegu wykorzystywanych w automatyce do oceny jakości regulacji.

2.3. Modele częstotliwościowe

2.3.1. Transmitancja operatorowa

Jak już wspomniano wcześniej, model typu wejście-wyjście tworzy się na podstawie danych pomiarowych i do wyznaczenia tego modelu należy, oprócz zarejestrowania wymuszenia podanego na wejście obiektu, zarejestrować sygnał będący odpowiedzią tego obiektu na to wymuszenie. Dysponowanie takimi danymi pomiarowymi jest podstawą do wyznaczenia modelu obiektu typu wejście-wyjście.

Pojęcie transmitancji operatorowej dynamicznego układu liniowego

DEFINICJA 32

Transmitancją operatorową układu liniowego nazywamy funkcję zmiernej zespolonej określona jako iloraz transformaty operatorowej sygnału wejściowego i transformaty operatorowej sygnału wejściowego przy zeroowych warunkach początkowych obiektu

$$T = \frac{\mathcal{Z}[y]}{\mathcal{Z}[u]} \quad (2.11)$$

T oznacza transmitancję operatorową obiektu liniowego nazywaną również funkcją przenoszenia, $\mathcal{Z}[y]$ jest transformata operatorowa sygnału wejściowego, $\mathcal{Z}[u]$ jest transformata operatorowa sygnału wejściowego obiektu.

W podanej definicji transmitancji operatorowej nie zostało jasno powiedziane, o jaką transformację operatorową chodzi. Wybór konkretnego rodzaju transformacji operatorowej zależy od rodzaju obiektu, z którym projektant ma do

czynienia. Jeżeli obiekt jest układem ciągłym, to wtedy sygnały (wejściowy i wyjściowy) są poddawane działaniu transformaty operatorowej Laplace'a. Wówczas w równaniu (2.11) ogólny symbol transformaty operatorowej \mathfrak{T} jest zastępowany symbolem \mathfrak{L} , który oznacza transformatę Laplace'a. Jeżeli układ jest obiektem dyskretnym, to wtedy w definicji transmitancji operatorowej (2.11) obiektu liniowego pojawia się zamiast \mathfrak{T} symbol \mathfrak{Z} określający transformatę operatorową \mathfrak{Z} . Analogicznie, chcąc uzyskać charakterystykę widmową układu, należy wykorzystać transformatę operatorową Fouriera.

PROCEDURA 3

Wyznaczanie transmitancji operatorowej obiektu liniowego.

Krok 1. Określamy rodzaj transformaty operatorowej do opisu układu.

Krok 2. Obliczamy transformatę sygnału wymuszającego i sygnału odpowiedzi obiektu.

Krok 3. Wykorzystujemy zależności (2.11) do otrzymania funkcji przenoszenia (transmitancji) obiektu.

Na temat zerowych warunków początkowych obiektu powiemy więcej w podrozdziale 2.5, przy okazji omawiania zależności między modelem zmiennych stanu a modelem typu wejście-wyjście.

PRZYKŁAD 13

Układ liniowy ciągły na wymuszenie $u(t) = 1(t)$ odpowiedział sygnałem $y(t) = e^{-t}1(t)$. Obliczymy transmitancję operatorową tego obiektu. Wykorzystując procedurę 3, wykonujemy następujące kroki:

Krok 1. Określany rodzaj wykorzystywanej transformaty operatorowej. W tym przypadku będzie to transformata \mathfrak{Z} , ponieważ obiekt jest układem ciągłym.

Krok 2. Obliczamy transformaty sygnałów $y(t)$ i $u(t)$. Otrzymujemy odpowiednio

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[u(t)] &= U(s) = \frac{1}{s} \\ \mathfrak{L}[y(t)] &= Y(s) = \frac{1}{s+1}\end{aligned}$$

Krok 3. Wyznaczamy transmitancję operatorową $T(s)$ obiektu

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s}{s+1}$$

□

PRZYKŁAD 14

Układ liniowy dyskretny na wymuszenie $u_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \geq 0 \\ 0 & \text{dla } n < 0 \end{cases}$ odpowiedział sygnałem $y_n = e^{-n}$ dla $n \geq 0$. Obliczymy transmitancję operatorową tego obiektu. Wykorzystując procedurę 3, wykonujemy następujące kroki:

Krok 1. Wyznaczamy transformatę operatorową sygnału wejściowego $u = 1(t)$.

$$\mathfrak{Z}[1(t)] = U(s) = \frac{1}{s}$$

$$\begin{aligned}T(z) &= \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z}{z-1} \\ \mathfrak{Z}[y_n] &= Y(z) = \frac{z}{z-e^{-1}}\end{aligned}$$

Krok 3. Wyznaczamy transmitancję operatorową $T(z)$ obiektu

$$T(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z - e^{-1}}{z - 1}$$

□

Interpretacja pojęcia transmitancji operatorowej

Najprościej transmitancie operatorową można scharakteryzować jako funkcję przenoszenia, czyli funkcję określającą zależność między sygnałem wejściowym a wyjściowym obiektu. Transmitancję operatorową wyznacza się dla dowolnie wybranego sygnału wejściowego i odpowiedzi obiektu na ten sygnał. Raz wyznaczona transmitancja może posłużyć do wyznaczenia odpowiedzi układu na dowolne inne wymuszenie. Można to wykonać w sposób następujący dla danej transmitancji operatorowej T :

PROCEDURA 4

Wyznaczenie odpowiedzi y układu liniowego o transmitancji operatorowej T na wymuszenie u .

Krok 1. Wyznaczamy odpowiednią transformatę operatorową (Laplace'a, \mathfrak{Z} , Fouriera) sygnału wejściowego u .

Krok 2. Mnożymy transmitancję T przez transformatę sygnału u , czyli przez $\mathfrak{T}[u]$, tj.

$$Y = T\mathfrak{T}[u]$$

Krok 3. Wyznaczamy transformatę odwrotną sygnału Y , który jest odpowiedzią obiektu (układu) na wymuszenie u , tj.

$$y = \mathfrak{T}^{-1}[Y]$$

□

PRZYKŁAD 15

Dany jest układ ciągły o transmitancji $T(s) = \frac{1}{s+1}$. Wyznaczmy odpowiedź tego układu na wymuszenie w postaci skoku jednostkowego. Wykorzystując procedurę 4, wykonujemy następujące kroki:

Krok 1. Wyznaczamy transformatę operatorową sygnału wejściowego $u = 1(t)$.

$$\mathfrak{Z}[1(t)] = U(s) = \frac{1}{s}$$

Krok 2. Mnożymy transmitancję operatorową obiektu $T(s)$ przez transformatę sygnału wejściowego $U(s)$

$$Y(s) = T(s)U(s) = \frac{1}{s+1} \frac{1}{s} = \frac{1}{s(s+1)}$$

Krok 3. Wyznaczamy transformatę odwrotną sygnału wyjściowego $Y(s)$

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right] = 1 - e^{-t}$$

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń można stwierdzić, że liniowy układ dynamiczny o transmitancji operatorowej $T(s) = \frac{1}{s+1}$ na sygnał wejściowy $u(t) = 1(t)$ odpowie sygnałem wyjściowym $y(t) = 1 - e^{-t}$. \square

Przytoczony przykład pokazuje, w jaki sposób wykorzystuje się transmitancję operatorową do wyznaczania odpowiedzi układu na dowolne wymuszenie i pokazuje, że transmitancja operatorowa reprezentuje powiązanie sygnału wejściowego i wyjściowego, które wprowadza obiekt. Mimo że transmitancja operatorowa jest wyznaczana dla jednej pary wymuszenie-odpowiedź, jest ona zależnością uniwersalną, prawdziwą dla dowolnego sygnału wejściowego. Innymi słowy, transmitancja operatorowa określa związek między dynamiką sygnału wejściowego a dynamiką sygnału wyjściowego obiektu. Dzieje się tak dzięki wykorzystaniu własności transformat operatorowych.

2.3.2. Transmitancja widmowa

Charakterystyki częstotliwościowe liniowych układów dynamicznych ciągłych

Zagadnienie wyznaczania charakterystyk częstotliwościowych obiektu jest zazwyczajem związanym z liniowymi układami ciągłymi. Teoretycznie, w celu przeprowadzenia analizy częstotliwościowej obiektu, czyli przeanalizowania sposobu przenoszenia sygnału typu sinusoidalnego o częstotliwości ω przez obiekt, należy wyznaczyć transmitancję operatorową układu z wykorzystaniem przekształcenia Fouriera. W praktyce najczęściej jest tak, że projektant, który chce wykonać analizę częstotliwościową, już zna transmitancję operatorową Laplace'a. Wtedy do wyznaczania transformaty operatorowej Fouriera badanego obiektu można wykorzystać prostą zależność występującą między tymi transformatami, mianowicie

$$s = j\omega$$

Wykonanie tego przedstawienia od razu daje transmitancję operatorową Fouriera obiektu pod warunkiem, że jest znana transmitancja operatorowa Laplace'a tego obiektu. Na podstawie transmitancji operatorowej Fouriera obiektu można

wyznaczyć jego charakterystyki, tj. charakterystykę amplitudową, fazową, amplitudowo-fazową.

DEFINICJA 33

Charakterystyką amplitudową $F_a(\omega)$ ciągłego układu liniowego, opisanego transmitancją operatorową $T(j\omega)$, nazywamy funkcję rzeczywistą zmiennej rzeczywistej ω , której wartości są określone następującym wzorem:

$$F_a(\omega) = |T(j\omega)|$$

Wyznaczenie charakterystyki amplitudowej polega na narysowaniu wykresu modulu transmitancji operatorowej $T(j\omega)$ w funkcji zmiennej ω . Charakterystyka amplitudowa określa zmoczenie amplitudy sinusoidy o częstotliwości ω podanej na wejście układu, powodowane przez obiekt.

DEFINICJA 34

Charakterystyką fazową $F_f(\omega)$ ciągłego układu liniowego opisanego transmitancją operatorową $T(j\omega)$ nazywamy funkcję rzeczywistą zmiennej rzeczywistej ω , której wartości są określone następującym wzorem:

$$F_f(\omega) = \arg(T(j\omega))$$

Wyznaczenie charakterystyki fazowej polega na narysowaniu wykresu argumentu transmitancji operatorowej $T(j\omega)$ w funkcji zmiennej ω . Charakterystyka fazowa określa przesunięcie w fazie sinusoidy o częstotliwości ω podanej na wejście układu, powodowane przez obiekt, w odniesieniu do fazy tej sinusoidy.

DEFINICJA 35

Charakterystyką amplitudowo-fazową $F_{af}(\omega)$ ciągłego układu liniowego opisanego transmitancją operatorową $T(j\omega)$ nazywamy funkcję zespoloną zmiennej rzeczywistej ω , której wartości są określone następującym wzorem:

$$F_{af}(\omega) = T(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

Charakterystyka amplitudowo-fazowa jest połączeniem charakterystyk amplitudowej i fazowej. Rysując charakterystykę amplitudowo-fazową, na osiach wykresu odkłada się część rzeczywistą $P(\omega)$ oraz część urojona $Q(\omega)$ transmitancji operatorowej $T(j\omega)$ dla $\omega \in [0, \infty)$.

PRZYKŁAD 16

Wyznaczmy charakterystykę amplitudową, fazową oraz amplitudowo-fazową obiektu o transmitancji operatorowej (rys. 2.8, 2.9)

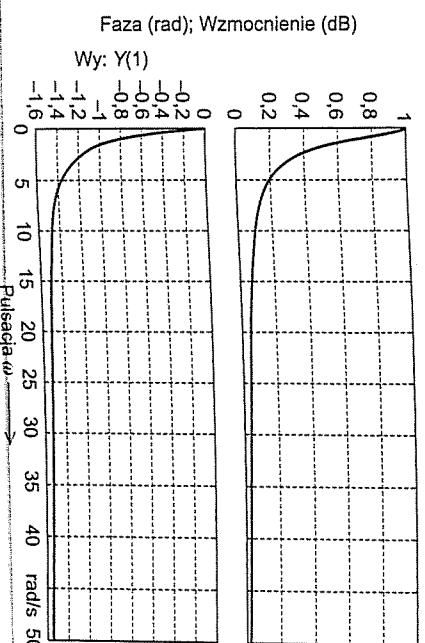
$$T(s) = \frac{1}{s+1}$$

W pierwszej kolejności należy wyznaczyć transmitancję operatorową Fouriera obiektu

$$T(j\omega) = T(s)|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega+1} = \frac{1-j\omega}{\omega^2+1}$$

Oprócz wyżej zaprezentowanych charakterystyk częstotliwościowych bardzo istotna rolę odgrywają logarytmiczne charakterystyki częstotliwościowe.

We: $U(1)$



Rys. 2.8. Przykładowa charakterystyka amplitudowa

DEFINICJA 37
Wzmocnieniem logarytmicznym układu nazywamy moduł transmitancji operatorowej $G(j\omega)$ wybranej w decybelach, dla ustalonej pulsacji ω .

DEFINICJA 38

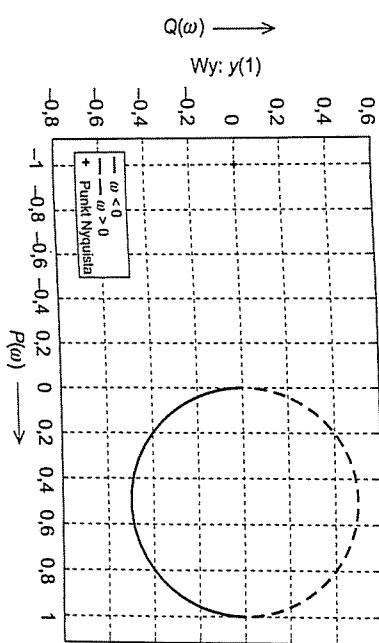
Oktawą nazywamy jednostkę opisującą przedział zmiennej rzeczywistej $\langle x_1, x_2 \rangle$, która definiuje się w sposób następujący:
 $\langle \bar{x}_1, \bar{x}_2 \rangle = 1 \text{ okt} \iff \frac{x_2}{x_1} = 2$

DEFINICJA 39

Dekadą nazywamy jednostkę opisującą przedział zmiennej rzeczywistej $\langle x_1, x_2 \rangle$, który definiuje się w sposób następujący:

$$\langle \bar{x}_1, \bar{x}_2 \rangle = 1 \text{ dek} \iff \frac{x_2}{x_1} = 10$$

Przedział częstotliwości $1 \div 2 \text{ Hz}$ ma szerokość 1 oktawy, podobnie jak przedział $17 \div 34 \text{ Hz}$. Przedziały częstotliwości $1 \div 10 \text{ Hz}$, $100 \text{ Hz} \div 1 \text{ kHz}$ mają szerokość jednej dekady. W poniższej tabeli zamieszczono kilka wartości i odpowiadające im wartości w decybelach.



Rys. 2.9. Przykładowa charakterystyka amplitudowo-fazowa

Liczba	Decyble
0,01	-40
0,1	-20
0,5	≈ -6
1,0	0
2,0	≈ 6
10,0	20
100,0	40
200,0	≈ 46

□

Przed zapoznaniem się z charakterystykami logarytmicznymi należy zdefiniować kilka pojęć, które są bardzo istotne w ich analizie.

DEFINICJA 36

Decybellem nazywamy jednostkę logarytmiczną, którą definiuje się w sposób następujący:

$$1 \text{ dB} = \log |f(x)|$$

gdzie $f(x)$ jest funkcja zmiennej x , rozumianą jako iloraz dwóch funkcji zmiennej x .

Analizując tabelę, można zauważyc, że podwojenie wartości liczby powoduje jej wzrost o ≈ 6 dB w skali logarytmicznej. Jeżeli wartość liczby wzrasta 10-krotnie, to wtedy w decybelach następuje przyrost o 20 jednostek.

2.3.3. Jak to zrobić w MATLAB-ie

Modele czasowe w MATLAB-ie definiuje się za pomocą następujących funkcji:

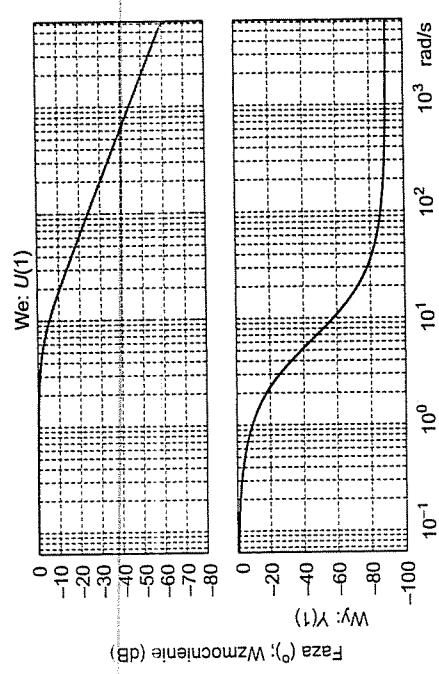
DEFINICJA 40
Logarytmiczną charakterystyką fazową nazywamy wykres argumentu transmitancji widmowej w funkcji logarytmu dziesiętnego pulsacji.

DEFINICJA 41
Logarytmiczną charakterystyką fazową nazywamy wykres argumentu transmitancji widmowej w funkcji logarytmu dziesiętnego pulsacji.

DEFINICJA 42
Logarytmiczną charakterystyką amplitudową i logarytmiczną charakterystyką fazową nazywanymi również charakterystykami Bodego.

PRZYKŁAD 17
 Wyznaczmy charakterystyki Bodego (rys. 2.10) dla transmitancji podanej w przykładzie 16.

Diagramy Bodego



Rys. 2.10. Przykładowa charakterystyka amplitudowo-fazowa w skali logarytmicznej
□

Na podstawie powyższego przykładu można zauważyć, że na wykresach Bodego (logarytmicznych) istnieją dużo większe możliwości przedstawienia charakterystyk, jeśli chodzi o zakres pulsacji (częstotliwości).

FUNKCJA TF:

Utworzenie transmitancji lub przekształcenie do transmitancji:
 Tworzenie transmitancji:

$\text{SYS} = \text{TF}(\text{NUM}, \text{DEN})$ tworzy ciągłą transmitancję SYS z wielomianem NUM w liczniku i wielomianem DEN w mianowniku. Obiekt SYS jest typu TF.

$\text{SYS} = \text{TF}(\text{NUM}, \text{DEN}, \text{T}_s)$ tworzy dyskretną transmitancję SYS z wielomianem NUM w liczniku i wielomianem DEN w mianowniku o czasie próbowania T_s (jeżeli czas próbkowania nie jest znany, to wtedy $T_s = -1$).

$\text{S} = \text{TF}('s')$ tworzy transmitancję $H(s) = s$ (zmienna Laplace'a).

$\text{Z} = \text{TF}('z', \text{T}_s)$ tworzy transmitancję $H(z) = z$ o czasie próbkowania T_s . Po zdefiniowaniu transmitancji s lub z można tworzyć inne transmitancje w sposób bezpośredni z wiersza poleceń, np.

```
>> s = tf('s'); H = (s+1)/(s^2+3*s+1)
```

Transfer function:

$$\frac{s + 1}{s^2 + 3s + 1}$$

>>

$\text{SYS} = \text{TF}$ tworzy pusty obiekt typu TF.

$\text{SYS} = \text{TF}(\text{M})$ tworzy statyczną transmitancję o wzmacnieniu w postaci macierzy M.

We wszystkich składniach wyżej listy parametrów wejściowych może być rozszerzona o ciąg parametrów w postaci par 'NazwaWłaściwości1', 'WartośćWłaściwości1', ...

które ustawiają różne właściwości obiektu typu TF (patrz funkcja LTIProps).

Jeżeli transmitancja SYS ma odziedziczyć wszystkie właściwości od transmitancji REFSYS, to wtedy należy użyć skadni $\text{SYS} = \text{TF}(\text{NUM}, \text{DEN}, \text{REFSYS})$.

Format danych:

Dla modeli SISO wielomiany NUM i DEN są wektorami wierszowymi, zawiązającymi współczynniki odpowiednio licznika i mianownika w porządku:

- przy malejących potęgach zmiennnej s lub z (domyślne),
- przy malejących potęgach zmiennej $q = z^{-1}$, jeżeli własność Variable jest ustawiona na z^{-1} lub q (konwencja DSP).

Dla modeli MIMO o N_y wyjściach i N_u wejściach, wielomiany NUM i DEN są tablicami komórek o rozmiarach $N_y \times N_u$ zawierającymi wektory wierszowe, gdzie $\text{NUM}\{i, j\}$ i $\text{DEN}\{i, j\}$ określają transmitancję od wejścia j do wyjścia i . Na przykład

$$\mathbf{H} = \text{TF}(\{-5; [1 -5 6]\}, \{[1 -1]; [1 1 0]\})$$

określa macierz transmitancji układu ciągłego o dwóch wyjściach i jednym wejściu

$$\begin{bmatrix} -5 / (s-1) \\ (s^2-5s+6)/(s^2+s) \end{bmatrix}$$

Domyślnie transmitancje są wyświetlane jako funkcje zmiennych s lub z . Opcjonalnie można zmieniać ciągła zmienić na p , a zmienią dyskretną na z^{-1} lub q przez zmodyfikowanie właściwości Variable.

Tablice transmitancji: Tablice transmitancji z wykorzystaniem tablicy komórek $\text{Można stworzyć tablice transmitancji } z \text{ wykorzystaniem tablicy komórek o rozmiarach } N \times D \text{ zawierających wielomiany licznika i mianownika każdej transmitancji z tablicy.}$

Na przykład, jeżeli NUM i DEN są tablicami komórek o rozmiarach $[N_y \ N_u \ 3 \ 4]$, to wtedy polecenie

$$\text{SYS} = \text{TF}(\text{NUM}, \text{DEN})$$

tworzy tablicę transmitancji o rozmiarach 3×4

$$\text{SYS}(:, :, k, m) = \text{TF}(\text{NUM}(:, :, k, m), \text{DEN}(:, :, k, m)),$$

$$k=1:3, \quad m=1:4.$$

Każda z transmitancji ma N_y wyjścia i N_u wejścia. W celu przydzielenia tablicy transmitancji o M_y wyjściach i N_u wejściach należy skorzystać z następującego polecenia:

$$\text{SYS} = \text{TF}(\text{ZEROS}([N_y \ N_u \ k1 \ k2 \dots]))$$

Konwersja modelu na transmitancję:

$\text{SYS} = \text{TF}(\text{SYS})$ konwertuje dowolny model LTI na model SYS w postaci transmitancji. Obiekt SYS jest typu TF.

$\text{SYS} = \text{TF}(\text{SYS}, \text{'inv'})$ konwertuje model zmiennych stanu SYS za pomocą szybkiego algorytmu na transmitancję.

FUNKCJA ZPK:

Tworzy model w postaci zera-bieguny-wzmocnienie.

Tworzenie modelu zera-bieguny-wzmocnienie:

$\text{SYS} = \text{ZPK}(\mathbf{Z}, \mathbf{P}, \mathbf{K})$ tworzy ciągły model SYS zera-bieguny-wzmocnienie o zerach Z , biegunach P i wzmacnienu K . Obiekt SYS jest typu ZPK.

2.3. Modele częstotliwościowe

$\text{SYS} = \text{ZPK}(\mathbf{Z}, \mathbf{P}, \mathbf{K}, \mathbf{T}_s)$ tworzy dyskretny model SYS zera-bieguny-wzmocnienie o zerach Z , biegunach P i wzmacnienu K oraz czasie próbkowania T_s (jeżeli czas próbkiowania nie jest znany, to wtedy $T_s = -1$). Pozostałe uwagi na temat modelu ZPK są takie same jak dla modelu zmienionych stanu.

FUNKCJA FRD:

Utworzenie modelu częstotliwościowego na podstawie danych pomiarowych. Tworzenie modelu częstotliwościowego:

$\text{SYS} = \text{FRD}(\text{RESPONSE}, \text{FREQS})$ tworzy ciągły model częstotliwościowy na podstawie odpowiedzi podanych w RESPONSE dla częstotliwości podanych w FREQS.

Wynik jest obiektem typu FRD.

$\text{SYS} = \text{FRD}(\text{RESPONSE}, \text{FREQS}, \text{TS})$ tworzy dyskretny model częstotliwościowy o okresie próbkiowania T_s ($T_s = -1$ oznacza, że okres próbkiowania nie jest określony).

$\text{SYS} = \text{FRD}$ tworzy pusty model typu FRD.

We wszystkich składniach wyżej lista parametrów wejściowych może być rozszerzona o ciąg parametrów w postaci par

'NazwaWłasności1', 'WartośćWłasności1', ...

które ustawiają różne właściwości obiektu typu FRD (patrz funkcja LTIProps).

Jeżeli model SYS ma odziedziczyć wszystkie właściwości od modelu REFSYS, to należy użyć składni $\text{SYS} = \text{FRD}(\text{RESPONSE}, \text{FREQS}, \text{REFSYS})$.

Format danych:

Dla modelu SISO wektor FREQS zawiera częstotliwości, wektor RESPONSE zawiera odpowiedź, gdzie RESPONSE(i) jest odpowiedzią na wymuszenie o częstotliwości FREQ(i).

Dla modelu MIMO o N_u wejściach, N_y wyjściach i N_f częstotliwościami RESPONSE jest tablica o wymiarach $N_y \times N_u \times N_f$, gdzie RESPONSE(i, j, k) jest odpowiedzią i -tego wyjścia na sygnał o częstotliwości FREQS(k) podany na j -te wejście.

Domyślnie jednostkami, w których jest wyrażana częstotliwość, są 'rad/s'. Można zmienić jednostki częstotliwości na 'Hz' przez ustalenie wartości właściwości 'Units'. Po zmianie jednostek nie następuje przeskalowanie danych modelu.

Konwersja modelu na model częstotliwościowy:

$\text{SYS} = \text{FRD}(\text{SYS}, \text{FREQS}, \text{'Units'}, \text{UNITS})$ konwertuje dowolny model LTI na model częstotliwościowy przez wyznaczenie odpowiedzi modelu SYS na każdą częstotliwość zawartą w FREQS. Parametr UNITS określa jednostki, w których jest wyrażona częstotliwość. Do wyboru są dwie opcje:

'rad/s' lub 'Hz'. Jeżeli jednostki nie będą wstępnie określone, to wtedy domyślnie jest przyjmowana opcja 'rad/s'.

FUNKCJA BODE:

Funkcja tworzy charakterystyki Bodego danego modelu.

BODE(SYS) tworzy charakterystyki Bodego modelu SYS, który może być dowolnym obiektem reprezentującym model liniowy (SS, ZPK, TF, FRD). Zakres częstotliwości jest dobrany automatycznie.

BODE(SYS, {WMIN, WMAX}) tworzy charakterystyki Bodego modelu w przedziale częstotliwości od WMIN do WMAX. **BODE(SYS, W)** tworzy charakterystyki Bodego dla częstotliwości podanych w wektorze W. Zwykle do utworzenia wektora W korzysta się z funkcji LOGSPACE. **BODE(SYS1, SYS2, ..., W)** tworzy charakterystyki Bodego kilku modeli na jednym wykresie dla częstotliwości podanych w wektorze W. Za pomocą następującej składni:

```
bode('sys1','r','sys2','y--','sys3','gx')
```

można do każdego wykresu przypisać wybrany kolor i styl rysowania.

[MAG, PHASE] = BODE(SYS, W) lub **[MAG, PHASE, W] = BODE(SYS)** zwraca amplitudę i przesunięcie fazowe odpowiedzi wraz z wektorem częstotliwości, dla których wzmacnienie i przesunięcie fazowe zostały obliczone. Przy wywołaniu funkcji w tej postaci wykres nie jest rysowany. Jeżeli model SYS ma N_y wyjść i N_u wejścia, to MAG i PHASE są tablicami o rozmiarach $N_y \times N_u \times \text{LENGTH}(W)$, gdzie MAG(:, :, k) i PHASE(:, :, k) określają odpowiedź dla częstotliwości W(k). W celu uzyskania wzmacnienia należy wykonać polecenie **MAGDB = 20 * log10(MAG)**.

Dla modeli dyskretnych transformacja $Z = \exp(j * W * Ts)$ odwzorowuje okrąg jednostkowy na rzeczywistą os częstotliwości. Wykres jest rysowany tylko dla częstotliwości mniejszych niż częstotliwość Nyquista $\frac{\pi}{Ts}$. Jeżeli model nie ma danych o okresie próbkowania, to wtedy domyślnie zakłada się $Ts = 1$.

FUNKCJA NYQUIST:

Funkcja tworzy charakterystykę Nyquista danego modelu.

NYQUIST(SYS) tworzy charakterystykę Nyquista modelu SYS, który może być dowolnym obiektem reprezentującym model liniowy (SS, ZPK, TF, FRD). Zakres częstotliwości jest dobrany automatycznie. **NYQUIST(SYS, {WMIN, WMAX})** tworzy charakterystykę Nyquista modelu w przedziale częstotliwości od WMIN do WMAX. **NYQUIST(SYS, W)** tworzy charakterystykę Nyquista dla częstotliwości podanych w wektorze W. Zwykle do utworzenia wektora W korzysta się z funkcji LOGSPACE.

NYQUIST(SYS1, SYS2, ..., W) tworzy charakterystykę Nyquista kilku modeli na jednym wykresie dla częstotliwości podanych w wektorze W. Za pomocą następującej składni:

```
nyquist('sys1','r','sys2','y--','sys3','gx')
```

można do każdego wykresu przypisać wybrany kolor i styl rysowania. Wektor W jest opcjonalny.

[RE, IM] = NYQUIST(SYS, W) lub **[RE, IM, W] = NYQUIST(SYS)** zwraca część rzeczywistą i urojoną odpowiedzi wraz z wektorem częstotliwości, dla których zwarcane wielkości zostały obliczone. Przy wywołaniu funkcji w tej postaci wykres nie jest rysowany. Jeżeli model SYS ma N_y wyjść i N_u wejścia, to RE i IM są tablicami o rozmiarach $N_y \times N_u \times \text{LENGTH}(W)$, gdzie RE(:, :, k) i IM(:, :, k) określają odpowiedź dla częstotliwości W(k).

FUNKCJA NICHOLS:

Funkcja tworzy charakterystykę Nicholsa danego modelu.

NICHOLS(SYS) tworzy charakterystykę Nicholsa modelu SYS, który może być dowolnym obiektem reprezentującym model liniowy (SS, ZPK, TF, FRD). Zakres częstotliwości jest dobrany automatycznie.

NICHOLS(SYS, {WMIN, WMAX}) tworzy charakterystykę Nicholsa modelu w przedziale częstotliwości od WMIN do WMAX. **NICHOLS(SYS, W)** tworzy charakterystykę Nicholsa dla częstotliwości podanych w wektorze W. Zwykle do utworzenia wektora W korzysta się z funkcji LOGSPACE.

NICHOLS(SYS1, SYS2, ..., W) tworzy charakterystykę Nicholsa kilku modeli na jednym wykresie dla częstotliwości podanych w wektorze W. Za pomocą następującej składni:

```
nichols('sys1','r','sys2','y--','sys3','gx')
```

można do każdego wykresu przypisać wybrany kolor i styl rysowania.

[MAG, PHASE] = NICHOLS(SYS, W) lub

[MAG, PHASE, W] = NICHOLS(SYS) zwraca amplitudę i przesunięcie fazowe odpowiedzi wraz z wektorem częstotliwości, dla których wzmacnienie i przesunięcie fazowe zostały obliczone. Przy wywołaniu funkcji w tej postaci wykres nie jest rysowany. Jeżeli model SYS ma N_y wyjść i N_u wejścia, to MAG i PHASE są tablicami o rozmiarach $N_y \times N_u \times \text{LENGTH}(W)$, gdzie MAG(:, :, k) i PHASE(:, :, k) określają odpowiedź dla częstotliwości W(k). Dla układów dyskretnych w mocy pozostają uwag poczynione przy opisie funkcji BODE.

PRZYKŁAD 18

Dla układu dynamicznego opisanego transmitancją operatorową

$$T(s) = \frac{2s^2 - 1}{s^4 + 3s^3 + s^2 + s + 4}$$

należy wyznaczyć charakterystykę skokową, impulsową oraz minimalną realizację w postaci modelu zmiennych stanu.

Do narysowania charakterystyki impulsowej wykorzystujemy funkcję IMPULSE. W wyniku wykonania polecenia

```
sys=tf([2 0 -1],[1 2 3 4 1]);
```

zostanie utworzony model typu TF o parametrach transmitancji $T(s)$. Polecenie

```
subplot(211);
```

oznacza, że wykresy będą rysowane w 2 wierszach (pierwsza cyfra) i 1 kolumnie (druga cyfra). Ostatnia cyfra argumentu określa aktywny wykres, w którym będą rysowane charakterystyki. Polecenie

```
step(sys);
```

powoduje wykreslenie odpowiedzi skokowej modelu zawartego w zmiennej sys. Polecenie

```
subplot(212);
```

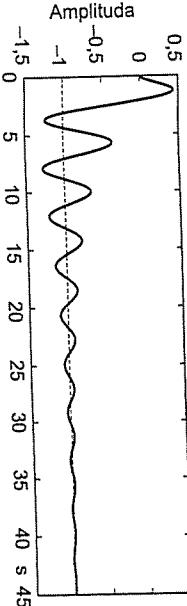
ustala aktywny wykres drugi, w którym powstanie charakterystyka impulsowa. Polecenie

```
impulse(sys);
```

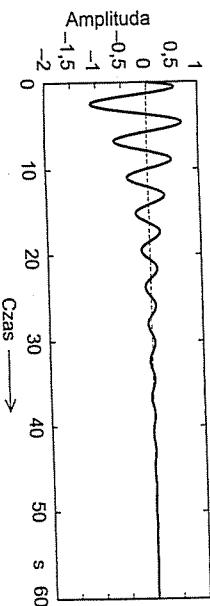
powoduje wykreslenie odpowiedzi impulsowej modelu zawartego w zmiennej sys.

W wyniku wykonania podanej sekwencji polecień MATLAB wygeneruje charakterystykę pokazaną na rys. 2.11:

Odpowiedź skokowa



Rys. 2.11. Charakterystyka otzymana po wykonaniu zaproponowanego ciągu polecení



UWAGA 9. Opisy osi są standardowo wykonywane w języku angielskim. Uzyskanie napisów w języku polskim wymaga przetworzenia napisów oryginalnych przez użytkownika.

Ten sam rezultat można uzyskać za pomocą przeglądarki LTIVIEW po wykonaniu następującego polecenia:

```
ltiview('step', 'impulse'), sys);
```

PRZYKŁAD 19

Dla następującego ciągłego modelu:

$$T(s) = \left[\frac{\omega_0^2}{\left(s + \frac{1}{1000} - \omega_{0j} \right) \left(s + \frac{1}{1000} + \omega_{0j} \right)} \right]^{1/2} \quad (2.12)$$

wyznaczamy charakterystyki Bodego, Nyquista, Nicholasa dla

$u_0 = 1, T_1 = 15, T_2 = 30$

$u_0 = 3, T_1 = 22,5, T_2 = 37,5$

$u_0 = 5, T_1 = 30, T_2 = 45$

oraz na wykresie odpowiedzi na skok jednostkowy zaznaczamy czas regulacji dla każdego modelu.

Po pierwsze definiujemy w przestrzeni roboczej MATLAB-a trzy modele: dla każdego zbioru parametrów u_0, T_1, T_2 osobny model o jednym wejściu i dwóch wyjściach.

```
w=1;T1=15;T2=30;
sys1=zpk([[],[],t[-.001-w*j -.001+w*j],[-1/T1 -1/T2]], [w*w 1]);
w=3;T1=22.5;T2=37.5;
sys2=zpk([],[],t[-.001-w*j -.001+w*j],[-1/T1 -1/T2]), [w*w 1];
w=5;T1=30;T2=45;
sys3=zpk([],[],t[-.001-w*j -.001+w*j],[-1/T1 -1/T2]), [w*w 1];
```

Korzystając z przeglądarki realizujemy pierwszą część zadania, czyli za pomocą odpowiednich polecen rysujemy charakterystyki Bodego (rys. 2.12).

```
ltiview('bode', sys1, sys2, sys3);
```

Nyquista (rys. 2.13)

```
ltiview('nyquist', sys1, sys2, sys3);
```

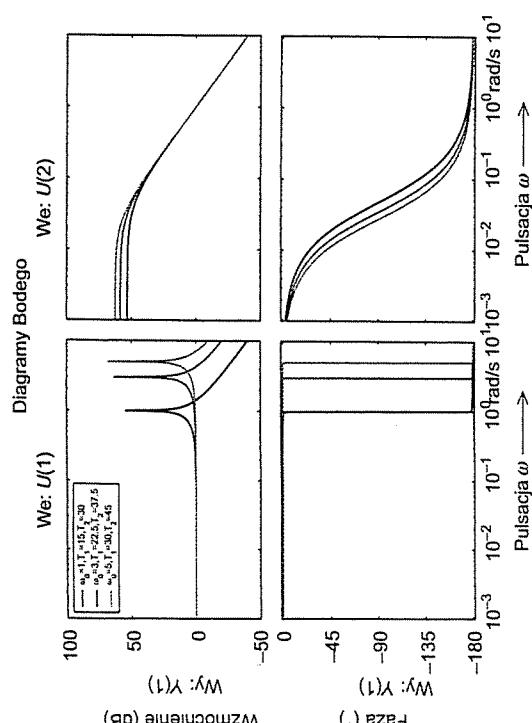
i Nicholsa (rys. 2.14)

```
ltiview('nichols', sys1, sys2, sys3);
```

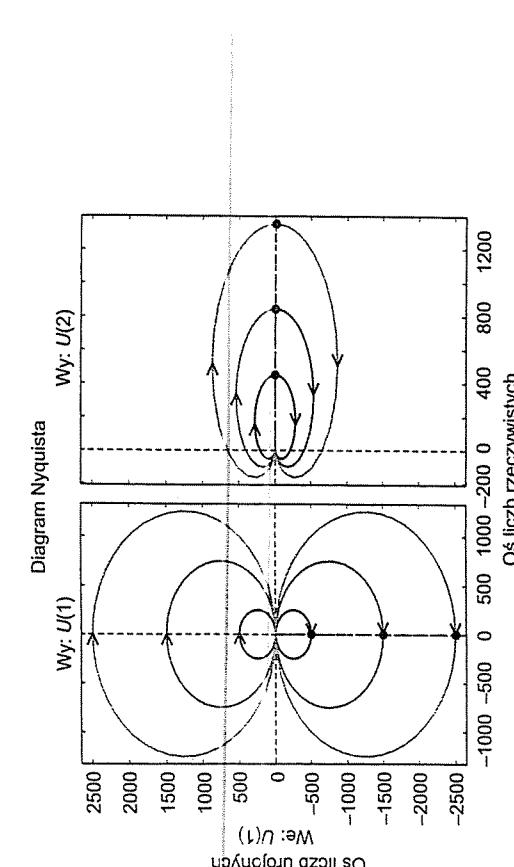
2. Modele matematyczne liniowych układów dynamicznych ciągich i dyskretnych

2.3. Modele częstotliwościowe

89

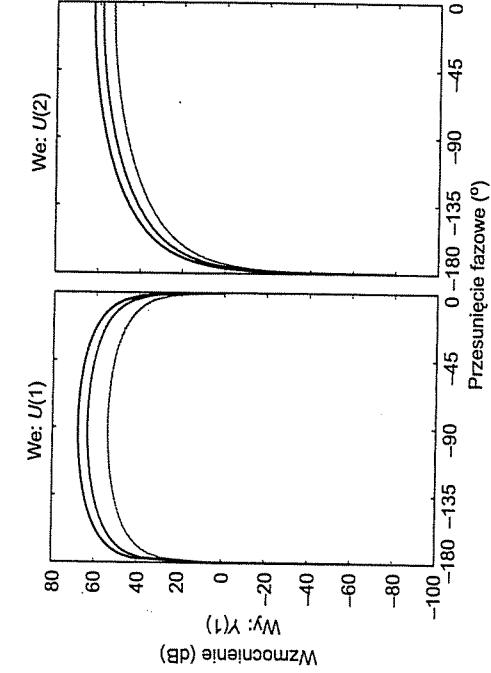


Rys. 2.12. Charakterystyki Bodego



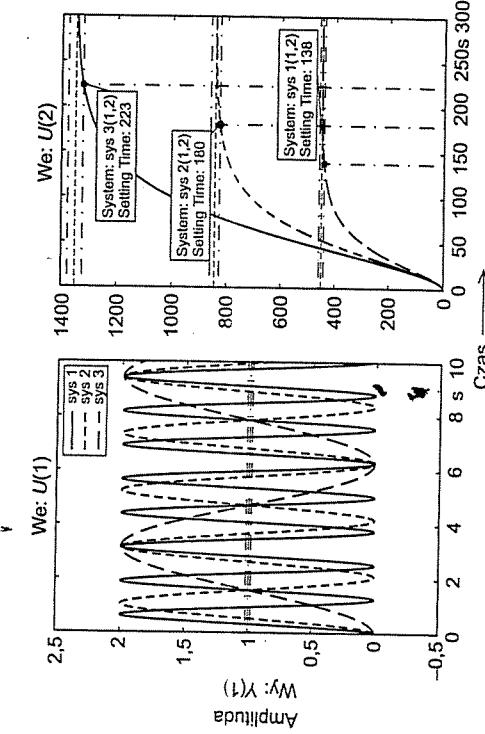
Rys. 2.13. Charakterystyki Nyquista

2.3. Modele częstotliwościowe



Rys. 2.14. Charakterystyki Nicholsa

Kolejna część przykładu dotyczy wykreszenia charakterystyk skokowych i zaznaczenia na nich czasu trwania przebiegów przejściowych (rys. 2.15).



Rys. 2.15. Odpowiedzi skokowe

UWAGA 10. Przeglądarka LTIVIEW automatycznie dobiera zakres wyświetlanych na osiach wartości. Często się zdarza, że dziki temu wykresy są nieczytelne tak, jak miało to miejsce dla wykresów odpowiedzi skokowej badanych modeli. Rozwiążaniem problemu jest skorzystanie z opcji Print to Figure z przeglądarki i już w zarytku oknie z wykresem ręcznie ustalenie zakresów dla otrzymanych rysunków. □

UWAGA 11. Przeglądarka LTIVIEW automatycznie dobiera zakres wyświetlanych na osiach wartości. Często się zdarza, że dziki temu wykresy są nieczytelne tak, jak miało to miejsce dla wykresów odpowiedzi skokowej badanych modeli. Rozwiążaniem problemu jest skorzystanie z opcji Print to Figure z przeglądarki i już w zarytku oknie z wykresem ręcznie ustalenie zakresów dla otrzymanych rysunków. □

2.4. Podstawowe człony dynamiczne

Budując modele liniowych układów dynamicznych, można posłużyć się elementami o znanych i dobrze opisanych właściwościach. Elementy te są nazywane podstawowymi członami dynamicznymi.

2.4.1. Człon bezinercyjny

Człon bezinercyjny, nazywany też członem proporcjonalnym, jest elementem o najprostszych właściwościach dynamicznych. Jego zadaniem jest przenoszenie sygnału wejściowego na wyjście w sposób nieodkształcony. Zmianie ulega jedynie amplituda sygnału wyjściowego. Sygnał wejściowy $x(t)$ i wyjściowy $y(t)$ są więc wprost proporcjonalne i dla każdej chwili t zachodzi

$$\frac{y(t)}{x(t)} = k \quad (2.13)$$

Współczynnik $k \in \mathbb{R}$ nosi nazwę *wzmacninika wzmacnienia*, który w pełni charakteryzuje człon bezinercyjny.

Opis w dziedzinie czasu

Człon bezinercyjny w dziedzinie czasu jest opisany prostym równaniem algebraicznym

$$y(t) = kx(t)$$



Rys. 2.16. Człon bezinercyjny

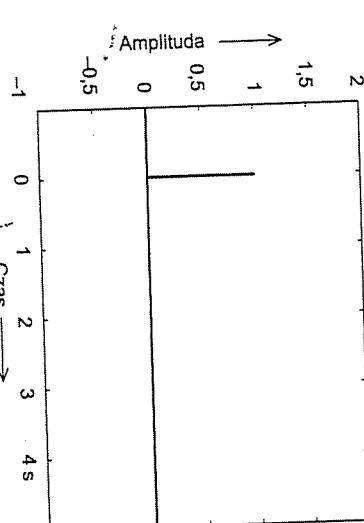
gdziś

$$X(s) = 1$$

W dziedzinie czasu odpowiedź impulsowa jest opisana następująco (rys. 2.17):

$$y(t) = g(t) = k\delta(t), \quad (2.16)$$

gdzie $\delta(t)$ oznacza deltę Diraca.



Rys. 2.17. Odpowiedź impulsowa układu bezinercyjnego

Odpowiedź na skok jednostkowy

Odpowiedź członu proporcjonalnego na skok jednostkowy jest następująca:

$$h(s) = k \frac{1}{s} \quad (2.17)$$

lub w dziedzinie czasu

$$h(t) = ku(t) \quad (2.18)$$

gdzie $u(t)$ oznacza skok jednostkowy (rys. 2.18).

Charakterystyka amplitudowo-fazowa

W celu wyznaczenia charakterystyki amplitudowo-fazowej członu proporcjonalnego (rys. 2.19) wyznaczamy najpierw jego transmitancję widmową. Podstawiając do zależności (2.14) $s = j\omega$, otrzymujemy

$$G(j\omega) = k \quad (2.19)$$

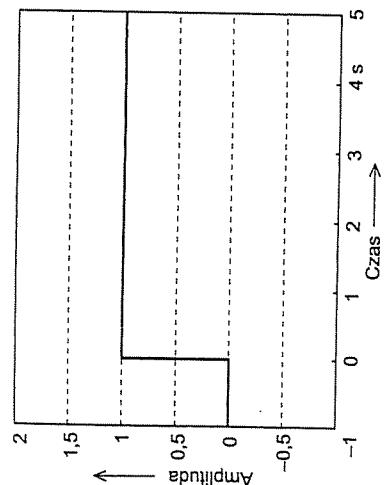
Odpowiedź impulsowa układu

Odpowiedź impulsową układu bezinercyjnego można wyznaczyć na podstawie jego transmitancji w sposób następujący:

$$Y(s) = g(s) = k \quad (2.15)$$

Część rzeczywista i część urojona transmitancji widmowej są wówczas następujące:

$$\begin{cases} P(\omega) = k \\ Q(\omega) = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

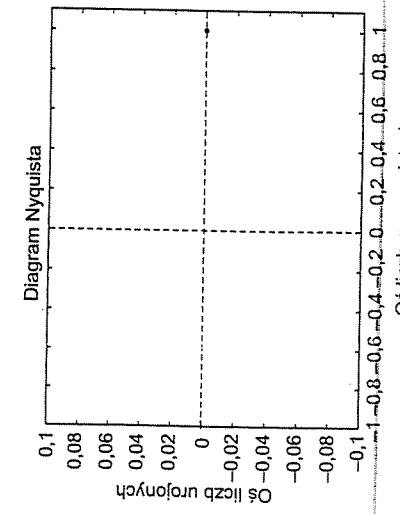


Rys. 2.18. Odpowiedź na skok jednostkowy układu bezinercyjnego

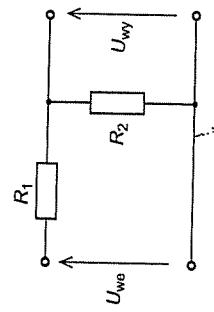
Realizacja

Czwórnik rezystancyjny

Typowym przykładem realizacji członu proporcjonalnego jest czwórnik zbudowany z elementów rezystancyjnych.



Rys. 2.19. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu bezinercyjnego



Rys. 2.21. Czwórnik rezystancyjny

Dla czwórnika pokazanego na rysunku 2.21 zachodzi związek

$$U_{wy} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_{we} \quad (2.22)$$

a jego transmitancja operatorowa jest

$$G(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.23)$$

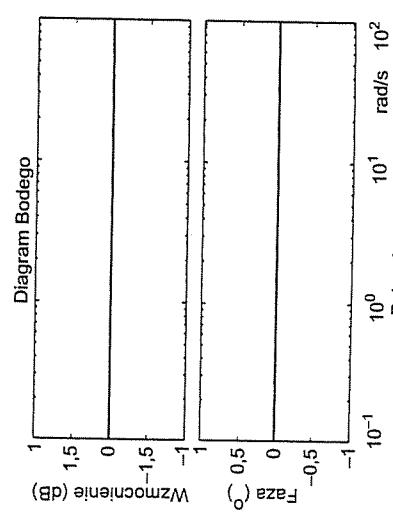
Jest to transmitancja członu bezinercyjnego, którego współczynnikiem wzmacniania jest

$$k = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.24)$$

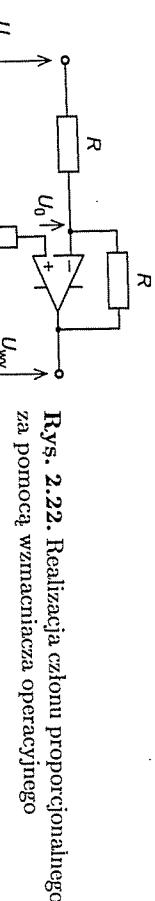
Wzmocnienie w tym układzie jest zawsze mniejsze od jedności, gdyż jest to układ bierny, w którym występuje rozpraszanie energii.

Układ aktywny

Innym przykładem realizacji układu bezinercyjnego jest układ przedstawiony na rys. 2.22.



Opis transmitancyjny



Rys. 2.22. Realizacja członu proporcjonalnego za pomocą wzmacniacza operacyjnego

Oznaczając przez U_0 spadek napięcia na wejściu wzmacniacza, otrzymujemy równanie

$$\frac{U_0 - U_{we}}{R_1} = \frac{U_{wy} - U_0}{R_2} \quad (2.25)$$

a stąd

$$U_{wy} = -\frac{R_2}{R_1} U_{we} \quad (2.26)$$

Transmitancja operatorowa tego układu wynosi więc

$$G(s) = -\frac{R_2}{R_1} \quad (2.27)$$

Układ przedstawiony na rys. 2.22 jest więc członem bezinercyjnym o wspólnym wzmacnieniu określonym zależnością (2.27).

Dzięki zastosowaniu elementu aktywnego (wzmacniacza operacyjnego) otrzymujemy element proporcjonalny o dowolnym wzmacnieniu. Innymi przykładami elementów bezinercyjnych mogą być dynamometr sprężynowy (w pewnym zakresie odkształceń) lub prądnicza tachometryczna prądu stałego.

2.4.2. Człon całkujący idealny

Opis w dziedzinie czasu

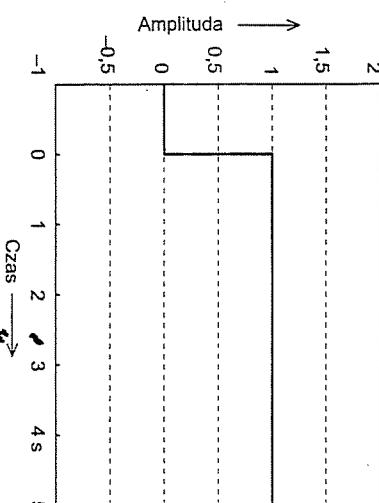
Idealny człon całkujący jest elementarnym członem dynamicznym opisanym za pomocą następującego równania całkowego:

$$y(t) = k \int_0^t x(\tau) d(\tau) \quad (2.28)$$

co jest równoznaczne z

$$\frac{dy(t)}{dt} = kx(t) \quad (2.29)$$

gdzie: $x(t)$ – wartość sygnału wejściowego, $y(t)$ – wartość sygnału wyjściowego.



Rys. 2.23. Odpowiedź na wynikanie impulsowe idealnego członu całkującego

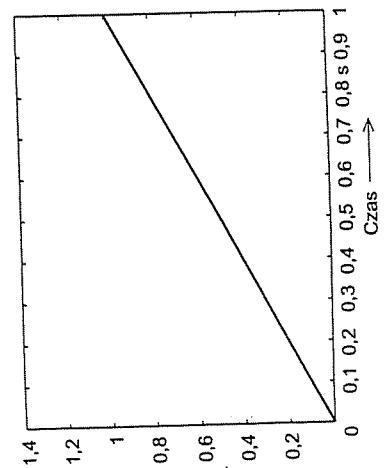
Odpowiedź na skok jednostkowy

Odpowiedź idealnego członu całkującego na skok jednostkowy (rys. 2.24) jest następująca:

$$h(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{k}{s^2} \quad (2.34)$$

lub w dziedzinie czasu

$$h(t) = ktu(t) \quad (2.35)$$



Rys. 2.24. Odpowiedź na skok jednostkowy idealnego członu całkującego

Charakterystyka amplitudowo-fazowa

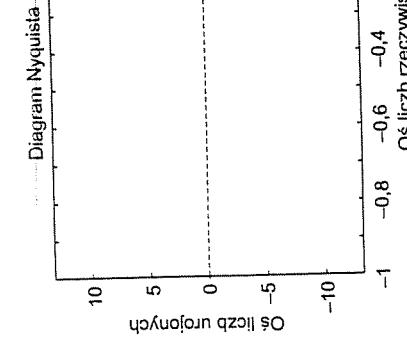
W celu wyznaczenia charakterystyki amplitudowo-fazowej idealnego członu całkującego wyznaczamy najpierw jego transmitancję widmową. Podstawiając do zależności (2.31) $s = j\omega$, otrzymujemy

$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = -j\frac{k}{\omega} \quad (2.36)$$

oraz

$$P(\omega) = 0 \quad (2.37)$$

$$Q(\omega) = -\frac{k}{\omega}$$



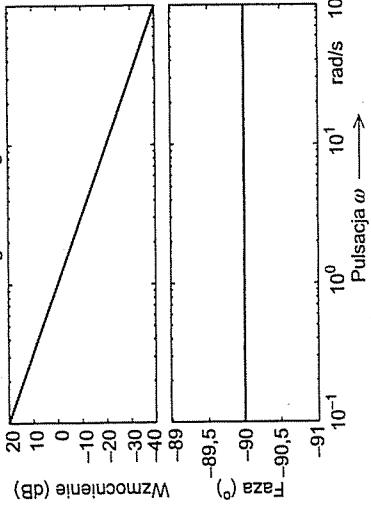
Rys. 2.25. Charakterystyka amplitudowo-fazowa idealnego członu całkującego

$$M(\omega) = -\frac{k}{\omega}$$

$$M_{dB} = 20 \log \frac{k}{\omega} = 20 \log k - 20 \log \omega$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -\frac{\pi}{2}$$

Diagram Bodego

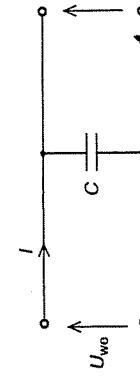


Rys. 2.26. Charakterystyka logarytmiczna: a) modułu, b) fazy członu całkującego idealnego

Realizacja

Kondensator idealny

Przykładem realizacji idealnego członu całkującego jest czwórnik zbudowany z kondensatora idealnego.



Dla czwórnika pokazanego na rys. 2.27 zachodzi związek

$$U_{wy} = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad (2.38)$$

a jego transmitancja operatorowa jest

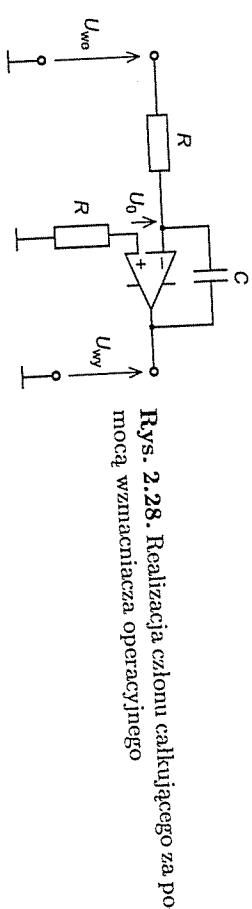
$$G(s) = \frac{U_{wy}}{I_{we}} = \frac{1}{sC} = \frac{1}{s} \quad (2.39)$$

Charakterystyki logarytmiczne idealnego członu całkującego (rys. 2.26) przedstawiają się następująco:

98 2. Modele matematyczne liniowych układów dynamicznych ciągich i dyskretnych

Aktynung układ całkujący

Innym przykładem realizacji układu całkującego jest układ przedstawiony na rys. 2.28.



Rys. 2.28. Realizacja członu całkującego za pomocą wzmacniacza operacyjnego

Układ ten można opisać następującą zależnością:

$$\frac{U_0 - U_{we}}{R} = \frac{U_{wy} - U_0}{sC} \quad (2.40)$$

Transmittancja operatorowa tego układu wynosi więc

$$G(s) = \frac{U_{wy}}{U_{we}} = -\frac{1}{RCs} = -\frac{1}{Ts} \quad (2.41)$$

Innymi przykładami elementu całkującego mogą być: zbiornik cieczy, serwomotor hydrauliczny, układ napędowy pozycyjny (silnik).

2.4.3. Człon różniczkujący idealny

Opis w dziedzinie czasu

Idealny człon różniczkujący jest elementarnym członem dynamicznym opisanym za pomocą następującego równania różniczkowego:

$$y(t) = k \frac{dx(t)}{dt} \quad (2.42)$$

gdzie: $x(t)$ – wartość sygnału wejściowego, $y(t)$ – wartość sygnału wyjściowego.

Opis transmitancyjny

Po zastosowaniu przekształcenia Laplace'a do obu stron równania (2.42) możemy przejść do opisu w dziedzinie zmiennej zespolonej s . Jeśli zalożymy, że warunki początkowe układu są zerowe, to otrzymujemy opis tego ukła-

2.4. Podstawowe członki dynamiczne

du w postaci transmitancji operatorowej

$$G(s) = ks \quad (2.43)$$

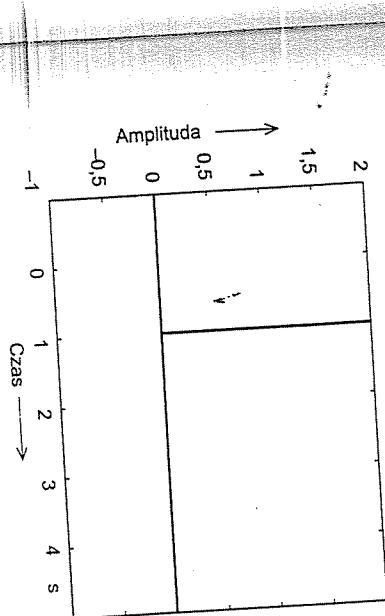
Odpowiedź impulsowa układu

Odpowiedź impulsową układu bezinerencyjnego (rys. 2.29) można wyznaczyć na podstawie jego transmitancji w sposób następujący:

$$g(s) = G(s) = ks \quad (2.44)$$

oraz w dziedzinie czasu

$$g(t) = k \frac{d\delta(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0^- \\ -\infty, & t = 0^+ \end{cases} \quad (2.45)$$



Rys. 2.29. Odpowiedź na wymuszenie impulsowe idealnego członu różniczkującego

Odpowiedź na skok jednostkowy

Odpowiedź idealnego członu różniczkującego (rys. 2.30) na skok jednostkowy jest następująca:

$$h(s) = G(s) \frac{1}{s} = k \quad (2.46)$$

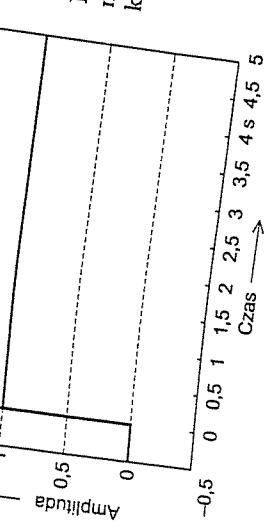
lub w dziedzinie czasu

$$h(t) = k\delta(t) \quad (2.47)$$

Charakterystyka amplitudowo-fazowa

W celu wyznaczenia charakterystyki amplitudowo-fazowej (rys. 2.31) idealnego członu różniczkującego wyznaczamy najpierw jego transmitancję widmową.

2.4. Podstawowe człony dynamiczne



Rys. 2.30. Odpowiedź na skok jednostkowy idealnego członu różnicującego

Podstawiając do zależności (2.43) $s = j\omega$, otrzymujemy

$$G(j\omega) = jk\omega$$

oraz

$$P(\omega) = 0 \quad (2.48)$$

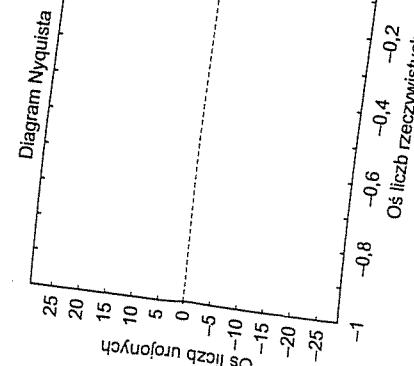
$$Q(\omega) = k\omega$$

Charakterystyki logarytmiczne przedstawiają się następująco:

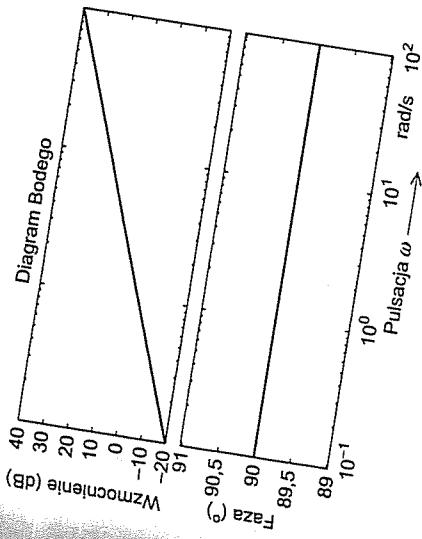
$$M(\omega) = k\omega$$

$$M_{dB} = 20 \log(k\omega) = 20 \log k - 20 \log \omega$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \frac{\pi}{2}$$



Rys. 2.31. Charakterystyka amplitudowo-fazowa idealnego członu różnicującego

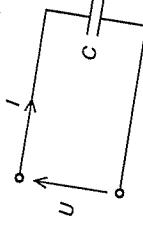


Rys. 2.32. Charakterystyki logarytmiczne członu różnicującego: a) modułu, b) fazy

Realizacja

Dwójnik pojemnościowy

Przykładem realizacji idealnego członu różnicującego (rys. 2.33) jest dwójnik zbudowany z kondensatora idealnego (rys. 2.33).

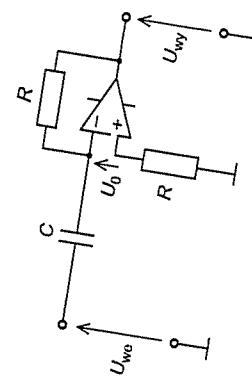


Rys. 2.33. Dwójnik pojemnościowy

$$Dla dwójnika pokazanego na rysunku 2.33 zachodzi związek$$

$$\dot{v}(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

Aktywung układ różniczujący
Innym przykładem realizacji układu różniczującego jest układ przedstawiony na rys. 2.34.



Rys. 2.34. Realizacja członu różniczującego operacyjnego pomocy wzmacniacza

Układ ten opisują następujące zależności:

$$U_{we} = \frac{R}{sC} = sRC \quad (2.52)$$

Innym przykładem elementu różniczkującego może być prądnica tachometryczna opisana równaniem

$$u(t) = k \frac{d\alpha(t)}{dt} \quad (2.53)$$

gdzie: $u(t)$ – napięcie wyjściowe, $\alpha(t)$ – położenie kątowe, k – współczynnik proporcionalności.

2.4.4. Człon inercyjny pierwszego rzędu

Opis w dziedzinie czasu

Człon inercyjny pierwszego rzędu jest elementarnym członem dynamicznym opisanym za pomocą następującego równania różniczkowego:

$$T\dot{y}(t) + y(t) = kx(t) \quad (2.54)$$

gdzie: $x(t)$ – wartość sygnału wejściowego, $y(t)$ – wartość sygnału wyjściowego.

Opis transmitancyjny

Do zastosowania przekształcenia Laplace'a do obu stron równania (2.54) możemy przejść do opisu w dziedzinie zmiennej zespolonej s . Jeśli założymy, że warunki początkowe układu są zerowe, to otrzymujemy wówczas opis tego układu w postaci transmitancji operatorowej

$$G(s) = \frac{k}{Ts + 1} \quad (2.55)$$

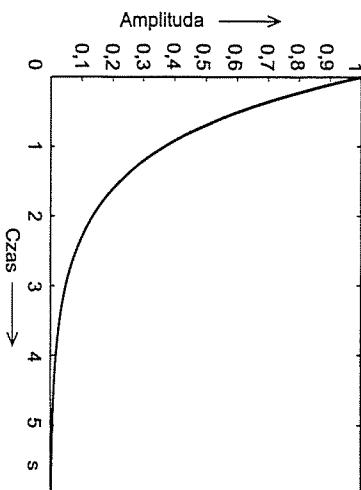
Odpowiedź impulsowa układu

Odpowiedź impulsową układu inercyjnego pierwszego rzędu (rys. 2.35) można wyznaczyć na podstawie jego transmitancji w sposób następujący:

$$g(s) = G(s) = \frac{k}{Ts + 1} \quad (2.56)$$

oraz w dziedzinie czasu

$$g(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} \quad (2.57)$$



Rys. 2.35. Odpowiedź na wynuszczenie impulsowe członu inercyjnego pierwszego rzędu

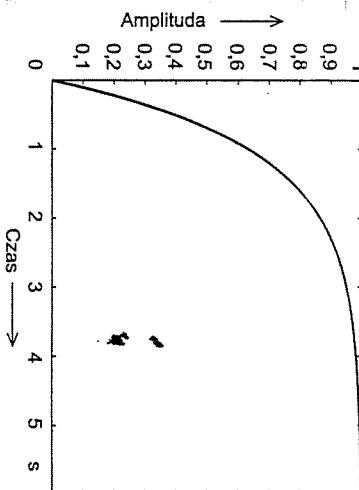
Odpowiedź na skok jednostkowy

Odpowiedź układu inercyjnego pierwszego rzędu na skok jednostkowy (rys. 2.36) jest następująca:

$$h(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{k}{(Ts + 1)s} \quad (2.58)$$

lub w dziedzinie czasu

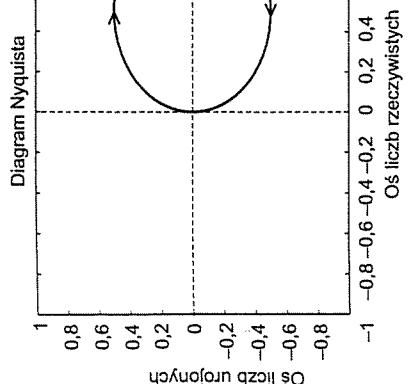
$$h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau = k \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \quad (2.59)$$



Rys. 2.36. Odpowiedź na skok jednostkowy członu inercyjnego pierwszego rzędu

Charakterystyka amplitudowo-fazowa

W celu wyznaczenia charakterystyki amplitudowo-fazowej członu inercyjnego pierwszego rzędu (rys. 2.37) wyznaczamy najpierw jego transmitancję widmową. Podstawiając do zależności (2.55) $s = j\omega$, otrzymujemy

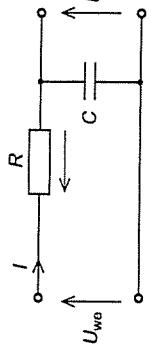


Rys. 2.37. Charakterystyka amplitudowo-fazowa członu inercyjnego pierwszego rzędu

Realizacja

Czwórnik pasywny rezystancyjno-pojemnościowy

Przykładem realizacji członu inercyjnego pierwszego rzędu jest czwórnik zbudowany z rezystora i kondensatora.



Rys. 2.39. Realizacja członu inercyjnego pierwszego rzędu

$$G(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T} = \frac{k - j\omega Tk}{1 + (\omega T)^2} \quad (2.60)$$

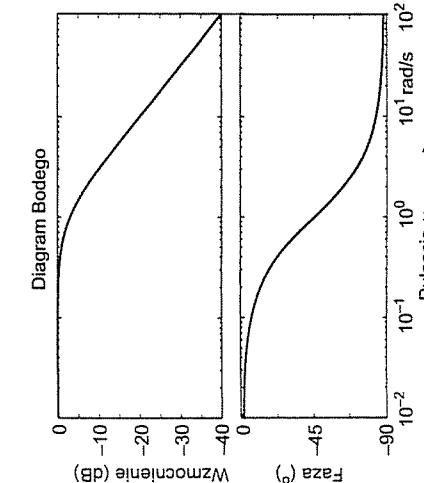
oraz

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \frac{k}{1 + (\omega T)^2} \\ Q(\omega) &= \frac{\omega Tk}{1 + (\omega T)^2} \end{aligned} \quad (2.61)$$

Charakterystyki logarytmiczne (rys. 2.38) przedstawiają się następująco:

$$M(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \quad (2.62)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q}{P} = -\arctg \omega T$$



Rys. 2.38. Charakterystyki logarytmiczne członu inercyjnego pierwszego rzędu

$$I = C \frac{dU_{wy}}{dt} \quad (2.63)$$

Dla czwórnika pokazanego na rys. 2.39 zachodzi związek

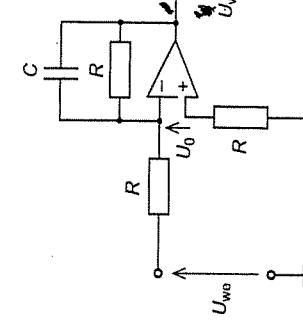
$$U_{we} = RI + U_{wy}$$

$$I = C \frac{dU_{wy}}{dt}$$

$$G(s) = \frac{U_{wy}}{U_{we}} = \frac{1}{RCs + 1}$$

Czwórnik aktywny

Innym przykładem realizacji układu inercyjnego pierwszego rzędu jest układ przedstawiony na rys. 2.40.



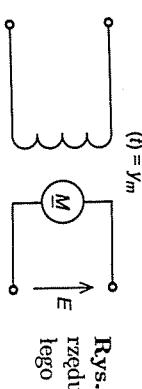
Rys. 2.40. Realizacja członu inercyjnego pierwszego rzędu za pomocą wzmacniacza operacyjnego

Transmitancja operatorowa tego układu ma postać

$$G(s) = \frac{\left(\frac{1}{R_1} + sC \right)}{R_2} = \frac{R_1}{R_2(1 + R_1 C s)} \quad (2.64)$$

Innym przykładem członu inercyjnego pierwszego rzędu może być prądnica obcowzbuwna prądu stałego (rys. 2.41) o transmitancji wyrażonej równaniem

$$G(s) = \frac{\frac{k}{L}}{s + \frac{R}{L}} \quad (2.65)$$



Rys. 2.41. Realizacja członu inercyjnego pierwszego rzędu za pomocą prądnicy obcowzbuwnej prądu stałego

2.4.5. Człon opóźniający

Opis w dziedzinie czasu

Człon opóźniający jest elementarnym członem dynamicznym opisanym za pomocą następującego równania:

$$y(t) = kx(t - T) \quad (2.66)$$

gdzie: $x(t)$ – wartość sygnału wejściowego, $y(t)$ – wartość sygnału wyjściowego.

Opis transmitancyjny

Po zastosowaniu przekształcenia Laplace'a do obu stron równania (2.66) możemy przejść do opisu w dziedzinie zmiennej zespolonej s . Jeśli założymy, że warunki początkowe układu są zerowe, to otrzymujemy wówczas opis tego układu w postaci transmitancji operatorowej

$$Y(s) = k e^{-sT} X(s) \quad (2.67)$$

$$G(s) = k e^{-sT} \quad (2.68)$$

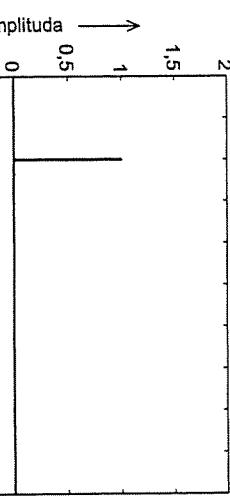
Odpowiedź impulsowa układu

Odpowiedź impulsową układu opóźniającego (rys. 2.42) można wyznaczyć na podstawie jego transmitancji w sposób następujący:

$$g(s) = G(s) = k e^{-sT} \quad (2.69)$$

oraz w dziedzinie czasu

$$g(t) = k \delta(t - T) \quad (2.70)$$



Rys. 2.42. Odpowiedź na wymuszenie impulsowe członu opóźniającego dla $T = 1$

Odpowiedź na skok jednostkowy

Odpowiedź układu opóźniającego na skok jednostkowy (rys. 2.43) jest następująca:

$$h(s) = G(s) \frac{1}{s} \quad (2.71)$$

lub w dziedzinie czasu

$$h(t) = k u(t - T) \quad (2.72)$$



Rys. 2.43. Odpowiedź na skok jednostkowy członu opóźniającego dla $T = 1$

Charakterystyka amplitudowo-fazowa

W celu wyznaczenia charakterystyki amplitudowo-fazowej układu opóźniającego (rys. 2.44) wyznaczamy najpierw jego transmitancję widmową. Podstawiając

108 2. Modele matematyczne liniowych układów dynamicznych ciągłych i dyskretnych

2.4. Podstawowe cząstki dynamiczne

109

do zależności (2.55) $s = j\omega$, otrzymujemy

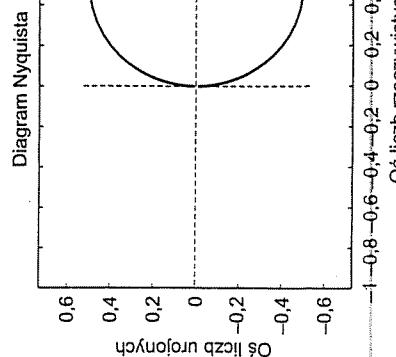
$$\begin{aligned} G(j\omega) &= k e^{-j\omega T} \\ G(j\omega) &= k(\cos \omega T - j \sin \omega T) \end{aligned} \quad (2.73)$$

oraz

$$\begin{aligned} P(\omega) &= k \cos \omega T \\ Q(\omega) &= -k \sin \omega T \end{aligned} \quad (2.74)$$

Charakterystyki logarytmiczne (rys. 2.45) przedstawiają się następująco:

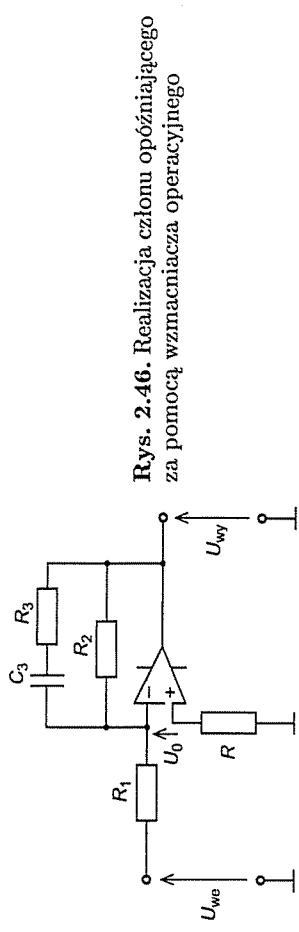
$$\begin{aligned} M(\omega) &= k \\ \varphi(\omega) &= -\omega T = -T e^{\log \omega} \end{aligned} \quad (2.75)$$



Rys. 2.44. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu opóźniającego go

Realizacja

Przykładami członu opóźniającego mogą być: transporter taśmowy, rurociąg, linia dłużna bez strat, czwórnik aktywny.



Transmitancja czwórnika aktywnego pokazanego na rys. 2.46 wynosi

$$\begin{aligned} G(s) &= -k \frac{sT_1 + 1}{sT_2 + 1} \\ k &= \frac{R_2}{R_1} \quad (2.76) \end{aligned}$$

$$T_1 = R_3 C_3, \quad T_2 = (R_2 + R_3) C_3$$

2.4.6. Człon całkujący rzeczywisty

Opis w dziedzinie czasu

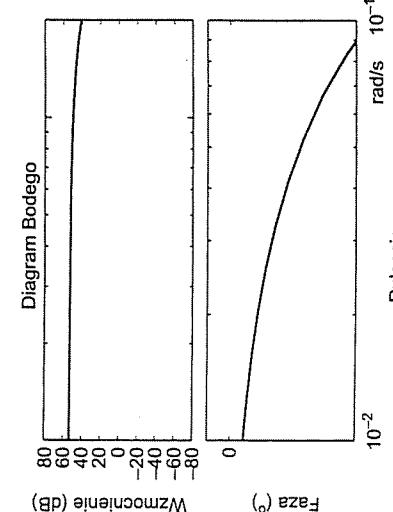
Człon całkujący rzeczywisty jest elementarnym członem dynamicznym opisanym za pomocą następującego równania różniczkowego:

$$Ty + y = k \int_0^t x(\tau) d\tau \quad (2.77)$$

gdzie: $x(t)$ – wartość sygnału wejściowego, $y(t)$ – wartość sygnału wyjściowego.

Opis transmitancyjny

Po zastosowaniu przekształcenia Laplace'a do obu stron równania (2.77) możemy przejść do opisu w dziedzinie zmiennej zespolonej s . Jeśli założymy, że warunki początkowe układu są zerowe, to otrzymujemy wówczas opis tego układu



du w postaci transmitancji operatorowej

$$T_s^2 Y(s) + sY(s) = kX(s) \quad (2.78)$$

$$G(s) = \frac{k}{s(Ts + 1)} \quad (2.79)$$

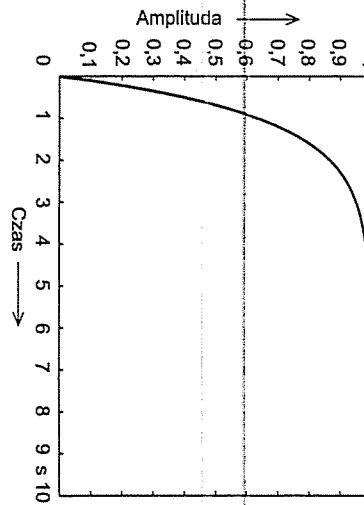
Odpowiedź impulsowa układu

Odpowiedź impulsowa rzeczywistego członu całkującego (rys. 2.47) można wyznaczyć na podstawie jego transmitancji w sposób następujący:

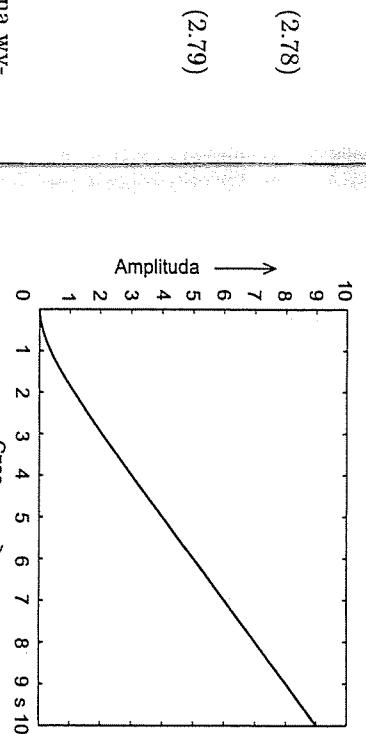
$$g(s) = G(s) = \frac{k}{s} - \frac{k}{\left(s + \frac{1}{T}\right)} \quad (2.80)$$

oraz w dziedzinie czasu

$$g(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \quad (2.81)$$



Rys. 2.47. Odpowiedź na wymuszenie impulsowe rzeczywistego członu całkującego



Rys. 2.48. Odpowiedź na skok jednostkowy rzeczywistego członu całkującego

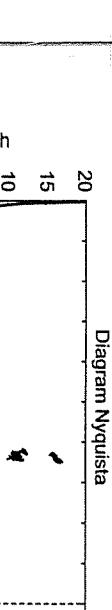
Charakterystyka amplitudowo-fazowa

W celu wyznaczenia charakterystyki amplitudowo-fazowej rzeczywistego układu całkującego (rys. 2.49) wyznaczamy najpierw jego transmitancję widmową. Podstawiając do zależności (2.79) $s = j\omega$, otrzymujemy

$$G(j\omega) = \frac{-\omega kT - jk}{\omega(1 + T^2\omega^2)} \quad (2.83)$$

oraz

$$\begin{aligned} P(\omega) &= -\frac{kT}{1 + T^2\omega^2} \\ Q(\omega) &= -\frac{k}{\omega(1 + T^2\omega^2)} \end{aligned} \quad (2.84)$$

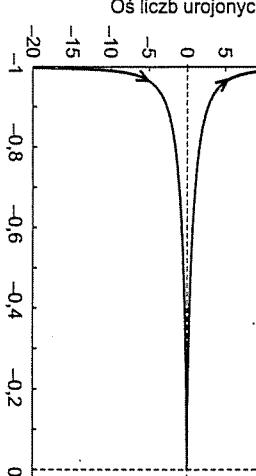


Rys. 2.49. Charakterystyka amplitudowo-fazowa rzeczywistego członu całkującego

Odpowiedź na skok jednostkowy

Odpowiedź rzeczywistego członu całkującego na skok jednostkowy jest następująca:

$$h(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{kT^2}{Ts + 1} + \frac{-kT}{s} + \frac{k}{s^2} \quad (2.82)$$



Rys. 2.49. Charakterystyka amplitudowo-fazowa rzeczywistego członu całkującego

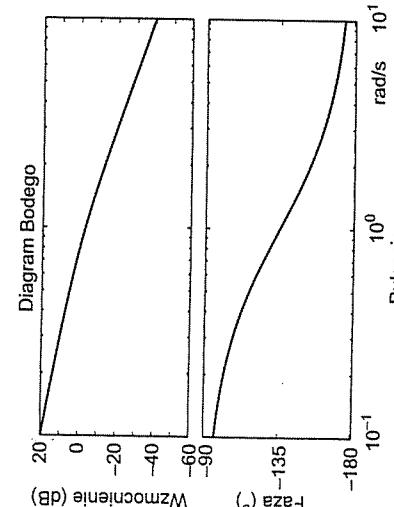
1.12 2. Modele matematyczne liniowych układów dynamicznych ciągłych i dyskretnych

2.4. Podstawowe członu dynamiczne

113

Charakterystyki logarytmiczne przedstawiające się następująco (rys. 2.50):

$$\begin{aligned} M(\omega) &= \left| \frac{k}{j\omega(Tj\omega + 1)} \right| \\ P &= \frac{P}{T\omega} \\ \varphi(\omega) &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (2.85)$$



Rys. 2.50. Charakterystyki logarytmiczne rzeczywistego członu całkującego

2.4.7. Człon różniczkujący rzeczywisty

Opis w dziedzinie czasu

Człon różniczkujący rzeczywisty jest elementarnym członem dynamicznym opisanym za pomocą następującego równania różniczkowego:

$$Ty(t) + y(t) = Tkx(t) \quad (2.88)$$

gdzie: $x(t)$ – wartość sygnału wejściowego, $y(t)$ – wartość sygnału wyjściowego.

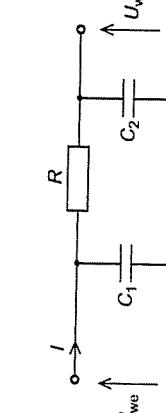
Realizacja

Czwórnik pasywny RC

Przykładem realizacji rzeczywistego członu całkującego jest czwórnik pasywny RC (rys. 2.51).

Transmitancja tego układu przedstawia się następująco:

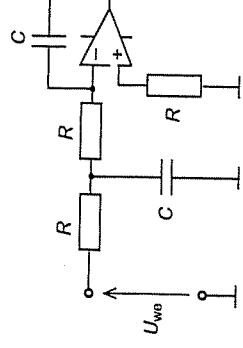
$$G(s) = \frac{U_{wy}}{I_{we}} = \frac{1}{sC_1(1 + RC_2s)} \quad (2.86)$$



Rys. 2.51. Realizacja rzeczywistego członu całkującego za pomocą czwórnika pasywnego

Czwórnik aktywny Innym przykładem może być czwórnik aktywny (rys. 2.52), którego transmitancja:

$$G(s) = \frac{1}{2RCs(1 + 0,5RCs)} \quad (2.87)$$



Rys. 2.52. Realizacja rzeczywistego członu całkującego za pomocą wzmacniacza operacyjnego

$$(2.88)$$

Opis transmitancyjny

Po zastosowaniu przekształcenia Laplace'a do obu stron równania (2.88) możemy przejść do opisu w dziedzinie zmiennej zespolonej s . Jeśli założymy, że warunki początkowe układu są zerowe, to otrzymujemy wówczas opis tego układu w postaci transmitancji operatorowej

$$TsY(s) + Y(s) = TksX(s) \quad (2.89)$$

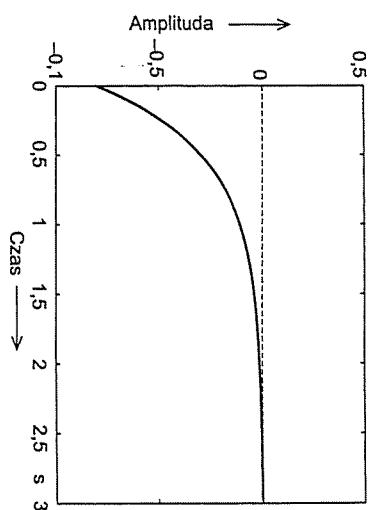
$$G(s) = \frac{Tks}{1 + Ts} \quad (2.90)$$

Odpowiedź impulsowa układu

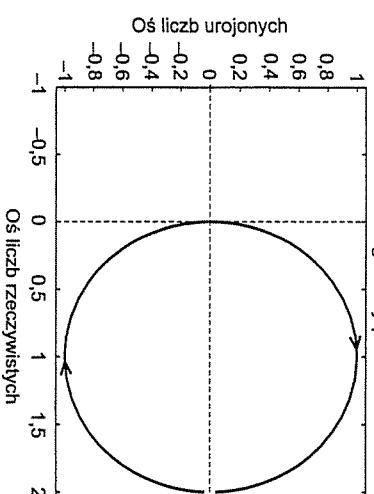
Odpowiedź impulsową rzeczywistego układu różniczkującego (rys. 2.53) można wyznaczyć na podstawie jego transmitancji w sposób następujący:

$$g(s) = G(s) = \frac{Tks}{1 + Ts} = k \left[1 - \frac{1}{1 + Ts} \right] \quad (2.91)$$

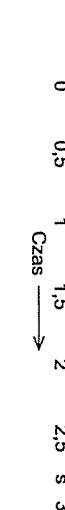
$$\text{gdzie: } g(t) = k\delta(t) - \frac{k}{T}e^{-\frac{t}{T}} \quad (2.92)$$



Rys. 2.53. Odpowiedź na wymuszenie impulsowe rzeczywistego członu różniczkującego



Rys. 2.55. Charakterystyka amplitudowo-fazowa rzeczywistego członu różniczkującego



Rys. 2.54. Odpowiedź na skok jednostkowy rzeczywistego członu różniczkującego

Podstawiając do zależności (2.90) $s = j\omega$, otrzymujemy

$$G(j\omega) = \frac{kT^2\omega^2 + jkT\omega}{1 + T^2\omega^2} \quad (2.95)$$

oraz

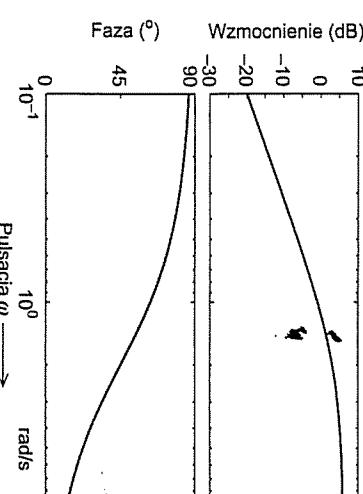
$$P(\omega) = \frac{kT^2\omega^2}{1 + T^2\omega^2}, \quad Q(\omega) = \frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2} \quad (2.96)$$

Charakterystyki logarytmiczne przedstawiają się następująco (rys. 2.56):

$$M(\omega) = \frac{kT\omega}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}, \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg \omega T \quad (2.97)$$

Charakterystyka amplitudowo-fazowa

W celu wyznaczenia charakterystyki amplitudowo-fazowej rzeczywistego członu różniczkującego (rys. 2.55) wyznaczamy najpierw jego transmitancję widmową.

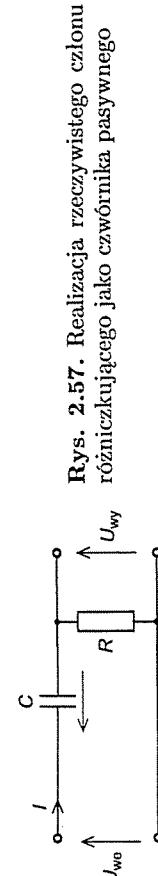


Rys. 2.56. Charakterystyki logarytmiczne rzeczywistego członu różniczkującego

Realizacja

Czwórnik pasywny RC

Przykładem realizacji rzeczywistego członu różniczkującego jest czwórnik pasywny RC (rys. 2.57).



Rys. 2.57. Realizacja różniczkującego członu pasywnego

Transmitancja tego układu przedstawia się następująco:

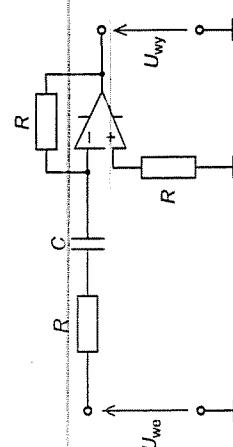
$$G(s) = \frac{sRC}{1+sRC} = \frac{sT}{1+sT} \quad (2.98)$$

Czwórnik aktywny

Innym przykładem może być czwórnik aktywny, którego schemat pokazano na rys. 2.58. Transmitancja tego układu jest opisana zależnością

$$G(s) = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{sRC}{1+sRC} \quad (2.99)$$

Rys. 2.58. Realizacja różniczkującego członu za pomocą wzmacniacza operacyjnego



Rys. 2.58. Realizacja różniczkującego członu za pomocą wzmacniacza operacyjnego

Opis transmitancyjny

Po zastosowaniu przekształcenia Laplace'a do obu stron równania (2.100) możemy przejść do opisu w dziedzinie zmiennej zespolonej s . Jeśli założymy, że warunki początkowe układu są zerowe, to otrzymujemy opis tego układu w postaci transmitancji operatorowej

$$T_2 s^2 Y(s) + T_1 Y(s) + Ys = kX(s) \quad (2.101)$$

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{T_2 s^2 + T_1 s + 1} \\ G(s) &= \frac{k}{T_3 - T_4} \left[\frac{T_3}{1 + T_3 s} - \frac{T_4}{1 + T_4 s} \right] \end{aligned} \quad (2.102)$$

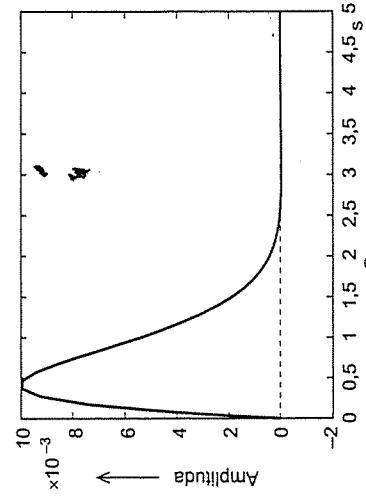
Odpowiedź impulsowa układu

Odpowiedź impulsową członu inercyjnego drugiego rzędu (rys. 2.59) można wyznaczyć na podstawie jego transmitancji w sposób następujący:

$$g(s) = G(s)1 \quad (2.103)$$

oraz w dziedzinie czasu

$$g(t) = \frac{k}{T_3 - T_4} \left[\frac{T_3}{1 + T_3 s} - \frac{T_4}{1 + T_4 s} \right] \quad (2.104)$$



Rys. 2.59. Odpowiedź impulsowa członu inercyjnego drugiego rzędu

2.4.8. Człon inercyjny drugiego rzędu

Opis w dziedzinie czasu

Człon inercyjny drugiego rzędu jest elementarnym członem dynamicznym opisanym za pomocą następującego równania różniczkowego

$$T_2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t) \quad (2.100)$$

gdzie: $x(t)$ – wartość sygnału wejściowego, $y(t)$ – wartość sygnału wyjściowego.

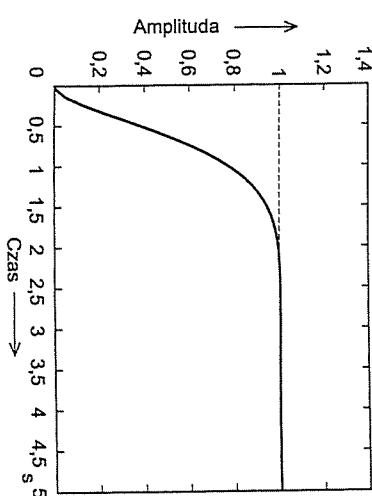
Odpowiedź na skok jednostkowy

Odpowiedź członu inercyjnego drugiego rzędu na skok jednostkowy jest następująca (rys. 2.60):

$$h(s) = G(s) \frac{1}{s} \quad (2.105)$$

a w dziedzinie czasu

$$h(t) = k \left[1 - \frac{1}{T_3 - T_4} \left(T_3 e^{-\frac{t}{T_3}} - T_4 e^{-\frac{t}{T_4}} \right) \right] \quad (2.106)$$

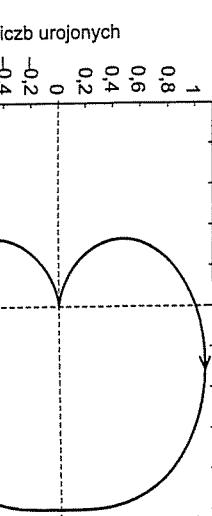


Rys. 2.60. Odpowiedź na skok jednostkowy członu inercyjnego drugiego rzędu

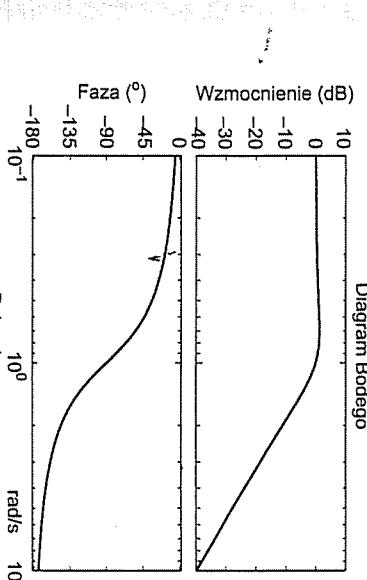
Charakterystyka-amplitudowo-fazowa

W celu wyznaczenia charakterystyki amplitudowo-fazowej członu inercyjnego drugiego rzędu (rys. 2.61) wyznaczamy najpierw jego transmitancję widmową.

Diagram Nyquista



Rys. 2.61. Charakterystyka amplitudowo-fazowa członu inercyjnego drugiego rzędu



Rys. 2.62. Charakterystyki logarytmiczne członu inercyjnego drugiego rzędu

Podstawiając do zależności (2.103) $s = j\omega$, otrzymujemy

$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \quad (2.107)$$

gdzie

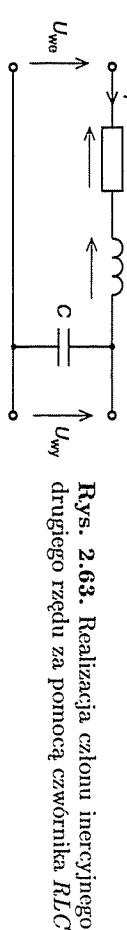
$$P(\omega) = \frac{k(1 - \omega^2 T_3 T_4)}{(1 + \omega^2 T_3^2)(1 + \omega^2 T_4^2)}$$

$$Q(\omega) = \frac{-k\omega(T_3 + T_4)}{(1 + \omega^2 T_3^2)(1 + \omega^2 T_4^2)} \quad (2.108)$$

Charakterystyki logarytmiczne członu inercyjnego drugiego rzędu są przedstawione na rys. 2.62.

Czwórnik aktywny

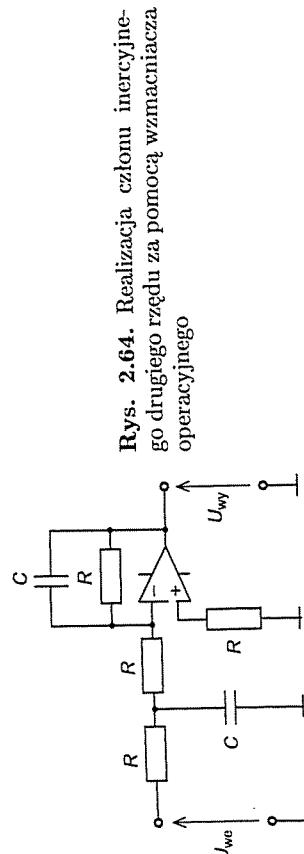
Innym przykładem realizacji członu inercyjnego drugiego rzędu jest czwórnik aktywny pokazany na rys. 2.64.



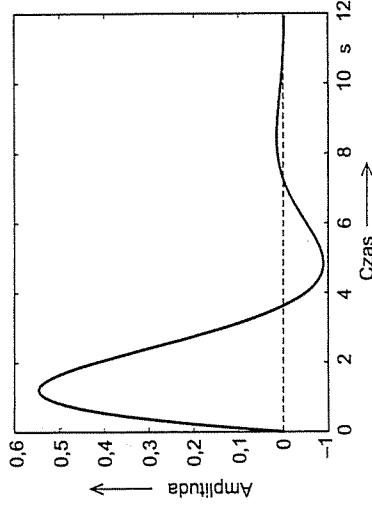
Rys. 2.63. Realizacja członu inercyjnego drugiego rzędu za pomocą czwórnika RLC

Realizacja
Czwórnik pasywny RLC

Przykładem realizacji członu inercyjnego drugiego rzędu jest czwórnik pasywny RLC pokazany na rys. 2.63.



Rys. 2.64. Realizacja członu inercyjnego drugiego rzędu za pomocą wzmacniacza operacyjnego



Rys. 2.65. Odpowiedź na wymuszenie impulsowe członu oscylacyjnego (układ stabilny asymptotycznie)

2.4.9. Człon oscylacyjny

Opis w dziedzinie czasu

Człon oscylacyjny jest elementarnym członem dynamicznym opisanym za pomocą następującego równania różniczkowego:

$$(2.109) \quad T_2^2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$$

gdzie: $x(t)$ – wartość sygnału wejściowego, $y(t)$ – wartość sygnału wyjściowego.

Opis transmitancji

Po zastosowaniu przekształcenia Laplace'a do obu stron równania (2.109) możemy przejść do opisu w dziedzinie zmiennej zespolonej s . Jeśli założymy, że warunki początkowe układu są zerowe, to otrzymujemy wówczas opis tego układu w postaci transmitancji operatorowej

$$(2.110) \quad T_2^2 s^2 Y(s) + T_1 s Y(s) + Y(s) = kX(s)$$

$$(2.111) \quad G(s) = \frac{k\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

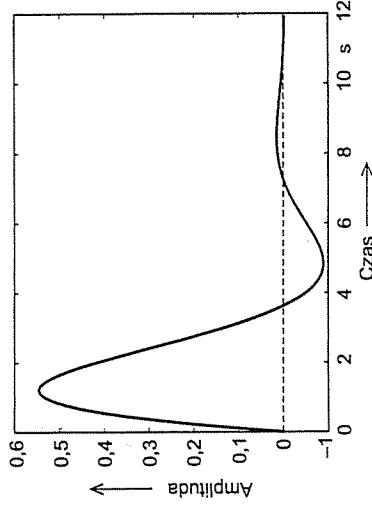
Odpowiedź impulsowa układu

Odpowiedź impulsową członu oscylacyjnego można wyznaczyć na podstawie jego transmitancji w sposób następujący:

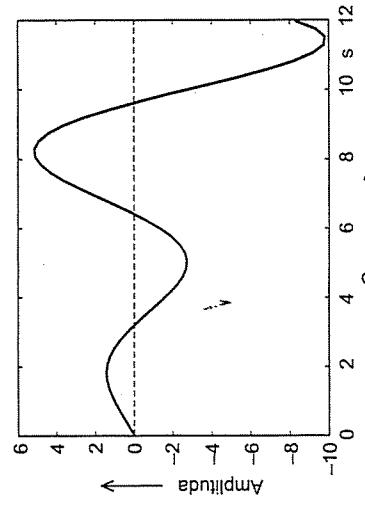
$$(2.112) \quad g(s) = G(s)$$

oraz w dziedzinie czasu

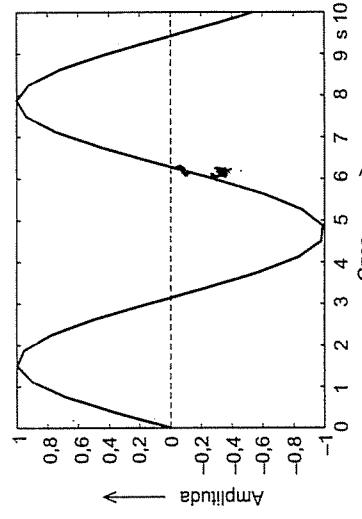
$$(2.113) \quad g(t) = \frac{ke^{-\frac{\xi t}{T}}}{T\sqrt{1-\frac{s^2}{\omega_0^2}}} \sin \frac{\sqrt{1-\frac{s^2}{\omega_0^2}}t}{T}$$



Rys. 2.66. Odpowiedź na wymuszenie impulsowe członu oscylacyjnego (układ niestabilny)



Rys. 2.67. Odpowiedź na wymuszenie impulsowe członu oscylacyjnego (układ na granicy stabilności)



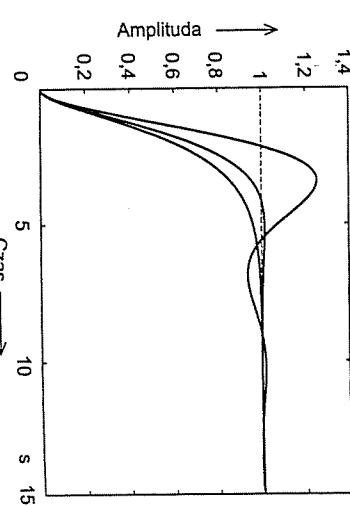
Odpowiedź na skok jednostkowy

Odpowiedź członu oscylacyjnego na wymuszenie impulsowe oraz skok jednostkowy jest następująca:

$$h(s) = G(s) \frac{1}{s}$$

lub w dziedzinie czasu dla różnych wartości parametru λ (rys. 2.68)

$$h(t) = k \left[1 - e^{-\gamma t} \left(\cos \lambda t + \frac{\gamma}{\lambda} \sin \lambda t \right) \right] \quad (2.114)$$



Rys. 2.68. Odpowiedź na wymuszenie impulsowe oraz skok jednostkowy członu oscylacyjnego

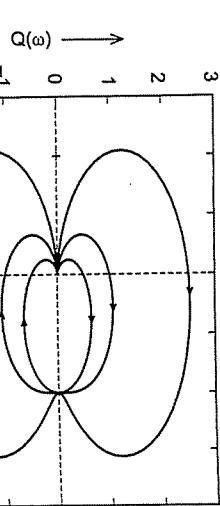
W celu wyznaczenia charakterystyki amplitudowo-fazowej członu oscylacyjnego wyznaczamy najpierw jego transmitancję widmową. Podstawiając do zależności (2.111) $s = j\omega$, otrzymujemy

$$G(j\omega) = \frac{k}{1 - \omega^2 T^2} \quad (2.115)$$

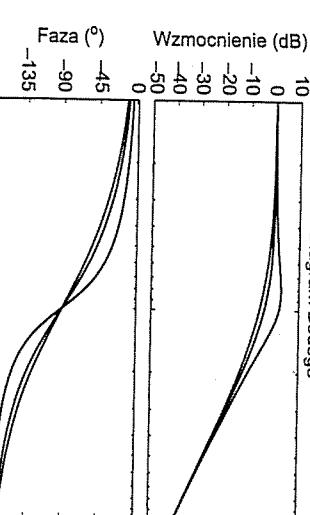
oraz

$$P(\omega) = \frac{k}{1 - \omega^2 T^2}, \quad Q(\omega) = 0 \quad (2.116)$$

Diagram Nyquista



Rys. 2.69. Charakterystyki amplitudowo-fazowe członów oscylacyjnych o różnych pulsacjach drgań



Rys. 2.70. Charakterystyki logarytmiczne rzeczywistego członu oscylacyjnego

Charakterystyki logarytmiczne rzeczywistego członu oscylacyjnego pokazano na rys. 2.70.

Jeżeli $s = 0$, to człon oscylacyjny o transmitancji

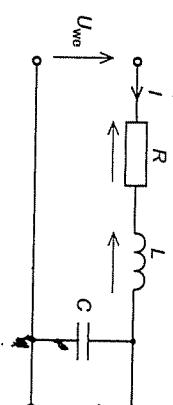
$$G(s) = \frac{k}{1 + T^2 s} = k \quad (2.117)$$

jest członem proporcjonalnym.

Realizacja

Czwórnik pasywny RLC

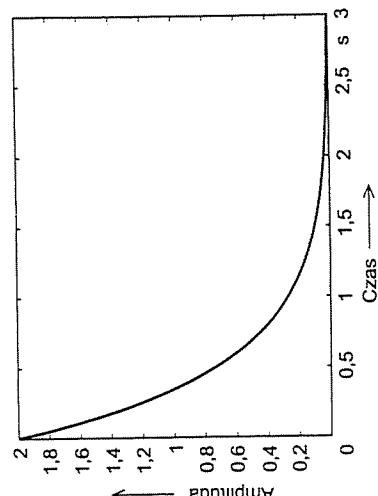
Przykładem realizacji członu oscylacyjnego jest czwórnik pasywny RLC (rys. 2.71)



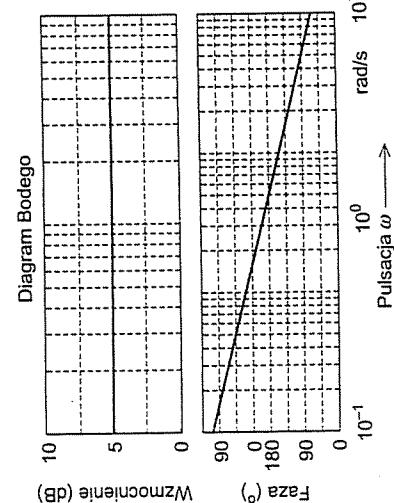
Rys. 2.71. Realizacja rzeczywistego członu oscylacyjnego za pomocą czwórnika pasywnego

2.4.10. Zadania

1. W celu identyfikacji układów dynamicznych poddano je badaniom. Na wejście pierwszego układu podano w chwili $t = 0$ sygnał $u(t) = 1$. Przebieg sygnału otrzymanego na wyjściu tego układu pokazano na rys. 2.72. Drugi układ poddano badaniom częstotliwościowym. Otrzymane charakterystyki przedstawiono na rys. 2.73. Podaj opis transmitancyjny tych układów.



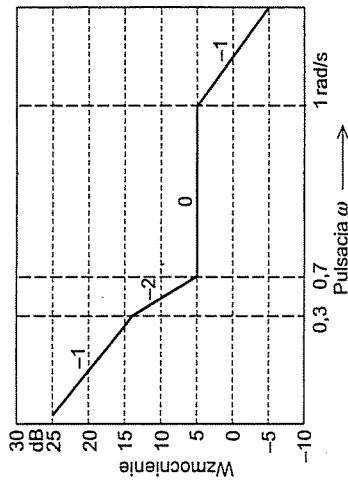
Rys. 2.72. Odpowiedź układu na skok jednostkowy



Rys. 2.73. Charakterystyki częstotliwościowe układu

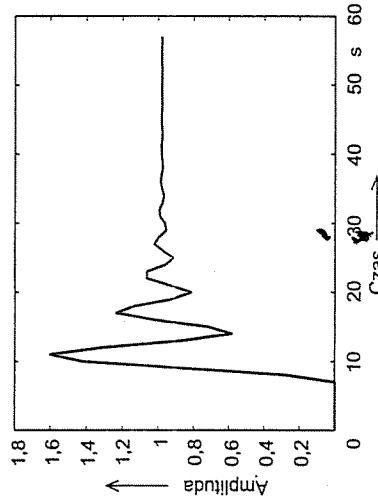
4. Odpowiedź układu na skok jednostkowy wynosi

$$h(t) = \left(4e^{-\frac{t}{2}} + 10\right) 1(t) \quad (2.119)$$
 Oblicz odpowiedź impulsową tego układu i podaj jej wykres.
5. Napisz transmitancję układu, którego charakterystyka amplitudowa jest pokazana na rys. 2.75.



Rys. 2.75. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa badanego układu

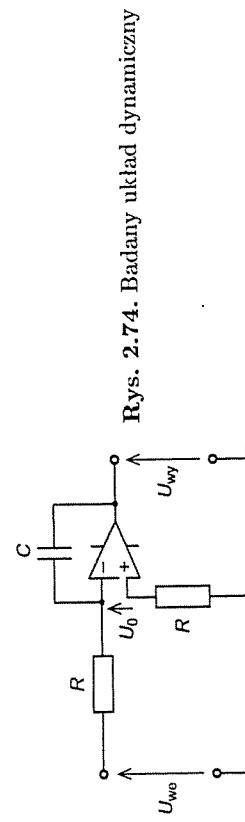
6. Zaznacz położenie zer i biegunków układu dynamicznego, którego odpowiedź na skok jednostkowy jest przedstawiona na rys. 2.76. Zapisz transmitancję tego układu.



Rys. 2.76. Odpowiedź układu dynamicznego, którego odpowiedź na skok jednostkowy jest przedstawiona na rys. 2.76. Zapisz transmitancję tego układu.

2. Obiekt cieplny można w przybliżeniu opisać transmitancją

$$G(s) = \frac{k}{Ts + 1} e^{-sT_0} \quad (2.118)$$
 Podaj opis różniczkowy tego obiektu.
3. Narysuj charakterystyki logarytmiczne amplitudowej i fazowej układu przedstawionego na rys. 2.74, U_{wy} – wejście; U_{wy} – wyjście.



2.5. Związek między modelem zmiennych stanu a modelem typu wejście-wyjście

2.5.1. Wzajemne relacje między modelami

W celu wyznaczenia zależności między modelem zmiennych stanu a modelem typu wejście-wyjście należy w pierwszej kolejności wybrać dziedzinę, w której

`sys_tf=tf(sys);`

a model w postaci zera-bieguny-wzmocnienie za pomocą polecenia

`sys_zpk=zpk(sys);`

W podobny sposób można dokonywać konwersji między wszystkimi modelami, które można zdefiniować w MATLAB-ie, o ile taka konwersja jest wykonalna.

2.6. Zadania

Zadanie 5. Przekształć podany układ równań różniczkowych w postać modelu zmiennych stanu, którego wyjściem jest wektor zmiennych stanu

$$\frac{R_t}{L_t}i = -\frac{di}{dt} - \frac{C_e\psi}{L_t}\Omega + \frac{1}{L_t}u$$

$$J\frac{d\Omega}{dt} + M = C_m\psi i$$

Podany układ równań jest dość dobrym modelem zmiennych stanu silnika obowiązującego dla prądu stałego. Znaczenie poszczególnych symboli w tym modelu jest następujące: Ω – prędkość obrotowa wirnika, i – prąd płynący przez twornik silnika, M – moment obciążenia silnika, u – napięcie zasilania silnika, R_t – rezystancja obwodu elektrycznego twornika, L_t – indukcyjność obwodu elektrycznego twornika, J – moment bezwładności twornika, ψ – strumień wzbudzenia silnika, C_e – stała charakteryzująca wpływ strumienia wzbudzenia na obwód elektryczny silnika, C_m – stała charakteryzująca wpływ strumienia wzbudzenia na obwód mechaniczny silnika.

Zadanie 6. Dla modelu zmiennych stanu z poprzedniego zadania wyznacz model typu wejście-wyjście, przyjmując następujące parametry silnika: R_t – rezystancja obwodu elektryczanego twornika 1Ω , L_t – indukcyjność obwodu elektrycznego twornika 10 mH , J – moment bezwładności twornika $2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $C_e\psi$ – stała charakteryzująca wpływ strumienia wzbudzenia na obwód elektryczny silnika $2,5 \frac{\text{Nm}}{\text{A}}$, $C_m\psi$ – stała charakteryzująca wpływ strumienia wzbudzenia na obwód mechaniczny silnika $2,5 \text{ V}\cdot\text{s}$.

Zadanie 7. Dany jest kondensator o stałej pojemności C . Jakim członem dynamicznym jest kondensator, jeżeli przyjąć za wejście: prąd i płynący przez kondensator, a za wyjście przyjąć napięcie u na zaciskach tego kondensatora; za wejście napięcie u na zaciskach kondensatora, a za wyjście prąd i płynący przez ten kondensator.

Zadanie 8. Wyznacz charakterystykę skokową, impulsową, Bodego oraz Nyquista dla układu o transmitancji

$$T(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s-1,5)(s^2-k)}$$

dla trzech różnych wartości parametru k , tj. $k_1 > k_2 > k_3 > 0$. Charakterystyki kazdego rodzaju powinny znajdować się na jednym wykresie tak, aby można było porównać wpływ zmian parametru k na ich przebieg.

Rozdział 3

MODELE MATEMATYCZNE NIELINIOWYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

3.1. Wprowadzenie

W tym rozdziale przedstawiono podstawowe narzędzia potrzebne do analizowania nieliniowych układów dynamicznych. Poznanie technik analizy jest ważne z kilku powodów.

Po pierwsze, teoretyczna analiza zwykle jest najmniej kosztownym sposobem badania charakterystyki systemu.

Po drugie, symulacja, chociaż jest to bardzo ważny element w sterowaniu nieliniowym, musi być poparta teorią. Ślepa symulacja systemów nieliniowych prawdopodobnie da słabe wyniki albo wyniki te będą błędnie interpretowane.

Po trzecie, projekt sterowania nieliniowego zawsze jest oparty na technikach analizy. Z tego powodu metody projektowania są zwykle oparte na metodach analizy. Jest niemal niemożliwe, aby opanować metody projektowania bez wcześniejszego przestudiowania narzędzia analizy. Ponadto narzędzia analizy pozwalają, też oszacować projekt sterownika podczas jego tworzenia i w przypadku nieodpowiednich parametrów mogą też sugerować kierunki modyfikowania projektu sterownika.

Nie powinno być zaskoczeniem to, że nie została wymyślona żadna uniwersalna metoda analizy wszystkich nieliniowych układów sterowania. W linii sterowania jedną metodą można analizować system w dziedzinie czasu lub w dziedzinie częstotliwości. Natomiast dla nieliniowych układów sterowania żadne z tych standardowych podejść nie ma zastosowania w bezpośrednim rozwiązyaniu nieliniowych równań różniczkowych.

Analiza nieliniowych układów jest bardzo trudna i podejmuje się wysiłki, by tworzyć stosowne, teoretyczne narzędzia do tej analizy. Zaproponowano wiele metod analizy układów nieliniowych. W podrozdziale 3.2.4 zostanie omówiona analiza układów nieliniowych metodą płaszczyzny fazowej.

3.2. Analiza metodą płaszczyzny fazowej

Analiza metodą płaszczyzny fazowej jest graficzną metodą badania nieliniowych układów drugiego rzędu. Jej podstawową ideą jest rozwiązywanie graficznie równań różniczkowych drugiego rzędu zamiast szukania rozwiązania analitycznego. Wynikiem jest rodzina trajektorii układu, które odpowiadają różnym warunkom początkowym na dwuwymiarowej płaszczyźnie, nazywanej płaszczyzną fazową. Płaszczyzna fazowa pozwala wizualnie postrzegać wzory ruchu systemu. W taki sposób możnatrzymać informacje co do stabilności układu.

Analiza metodą płaszczyzny fazowej ma kilka użyciowych właściwości. Po pierwsze, graficzna metoda pozwala uzmysolić, co dzieje się w nieliniowym systemie startującym z różnych warunków początkowych bez rozwiązywania nieliniowych równań analitycznie. Po drugie, metoda ta nie jest ograniczona do slabych albo gładkich nieliniowości, ma również dobre zastosowanie do silnych nieliniowości i do nieliniowości „twardych”. Choć metoda ta jest ograniczona tylko do układów drugiego rzędu, jednak wiele praktycznych systemów sterowania może być aproksymowanych przez systemy drugiego rzędu, a metoda płaszczyzny fazowej może być używana w ich analizie. Oczywiście zasadniczą wadą metody jest to, że ograniczona jest do systemów drugiego rzędu (lub pierwszego rzędu), ponieważ graficzne badanie systemów wyższych rzędów jest raczej kowo i geometrycznie złożone.

3.2.1. Pojęcia analizy metoda płaszczyzny fazowej

W analizie układów nieliniowych często zmienne stanu x_1, x_2, \dots, x_n wybiera się tak, aby $x_2 = \dot{x}_1, x_3 = \dot{x}_2, \dots, x_n = \dot{x}_{n-1}$. Tak wybrane zmienne stanu nazywamy *zmiennymi (współzewnętrznymi) fazowymi*. W n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej zmienne fazowe w każdej wybranej chwili określają jednoznacznie położenie punktu M , zwanego *punktem opisującym*. Pod wpływem wymuszenia lub niezerowych warunków początkowych punkt ten przesuwa się po krzywej, zwanej *trajektorią fazową*. Trajektoria fazowa stanowi poglądową, geometryczną ilustrację przebiegu procesu dynamicznego w układzie. Rodzinę trajektorii fazowych nazywamy *portretem fazowym układu*. Natomiast powyższą n -wymiarową przestrzeń nazywamy *n -wymiarową przestrzenią fazową*. Szczególnym przypadkiem przestrzeni fazowej jest płaszczyzna fazowa, gdy $n = 2$.

Portrety fazowe

Metoda płaszczyzny fazowej jest powiązana z graficzną metodą badania systemów autonomicznych drugiego rzędu opisywanych równaniami

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \quad (3.2)$$

gdzie: x_1 i x_2 – stany systemu, f_1 i f_2 – nieliniowe funkcje stanów.

Geometriczne przestrzeń stanów tego systemu jest płaszczyzna mającą x_1 i x_2 jako współrzędne. Tę płaszczyznę nazywaną *plaszczyzną fazową*.

Dany jest zestaw warunków początkowych $x(0) = x_0$. Równania (3.1), (3.2) definiują rozwiązania $x(t)$. Ze zmieniającym się czasem t od zera do nieskończoności, rozwiązania $x(t)$ mogą być przedstawione geometrycznie jako krzywa na płaszczyźnie fazowej. Taka krzywa jest trajektorią płaszczyzny fazowej.

Rodzina trajektorii płaszczyzny fazowej odpowiadających dla różnych warunków początkowych stanowi portret fazowy układu. Następujący prosty przykład ilustruje pojęcie portretu fazowego układu.

PRZYKŁAD 21 (portret fazowy układu amortyzatora masy)

Główne równanie systemu amortyzatora masy pokazanego na rysunku 3.1a jest znany liniowym równaniem różniczkowym drugiego rzędu

$$\ddot{x} + x = 0 \quad (3.3)$$

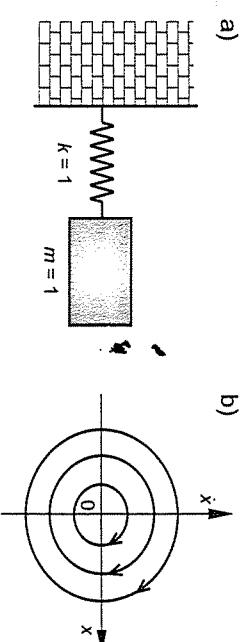
Przyjmujemy, że masa początkowo jest w spoczynku, przy dлиności x_0 . Kiedy rozwiążając równanie otrzymujemy

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos t \\ \dot{x}(t) &= -x_0 \sin t \end{aligned}$$

Eliminując czas t z powyższych równań, otrzymujemy równanie trajektorii

$$x^2 + \dot{x}^2 = x_0^2$$

Równanie to jest równaniem okręgu na płaszczyźnie fazowej. Odpowiedzi dla różnych warunków początkowych tworzą wspólnosiodłowe okręgi o różnych promieniach. Rysując te okręgi na płaszczyźnie fazowej, otrzymujemy portret fazowy układu amortyzatora masy, który został pokazany na rys. 3.1b.



Rys. 3.1. Układ amortyzacji masy (a) i jego portret fazowy (b)

Potęga portretu fazowego leży w fakcie, że portret fazowy systemu pokazuje naturę odpowiedzi dla różnych warunków początkowych, która jest bezpośrednio przedstawiona na płaszczyźnie fazowej. W powyższym przykładzie łatwo

3. Modele matematyczne nelinijowych układów dynamicznych

zauważycie, że żadna z trajektorii systemu nie dąży do zera ani nie rozbiega wstępnie, które wskazują na krytyczną naturę stabilności systemu.

Wym: $\ddot{x} + f(\dot{x}, x) = 0$

W przestrzeni stanów ta dynamika może być przedstawiona jako

$$(3.4)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -f(x_1, x_2)\end{aligned}$$

gdzie $x_1 = x$, a $x_2 = \dot{x}$. W praktyce większość układów drugiego rzędu, takich jak sprężynowy amortyzator masy w mechanicznej lub obwody RLC w elektronice, mogą być opisane w przestrzeni stanów. Dla tych układów zmienność stanu x i jej pochodna \dot{x} definiowana dla dynamiki opisanej wzorem (3.4), a płaszczyzna fazowa jest jednakożądnej trudności, aby mająca x i \dot{x} jako współrzędne. Nie stwarzają one równorównaniom (3.1), (3.2) rozszerzyć tę metodę na dynamiki bardziej ogólnego charakteru.

Punkty osobiowe

Ważnym pojęciem w analizie płaszczyzny fazowej jest punkt osobiwy. Punkt nowagi będzie równowagą na płaszczyźnie fazowej. Ostatd punkt równowagi, co oznacza, że $\dot{x} = 0$, a równanie (3.1), (3.2) przyjmą postać

$$f_1(x_1, x_2) = 0, \quad f_2(x_1, x_2) = 0 \quad (3.5)$$

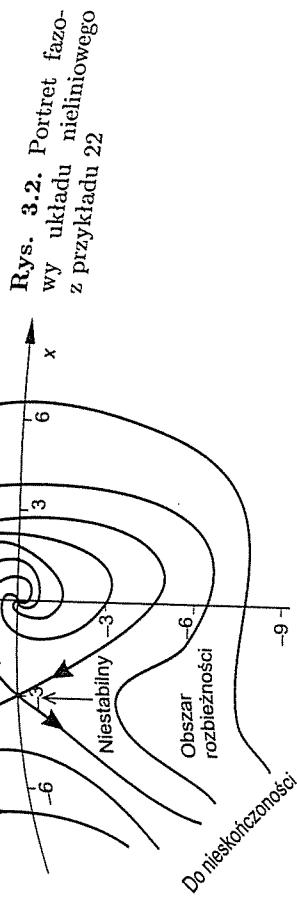
Dla układu liniowego równowagi mogą być otrzymane z rozwiązania równania (3.5). $\ddot{x} + \dot{x} = 0$, dla którego jest tylko jeden punkt osobiwy (choć w pewnym przypadku może być ciągły zestaw punktów osobiwych, jak dla układu osobiwym). System wszystkie punkty na osi liczb rzeczywistych są punktami osobiwymi. System nelinijowy często ma więcej niż jeden izolowany punkt

PRZYKŁAD 22 (nielinowy układ drugiego rzędu)

Rozważmy układ

$$\ddot{x} + 0,6\dot{x} + 3x + x^2 = 0$$

którego portret fazowy jest sporządzony na rys. 3.2. Układ ma dwa punkty osobiwe, w sąsiedztwie dwóch punktów $(-3, 0)$. Ruch punktu opisującego po trajektorii układu punktowi $x = 0$, podczas gdy oddala się od



Rys. 3.2. Portret fazowy układu drugiego rzędu z przykładu 22

gdzie $x_1 = x$, a $x_2 = \dot{x}$. W praktyce większość układów drugiego rzędu, takich jak sprężynowy amortyzator masy w mechanicznej lub obwody RLC w elektronice, mogą być opisane w przestrzeni stanów. Dla tych układów zmienność stanu x i jej pochodna \dot{x} definiowana dla dynamiki opisanej wzorem (3.4), a płaszczyzna fazowa jest jednakożądnej trudności, aby mająca x i \dot{x} jako współrzędne. Nie stwarzają one równorównaniom (3.1), (3.2) rozszerzyć tę metodę na dynamiki bardziej ogólnego charakteru.

Punkty osobiowe

Ważnym pojęciem w analizie płaszczyzny fazowej jest punkt osobiwy. Punkt nowagi będzie równowagą na płaszczyźnie fazowej. Ostatd punkt równowagi, co oznacza, że $\dot{x} = 0$, a równanie (3.1), (3.2) przyjmą postać

Dla układu liniowego równowagi mogą być otrzymane z rozwiązania równania (3.5). $\ddot{x} + \dot{x} = 0$, dla którego jest tylko jeden punkt osobiwy (choć w pewnym przypadku może być ciągły zestaw punktów osobiwych, jak dla układu osobiwym). System wszystkie punkty na osi liczb rzeczywistych są punktami osobiwymi. System nelinijowy często ma więcej niż jeden izolowany punkt

PRZYKŁAD 22 (nielinowy układ drugiego rzędu)

Rozważmy układ

$$\ddot{x} + 0,6\dot{x} + 3x + x^2 = 0$$

którego portret fazowy jest sporządzony na rys. 3.2. Układ ma dwa punkty osobiwe, w sąsiedztwie dwóch punktów $(-3, 0)$. Ruch punktu opisującego po trajektorii układu punktowi $x = 0$, podczas gdy oddala się od

gdzie $x_1 = x$, a $x_2 = \dot{x}$. W praktyce większość układów drugiego rzędu, takich jak sprężynowy amortyzator masy w mechanicznej lub obwody RLC w elektronice, mogą być opisane w przestrzeni stanów. Dla tych układów zmienność stanu x i jej pochodna \dot{x} definiowana dla dynamiki opisanej wzorem (3.4), a płaszczyzna fazowa jest jednakożądnej trudności, aby mająca x i \dot{x} jako współrzędne. Nie stwarzają one równorównaniom (3.1), (3.2) rozszerzyć tę metodę na dynamiki bardziej ogólnego charakteru.

Punkty osobiowe

Ważnym pojęciem w analizie płaszczyzny fazowej jest punkt osobiwy. Punkt nowagi będzie równowagą na płaszczyźnie fazowej. Ostatd punkt równowagi, co oznacza, że $\dot{x} = 0$, a równanie (3.1), (3.2) przyjmą postać

Dla układu liniowego równowagi mogą być otrzymane z rozwiązania równania (3.5). $\ddot{x} + \dot{x} = 0$, dla którego jest tylko jeden punkt osobiwy (choć w pewnym przypadku może być ciągły zestaw punktów osobiwych, jak dla układu osobiwym). System wszystkie punkty na osi liczb rzeczywistych są punktami osobiwymi. System nelinijowy często ma więcej niż jeden izolowany punkt

PRZYKŁAD 22 (nielinowy układ drugiego rzędu)

Rozważmy układ

$$\ddot{x} + 0,6\dot{x} + 3x + x^2 = 0$$

którego portret fazowy jest sporządzony na rys. 3.2. Układ ma dwa punkty osobiwe, w sąsiedztwie dwóch punktów $(-3, 0)$. Ruch punktu opisującego po trajektorii układu punktowi $x = 0$, podczas gdy oddala się od

(3.6)

gdzie f_1 i f_2 przyjmują pojedyncze wartości dla dowolnego punktu na płaszczyźnie fazowej. Tam zwykle jest dokładnie określona wartość nachylenia trajektorii. Z tego wynika, że trajektorie fazowe nie będą przecinać się na płaszczyźnie. Natomiast w punktach osobiwych wartość nachylenia jest równa 0 , co oznacza, że nachylenie jest nieokreślone. Dlatego w tych punktach może się przecinać wiele trajektorii, jak to widać na rys. 3.2. Ta nieokreśloność nachylenia wyjaśnia, why punkty osobiwe są bardzo ważnymi punktami na płaszczyźnie fazowej.

Punkty osobiwe, co ujawni wiele informacji o własnościach fazowej. Badanie stabilności systemów liniowych jest charakterystyczne dla układów osobiwych. Dla nelinijowych układów punkty osobliwe mogą wykazywać bardziej złożone zachowanie, takie jak cykl graniczny.

Chociaż metoda płaszczyzny fazowej jest opracowana głównie dla systemów drugiego rzędu, to może też być stosowana w analizie systemów pierwszego rzędu opisanych równaniem

$$\dot{x} + f(x) = 0$$

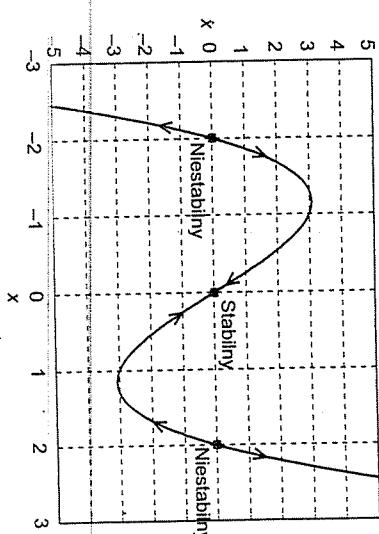
Idea jest sporządzanie wykresu \dot{x} w zależności od x na płaszczyźnie fazowej. Jedyną różnicą jest to, że portretem fazowym układu pierwszego rzędu jest pojedyncza trajektoria, a nie rodziną trajektorii, jak to ma miejsce dla układów drugiego rzędu.

PRZYKŁAD 23 (układ pierwszego rzędu)

Rozważmy układ pierwszego rzędu, który jest opisany równaniem

$$\dot{x} = -4x + x^3$$

Układ ten ma trzy punkty osobliwe zdefiniowane równaniem $-4x + x^3 = 0$, mianowicie $x = 0, -2, i 2$. Portret fazowy układu to pojedyncza trajektoria, przedstawiona na rys. 3.3. Strzałki na rysunku wskazują kierunek ruchu punktu opisującego, który to kierunek jest określony znakiem przy \dot{x} . Jest to widoczne na portrecie fazowym tego układu, którego punkt równowagi $x = 0$ jest stabilny, podczas gdy pozostałe dwa są niestabilne.



Rys. 3.3. Portret fazowy układu nieliniowego

3.2.2. Sporządzanie portretu fazowego

Obecnie portrety fazowe są zazwyczaj generowane za pomocą komputera. Oczywiście, jak było to w przypadku początków prac nad układami liniowymi, przydatna jest umiejętność szkicowania portretów fazowych lub szybkiego sprawdzania wiarygodność obliczeń komputerowych. Istnieje wiele metod tworzenia trajektorii liniowych lub nieliniowych układów na płaszczyźnie fazowej, takie jak metoda analityczna, metoda izoklin, metoda funkcji delta, metoda Lennarda i metoda Pella. W tym punkcie przedstawione zostaną dwie spośród nich, mianowicie: metoda analityczna i metoda izoklin. Metody te są wybierane głównie z powodu ich względnej prostoty. Metoda analityczna wykorzystuje analityczne rozwiązanie równań różniczkowych opisujących układ dynamiczny. Metoda izoklin jest metodą graficzną, która może być stosowana do sporządzania portretu fazowego układów, które nie mogą być rozwiązane analitycznie.

Metoda analityczna

Istnieją dwie techniki sporządzania portretu fazowego analitycznie. Obie techniki prowadzą do funkcyjnej relacji między dwoma zmiennymi na płaszczyźnie fazowej x_1 i x_2 .

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$$

$$g(x_1, x_2, c) = 0$$

Z symetrii portretu fazowego wynika też symetria nachyleń (równych co do wartości bezwzględnej, ale o przeciwnym znaku). Można obserwować następujące przypadki symetrii:

- Symetria w osi x_1 : warunkiem jest

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, -x_2)$$

Z tego wynika, że funkcja f powinna być gładka w x_2 . System sprzyjający nowego amortyzatora masy w przykładzie 21 spełnia ten warunek. Jego portret fazowy jest symetryczny w osi x_1 .

- Symetria w osi x_2 : podobnie warunkiem jest

$$f(x_1, x_2) = -f(-x_1, x_2)$$

Stąd wynika symetria względem osi x_2 . Układ spełnia ten warunek.

- Symetria względem początku układu współrzędnych: warunkiem jest

$$f(x_1, x_2) = -f(-x_1, -x_2)$$

Wtedy portret fazowy systemu jest symetryczny względem początku układu współrzędnych.

38. W wyniku narysowania tej relacji stała c reprezentuje warunki początkowe. W wyniku narysowania tej relacji na płaszczyźnie fazowej dla różnych warunków początkowych otrzymujemy orbitę fazową.

W pierwszej technice wykorzystuje się rozwiązania równań (3.1), (3.2), przy czym x_1 i x_2 są funkcjami czasu t

$$x_1(t) = g_1(t)$$

$$x_2(t) = g_2(t)$$

a wyeliminowanie czasu t z tych równań prowadzi do funkcjonalnej relacji, jak we wzorze (3.7). Ta technika była już przedstawiona w przykładzie 21.

$$x_1(t) = g_1(t)$$

$$x_1(t) = g_1(t)$$

$x_2(t) = y_{2t}$. Wyeliminowanie czasu t z tych równań prowadzi do funkcjonalnej relacji, jak we wzorze (3.7). Ta technika była już przedstawiona w przykładzie 21.

W drugiej -
accię

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$$

PRZYKŁAD 24 (układ sprężyna – masa) – masa. Czyżbyśmy mogli zauważyć, że w tym układzie mamy do czynienia z równaniem różniczkowym drugiego rzędu? Odpowiedź na ten pytanie otrzymamy, skorzystając z notacji \ddot{x} dla drugiego pochodnego zgodnie z (3.4).

$$\int_0^t x^2 dt = \frac{x^3}{3} \Big|_0^t = \frac{t^3}{3}$$

Jak widać, druga technika jest dużo prostsza w obliczaniu równań dla trajektorii na płaszczyźnie fazowej. Jednak dla wielu neliniiowych układów nie można tak łatwo znaleźć rozwiązania tego problemu przy użyciu powyżej przedstawionych technik.

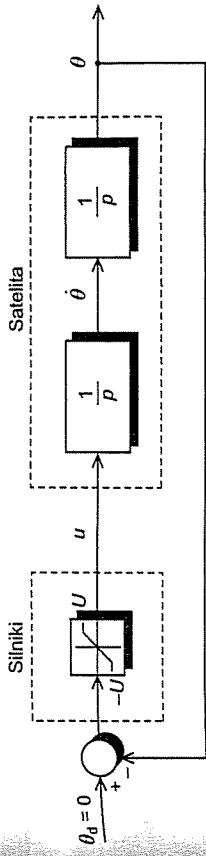
1. AD 2E (system sterowania satelity)

ability:

$\ddot{\theta} = u$
gdzie: u - moment obrotowy dostarczany przez silę ciągu, θ - kąt polożenia anteny

Rys. 3.4. System sterowania satelity

Zbadajmy na płaszczyźnie fazowej zachowanie systemu sterowania, gdy silniki są odpalane zgodnie ze sterowaniem o poniższym wzorze



Rys. 3.4. System sterowania satelity

Zbadajmy na płaszczyźnie fazowej zachowanie systemu sterowania, gdy silniki są odpalone zgodnie ze sterowaniem o poniższym wzorze

$$u(t) = \begin{cases} -U & \text{dla } \theta > 0 \\ U & \text{dla } \theta < 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

z tym, że silniki pchają przeciwnie do kierunku ruchu wskaźówek zegara, jeżeli θ jest dodatnie i odwrotnie. W pierwszym kroku tworzenia portretu fazowego rozważamy portret fazowy, gdy silnik będzie dostarczać dodatni moment obrotowy U . Wtedy dynamika systemu jest opisana zależnością

$$u(t) = \begin{cases} -U & \text{dla } \theta > 0 \\ U & \text{dla } \theta < 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Następnie rozwiążając te równania w celu uzyskania funkcjnej zależność między parametrami techniki i iloczynem jej techniki w celu rozwiązania równania układu sprzężyna

PRZYKŁAD 24 (układ sprężyna – masa) – masa. Czyżby z
osłonięciem notacji $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$, możemy przedstawić równanie (3.4) jako

scalkowaniu tego równania otrzymujemy

Jak widać, druga technika jest dużo prostsza w obliczaniu równań dla trajektorii na płaszczyźnie fazowej. Jednak dla wielu neliniiowych układów nie można tak łatwo znaleźć rozwiązania tego problemu przy użyciu powyżej przedstawionych technik.

ANSWER

Odpowiadając nam mniej faktycznie oznacza, że rozkład jasności na

Aby otrzymać portret fazowy tego liniowego układu, trzeba rozwiązać równania:

$$x(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{dla } \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad (3.13)$$

$$x(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 t e^{\lambda_1 t} \quad \text{dla } \lambda_1 = \lambda_2 \quad (3.14)$$

Gdzie stałe λ_1 i λ_2 są rozwiązaniami równania charakterystycznego

$$s^2 + as + b = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = 0$$

Pierwiastki λ_1 i λ_2 mogą być przedstawione jako

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Dla układów liniowych, opisywanych równaniem (3.12), istnieje tylko jeden punkt osobliwy (przyjmując $b \neq 0$), manowicie początek układu współrzędnych. Trajektorie w sąsiedztwie tego punktu osobliwego mogą mieć całkiem różną charakterystykę, zależną od wartości a i b . Mogą występować następujące przypadki:

1. λ_1 i λ_2 – obie wartości rzeczywiste mają ten sam znak (dodatni lub ujemny).
2. λ_1 i λ_2 – obie wartości rzeczywiste mają przeciwny znak.
3. λ_1 i λ_2 – są liczbami zespolonymi sprzężonymi z niezerową częścią rzeczywistą (dodatnia lub ujemna).
4. λ_1 i λ_2 – są liczbami zespolonymi sprzężonymi z zerową częścią rzeczywistą (dodatnia lub ujemna).

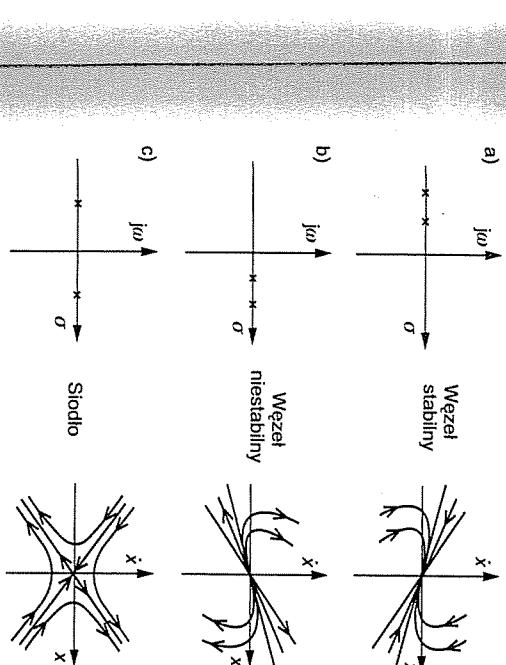
Teraz krótko omówimy każdy z powyższych czterech przypadków.

Węzeł stabilny lub niestabilny

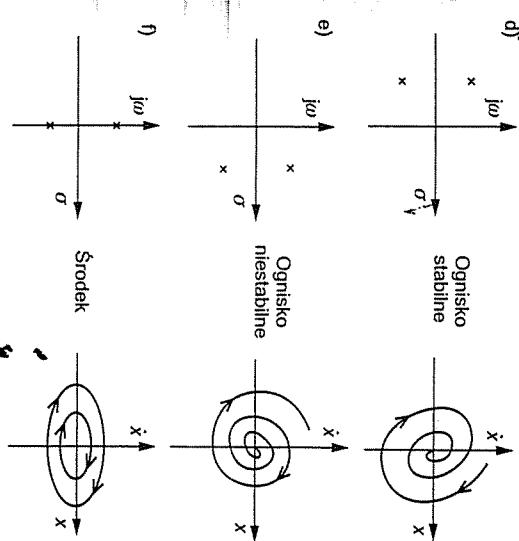
Pierwszy przypadek odpowiada punktowi zwanejmu węzłem, który może być stabilny albo niestabilny. Jeżeli obie wartości własne są ujemne, to punkt osobliwy jest nazywany węzłem stabilnym, ponieważ $x(t)$ i $\dot{x}(t)$ zbiegają się do zera wykładniczo, jak pokazano na rys. 3.8a. Jeżeli obie wartości własne są dodatnie, to punkt jest nazywany węzłem niestabilnym, ponieważ $x(t)$ i $\dot{x}(t)$ rozbiegają się wykładniczo z zera (rys. 3.8b). Gdy wartości własne są rzeczywiste, wówczas oscylacje w układzie nie występują.

Siodło

Drugi przypadek odpowiada punktowi nazywanemu siodem (rys. 3.8c). Z powodu niestabilnego bieguna λ_2 wszystkie trajektorie systemu rozbiegają się do nieskończoności. Na tym rysunku można zaobserwować dwie linie proste zaczynające się lub kończące w początku układu współrzędnych.



Rys. 3.8. Typy punktów osobliwych układów liniowych: a) węzeł stabilny, b) węzeł niestabilny, c) siodełko, d) ognisko stabilne, e) ognisko niestabilne, f) środek



Ognisko stabilne lub niestabilne

Trzeci przypadek odpowiada punktowi osobliwemu, który nazywany ogniskiem. Ognisko stabilne *zdarza się* wtedy, gdy rzeczywista część wartości własnej jest ujemna, co implikuje, że $x(t)$ i $\dot{x}(t)$ dają do zera. Trajektorie systemu w sąsiedztwie ogniska, stabilnego są przedstawione na rys. 3.8d. Można zauważyć, że trajektoria okrążą początek układu współrzędnych jeden lub więcej razy przed jego osiągnięciem, inaczej niż ma to miejsce przy węźle stabilnym. Jeżeli część rzeczywista wartości własnej jest nieujemna ognisko niestabilnym. Trajektorie odpowiadające ognisku niestabilnemu są przedstawione na rys. 3.8e.

Środek

Czwarty przypadek odpowiada punktowi osobliwemu, który nazywamy środkiem (rys. 3.8f). Nazwa pochodzi stąd, że wszystkie trajektorie są elipsami, a punkt osobliwy jest środkiem tych elips. Portret fazowy nie tlumionego układu spójrzyna – masa należy do tej kategorii.

Na rysunku 3.8 przedstawiono portrety fazowe odpowiadające wymienionym wyżej typom punktów osobliwych. Są to wszystkie istniejące typy punktów osobliwych możliwe w układzie liniowym. Można jednak jeszcze rozważyć pewne przypadki zdegenerowane, np. podwójne wartości własne ($\lambda_1 = \lambda_2$) lub o wartościach zerowych. Wymienione typy punktów osobliwych mogą występować również w układach nieliniowych, ale nie można wtedy ich łączyć z pojęciem wartości własnych, lecz z charakterystycznymi kształtami trajektorii w otoczeniu punktu osobliwego, analogicznymi do sytuacji przedstawionych na rys. 3.8.

3.2.4. Analiza układów nieliniowych metodą płaszczyzny fazowej

W analizie układów nieliniowych metodą płaszczyzny fazowej dwa punkty są szczególnie ważne. Analiza układów nieliniowych za pomocą analizy ich płaszczyzny fazowej jest związana z układami liniowymi, ponieważ lokalne zachowania układów nieliniowych może być aproksymowane przez układ liniowy. Jednak układy nieliniowe mogą przedstawić dużo bardziej skomplikowane zachowania na płaszczyźnie fazowej, takie jak wielokrotne punkty równowagi i cykle graniczne.

Lokalne zachowanie układów nieliniowych

Na portrecie fazowym (rysunek 3.2) są dwa punkty osobliwe, $(0, 0)$ i $(-3, 0)$. Można zauważyć, że cechy trajektorii fazowej w sąsiedztwie tych punktów osobliwych są bardzo podobne jak w przypadku układów liniowych. Pierwszemu punktowi odpowiada ognisko stabilne, a drugiemu punktowi odpowiada siodo. To podobieństwo do liniowych układów w okolicy każdego punktu osobliwego

może być kształtowane przez linearyzację nieliniowych układów. Jeżeli intencja nas punkt osobliwy nie jest początkiem układu współrzędnych, to wtedy tak definiujemy nowe zmienne stanu, aby punkt osobliwy znajdował się w poczatku układu współrzędnych. Dlatego można rozwijać równanie (3.1), (3.2) z pojedynczym punktem osobliwym w $\mathbf{0}$. Używając rozwinięcia w szeregu Taylora, równania (3.1) i (3.2) możemy napisać

$$\dot{x}_1 = ax_1 + bx_2 + g_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = cx_1 + dx_2 + g_2(x_1, x_2)$$

gdzie $g_1(x_1, x_2)$ i $g_2(x_1, x_2)$ zawierają wyrazy wyższych rzędów rozwinięcia w szereg. W pobliżu początku układu współrzędnych, wyrazy wyższych rzędów mogą być pominięte i dla tego trajektorie układu nieliniowego mogą być z zadowalającą dokładnością przybliżane trajektoriami odpowiadającymi liniaryzowanemu równaniu

$$\dot{x}_1 = ax_1 + bx_2$$

$$\dot{x}_2 = cx_1 + dx_2$$

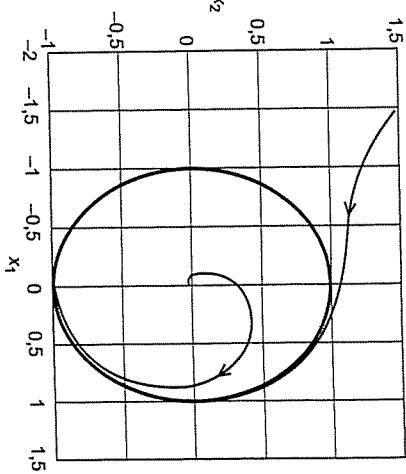
Jak widać, lokalne zachowanie układu nieliniowego może być aproksymowane przez zachowania pokazane na rysunku 3.8.

Cykły graniczne

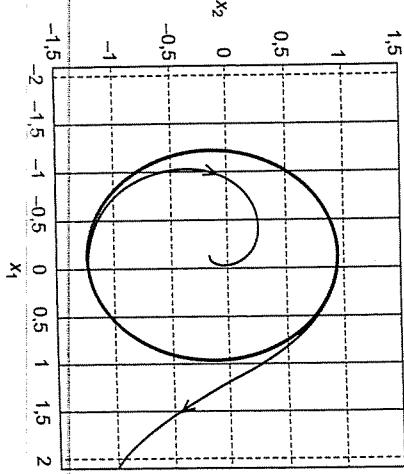
Na niektórych portretach fazowych możemy zaobserwować krzywą zamkniętą. Wszystkie trajektorie wewnętrzne zamkniętej krzywej zmierzają ku niej, a gdy ruch punktu opisującego zaczyna się na tej zamkniętej krzywej, wówczas będzie pozostawać na niej, krając okresowo dokoła początku układu współrzędnych. Ta krzywa jest przykładem tzw. zjawiska cyklu granicznego. Jest on unikalną cechą układów nieliniowych.

Na płaszczyźnie fazowej cykl graniczny jest definiowany jako izolowana zamknięta krzywa. Trajektoria musi być zamknięta – określa to okresowa natura ruchu, i izolowana – określa to ograniczającą naturę cyklu (pochłaszczenie trajektorie na zewnątrz krzywej zmierza ją ku niej, a gdy ruch punktu opisującego zaczyna się na tej zamkniętej krzywej, wówczas będzie pozostawać na niej, krając okresowo dokoła początku układu współrzędnych). Ta krzywa jest przykładem tzw. zjawiska cyklu granicznego. Jest on unikalną cechą układów nieliniowych.

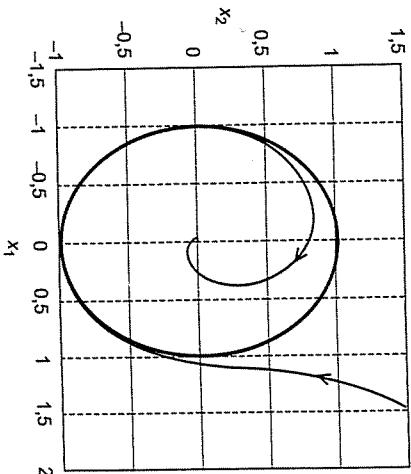
1. Cykl graniczny stabilny: wszystkie trajektorie w sąsiedztwie cyklu granicznego są zbieżne do niego przy $t \rightarrow \infty$ (rys. 3.9).
2. Cykl graniczny niestabilny: wszystkie trajektorie w sąsiedztwie cyklu granicznego są rozbieżne od niego przy $t \rightarrow \infty$ (rys. 3.10).
3. Cykl graniczny półstabilny: niektóre z trajektorii w sąsiedztwie dają do niego, podczas gdy inne rozbiegają się od niego przy $t \rightarrow \infty$ (rys. 3.11).



Rys. 3.9. Cykl graniczny stabilny (trajektorie zbieżne – linia cienka, cykl graniczny – linia pogrubiona)



Rys. 3.10. Cykl graniczny nie-stabilny (trajektorie rozbieżne – linia cienka, cykl graniczny – linia pogrubiona)



Rys. 3.11. Cykl graniczny pół-stabilny

3.2.5. Podsumowanie

Analiza metodą płaszczyzny fazowej jest graficzną metodą analizy układów dynamicznych drugiego rzędu. Dużą zaletą tej metody jest to, że pozwala wizualnie analizować globalne zachowanie systemów. Główną wadą jej jest to, że jest ograniczona do systemów drugiego rzędu, chociaż rozszerzenie jej do analizy układów trzeciego rzędu jest często dokonywane za pomocą grafiki komputerowej. Zjawiska takie jak wielokrotne punkty równowagi lub cykle graniczne są bardzo dobrze widoczne w analizie metodą płaszczyzny fazowej.

3.2.6. Jak to zrobić w MATLAB-ie

Nieliniowe równania różniczkowe ze względu na ogólną różnorodność nie docząkły się tak łatwych i wygodnych w obsłudze narzędzi, jakie stworzono do analizy liniowych równań różniczkowych. W tym punkcie omówione będą podstawowe narzędzia, które oferuje MATLAB do rozwiązywania nieliniowych równań różniczkowych. Dzielą się one na trzy kategorie: funkcje rozwiązyjące równania, funkcje do zarządzania opcjami i funkcje do rysowania otrzymywanych rozwiązań. Dwie najważniejsze funkcje z pierwszej grupy to `ode23` oraz `ode45`. Niżej zostanie opisana pierwsza z nich.

FUNKCJA ODE23:

Funkcja rozwiązuje równania różniczkowe metodą niższego rzędu.
 $[T, Y] = \text{ODE23}(\text{ODEFUN}, \text{TSPAN}, Y_0)$ całkuje układ równań różniczkowych

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t)$$

w przedziale od T_0 do T_f z warunkami początkowymi Y_0 , gdzie $\text{TSPAN} = [T_0 \ T_f]$. Funkcja `ODEFUN(T, Y)` powinna zwracać wektor kolumnowy odpowiadający $f(y, t)$, czyli powinna zwracać wartości pochodnych rozwiązywanego układu równań różniczkowych. Każda wartość rozwiązania Y opowiada pewnej chwili, która jest zapisana w odpowiednim wierszu wektora T . Funkcja może zwrócić rozwiązania równań dla pewnych, dowolnie wybranych chwil. W tym celu wektor TSPAN należy przedstawić w postaci T_0, T_1, \dots, T_f , czyli podając kolejne chwile, w których ma być zwrocone rozwiązanie. Chwile muszą być uporządkowane w sposób rosnący lub malejący.
 $[T, Y] = \text{ODE23}(\text{ODEFUN}, \text{TSPAN}, Y_0, \text{OPTIONS})$ całkuje układ równań różniczkowych, wykorzystując ustawienia podane w parametrze o nazwie `OPTIONS`, które to ustawienia tworzy się za pomocą funkcji `ODESET`.
 $[T, Y] = \text{ODE23}(\text{ODEFUN}, \text{TSPAN}, Y_0, \text{OPTIONS}, P_1, P_2, \dots)$ całkuje układ równań różniczkowych, przekazując do funkcji `ODEFUN` dodatkowe parametry P_1, P_2, \dots

Kolejne funkcje są przeznaczone do zarządzania sposobem pracy funkcji `ode23` i innych funkcji rozwiązujących nieliniowe równanie różniczkowe.

FUNKCJA ODESET:

Funkcja tworzy strukturę typu `ODE OPTIONS` przeznaczoną do przekazania opcji do rozwiązywania nieliniowych równań różniczkowych za pomocą funkcji `ode23` lub funkcji pokrewnych.

OPTIONS = ODESET('NAME1','VAL1','NAME2','VAL2',...) tworzy strukturę, w której właściwości `NAME1`, `NAME2`, ... przyjmują odpowiednio wartości `VAL1`, `VAL2`, ... Właściwości, których wartości nie podano, przyjmują wartości domyslne.

Niżej podano nazwy niektórych właściwości struktury parametrów tworzonej przez funkcję `ODESET`.

- `RelTol` – błąd względny (domyślnie 10^{-3}). Błąd całkowania $e(i)$ w każdym kroku spełnia zależność

$$e(i) \leq \max(\text{RelTol} * |y(i)|, \text{AbsTol}(i))$$

- `AbsTol` – błąd bezwzględny (domyślnie 10^{-6}).
- `OutputFcn` – wyjściowa funkcja zewnętrzna (domyślnie brak funkcji). Po każdym kroku całkowania funkcja jest wywoływana w celu przetworzenia wyników obliczeń w danym kroku. Najczęściej polega to na umieszczeniu wyników obliczeń na wykresie.
- `Stats` – wyświetlanie kosztów obliczeń (domyślnie 'off').
- `MaxStep` – górne ograniczenie kroku całkowania. Domyślnie zakłada się, że jest to dziesiąta część kroku próbkiowania wektora czasu podanego w argumentcie funkcji rozwiązującej równania.

FUNKCJA ODEGET:

Funkcja pobiera wartość określonej właściwości ze struktury `ODE OPTIONS`. **VAL = ODEGET(OPTIONS,'NAME')** podaje wartość właściwości o nazwie `NAME`. Jeżeli wartość nie jest określona, to wtedy zmienią `VAL` jest pusta.

VAL = ODEGET(OPTIONS,'NAME','DEFAULT') działa jak opisano wyżej, zwracając `DEFAULT` w przypadku braku wartości właściwości.

FUNKCJA ODEPLOT:

Funkcja wykorzystywana do rysowania rozwiązań różniczkowych w czasie działania funkcji rozwiązywającej. Nazwa tej funkcji jest przekazywana jako wartość parametru `OutputFcn`. Jeżeli ta funkcja zostanie przypisana do właściwości `OutputFcn` struktury parametrów za pomocą funkcji `ode23`.

Po przekształceniu układu równań różniczkowych pierwszego rzędu do napisania funkcji typu `ODEFUN`, mianowicie

to wtedy funkcja rozwiązyająca równania różniczkowe będzie ją wywoływać każdorazowo po wyznaczeniu nowego rozwiązania w następujący sposób:

`ODEPLOT(T,Y,,')`

FUNKCJA ODEPHAS2:

Funkcja działa na tych samych zasadach co `ODEPLOT`, z tym że rysuje dwuwymiarową charakterystykę fazową fazową pierwsiach dwóch składników (zmiennych stanu) rozwiązania.

FUNKCJA ODEPHAS3:

Funkcja działa na tych samych zasadach co `ODEPHAS2`, z tym że rysuje trójwymiarową charakterystykę fazową pierwsiach trzech składników (zmiennych stanu) rozwiązania.

FUNKCJA ODEPRINT:

Funkcja działa na tych samych zasadach co poprzednie funkcje przeznaczone do prezentacji wyników, z tym że wszystkie otrzymane wyniki są wypisywane w oknie polecenia.

Kilka słów teraz na temat konstruowania funkcji wcześniejszej określonej ogólnie jako `ODEFUN`. Zasada konstrukcji funkcji tego typu jest prosta i najlepiej jest ją omówić na przykładzie. Weźmy klasyczne równanie różniczkowe van der Pola

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - \mu \left(1 - y(t)^2\right) \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0 \quad (3.15)$$

Równanie to należy doprowadzić do postaci, w której występuje tylko pierwsza pochodna pewnej funkcji. W związku z tym wykonamy podstawienie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &= y_2(t) \\ y(t) &= y_1(t) \end{aligned}$$

Dzięki temu można równanie różniczkowe drugiego rzędu (3.15) zapisać w nowej mniej postaci układu równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$\frac{d}{dt}y_1(t) = y_2(t)$$

$$\frac{d}{dt}y_2(t) = \mu \left(1 - y_1(t)^2\right) y_2(t) - y_1(t)$$

Dopiero równania w tej postaci można rozwiązywać za pomocą funkcji `ode23`.

```

function dydt = vdp1(t,y)
%VDP1 Evaluate the van der Pol ODEs for mu = 1
%
% See also ODE113, ODE23, ODE45.
% Jacek Kierzenka and Lawrence F. Shampine
%
% Copyright 1984-2001 The MathWorks, Inc.
%
% $Revision: 1.4 $ $Date: 2001/04/15 12:03:19 $
%
dydt = [y(2), (1-y(1)^2)*y(2)-y(1)];

```

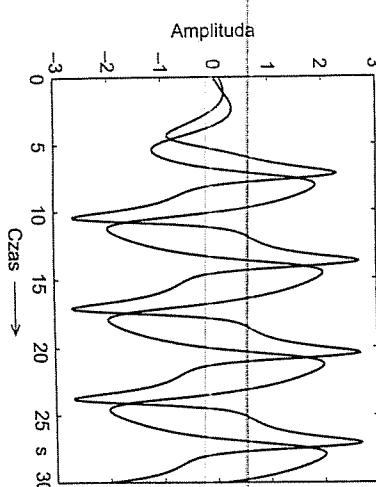
Funkcja przedstawiona wyżej jest standardowo dostarczana z MATLAB-em. Widać, że ma ona bardzo prostą konstrukcję. Jej zadaniem jest zwracanie wartości pochodnych $\frac{dy_1}{dt}y_1(t)$ i $\frac{dy_2}{dt}y_2(t)$. Parametrami pobieranymi przez funkcję muszą być chwile t oraz wartości funkcji rozwiązania y w chwili t.

Po wykonaniu polecenia

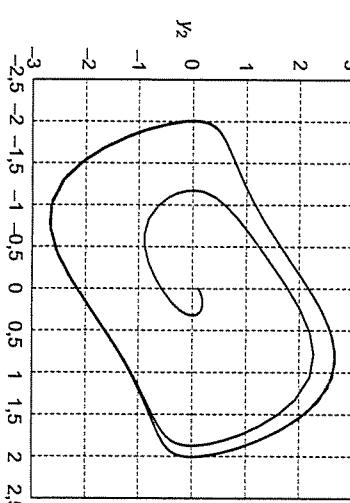
```
[t,y]=ode23('vdp1',[0 30],[0 0.1]);
```

otrzymamy w wektorze t ciąg chwil, w których jest określone rozwiązanie y.

W celu otrzymania odpowiedniego wykresu można skorzystać z polecenia plot(t,y); które spowoduje narysowanie wykresu (rys. 3.12).



Rys. 3.12. Przykładowe rozwiązania równania van der Pola



Rys. 3.13. Trajektoria fazowa równania van der Pola dla zadanych warunków początkowych

W kolejnym przykładzie zbadamy model dynamiczny stworzony przez Lorenza, np. pewne procesy dynamiczne w atmosferze. Model dla pewnych wartości parametrów jest następujący:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -10x + 10y \\ \frac{dy}{dt} &= -24,74x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= 8z - xz\end{aligned}\quad (3.16)$$

PRZYKŁAD 27

Wyznaczmy trajektorię fazową modelu opisanego równaniem (3.16) dla warunków początkowych $x(0) = 0, y(0) = 0,1, z(0) = -0,2$.

W pierwszej kolejności tworzymy funkcję, która będzie zwracać w odpowiedzi na wywołanie przez funkcję ODE23 wartości pochodnych poszczególnych zmiennych występujących w równaniach (3.16). Ze względów technicznych należy wykonać następującą zamianę zmiennych:

$$y_1(t) = x(t)$$

$$y_2(t) = y(t)$$

$$y_3(t) = z(t)$$

Dla równania (3.15) oraz warunków początkowych $\frac{dy}{dt}y(0) = 0,1$ oraz $y(0) = 0$ wyznaczmy trajektorię fazową w przedziale czasu od 0 do 30 [s] (rys. 3.13). W tym celu tworzymy strukturę zawierającą parametry symulacji, w której określany, że wyniki obliczeń mają być wykreślone na płaszczyźnie fazowej i następnie rozwiązujemy równania.

```
opcje = odeset('OutputFcns','odephas2');
[t,y]=ode23('vdp1',[0 30],[0 0.1],opcje);
```

Po wykonaniu zamiany zmiennych można łatwo napisać funkcję, nazwijmy ją Lorenz, która będzie dostarczać funkcji ODE23 niezbędnych danych do rozwiązania układu równań (3.16)

```
function dydt=Lorenz(t,y)
```

```
dydt = [10*(y(2)-y(1)); -24.74*y(1)-y(2)*y(3);  
2.6667*y(3)+y(1)*y(3)];
```

Po zapisaniu funkcji Lorenz można przystąpić do obliczenia rozwiązań równań (3.16) w przedziale czasu od 0 do 10 [s]. W zmienniej opcji należy zasygnować, że trajektoria ma być wykreślona w przestrzeni trójwymiarowej, tj.

```
opcje = odeset('OutputFcn','odephas3');
```

Polecenie

```
[t,y]=ode23('Lorenz',[0 10],[0 0.1 -0.2],opcje);
```

uruchomiu funkcję ODE23, która rozwiąże i wykresli odpowiednią trajektorię w przestrzeni trójwymiarowej (rys. 3.14).

4.1. Stabilność układów dynamicznych

4.1.1. Pojęcia związane ze stabilnością

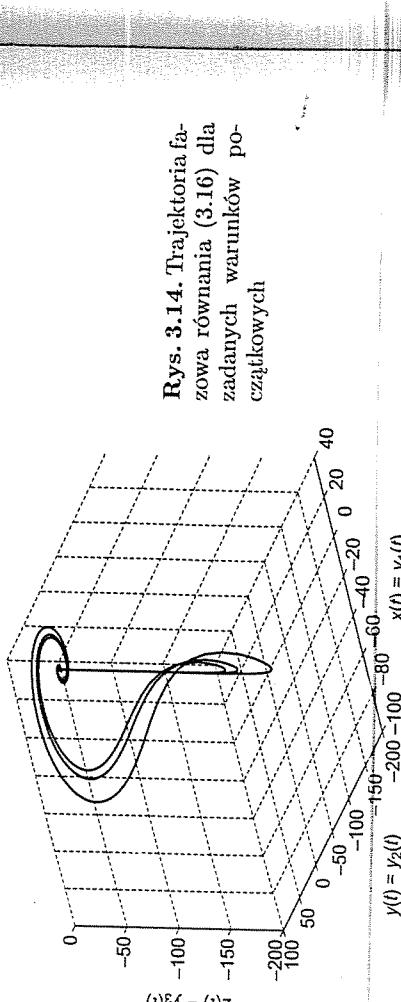
Pojęcia związane ze stabilnością modeli liniowych układów dynamicznych przedstawione będą najpierw w odniesieniu do modelu zmiennych stanu, następnie w odniesieniu do modelu typu wejście-wyjście.

Czy to znaczy, że układ dynamiczny jest stabilny?

Pojęcie stabilności jest intuicyjnie wyczuwalne przez każdego z nas. Jeżeli o obiekcie mówimy, że jest stabilny, to najczęściej oznacza, że obiekt ten wytrącony ze stanu równowagi przez czynniki zewnętrzne (oczywiście w pewnym zakresie wartości) do tego stanu powraca po zniknięciu wpływu czynników, które wytrączy go ze stanu równowagi. Na przykład większość budynków uważa się za stabilne, ponieważ zwykle podmuch wiatru nie jest w stanie zmienić położenia budynku. Rzecz jasna, że silniejsze podmuchy wiatru powodują, nawet kilkumetrowe odchylenia od pionu wysokich budynków, ale gdy wiatr ucichnie wraca ją do pozycji wyjściowej (czyli pozycji pionowej), którą można traktować jako stan równowagi. Przykładów takich można podać bardzo wiele. Istotę ich wszystkich – z punktu widzenia stabilności – jest fakt, że obiekt po wytrąceniu go ze stanu równowagi do tegoż stanu powraca.

Czym jest stan równowagi?

Wprowadzone w poprzednim podpunkcie pojęcie stanu równowagi wymaga dodatkowych kilku słów komentarza. Gdyby przyszło określić własnymi słowami pojęcie stanu równowagi, to znaczna część uczestniczących w takiej ankiecie udzieliłaby odpowiedzi: stan równowagi to stan, w którym nic się nie dzieje. Jest to określenie bardzo ogólnie i wymaga sprecyzowania oraz przełożenia na język matematyki, którym się posługujemy w opisie funkcjonowania układów



Rys. 3.14. Trajektoria fazowa równania (3.16) dla zadanych warunków początkowych

Identyczny rezultat można uzyskać za pomocą następującej sekwencji polecen:

```
[t,y]=ode23('Lorenz',[0 10],[0 0.1 -0.2]);  
plot3(y(:,1),y(:,2),y(:,3));  
grid;
```

Pozostaje w tym przypadku jedynie dodać opisy osi, co można wykonać za pomocą polecen

```
xlabel('x(t)=y_1(t)');  
ylabel('y(t)=y_2(t)');  
zlabel('z(t)=y_3(t)');
```

□

dynamicznych. Jak wyrazić inaczej stwierdzenie, że nic się nie dzieje? Innymi słownami: jak wyrazić w kontekście modelu matematycznego fakt, że nie następuje w nim zmiana wielkości opisujących dynamikę układu? Odpowiedź na to pytanie będzie udzielona na przykładzie modelu zmiennych stanu, który na ogół opisuje dynamikę układu w dziedzinie zmiennej rzeczywistej. Jeżeli wektor x reprezentuje zmienne stanu oznaczony przez x , to brak dynamiki w układzie ciągłym można wyrazić za pomocą następującego równania:

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad (4.1)$$

Przeprowadzone rozważania można podsumować w postaci następującej definicji.

DEFINICJA 44
Punkty w przestrzeni zmiennych stanu modelu układu dynamicznego ciągłego, dla których jest spełniona zależność (4.1) dla każdej chwili t nazywamy punktami równowagi tego układu.

W podobny sposób można przeprowadzić rozważania dla układów dyskretnych, opisanych modelem zmiennych stanu. Brak dynamiki w układzie dyskretnym objawia się spełnieniem następującej zależności:

$$(4.2)$$

$$x_{n+1} = x_n \quad \text{dla } n \geq k$$

w której n – pewna chwila dyskretna, k – pewna chwila dyskretna, w której układ dyskretny osiąga stan równowagi.

Przez analogię definiuje się punkt równowagi dla układu dyskretnego.

DEFINICJA 45
Punkty w przestrzeni zmiennych stanu modelu układu dynamicznego dyskretnego, dla których jest spełniona zależność (4.2) dla każdej chwili dyskretnej t nazywamy punktami równowagi tego układu.

Pojęcia stabilności i punktu równowagi w kontekście ciągłego modelu zmiennych stanu

Przytoczone wyżej opisy, stanowiące próbę zobrazowania dwóch najważniejszych pojęć związanych z zagadniением stabilności, zostaną teraz sformułowane bardziej precyzyjnie w odniesieniu do modelu zmiennych stanu. Zbadanie stabilności modelu zmiennych stanu rozpatruje się przy braku sygnału wymuszenia, jedynie dopuszcza się istnienie niezerowych warunków początkowych. Zatem równania zmiennych stanu redukują się do następującej postaci:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t), \quad x(0) = x_0 \quad (4.3)$$

gdzie: $x(t)$ – wektor zmiennych stanu, x_0 – wektor warunków początkowych zmiennych stanu, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – macierz współczynników opisująca strukturę układu liniowego i parametry elementów ten układ tworzących.

Przyzyczyną definicja punktu równowagi liniowego modelu zmiennych stanu jest następująca.

DEFINICJA 46

Punkt x_r , dla którego $Ax_r = 0$ dla wszystkich chwil $t \geq 0$, nazywamy punktem równowagi modelu opisanego równaniem (4.3).

Na podstawie równania (4.1) i definicji 46 poszukiwanie punktów równowagi autonomicznej (nie poddanego działaniu wymuszenia) modelu zmiennych stanu (4.3) polega na rozwiązyaniu równania

$$Ax_r = 0 \quad (4.4)$$

Jeżeli $\det A \neq 0$, to układ opisany równaniem (4.3) ma dokładnie jeden punkt równowagi, w przeciwnym razie punktów równowagi jest nieskończoność wiele (sciszlej: jest to ilość niepreliczalna). Naturalne jest pytanie, czy znaleźć punktu równowagi oznacza, że model zmiennych stanu opisujący układ jest modelem stabilnym? Odpowiedź brzmi: nie. Istnieje kilka rodzajów punktów równowagi, dlatego decyzja o stabilności modelu nie może być podjęta tylko i wyłącznie na podstawie istnienia punktów równowagi. Niech ilustracją będzie tutaj przykład wahadła odwróconego, które ma jeden koniec zamocowany do podstawy. W przypadku tego układu da się wyrobić dwa położenia (punkty) równowagi. Jeden z punktów równowagi ma tę własność, że nawet niewielkie wybranie wahadła z tego położenia powoduje, że zaczyna ono przewracać się i nie powraca do położenia wyjściowego. To położenie wahadła jest punktem równowagi według równania (4.1), ale nie jest to położenie stabilne. Drugie z możliwych położen równowagi (swobodne zwisanie wahadła) również spełnia równanie (4.1), z tym że wybranie wahadła z tego położenia równowagi powoduje jego powrót do tego położenia. Mamy zatem w tym przypadku dwa punkty równowagi, z czego jeden jest stabilny, drugi nie. Ten prosty przykład pokazuje, że definicja określająca stabilność modelu zmiennych stanu, oprócz istnienia punktów równowagi, musi obejmować również ich charakterystykę.

DEFINICJA 47

Punkt równowagi x_r nazywamy stabilnym, jeżeli dla każdej liczby dodatniej ϵ można dobrać taką liczbę η , że trajektoria fazowa układu rozpoczęta w punkcie x_0 , leżącym wewnątrz kuli o promieniu η , pozostała wewnątrz kuli o promieniu ϵ dla dowolnej chwili $t \geq 0$.

4. Własności układów

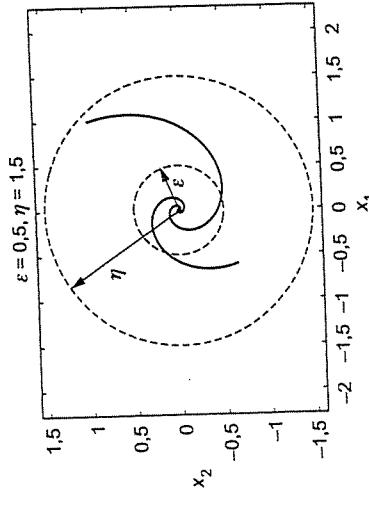
4.1. Stabilność układów dynamicznych

PRZYKŁAD 28

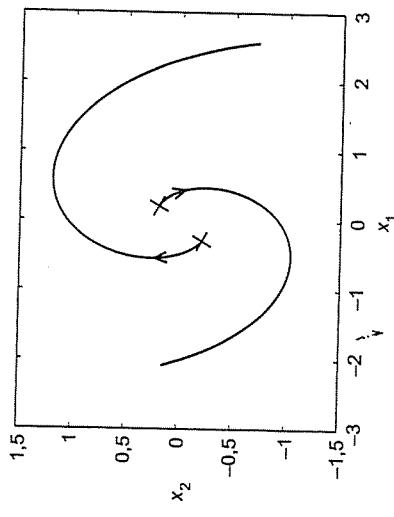
Nizzej zamieszczono wykresy fazowe (rys. 4.1) autonomicznego liniowego układu dynamicznego opisanego równaniem

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} -0,5 & 1 \\ 1 & -0,5 \end{bmatrix} x(t)$$

dla kilku warunków początkowych (rys. 4.3).



Rys. 4.1. Trajektorie fazowe modelu stabilnego



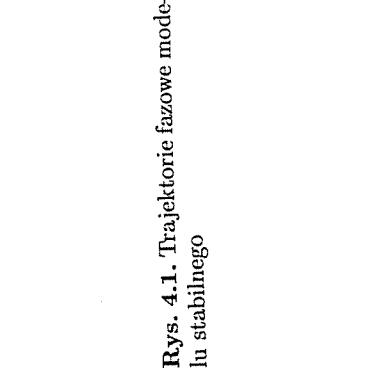
Rys. 4.3. Trajektorie fazowe modelu niestabilnego

PRZYKŁAD 29

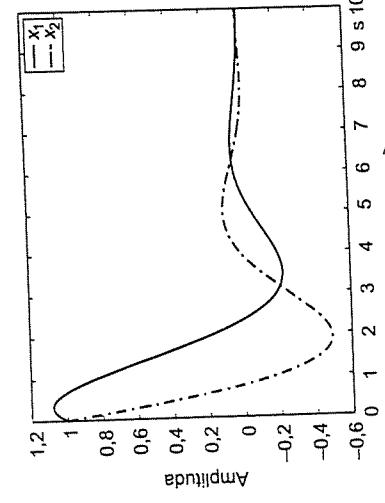
W tym przykładzie pokazano wykresy fazowe autonomicznego liniowego układu dynamicznego opisanego równaniem

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0,5 & 1 \\ 1 & 0,5 \end{bmatrix} x(t)$$

dla kilku warunków początkowych (rys. 4.3).



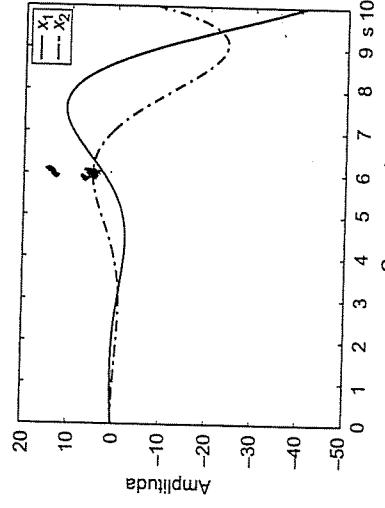
Rys. 4.2. Zmiany wartości zmiennych stanu w funkcji czasu



Rys. 4.4. Zmiany wartości zmiennych stanu w funkcji czasu

Na wykresie widać, że liniowy model rozpatrywanego układu ma punkt równowagi $x_r = 0$. Co więcej, jest to stabilny punkt równowagi zgodnie z definicją 4.7, ponieważ można dobrze tak stać c.i. η , aby pokazane na wykresie trajektorie fazowe zawierały się wewnątrz kuli o promieniuach ϵ, η . Środki obu kuli są umieszczone w punkcie równowagi $x_r = 0$. Nizzej zamieszczono wykres ilustrujący zmiany w czasie zmiennych stanu dla warunków początkowych $x_1(0) = x_2(0) = 1$ (rys. 4.2).

Punkty początkowe trajektorii fazowych dla łatwiejszej interpretacji wykresu zaznaczono znakiem x . Omawiany układ ma jeden punkt równowagi $x_r = 0$. Punkt ten jest niestabilny według definicji 4.7, ponieważ nie można ustalić liczb ϵ i η takich, aby kula o tych promieniach zawierała w całości trajektorie fazowe modelu dla $t \geq 0$. Trajektorie pokazane na rysunku w miarę upływu czasu t oddalażą się od punktu równowagi x_r do nieskończoności, co wskazuje, że punkt ten jest punktem równowagi chwiliowej. Nizzej zamieszczono wykres ilustrujący zmiany w czasie zmiennych stanu dla warunków początkowych $x_1(0) = 1$ i $x_2(0) = 1$ (rys. 4.4).



Rys. 4.3. Zmiany wartości zmiennych stanu w funkcji czasu

□

Na zakończenie tego punktu zdefiniowane zostanie jeszcze jedno pojęcie.

DEFINICJA 48

Punkt równowagi x_r nazywamy stabilnym asymptotycznie, jeżeli:

- punkt x_r jest stabilny w sensie definicji 47,
- $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_r$.

PRZYKŁAD 30

Obliczymy wartości własne macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Przedmiotem uwagi w rozważaniach na temat stabilności modelu dyskretnego będzie, podobnie jak w przypadku modelu ciągłego, układ nie poddany działaniu wymuszenia przy niezerowych warunkach początkowych

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_n, \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

gdzie: \mathbf{x}_n – wektor zmiennych stanu w chwili czasu dyskretnego n , \mathbf{x}_{n+1} jest wektorem zmiennych stanu w następnej chwili czasu dyskretnego, \mathbf{x}_0 – wektor warunków początkowych zmiennych stanu, \mathbf{A} – macierz współczynników opisująca strukturę układu liniowego i parametry elementów tworzących ten układ.

DEFINICJA 49

Punkt x_r , dla którego $\mathbf{A}\mathbf{x}_r = \mathbf{x}_r$ dla wszystkich chwil czasu dyskretnego $t \geq 0$, nazywamy punktem równowagi modelu opisanego równaniem (4.5).

Na podstawie równania (4.2) i definicji 49 poszukiwanie punktów równowagi autonomicznego modelu zmiennych stanu (4.5) polega na rozwiązyaniu równania o następującej postaci:

$$(4.6) \quad 0 = (\mathbf{A} - 1)\mathbf{x}$$

Jeżeli $\det(\mathbf{A} - 1) \neq 0$, to układ opisany równaniem (4.5) ma dokładnie jeden punkt równowagi, w przeciwnym razie punktów równowagi jest nieskończoność wiele. Definicja punktu równowagi stabilnego i punktu równowagi stabilnego asymptotycznie pozostaje taka sama, jak dla układów ciągłych, z wyjątkiem zmiany dziedziny czasu ciągłego na czas dyskretny.

Wartości własne macierzy

Przed zapoznaniem się z metodami badania stabilności warto przypomnieć kilka podstawowych wiadomości na temat wartości własnych macierzy, które podano w dodatku A. Jak się okaze w następnych punktach, wartości własne

odgrywają istotną rolę w rozważaniach na temat stabilności modelu zmiennych stanu. Pierwszym wnioskiem, jaki wynika z analizy definicji wartości własnych jest wniosek, że macierz kwadratowa o wymiarze n ma dokładnie n wartości własnych. Jest tak, ponieważ wielomian charakterystyczny danej macierzy jest wielomianem stopnia n . Jak wiadomo z algebry, wielomian stopnia n ma dokładnie n pierwiastków. Rozpatrzmy poniższy przykład.

$$\begin{aligned} \det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right) &= \det \left(\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 3 & \lambda - 4 \end{bmatrix} \right) = \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 4) - 6 = \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0 \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu tego równania otrzymujemy wartości własne macierzy \mathbf{A} , mianowicie $\lambda_1 = -0,3723$, $\lambda_2 = 5,3723$. \square

W przypadku macierzy stopnia większego niż 2 wyznaczenie wartości własnych jest pracochłonne i żmudne. Dodatkowo zachodzi konieczność znajdowania pierwiastków wielomianu stopnia większego niż 2, co nie jest zadaniem prostym już dla wielomianów stopnia 3 i 4, a dla $n > 4$ nie istnieją zależności analityczne określające wartości własne w funkcji elementów macierzy. Takie przypadki można rozwiązywać jedynie za pomocą metod numerycznych.

4.1.2. Badanie stabilności liniowych układów ciągłych

Cel wprowadzenia kryteriów stabilności

Kryteria stabilności są wprowadzane w celu uproszczenia projektantowi odpowiedzi na pytanie o stabilność stworzonego modelu matematycznego układu. Dzięki wykorzystaniu opisanych poniżej kryteriów stabilności można na podstawie struktury i parametrów modelu stwierdzić, czy układ jest stabilny, bez konieczności rozwiązywania równań modelu lub wykonywania badań symulacyjnych.

Warunki konieczne i dostateczne stabilności układów ciągłych

Wyznaczenie warunków koniecznych i dostatecznych stabilności asymptotycznej można wykonać na podstawie analizy ogólnego rozwiązania równania zmiennych stanu autonomicznego układu liniowego opisanego równaniem (4.3). Roz-

wiązanie to w dziedzinie czasu przedstawia następujący wzór:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^r \left(\mathbf{A}_{k1} + \mathbf{A}_{k2}t + \cdots + \mathbf{A}_{km_k} t^{m_k-1} \right) e^{\lambda_k t} \mathbf{x}_0 \quad (4.7)$$

gdzie: r – rzad modelu, λ_k – k -ta wartość własna macierzy \mathbf{A} , m_k – krotność k -tej wartości własnej macierzy \mathbf{A} , \mathbf{A}_{kj} dla $j = 1, \dots, m_k$ – macierze stałych współczynników.

Do przeprowadzenia analizy składników sumy z równania (4.7) bardzo pomocna jest następująca zależność:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^p \left| e^{\lambda_k t} \right| = \begin{cases} 0 & \text{dla } \operatorname{Re} \lambda_k < 0 \text{ i skońzonego } p \\ 1 & \text{dla } \operatorname{Re} \lambda_k = 0 \text{ i } p = 0 \\ \infty & \text{dla } \operatorname{Re} \lambda_k \geq 0 \text{ i } p > 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

Wykorzystując zależności (4.7) i (4.8), można udowodnić następujące twierdzenie, które jest zasadniczym narzędziem pozwalającym rozstrzygnąć o stabilności liniowego układu ciągłego.

TWIERDZENIE 1

Autonomiczny ciągły układ liniowy opisany równaniem (4.3) jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, macierzy systemowej \mathbf{A} mają niedodatnie części rzeczywiste, a każda wartość własna o zerowej części rzeczywistej jest wartością własną jednokrotną.

Ze wzorów (4.7) i (4.8) wynika, że jeżeli założenia twierdzenia są spełnione, to wszystkie składowe wektora $\mathbf{x}(t)$ są ograniczone dla wszystkich $t > 0$. Jeżeli założenia te nie są spełnione, to przyjmniej jedna składowa wektora $\mathbf{x}(t)$ rośnie do nieskończoności dla $t \rightarrow \infty$. W tym przypadku układ jest niestabilny. O asymptotycznej stabilności układu opisanego równaniem (4.3) pozwala zdecydować poniższe twierdzenie.

TWIERDZENIE 2

Autonomiczny ciągły układ liniowy opisany równaniem (4.3) jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ macierzy systemowej \mathbf{A} mają ujemne części rzeczywiste, czyli

$$\operatorname{Re} \lambda_k < 0 \quad \text{dla } i = 1, \dots, r \quad (4.9)$$

PRZYKŁAD 31
Sprawdzimy stabilność asymptotyczną modelu układu, którego macierz \mathbf{A} , nazywana również systemową, ma postać

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,1 & 1 \\ 1 & 0,1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Wartości własne tej macierzy są następujące: $\lambda_1 = 0,1 + i$, $\lambda_2 = 0,1 - i$. Na podstawie twierdzenia 2 stwierdzamy, że model układu o podanej macierzy jest modelem niestabilnym, tj. co najmniej jedna z wartości własnych tej macierzy ma nieujemną część rzeczywistą. \square

4.1.3. Kryteria stabilności układów ciągłych

W tym punkcie zostaną przedstawione najważniejsze kryteria, pozwalające określić stabilność układów liniowych ciągłych. Istotą zastosowania tych kryteriów jest określenie położenia pierwiastków równania charakterystycznego, na podstawie znajomości współczynników tego równania bez konieczności analitycznego lub numerycznego wyznaczania pierwiastków. Omówione niżej kryteria nie pozwalają stwierdzić, gdzie dokładnie znajdują się pierwiastki, ale pozwalają dowiedzieć się, czy wszystkie pierwiastki znajdują się w stabilnej (lewej) części płaszczyzny zespolonej, czy też nie. Z punktu widzenia projektanta układu badającego stabilność taką informację jest wystarczająca.

Równanie charakterystyczne modelu ciągłego

Załóżmy, że transmisancja modelu typu wejście-wyjście jest dana wzorem

$$T(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (4.10)$$

gdzie m i n są odpowiednio stopniami wielomianu licznika oraz mianownika, a wielomiany $L(s)$ i $M(s)$ nie mają wspólnych czynników (tj. nie można wykonać skrócenia).

DEFINICJA 50

Równanie

$$M(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

nazywamy równaniem charakterystycznym modelu układu opisanego założeniami (4.10). Wielomian $M(s)$ nazywamy wielomianem charakterystycznym.

Dla przypomnienia: pierwiastki równania (wielomianu) charakterystycznego nazywa się biegunkami modelu lub krótko *biegunami*.
Załóżmy, że model zmiennych stanu jest dany następującym wzorami:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

gdzie: $x(t)$ – wektor zmiennych stanu; $u(t)$ – sygnał wymuszenia; $y(t)$ – sygnał wyjściowy; n – rząd modelu lub równoważne liczba zmiennych stanu; m – liczba wejść modelu; p – liczba wyjść modelu; macierze $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

DEFINICJA 51

Równanie

$$\det[\mathbb{I}\lambda - A] = 0$$

nazywamy równaniem charakterystycznym układu, którego model opisuje równania (4.11). Wielomian $\det[\mathbb{I}\lambda - A]$ nazywamy wielomianem charakterystycznym.

Obie definicje opisują równanie charakterystyczne. Różnica między nimi polega jedynie na sposobie wyznaczania równania charakterystycznego, co zależy od typu modelu, który jest dany.

Kryterium Hurwitz'a

Pierwszym kryterium stabilności, które zostanie przedstawione, będzie analtyczne kryterium Hurwitz'a. Na podstawie tego kryterium można bez rozwiązywania równania charakterystycznego modelu, czyli znajdowania biegunków, stwierdzić, czy model układu jest stabilny asymptotycznie, czy też nie. Wprowadzenie tego kryterium znacznie uproszczało badanie stabilności modelu. Dzięki niemu można zdecydować o stabilności modelu, ale nie można powiedzieć nic na temat wartości biegunków z wyjątkiem tego, że wszystkie znajdują się w lewej półpłaszczyźnie zmienniej zespolonej.

TWIERDZENIE 3

Wszystkie pierwiastki (bieguny) równania charakterystycznego modelu (4.10) będą zmiadować się w lewej półpłaszczyźnie zmienniej zespolonej, jeżeli zostaną spełnione następujące warunki:

- 1) Wszystkie współczynniki a_i , $i = 1, \dots, n$, równania charakterystycznego są dodatnie. Jest to warunek konieczny.
- 2) Wszystkie podwyznaczniki

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_{n-2} > 0, \Delta_{n-1} > 0$$

są dodatnie.

Podwyznacznik otrzymuje się w postaci minorów głównych wyznacznika głównego. Wyznacznik główny buduje się wg następującego schematu:

a_{n-1}	a_n	0	0	0	0	0
a_{n-3}	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n	0	0	0
a_{n-5}	a_{n-4}	a_{n-3}	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
a_0	0	0	a_0	a_1	a_2	a_3
0	0	0	0	0	a_0	a_1
0	0	0	0	0	0	a_0

Sposób konstruowania wyznacznika głównego i podwyznaczników najwygodniej będzie prześledzić na przykładzie.

*PRZYKŁAD 32

Napiszemy wyznaczniki wykorzystywane w kryterium Hurwitz'a dla układu piątego rzędu o następującym równaniu charakterystycznym:

$$a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

Budujemy wyznacznik główny kto czym ma kasić?

$$\begin{vmatrix} a_4 & a_5 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix}$$

oraz podwyznaczniki

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_4 & a_5 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_4 & a_5 & 0 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_4 & a_5 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} \quad \Delta_1 = a_0$$

Na podstawie tego przykładu w kolejnym przykładzie zbadamy stabilność asymptotyczną modelu typu wejście-wyjście piątego rzędu.

PRZYKŁAD 33

Zbadamy stabilność asymptotyczną modelu o następującym równaniu charakterystycznym:

$$s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 5s + 6 = 0$$

W tym przypadku $a_5 = 1$, $a_4 = 2$, $a_3 = 3$, $a_2 = 4$, $a_1 = 5$, $a_0 = 6$. Budujemy wyznacznik główny

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a_4 & a_5 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -72$$

oraz podwyznaczniki

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_4 & a_5 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -12$$

$\Delta_3 = a_4 = 2$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_4 & a_5 & 0 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_4 & a_5 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

$\Delta_1 = a_4 = 2$

Warunek 1 kryterium Hurwitza jest spełniony (wszystkie współczynniki równania charakterystycznego są dodatnie), ale wyznaczniki są różnych znaków. Wniosek stąd, że badany model jest niestabilny, ponieważ nie jest spełniony warunek 2 (konieczny i wystarczający) kryterium Hurwitza. Istotnie, pierwiastkami równania charakterystycznego są liczby $\lambda_1 = 0,5517 + j1,2533$, $\lambda_2 = 0,5517 - j1,2533$, $\lambda_3 = -1,4918$, $\lambda_4 = -0,8058 + j1,2229$, $\lambda_4 = -0,8058 - j1,2229$. \square

Kryterium Routha

Drugim kryterium analitycznym, obok kryterium Hurwitzza, jest kryterium Routha, które oprócz odpowiedzi na pytanie o stabilność asymptotyczną badanego modelu dostarcza informacji o liczbie pierwiastków równania charakterystycznego, znajdujących się w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej.

TWIERDZENIE 4

Wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego modelu (4.10) będą znajdować się w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej, jeżeli zostaną spełnione następujące warunki:

- 1) Wszystkie współczynniki a_i , $i = 1, \dots, n$, równania charakterystycznego są dodatnie. Jest to warunek konieczny.
- 2) Wszystkie współczynniki lewej strony tablicy Routha są dodatnie.

Wtedy wiersz składający się z zer następuje się współczynnikami pochodnej wielomianu pomocniczego z poprzedniego wiersza. Wielomian ten buduje się,

Jeżeli układ jest niestabilny asymptotycznie, to współczynniki tej kolejnej zmieniają znak. Wówczas liczba zmian znaku jest równa liczbie pierwiastków równania charakterystycznego znajdujących się w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej. Tablicę Routha buduje się wg następującego schematu:

$$a_n \quad a_{n-2} \quad a_{n-4} \quad a_{n-6} \quad \dots$$

$$a_{n-1} \quad a_{n-3} \quad a_{n-5} \quad a_{n-7} \quad \dots$$

$$b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad \dots$$

$$c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad \dots$$

$$d_1 \quad d_2 \quad \dots$$

$$e_1 \quad \dots$$

gdzie:

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}, \quad b_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ -a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}, \quad b_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}, \dots$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{-b_1}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{-b_1}, \quad c_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-7} \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}}{-b_1}, \dots$$

$$d_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{-c_1}, \quad d_2 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}}{-c_1}, \quad \dots$$

$$e_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}}{-d_1}, \dots$$

Z każdym wierszem tablicy Routha można skojarzyć wielomian pomocniczy, który będzie wykorzystywany w przypadku szczególnym, czyli wtedy, kiedy wiersz współczynników okazać się składać z sanych zer

$$a_n \quad a_{n-2} \quad a_{n-4} \quad a_{n-6} \quad \dots \quad s^n \quad s^{n-2} \quad s^{n-4} \quad s^{n-6} \quad \dots$$

$$a_{n-1} \quad a_{n-3} \quad a_{n-5} \quad a_{n-7} \quad \dots \quad s^{n-1} \quad s^{n-3} \quad s^{n-5} \quad s^{n-7} \quad \dots$$

$$b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad \dots \quad \longleftrightarrow \quad s^{n-2} \quad s^{n-4} \quad s^{n-6} \quad s^{n-8} \quad \dots$$

$$c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad \dots \quad \longleftrightarrow \quad s^{n-3} \quad s^{n-5} \quad s^{n-7} \quad \dots$$

$$d_1 \quad d_2 \quad \dots \quad \dots \quad s^{n-4} \quad s^{n-6} \quad \dots$$

$$e_1 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad s^{n-5} \quad \dots$$

sumując odpowiednie iloczyny współczynników z tablicy Routha ze zmieniącą s w potędze wynikającej z konstrukcji stowarzyszonej z nią tabeli wielomianowej. Druga sytuacją wyjątkową jest sytuacja, kiedy element w lewej skrajnej kolumnie tablicy Routha równa się zeru. Wtedy badane równanie charakterystyczne należy pomnożyć przez czynnik $(s+a)$ i rozpocząć badanie stabilności tak otrzymanego równania za pomocą kryterium Routha od początku. Liczba $a > 0$ jest liczbą rzeczywistą i nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego. W przykładzie ilustrującym wykorzystanie kryterium Routha zbadany stabilność modelu podanego w przykładzie 33. Będzie to przykład, w którym pokazano sposób postępowania w przypadku szczególnym budowy tablicy Routha, kiedy wyraz w lewej skrajnej kolumnie równa się zero.

PRZYKŁAD 34

Zbadamy stabilność modelu typu wejście-wyjście podanego w przykładzie 33. Tablica Routha dla tego modelu wygląda następująco:

$$\begin{array}{cccccc} a_5 & a_3 & a_1 & 1 & 3 & 5 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 2 & 4 & 6 \\ b_1 & b_2 & 0 & b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & \Leftrightarrow & c_1 & c_2 & \\ d_1 & 0 & & d_1 & 0 & \\ e_1 & & & e_1 & & \end{array}$$

Pierwsze dwa wiersze tablicy Routha są znane. Stanowią je współczynniki równania charakterystycznego. Pozostałe wiersze obliczamy w następujący sposób:

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{-2} = 1, \quad b_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{-2} = 2$$

Po uwzględnieniu odczytanych wyników aktualizujemy tablicę Routha

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 5 & 3 & 11 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 16 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -8 & 3 & 6 \\ c_1 & c_2 & 0 & 3 & 6 & \\ d_1 & 0 & & -3 & 3 & \\ e_1 & & & e_1 & 0 & \\ f_1 & & & & & \end{array}$$

i obliczamy kolejny wiersz

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{-1} = 0, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{-1} = 6.$$

Ponieważ $c_1 = 0$ i $c_2 \neq 0$, czyli otrzymaliśmy przypadek szczególny, mnożymy więc równanie charakterystyczne przez $s+1$ (1 nie jest pierwiastkiem równania $s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 5s + 6$) i budujemy nową tablicę Routha dla równania

$$(s+1)(s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 5s + 6) = s^6 + 3s^5 + 5s^4 + 7s^3 + 9s^2 + 11s + 6 = 0$$

mianowicie

$$\begin{array}{cccccc} a_6 & a_4 & a_2 & a_0 & 1 & 5 & 9 & 6 \\ a_5 & a_3 & a_1 & 0 & 3 & 7 & 11 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 & b_3 & \\ c_1 & c_2 & 0 & \Leftrightarrow & c_1 & c_2 & 0 \\ d_1 & d_2 & & d_1 & d_2 & & \\ e_1 & 0 & & e_1 & 0 & & \\ f_1 & & & & & & \end{array}$$

Wyznaczamy b_1, b_2, b_3

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{8}{3}, \quad b_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{16}{3}, \quad b_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}{-3} = 6$$

i wstawiamy do tablicy Routha

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 5 & 9 & 6 & 3 & 7 & 11 & 0 \\ 3 & 7 & 11 & 0 & 8 & 16 & 6 & \\ \frac{8}{3} & \frac{16}{3} & 6 & & 3 & 3 & & \\ -3 & 3 & 6 & & -3 & 3 & & \\ c_1 & c_2 & 0 & & c_1 & c_2 & 0 & \\ d_1 & d_2 & & & d_1 & d_2 & & \\ e_1 & 0 & & & e_1 & 0 & & \\ f_1 & & & & & & & \end{array}$$

Wyznaczamy c_1 i c_2

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 16 \end{vmatrix}}{-3} = 1, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{34}{8} \rightarrow 1 \frac{34}{8} 0$$

Wyznaczamy d_1 i d_2

$$d_1 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 16 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{-1} = -6, \quad d_2 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{-1} = 6 \rightarrow 1 \frac{34}{8} 0$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 5 & 9 & 6 & 3 & 7 & 11 & 0 \\ 3 & 7 & 11 & 0 & 8 & 16 & 6 & \\ -6 & 6 & 0 & & -6 & 6 & 0 & \\ e_1 & 0 & & & e_1 & 0 & & \\ f_1 & & & & & & & \end{array}$$

Na koniec wyznaczamy e_1 i f_2

$$e_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 34 \\ -6 & 6 \end{vmatrix}}{6} = \frac{21}{4}, \quad f_2 = \frac{\begin{vmatrix} -6 & 6 \\ 21 & 0 \end{vmatrix}}{-4} = 6 \rightarrow 1 \quad \begin{matrix} 34 \\ 8 \end{matrix}$$

Analizując lewą skrajną kolumnę wyznaczonej tablicy Routha, można zauważyć, że następują dwie zmiany znaku. Zgodnie z kryterium Routha oznacza to, że badany układ ma dwa pierwiastki w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej, czyli jest niestabilny. \square

W kolejnym przykładzie zilustrowany będzie przypadek, kiedy cały wiersz tablicy Routha będzie składać się z zer.

PRZYKŁAD 35

Zbadamy stabilność modelu układu liniowego opisanego następującym równaniem charakterystycznym:

$$s^8 + s^7 + 3s^6 + 2s^5 + 5s^4 + 3s^3 + 4s^2 + s + 1 = 0$$

Tablica Routha w tym przypadku wygląda następująco:

1	3	5	4	1	s^8	s^6	s^4	s^2	s^0
1	2	3	1	0	s^7	s^5	s^3	s^1	
b_1	b_2	b_3	b_4		s^6	s^4	s^2	s^0	
c_1	c_2	c_3	0		s^5	s^3	s^1		
d_1	d_2	d_3			s^4	s^2	s^0		
e_1	e_2	0			s^3	s^1			
f_1	f_2				s^2	s^0			
g_1	0				s^1				
h_1					s^0				

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{-1} = 1, \quad b_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{-1} = 2, \quad b_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = 3, \quad b_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{-1} = 1$$

Uaktualniona tablica Routha

1	3	5	4	1	s^8	s^6	s^4	s^2	s^0
1	2	3	1	0	s^7	s^5	s^3	s^1	
b_1	b_2	b_3	b_4		s^6	s^4	s^2	s^0	
c_1	c_2	c_3	0		s^5	s^3	s^1		
d_1	d_2	d_3			s^4	s^2	s^0		
e_1	e_2	0			s^3	s^1			
f_1	f_2				s^2	s^0			
g_1	0				s^1				
h_1					s^0				

Po uzupełnieniu tablicy widać, że jej dwa ostatnie wiersze są liniowo zależne. Wynika stąd, że $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, tj. otrzymaliśmy drugi z przypadków szczególnych kryterium Routha. Postępując wg zasad określonych w tym kryterium, należy skonstruować wielomian pomocniczy na podstawie poprzedniego wiersza tablicy $W(s)$ i obliczyć jego pochodną

$$W(s) = s^6 + 2s^4 + 3s^2 + 1, \quad \frac{dW(s)}{ds} = 6s^5 + 8s^3 + 6s$$

Następnie współczynniki pochodnej wielomianu wstawia się do tablicy Routha zamiast wiersza składającego się z samych zer, tj. $c_1 = 6, c_2 = 8, c_3 = 6$

1	3	5	4	1					
1	2	3	1	0					
1	2	3	1	0					
6	8	6	0						

Dalsze obliczenia przebiegają bez niespodzianek, dlatego nie będą przedstawiane ich etapy pośrednie. Kompletna tablica Routha dla tego równania charakterystycznego przedstawia się następująco:

1	3	5	4	1					
1	2	3	1	0					
1	2	3	1	0					
6	8	6	0						

Z tablicy Routha wynika, że badany wielomian charakterystyczny ma dwa pierwiastki w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej, a w związku z tym jest niestabilny. \square

Kryterium Michajłowa

Kryterium Michajłowa jest pierwszym z kryteriów analityczno-graficznych, czyli kryteriów pozwalających rozstrzygnąć o stabilności układu lub modelu układu na podstawie tzw. krzywej Michajłowa. Kryterium Michajłowa dostarcza alternatywnej do kryterium Hurwicza i Routha metody badania stabilności. Niedługo zostanie zaprezentowany tok myślenia, który pozwala na sformułowanie kryterium Michajłowa.

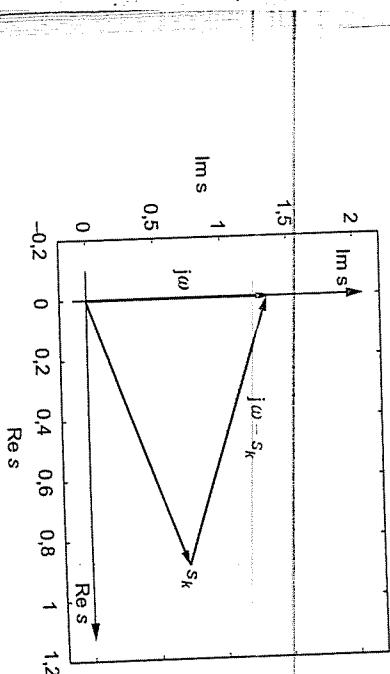
Niech dany będzie układ (model) pierwszego rzędu. Wtedy równanie charakterystyczne ma jedno rozwiązanie, które oznaczamy przez s_k

$$a_0(s - s_k) = 0$$

Naszym celem jest zaobserwowanie pewnych własności charakterystyki badanego układu przy założeniu, że wartość s_k nie jest znana, natomiast jest znana charakterystyka częstotliwościowa. W związku z tym zapiszmy równanie (4.12)

$$a_0(j\omega - s_k) = 0$$

Ilustrację graficzną równania (4.12) pokazano na rys. 4.5. W tym przypadku założono, że pierwiastek równania charakterystycznego s_k znajduje się w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej



Rys. 4.5. Pierwiastek s_k w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej

DEFINICJA 52
Krzywa Michajłowa jest wykresem widmowym równania charakterystycznego, tj. wykresem po wykonaniu podstawienia $s = j\omega$.

UWAGA 12. Jeżeli pierwiastek s_k układu pierwszego rzędu znajduje się w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej, to przy zmianie częstotliwości ω od 0 do ∞ następuje zmiana argumentu krzywej Michajłowa o $-\frac{\pi}{2}$. Jeżeli pierwiastek s_k układu pierwszego rzędu znajduje się w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej, to przy zmianie częstotliwości ω od 0 do ∞ następuje zmiana argumentu krzywej Michajłowa o $\frac{\pi}{2}$.

PRZYKŁAD 36

Zbadamy za pomocą krzywej Michajłowa stabilność modelu pierwszego rzędu o trans-

Na rysunku zaznaczono wektor $j\omega - s_k$, którego zachowanie się będziemy badać przy zmianach pulsacji ω od 0 do ∞ . Jeżeli $\omega = 0$, to

$$M(j\omega)_{\omega=0} = s_k$$

Jeżeli $\omega = \infty$, to

$$M(j\omega)_{\omega=\infty} = \operatorname{Re}(s_k) + j\infty$$

Wyznaczmy różnicę

$$\Delta = M(j\omega)_{\omega=\infty} - M(j\omega)_{\omega=0} = \operatorname{Re}(s_k) + j\infty - s_k = i(\infty - \operatorname{Im}(s_k)) = j\infty$$

która przekłada się na zmianę argumentu w następujący sposób:

$$\angle \Delta = \arctg(\Delta) = \frac{\pi}{2}$$

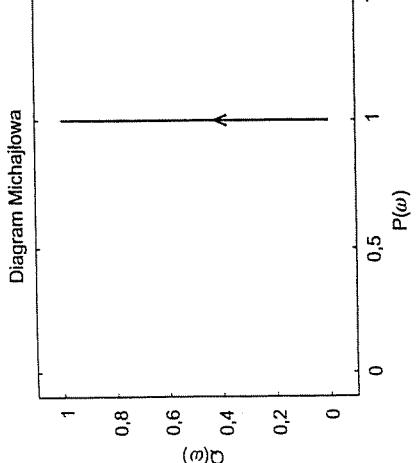
Biorąc pod uwagę fakt, że wektor $j\omega - s_k$ podczas zmiany ω od 0 do ∞ obraca się w kierunku (ujemnym) zgodnym z ruchem wskazówek zegara

$$\angle \Delta = -\frac{\pi}{2}$$

Gdyby punkt s_k znajdował się w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej, wtedy wektor $j\omega - s_k$ podczas zmiany ω od 0 do ∞ obracaliby się w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, a ten kierunek jest uznawany za dodatni i w konsekwencji

$$\angle \Delta = \frac{\pi}{2}$$

Tutaj dochodzimy do bardzo ważnego wniosku, który jest podstawa sformułowania kryterium Michajłowa stabilności układów liniowych. Przedtem wprowadzone będzie pojęcie krzywej Michajłowa.



Rys. 4.6. Krzywa Michajłowa dla układu inercyjnego pierwszego rzędu

Na rysunku 4.6 pokazano wykres funkcji $M(j\omega)$.

Krótki analiza tego wykresu pozwala stwierdzić, że zmiana argumentu punktów leżących na krzywej Michajłowej wraz ze zmianą pulsacji ω od 0 do ∞ wynosi $\frac{\pi}{2}$. Zatem badany układ ma swój jedyny biegum (pierwiastek równania charakterystycznego) w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej ω i w związku z tym jest stabilny. \square

Teraz przeprowadzone będą rozważania, które pozwolą uogólnić wyżej sformułowany wniosek, będący przypadkiem szczególnym kryterium Michajłowa, na układy dowolnego rzędu i ostatecznie sformułować to kryterium. Niech ogólnie równanie charakterystyczne modelu układu rzędu n będzie dane w następującej formie:

$$(4.13) \quad M(s) = a_n(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) = 0$$

Po wykonaniu podstawienia $s = j\omega$ otrzymujemy

$$M(j\omega) = a_n(j\omega - s_1)(j\omega - s_2) \dots (j\omega - s_n) = 0$$

lub równoważnie

$$M(j\omega) = |a_n| |(\omega - s_1)| e^{\angle(j\omega - s_1)} |(\omega - s_2)| e^{\angle(j\omega - s_2)} \dots \\ \dots |(\omega - s_n)| e^{\angle(j\omega - s_n)} = 0$$

Porządkując ostatnią zależność, można uzyskać postać równania charakterystycznego, pozwalającą na sformułowanie ogólnego kryterium Michajłowa:

$$M(j\omega) = |a_n| |(\omega - s_1)| \dots |(\omega - s_n)| e^{(\angle(j\omega - s_1) + \dots + \angle(j\omega - s_n))} = 0 \quad (4.14)$$

Z równania (4.14) wynika, że argumenty pochodzące od poszczególnych pierwiastków s_k ($k = 1, \dots, n$) równania charakterystycznego sumują się. W konsekwencji kryterium Michajłowa oznacza to, że zamiast przesunięcia fazowego

o kąt $\frac{\pi}{2}$ o stabilności modelu będzie świadczyć przesunięcie fazowe o kąt $n\frac{\pi}{2}$. Oznacza to, że jeżeli każdy stabilny pierwiastek powoduje przesunięcie fazowe o kąt $\frac{\pi}{2}$, to wszystkie pierwiastki stabilne modelu n -tego rzędu powodują w sumie przesunięcie fazowe o kąt $n\frac{\pi}{2}$. Zatem ostateczne można sformułować kryterium Michajłowa.

TWIERDZENIE 5

Równanie charakterystyczne (4.13) ma wszystkie pierwiastki w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej, jeśli przyrost argumentu $M(j\omega)$ przy zmianie pulsacji ω od 0 do ∞ wynosi $n\frac{\pi}{2}$

$$\Delta \arg_{0 < \omega < \infty} M(j\omega) = n\frac{\pi}{2}$$

gdzie n jest stopniem równania (4.13).

W przykładzie poniżej pokazano krzywe Michajłowa dla stabilnych modeli układów rzędu 1, 2, 3, 4.

PRZYKŁAD 37

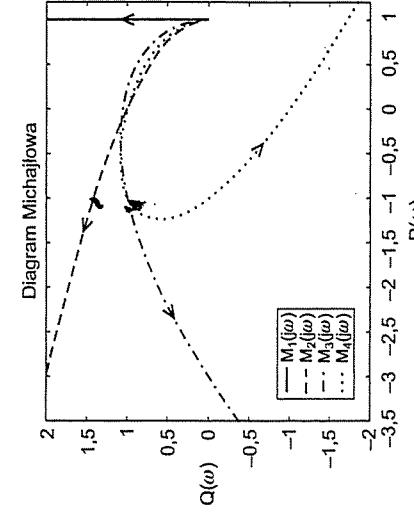
Narysujemy krzywe Michajłowa (rys. 4.7) dla następujących równań charakterystycznych:

$$M_1(s) = s + 1 \xrightarrow{s=j\omega} M_1(j\omega) = P(\omega) + iQ(\omega) = 1 + j\omega$$

$$M_2(s) = s^2 + s + 1 \xrightarrow{s=j\omega} M_2(j\omega) = 1 - \omega^2 + j\omega$$

$$M_3(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1 \xrightarrow{s=j\omega} M_3(j\omega) = 1 - 2\omega^3 + j(2\omega - \omega^3)$$

$$M_4(s) = s^4 + s^3 + 3s^2 + 2s + 1 \xrightarrow{s=j\omega} M_4(j\omega) = \omega^4 - 3\omega^2 + 1 + j(2\omega - \omega^3)$$



Rys. 4.7. Krzywe Michajłowa do przykładu 37

W tym przykładzie każdy z wielomianów charakterystycznych ma pierwiastki w lewej połowie płaszczyzny złożonej z mniejszej zespółonej. Wynika to z kształtu odpowiedniej krzywej Michajłowa. Dla układu pierwszego rzędu krzywa Michajłowa pozostaje w pierwszej ćwierci układu współrzędnych. Dla układu drugiego rzędu krzywa Michajłowa przechodzi z pierwszej do drugiej ćwierci i tam pozostaje wraz ze wzrostem pulsacji ω . Dokładnie tak samo można opisać pozostałe dwie krzywe, z tym że przechodzą one przez trzy ($n = 3$) i cztery ($n = 4$) ćwierci układu współrzędnych. Ponadto wszystkie krzywe okrążają początek układu w kierunku przeciwnym do ruchu wskaźówek zegara. Całkowite przesunięcie fazowe dla M_1 wynosi $\frac{\pi}{2}$, dla M_2 wynosi π , dla M_3 wynosi $\frac{3\pi}{2}$, a dla M_4 wynosi 2π . Te cechy dowodzą, że zgodnie z kryterium Michajłowa wszystkie pierwiastki zaprezentowanych wielomianów charakterystycznych mają ujemne części rzeczywiste. \square

UWAGA 13. Należy podkreślić, że sformułowane tutaj kryterium dotyczy krzywej Michajłowa, a nie charakterystyki amplitudowo-fazowej.

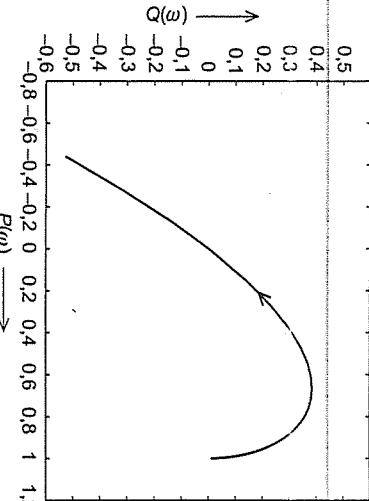
PRZYKŁAD 38

Wykreślmy krzywą Michajłowa dla równania

$$s^3 + s^2 + s + 1 = 0$$

Równanie to ma następujące pierwiastki: $s_1 = -1$, $s_2 = -i$, $s_3 = i$. Zerowa część rzeczywista pary pierwiastków sprzężonych powoduje, że model opisany takim wielomianem charakterystycznym jest na granicy stabilności.

Diagram Michajłowa



Rys. 4.8. Krzywa Michajłowa do przykładu 38

To, że wielomian charakterystyczny ma pierwiastki o zerowej części rzeczywistej, na wykresie objawia się przejściem krzywej Michajłowa przez początek układu współrzędnych (rys. 4.8).

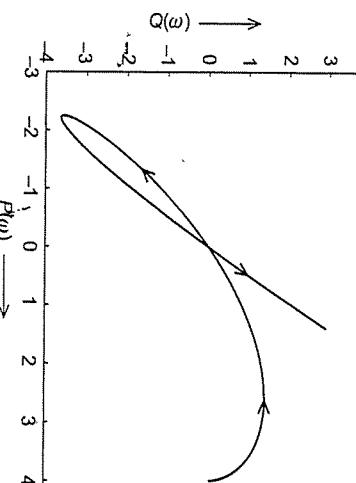
PRZYKŁAD 39

Dla porównania narysujemy wykres równania charakterystycznego

$$s^5 + s^4 + 5s^3 + 5s^2 + 4s + 4 = 0$$

Równanie to ma następujące pierwiastki $s_1 = -1$, $s_2 = -i$, $s_3 = i$, $s_4 = -2i$, $s_5 = 2i$. Na wykresie (rys. 4.9) widać dwukrotne przejście krzywej Michajłowa przez początek układu współrzędnych, co jest potwierdzeniem istnienia dwóch par pierwiastków o zerowej części rzeczywistej.

Diagram Michajłowa



Rys. 4.9. Krzywa Michajłowa do przykładu 39

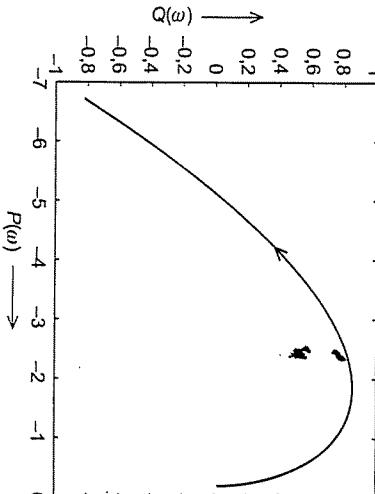
W ostatnim przykładzie ilustrującym zastosowanie krzywej Michajłowa do badania stabilności modeli układów liniowych zostanie zaprezentowana krzywa Michajłowa modelu niestabilnego.

PRZYKŁAD 40

Wykreślmy krzywą Michajłowa następującego równania charakterystycznego:

$$(s - 0,1)(s + 1)(s + 2) = 0$$

Diagram Michajłowa



Rys. 4.10. Krzywa Michajłowa do przykładu 40

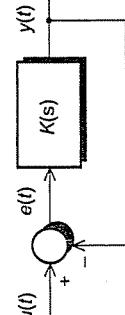
Krzywa Michajlowa (rys. 4.10) nie przechodzi przez 3/4 kwartałki płaszczyzny zmiennej zespolonej (układ trzeciego rzędu), a zmiana argumentu przy zmianie ω od 0 do ∞ wynosi $\frac{\pi}{2}$. Dla stabilnego wielomianu trzeciego rzędu krzywa Michajlowa powinna przechodzić przez 3/4 kwartałki płaszczyzny zespolonej i zmiana argumentu powinna wynosić $3\frac{\pi}{2}$. \square

Kryterium Nyquista

Kryterium Nyquista jest bardzo ważnym narzędziem praktycznym badania stabilności modeli układów liniowych ze względu na wykorzystanie charakterystiki amplitudowo-fazowej. Kryterium to dotyczy modeli układów ze sprzężeniem zwrotnym i jest skonstruowane z wykorzystaniem kryterium Michajlowa. Dzięki zastosowaniu tego kryterium można na podstawie znajomości charakterystiki amplitudowo-fazowej układu otwartego zdecydować, czy układ ten można uzysnić stabilnym po objęciu go pętlą sprzężenia zwrotnego. Rozważmy układ o transmitancji

$$K(s) = \frac{L_o(s)}{M_o(s)} \quad (4.15)$$

który został objęty pętlą sprzężenia zwrotnego, jak pokazano na rysunku 4.11.



Rys. 4.11. Schemat blokowy układu z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego

Transmitancja zastępcza tego układu jest następująca:

$$T(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{K(s)}{1 + K(s)} \quad (4.16)$$

lub równoważnie po uwzględnieniu zależności (4.15)

$$\frac{L_o(s)}{1 + \frac{L_o(s)}{M_o(s)}} = \frac{L_o(s)}{L_o(s) + M_o(s)} \quad (4.17)$$

Kolejnym etapem jest wykonanie badania stabilności modelu (4.15) i (4.16) za pomocą kryterium Michajlowa. W tym celu konstruujemy równanie charakterystyczne modelu (4.15)

$$M_o(s) = 0 \quad (4.18)$$

i równanie charakterystyczne modelu (4.16)

$$R(s) = 1 + K(s) = \frac{L_o(s) + M_o(s)}{M_o(s)} = 0 \quad (4.19)$$

Zapisujemy równoważną postać równania charakterystycznego (4.19), która będzie przydatna w dalszych rozważaniach

$$Q(s) = L_o(s) + M_o(s) = 0 \quad (4.20)$$

Poczytamy również założenie, że układ opisany modelem (4.15) ma k pierwiastków w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej i $n - k$ pierwiastków w lewej półpłaszczyźnie (n wg wcześniejszych założeń oznacza rzad modelu (4.15)). Uczynione założenie odnosi się do obecności pierwiastków modelu w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej jest jednoznaczne z założeniem, że model (4.15) jest niestabilny. Zamknięcie pętli sprzężenia zwrotnego i tym samym transformacja modelu (4.15) do modelu (4.16) ma na celu ustabilizowanie układu. Z tego wynika, że równanie charakterystyczne (4.19) oraz jego postać równoważna (4.20) na podstawie kryterium Michajlowa spełnia następującą zależność:

$$\Delta \arg_{0 < \omega < \infty} R(j\omega) = \Delta \arg_{0 < \omega < \infty} Q(j\omega) = n \frac{\pi}{2} \quad (4.21)$$

co oznacza, że układ jest stabilny. Wykonując w ten sam sposób analizę równania charakterystycznego układu otwartego (4.18), otrzymujemy

$$\Delta \arg_{0 < \omega < \infty} M_o(j\omega) = (n - k) \frac{\pi}{2} - k \frac{\pi}{2} = (n - 2k) \frac{\pi}{2} \quad (4.22)$$

Składnik $(n - k) \frac{\pi}{2}$ pochodzi od pierwiastków leżących w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej, składnik $-k \frac{\pi}{2}$ pochodzi od pierwiastków znajdujących się w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej. Teraz wykonamy ponownie analizę równania charakterystycznego (4.21) i (4.22) za pomocą kryterium Michajlowa z uwzględnieniem zależności (4.21) i (4.22)

$$\Delta \arg_{0 < \omega < \infty} R(j\omega) = \Delta \arg_{0 < \omega < \infty} \frac{L_o(s) + M_o(s)}{M_o(s)} =$$

$$= \Delta \arg_{0 < \omega < \infty} Q(j\omega) - \Delta \arg_{0 < \omega < \infty} M_o(j\omega) =$$

$$= n \frac{\pi}{2} - (n - 2k) \frac{\pi}{2} = k\pi \quad (4.23)$$

Podsumowując przeprowadzone rozważania, zapiszemy jeszcze raz ostatnio otrzymaną zależność, która będzie podstawą sformułowania kryterium Nyquista

$$\Delta \arg_{0 < \omega < \infty} R(j\omega) = \Delta \arg_{0 < \omega < \infty} [1 + K(j\omega)] = k\pi \quad (4.23)$$

Nieżej podano twierdzenie Nyquista, które zostało udowodnione wcześniejszej prowadzonym rozumowaniem.

TWIERDZENIE 6

Układ zamknięty jest stabilny asymptotycznie, przy założeniu, że równanie charakterystyczne układu otwartego ma k pierwiastków w prawej półpłaszczyźnie i n - k w lewej półpłaszczyźnie, wtedy i tylko wtedy, gdy charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego przy zmianie pulsacji ω od -∞ do ∞ obejmuje w kierunku dodatnim k razy punkt (-1, j0).

Szczególnym przypadkiem tego twierdzenia jest przypadek układu stabilnego, który ma być objęty pętlą sprzężenia zwrotnego. Wtedy k = 0 i twierdzenie Nyquista można sformułować w następującej postaci.

TWIERDZENIE 7

Układ zamknięty jest stabilny asymptotycznie, przy założeniu, że równanie charakterystyczne układu otwartego nie ma pierwiastków w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej, wtedy i tylko wtedy, gdy charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego przy zmianie pulsacji ω od -∞ do ∞ nie obejmuje punktu (-1, j0).

Z pewnością krótkiego wyjaśnienia wymaga stwierdzenie, że charakterystyka amplitudowo-fazowa obejmuje pewien punkt, w szczególności punkt (-1, j0), który również jest nazywany punktem Nyquista.

DEFINICJA 53

Na płaszczyźnie zmiennej zespolonej punkt (-1, j0) nazywamy punktem Nyquista.

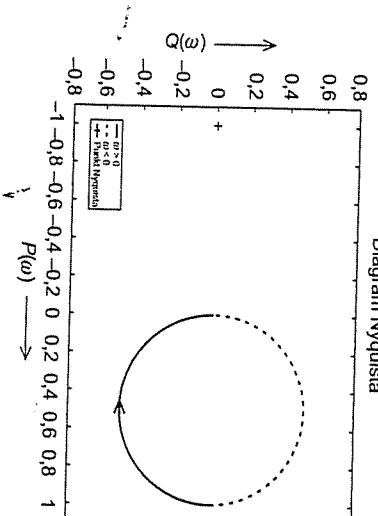
Stwierdzenie obejmowania punktu charakterystyki amplitudowo-fazową najprościej jest zdefiniować jako zawieranie się tego punktu w obszarze zakreślonym przez charakterystykę amplitudowo-fazową podczas zmiany pulsacji od -∞ do ∞. Kreślenie charakterystyki amplitudowo-fazowej dla ujemnych pulsacji jest z praktycznego punktu widzenia bezprzedmiotowe, ponieważ ujemne pulsacje nie mają interpretacji fizycznej. Z teoretycznego punktu widzenia wykreślenie charakterystyki dla pulsacji ujemnych pomaga w podjęciu decyzji o obejmowaniu punktu Nyquista tą charakterystyką. Należy pamiętać, że charakterystyka amplitudowo-fazowa wykonana dla pulsacji od -∞ do ∞ jest symetryczna względem osi rzeczywistej. Dzięki temu zawsze tworzy ona figurę zamkniętą na płaszczyźnie zmiennej zespolonej, a decyzja o obejmowaniu charakterystyki punktu Nyquista polega na sprawdzeniu, czy zawiera się on wewnątrz stworzonej figury. Niech ilustracją będą dwa poniższe przykłady.

PRZYKŁAD 41

W tym przykładzie zostanie pokazany obszar płaszczyzny zmiennej zespolonej zakreślony przez charakterystykę amplitudowo-fazową stabilnego modelu

$$T(s) = \frac{1}{s+1}$$

przy zmianie pulsacji od -∞ do ∞.



Rys. 4.12. Obszar obejmowany charakterystyką amplitudowo-fazową w postaci okręgu

W tym przypadku punkt Nyquista nie należy do obszaru zakreślonego przez charakterystykę, czyli nie jest przez nią obejmowany (rys. 4.12). W związku z tym po zamknięciu sprzężenia zwrotnego powstający układ nadal będzie układem stabilnym, co wynika z twierdzenia Nyquista. Bardzo łatwo to sprawdzić po wykonaniu prostych obliczeń

$$T_z(s) = \frac{T(s)}{1 + T(s)} = \frac{1}{s+2}$$

Układ zamknięty o transmitancji $T_z(s)$ jest stabilny. □

W wyżej zaprezentowanym przykładzie pętla sprzężenia zwrotnego obejmowała układ stabilny asymptotycznie. W kolejnym przykładzie zostanie zaprezentowany model układu, który dzięki zastosowaniu sprzężenia zwrotnego stanie się stabilny.

PRZYKŁAD 42

Zbadamy możliwość ustabilizowania modelu układu o transmitancji

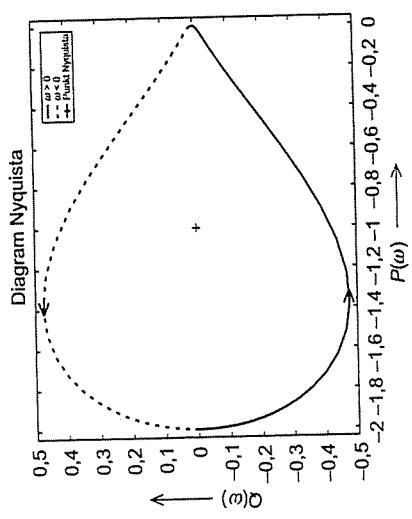
$$T(s) = \frac{0,1s+1}{s^2+0,5s-0,5}$$

Pierwiastkami równania charakterystycznego tego modelu są liczby $s_1 = -1, s_2 = 0,5$. Wynika stąd, że model nie jest stabilny. W celu ustabilizowania układu opisanego transmitancją $T(s)$ zastosujemy sprzężenie zwrotne, tak jak pokazano to na sche-

4. Właściwości układów

4.1. Stabilność układów dynamicznych

macie blokowym na rys. 4.11. Przed zamknięciem pętli sprzężenia zwrotnego należy sprawdzić, wykorzystując twierdzenie Nyquista, czy ten zbieg może spowodować ustabilizowanie układu.



Rys. 4.13. Charakterystyka amplitudowo-fazowa do przykładu 42

Z wykonanej charakterystyki (rys. 4.13) widać, że punkt Nyquista jest nia obejmowany jednokrotnie podczas zmiany pulsacji od $-\infty$ do ∞ . Ponieważ badany układ ma jeden pierwiastek w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej, więc na mocy twierdzenia Nyquista wiadomo, że po zamknięciu pętli sprzężenia zwrotnego układ otrzymało się stabilny. Po zamknięciu pętli sprzężenia zwrotnego uzyskujemy układ o transmitancji

$$T_z(s) = \frac{0,1s + 1}{s^2 + 0,6s + 0,5}$$

Którego pierwiastki leżą w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej, tj. $s_1 = -0,3 + j0,6403$ oraz $s_2 = -0,3 - j0,6403$. \square

PRZYKŁAD 43

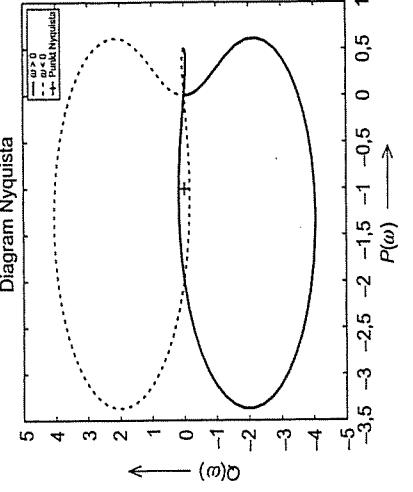
Zbadamy możliwość ustabilizowania układu o transmitancji

$$K(s) = \frac{3s^2 + 1}{s^3 + s^2 + s + 2}$$

Pierwiastkami wielomianu charakterystycznego są liczby $s_1 = 0,1766 + j1,2028$, $s_2 = 0,1766 - j1,2028$, $s_3 = -1,3532$. Układ ma dwa pierwiastki w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej.

Z twierdzenia Nyquista wynika, że charakterystyka amplitudowo-fazowa powinna dwukrotnie obejmować punkt Nyquista, aby po zamknięciu pętli sprzężenia zwrotnego powstał układ stabilny.

Z rysunku 4.14 wynika, że punkt Nyquista jest okrągły dwukrotnie, zatem objęcie układu pętlą sprzężenia zwrotnego pozwoli na uzyskanie stabilnego układu zasępnego.



Rys. 4.14. Charakterystyka do przykładu 43

Transmitancja układu po zamknięciu pętli sprzężenia zwrotnego przedstawia się następująco

$$K(s) = \frac{3s^2 + 1}{s^3 + 4s^2 + s + 3}$$

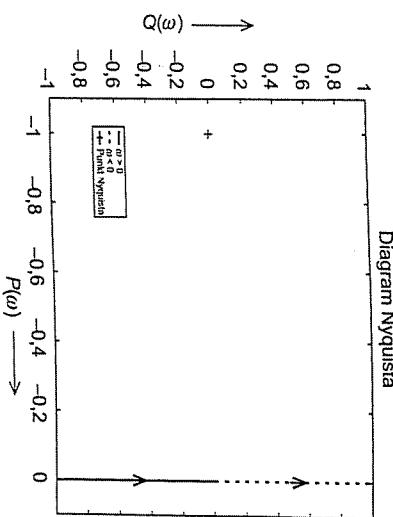
Pierwiastkami wielomianu charakterystycznego są liczby $s_1 = -0,0303 + j0,8721$, $s_2 = -0,0303 - j0,8721$, $s_3 = -3,9395$. \square

Na zakończenie omówimy wykonanie analizy stabilności za pomocą twierdzenia Nyquista układów zawierających w zbiorze swoich biegumów biegum w zerze. W pierwszej kolejności rozpatrymy najprostszego przykładowego układu zawierającego biegum w zerze, czyli element całkujący. Jest to przypadek osobiły względem na to, że w odróżnieniu od charakterystyk innych typowych układów, charakterystika amplitudowo-fazowa tego elementu rozpoczyna się w ∞ . W związku z tym dla pulsacji $\omega = 0$ następuje gwałtowna zmiana kąta fazowego o π i nie wiadomo, do której półpłaszczyzny zmiennej zespolonej należy zaliczyć jedyny biegum układu. W celu rozstrzygnięcia problemu, czy element całkujący po zamknięciu pętli sprzężenia zwrotnego będzie stabilny, rozpatrzmy dwa przypadki:

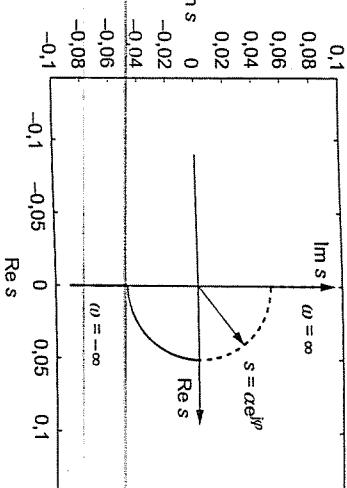
- biegum elementu całkującego znajduje się w lewej półpłaszczyźnie,
- biegum elementu całkującego znajduje się w prawej półpłaszczyźnie.

Okaże się, że w obu przypadkach element całkujący jest stabilny po zamknięciu pętli sprzężenia zwrotnego. Na rysunku 4.15 pokazano charakterystykę amplitudowo-fazową elementu całkującego.

Z rysunku widać, że charakterystyka przebiega wzdłuż osi ukojonej przez początek układu współrzędnych. Biorąc pod uwagę fakt, że charakterystyka amplitudowo-fazowa dla pulsacji zmieniającej się od $-\infty$ do ∞ tworzy figurę zamkniętą, powstaje, w przypadku elementu całkującego, pytanie: która półpłaszczyzna zmiennej zespolonej obejmuje charakterystykę amplitudowo-fazową.



Rys. 4.15. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu całkującego



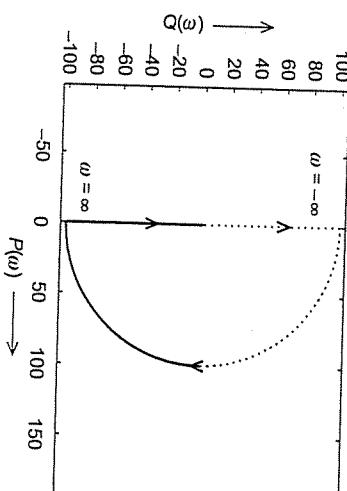
Rys. 4.16. Biegun elementu całkującego w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej

Na wykresie pojawiły się dwa nowe parametry, tj. parametr $\alpha \rightarrow 0$, parametr $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ w kierunku dodatnim. Dla tych wartości wprowadzonych parametrów charakterystyka amplitudowo-fazowa elementu całkującego przedstawia się jak na rys. 4.17.

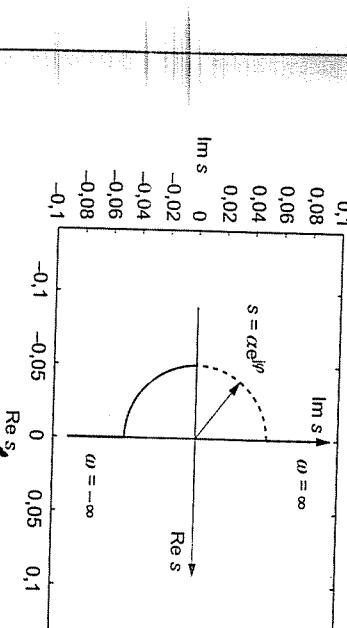
Obejmowanie przez charakterystykę amplitudowo-fazową prawej półpłaszczyzny zmiennej zespolonej wynika z bardziej prostej zależności. Skoro

$$\alpha \rightarrow 0, \operatorname{Re} e^{j\phi} \geq 0 \quad \text{oraz} \quad \left| \frac{1}{s} \right|_{s=\alpha e^{j\phi}} = \alpha e^{j\phi}, \quad \text{to} \quad \left| \frac{1}{\alpha e^{j\phi}} \right| \rightarrow \infty$$

Z tego powodu dla pulsacji bliskich zeru charakterystyka amplitudowo-fazowa obejmuje prawą półpłaszczyznę lukiem i nieskończonym dużym promieniu. Wy-



Rys. 4.17. Charakterystyka amplitudowo-fazowa przy założeniu, że biegun znajduje się w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej

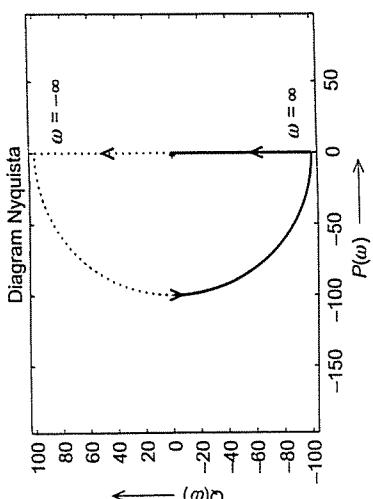


Rys. 4.18. Biegun elementu całkującego w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej

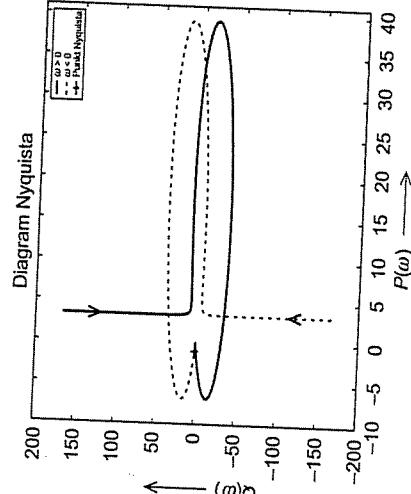
Parametr $\alpha \rightarrow 0$, parametr $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ w kierunku ujemnym. Obejmowanie przez charakterystykę, w tym przypadku, lewej półpłaszczyzny zmiennej zespolonej uzasadnia się identycznie jak poprzednio z uwzględnieniem faktu, że

$$\operatorname{Re} e^{j\phi} \leq 0$$

Wykorzystując twierdzenie Nyquista i założenie, że biegun znajduje się w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej, stwierdzamy, że powstały po zamknię-



Rys. 4.19. Charakterystyka amplitudowo-fazowa przy założeniu, że biegum znajduje się w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej



Rys. 4.20. Charakterystyka amplitudowo-fazowa do przykładu 44

ciu pętli sprzężenia zwrotnego układ będzie stabilny, ponieważ charakterystyka obejmuje jednokrotnie punkt Nyquista.

Podsumowując rozważania na temat elementu całkującego w kontekście twierdzenia Nyquista można stwierdzić, że element całkujący po objęciu go pętlą sprzężenia zwrotnego tworzy układ stabilny niezależnie od wyboru półpłaszczyzny zmiennej zespolonej, przez który biegum – znajdujący się w zerze – będzie omijany. Stosując sposób analizy pokazany dla elementu całkującego, można rozszerzyć spektrum możliwych do zbadania w ten sposób modeli do modeli opisanych transmitancją typu

$$K(s) = \frac{L(s)}{s^n M(s)}$$

gdzie n jest krotnością bieguna zerowego, wielomian $L(s)$ i $M(s)$ nie mają wspólnych czynników oraz wielomian $M(s)$ nie ma zerowych pierwiastków. Występowanie w transmitancji bieguna zerowego jednokrotnego lub o większej krotności powoduje, że charakterystyka Nyquista takiego układu przewiera interesujące kształty. W przypadku zaprezentowanym niżej wykresiona będzie charakterystyka układu mającego jednokrotny biegum w zerze.

PRZYKŁAD 44

Narysujmy charakterystykę amplitudowo-fazową modelu układu opisanego transmitancją

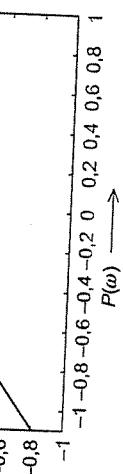
$$K(s) = \frac{s + 0,5}{s(0,1s^3 + 0,7s^2 + 0,3)}$$

Charakterystykę tego przedstawiono na rysunku 4.20, a na rysunku 4.21 pokazano charakterystykę modelu w sąsiedztwie punktu Nyquista.

Diagram Nyquista

Diagram Nyquista

Rys. 4.21. Charakterystyka modelu w pobliżu punktu Nyquista (przykład 44)



Logarytmiczne kryterium Nyquista, zapis fazy i zapis amplitudy

Wraz z kryterium Nyquista są związane dwa pojęcia: *zapis fazy i zapis amplitudy*. Pojęcia te są wykorzystywane w procesie projektowania układów sterowanych w odniesieniu do charakterystyk logarytmicznych, które wcześniej nazywane były charakterystykami Bodego. Na charakterystykach Bodego w pierwszej kolejności należy zlokalizować punkt Nyquista. W tym celu punkt Nyquista zapisujemy w następującej postaci:

$$(-1, j0) = e^{-j\pi}$$

Z równania (4.24) wynika, że moduł i faza, tj.

$$\left|e^{-j\pi}\right| = 1, \quad \arg e^{-j\pi} = -\pi$$

Po zlogarytmowaniu obu stron równania określającego moduł punktu Nyquista okazuje się, że na logarytmicznej charakterystyce amplitudowej moduł jednostkowy jest odwzorowany na oś odciętych. Dzieje się tak, ponieważ

$$\log 1 = 0$$

Zatem przejście charakterystyki amplitudowo-fazowej przez punkt Nyquista na wykresach Bodego oznacza, że w punkcie przecięcia się logarytmicznej charakterystyki amplitudowej z osią odciętych na wykresie fazowym następuje przesunięcie fazowe o kąt $-\pi$. Jeżeli amplituda na wykresie logarytmicznym będzie ujemna dla przesunięcia fazowego $-\pi$, to wtedy punkt Nyquista nie będzie obejmowany charakterystyką. Spostoszenie to jest podstawą do sformułowania logarytmicznego kryterium Nyquista.

TWIERDZENIE 8

Układ zamknięty jest stabilny, jeżeli amplitudowa charakterystyka logarytmiczna układu otwartego przyjmuje wartość ujemną dla pulsacji odpowiadającej przesunięciu fazowemu $-\pi$.

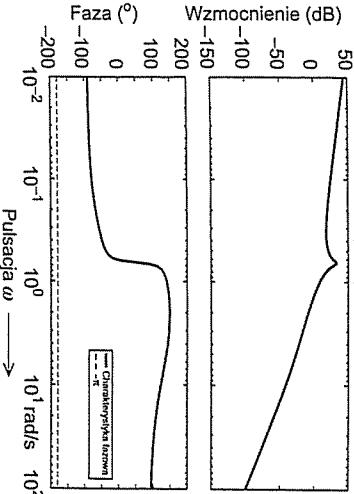
W przykładach 45÷47 zostanie wykorzystane logarytmiczne kryterium Nyquista do badania możliwości otrzymywania układu stabilnego przez zamknięcie pętli sprzężenia zwrotnego.

PRZYKŁAD 45

Zbadamy, wykorzystując charakterystyki Bodego, możliwość ustabilizowania modelu danego transmitancją

$$K(s) = \frac{s + 0,5}{0,1s^4 + 0,7s^3 + 0,3s}$$

poprzez objęcie go pętli sprzężenia zwrotnego. Na rysunku 4.22 znajdują się charakterystyki Bodego tego modelu. Biegunami modelu są liczby: $s_1 = 0$, $s_2 = -7,0602$,



Rys. 4.22. Charakterystyki Bodego (przykład 45)

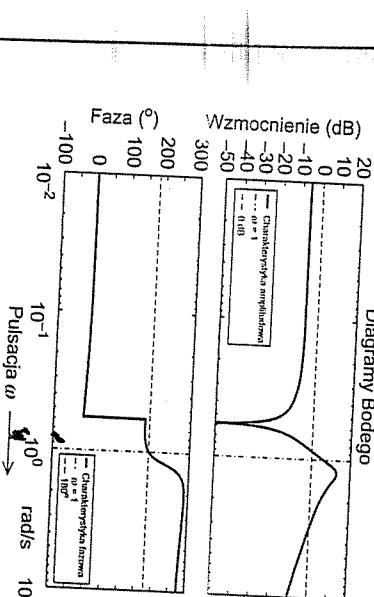
$s_3 = 0,0301 + j0,6512$, $s_4 = 0,0301 - j0,6512$. Linią kreskową zaznaczono przesunięcie fazowe o kąt $-\pi$ na wykresie fazowym.

Model ten jest niesabilny, co rozpoznajemy po wartościach biegunków modelu (wcześniej pokazano, że biegun s_1 jest stabilny zgodnie z kryterium Nyquista), dług twierdzenia Nyquista zamknięcie pętli sprzężenia zwrotnego ustabilizuje model tylko wtedy, gdy charakterystyka modelu dwukrotnie obejmuje punkt Nyquista, przy zmianie pulsacji od $-\infty$ do ∞ . Ponieważ charakterystyka fazowa znajduje się ponad linią odpowiadającą przesunięciu fazowemu $-\pi$, to wzór Nyquista nie jest przez nią obejmowany ani razu. Dokładniej rzecz biorąc, charakterystyka fazowa osiąga przesunięcia fazowe $-\pi$ dla $\omega \rightarrow \infty$. Wynik z tego, że objęte danego modelu pętlą sprzężenia zwrotnego nie ustabilizuje go. W celu sprawdzenia poprawności wyciągniętego wniosku ponownie przeanalizować charakterystykę Nyquista, którą pokazano w przykładzie 44. □

PRZYKŁAD 46

Zbadany, wykorzystując charakterystyki Bodego, możliwość ustabilizowania modelu danego transmitancją

$$K(s) = \frac{3s^2 + 1}{s^3 + s^2 + s + 2}$$



Rys. 4.23. Charakterystyki Bodego (przykład 46)

Jest to model badany w przykładzie 43, w którym zostało pokazane, że zamknięcie pętli sprzężenia zwrotnego układu o transmitancji $K(s)$ pozwala uzyskać stabilny układ zastępczy. W tym przykładzie ograniczony się jedynie do przeanalizowania charakterystyki Bodego transmitancji $K(s)$ – rys. 4.23. Analizując te charakterystyki, należy zwrócić uwagę na fakt, że dla pulsacji $\omega = 1$ kąt fazowy wynosi π , a wzmacnienie jest większe od jedności (dokładnie wynosi 2). W tym przykładzie charakterystyka fazowa jest badana dla kąta przesunięcia fazowego π . Ze względu na zależność

$$e^{-j\pi} = e^{j\pi}$$

4. Własności układów

4.1. Stabilność układów dynamicznych

W związku z tym można sformułować twierdzenie o stabilności asymptotycznej układów dyskretnych.

TWIERDZENIE 10

Autonomiczny dyskretny układ liniowy jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie moduły wartości własnych z_1, \dots, z_r macierzy systemowej \mathbf{A} są mniejsze od jedności, czyli

$$|z_k| < 1 \quad \text{dla } k = 1, \dots, r \quad (4.27)$$

PRZYKŁAD 48

Sprawdzimy stabilność asymptotyczną modelu dyskretnego, którego macierz systemowa ma postać

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -0,6 \\ 0,8 & 0 \end{bmatrix}$$

Wartości własne tej macierzy są następujące: $\lambda_1 = -1,3544$, $\lambda_2 = 0,3544$. Na podstawie twierdzenia 10 stwierdzamy, że model dyskretny o podanej macierzy systemowej jest modelem niestabilnym, tj. co najmniej jedna z wartości własnych tej macierzy ma moduł większy niż jedność. \square

Przed omówieniem najważniejszych kryteriów stabilności układów dyskretnych zdefiniujemy kilka pojęć wykorzystywanych w rozważaniach na ten temat.

Równanie charakterystyczne modelu dyskretnego

Załóżmy, że transmitancja modelu dyskretnego typu wejście-wyjście jest dana następującym wzorem:

$$T(z) = \frac{I(z)}{M(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} \quad (4.28)$$

gdzie $m \in \mathbb{N}$ są odpowiednio stopniami wielomianu licznika oraz mianownika, a wielomian $I(z)$ i $M(z)$ nie mają wspólnych czynników (tj. nie można wykonać skrócenia).

DEFINICJA 54

Równanie

$M(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$ (4.29)
nazywamy równaniem charakterystycznym układu opisanego modelem (4.28). Wielomian $M(z)$ nazywamy wielomianem charakterystycznym.

Załóżmy, że dyskretny model zmiennych stanu jest opisany zależnościami

$$\begin{cases} x_{i+1} = Ax_i + Bu_i \\ y_i = Cx_i + Du_i \end{cases} \quad (4.30)$$

gdzie: i – pewna chwila czasu dyskretnego, $\mathbf{x}(t)$ – wektor zmiennych stanu, $\mathbf{u}(t)$ – sygnał wymuszenia, $\mathbf{y}(t)$ – sygnał wyjściowy, n – rzad modelu lub równoważne liczba zmiennych stanu, m – liczba wejść modelu, p – liczba wyjść modelu, macierze: $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

DEFINICJA 55

Równanie

$$\det [\mathbb{I}\lambda - \mathbf{A}] = 0$$

nazywamy równaniem charakterystycznym układu, którego model jest opisany zależnościami (4.30). Wielomian $\det [\mathbb{I}\lambda - \mathbf{A}]$ nazywamy wielomianem charakterystycznym.

Obie definicje opisują równanie charakterystyczne. Różnica między nimi polega jedynie na sposobie wyznaczania równania charakterystycznego, co zależy od typu modelu, który jest dany (model wejście-wyjście, czy model zmiennych stanu).

Kryterium Schura-Cohna

Kryterium Schura-Cohna jest kryterium analitycznym badania polożenia pierwiastków wielomianu na płaszczyźnie zmiennej zespolonej, co oznacza, że pozwala zdecydować, na podstawie znajomości wartości współczynników badanego wielomianu, czy pierwiastki tego wielomianu znajdują się w kole jednostkowym.

TWIERDZENIE 11

Pierwiastki wielomianu charakterystycznego (4.29) znajdują się we wspólnym kole o promieniu jednostkowym utwory i tylko utwory, gdy

- 1) $|a_0| < a_n$,
- 2) wielomian stopnia $n - 1$

$$m(z) = \frac{1}{z} [a_n M(z) + a_0 M(z^{-1}) z^n] = b_0 + b_1 z + \dots + b_{n-1} z^{n-1}$$

ma również pierwiastki w kole jednostkowym. Współczynniki wielomianu $m(z)$ wyznacza się wg następującego schematu:

Charakterystyczną cechą tego kryterium jest jego rekurencyjność. Badając stabilność wielomianu charakterystycznego stopnia n za pomocą kryterium Schura-Cohna, otrzymujemy w wyniku jego zastosowania wielomian stopnia niższego o 1, którego stabilność ponownie bada się za pomocą tego kryterium itd., aż do otrzymania wielomianu stopnia zerowego. Kryterium Schura-Cohna jest kryterium koniecznym i wystarczającym. Przeanalizujemy następujący przykład.

PRZYKŁAD 49

Zbadamy stabilność układu dyskretnego o transmitancji

$$T(z) = \frac{2z - 1}{z^4 + 1,1z^3 - 0,8z^2 + 0,1z - 0,9}$$

Wielomian charakterystyczny ma postać

$$M(z) = z^4 + 1,1z^3 - 0,8z^2 + 0,1z - 0,9$$

a odpowiednie współczynniki

$$a_4 = 1, \quad a_3 = 1,1, \quad a_2 = -0,8, \quad a_1 = 0,1, \quad a_0 = -0,9$$

Krok 1.

1. Sprawdzamy warunek $|a_0| < a_n$ dla $n = 4$.

Warunek $|a_0| < a_4$ jest spełniony, gdyż $|-0,9| < 1$.

2. Budujemy wielomian stopnia $n - 1$ postaci

$$b_3z^3 + b_2z^2 + b_1z + b_0$$

wyznaczając jego współczynniki wg schematu

$$b_{n-1-k} = a_n a_{n-k} - a_0 a_k \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, 3$$

$$n = 4, \quad k = 0 \quad b_{4-1-0} = b_3 = a_4 a_4 - a_0 a_0 = 0,19$$

$$n = 4, \quad k = 1 \quad b_{4-1-1} = b_2 = a_4 a_4 - a_0 a_1 = a_4 a_3 - a_0 a_1 = 1,19$$

$$n = 4, \quad k = 2 \quad b_{4-1-2} = b_1 = a_4 a_4 - a_0 a_2 = a_4 a_2 - a_0 a_2 = -1,52$$

$$n = 4, \quad k = 3 \quad b_{4-1-3} = b_0 = a_4 a_4 - a_0 a_3 = a_4 a_1 - a_0 a_3 = 1,09$$

i otrzymujemy wielomian wykorzystywany w kolejnej iteracji

$$b(z) = b_3z^3 + b_2z^2 + b_1z + b_0 = 0,19z^3 + 1,19z^2 - 1,52z + 1,09$$

Krok 2.

1. Sprawdzamy warunek $|b_0| < b_n$ dla $n = 3$

Warunek $|b_0| < b_3$ nie jest spełniony, gdyż $|1,09| > 0,19$.

W związku z uzyskanym wynikiem stwierdzamy, że badany model dyskretny jest niestabilny. Numerycznie wyznaczone pierwiastki wielomianu charakterystycznego są następujące: $z_1 = -1,7549$, $z_2 = 0,9$, $z_3 = -0,1226 + j0,7449$, $z_4 = -0,1226 - j0,7449$. \square

PRZYKŁAD 50

Zbadamy stabilność układu dyskretnego o transmitancji

$$T(z) = \frac{z^2 - z + 1}{z^3 - 1,5z^2 + 0,38z + 0,144}$$

Wielomian charakterystyczny ma postać

$$M(z) = z^3 - 1,5z^2 + 0,38z + 0,144$$

a odpowiednie współczynniki są następujące:

$$a_3 = 1, \quad a_2 = -1,5, \quad a_1 = 0,38, \quad a_0 = 0,144$$

Krok 1.

1. Sprawdzamy warunek $|a_0| < a_n$ dla $n = 3$.

Warunek $|a_0| < a_3$ jest spełniony, gdyż $|0,144| < 1$.

2. Budujemy wielomian stopnia $n - 1$ postaci

$$b_2z^2 + b_1z + b_0$$

wyznaczając jego współczynniki wg schematu

$$b_{n-1-k} = a_n a_{n-k} - a_0 a_k \quad \text{dla } k = 0, 1, 2$$

$$n = 3, \quad k = 0 \quad b_{3-1-0} = b_2 = a_3 a_3 - a_0 a_0 = 0,97964$$

$$n = 3, \quad k = 1 \quad b_{3-1-1} = b_1 = a_3 a_{3-1} - a_0 a_1 = a_3 a_2 - a_0 a_1 = -1,55472$$

i otrzymujemy wielomian wykorzystywany w kolejnej iteracji

$$b(z) = b_2z^2 + b_1z + b_0 = 0,97964z^2 - 1,55472z + 0,596$$

Krok 2.

1. Sprawdzamy warunek $|b_0| < b_n$ dla $n = 2$.

Warunek $|b_0| < b_2$ jest spełniony, gdyż $|0,596| < 0,97964$.

2. Budujemy wielomian stopnia o jeden niższy niż poprzednio

$$b_1z + b_0$$

z wykorzystaniem wielomianu $b(z)$ z poprzedniej iteracji. Zatem $a_2 = 0,97964$, $a_1 = -1,55472$, $a_0 = 0,596$. Współczynniki b_1 i b_0 nowego wielomianu wyznaczamy wg tego samego schematu

$$b_{n-1-k} = a_n a_{n-k} - a_0 a_k \quad \text{dla } k = 0, 1$$

$$n = 2, \quad k = 0 \quad b_{2-1-0} = b_1 = a_2 a_2 - a_0 a_0 = 0,6044785296$$

$$n = 2, \quad k = 1 \quad b_{2-1-1} = b_0 = a_2 a_{2-1} - a_0 a_1 = a_2 a_1 - a_0 a_1 = -0,596253288$$

i otrzymujemy wielomian wykorzystywany w kolejnej iteracji

$$b(z) = b_1z + b_0 = 0,6044785296z - 0,596253288$$

Warunek $|b_0| < b_1$ jest spełniony, gdyż $|-0,596253288| < 0,6044785296$.

4. Własności układów

194 4.1. Stabilność układów dynamicznych

2. W tym momencie kończy się proces iteracyjny. Otrzymaliśmy wielomian stopnia 1 i wiadomo, że ma on pierwiastek o module mniejszym niż jedność.

Ostatecznie stwierdzamy, że badany model dyskretny jest stabilny asymptotycznie. \square

Przekształcenie biliniowe

Przekształcenie biliniowe jest zdefiniowane następująco:

$$(4.31) \quad z = \frac{s+1}{s-1}$$

Przekształcenie (4.31) jest relacją łączącą zmienną zespoloną s i z . Podstawowią zaletą tego przekształcenia jest jednoznaczne odwzorowanie lewej półpłaszczyzny zmiennej zespolonej s na koło o promieniu jednostkowym na płaszczyźnie zmiennej zespolonej z . Własność ta ma bardzo ważną konsekwencję. Mianowicie, dzięki tej własności do badania stabilności asymptotycznej układów dyskretnych można wykorzystać wszystkie kryteria stabilności układów ciągłych. Wystarczy wykonać podstawienie (4.31) i wykonać kilka przekształceń.

PRZYKŁAD 51

Zbadamy stabilność układu dyskretnego opisanego transmitancją

$$T(z) = \frac{z^2 - z + 1}{z^3 - 1,5z^2 + 0,38z + 0,144}$$

z wykorzystaniem kryterium Hurwitz. Przed przytaknięciem do badania stabilności układu dyskretnego za pomocą kryterium Hurwita wykonyje się przekształcenie biliniowe, tj.

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^2 - \frac{s+1}{s-1} + 1}{\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^3 - 1,5\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^2 + 0,38\frac{s+1}{s-1} + 0,144} = \\ &= \frac{(s+1)^2(s-1) - (s+1)(s-1)^2 + (s-1)^3}{(s+1)^3 - 1,5(s+1)^2(s-1) + 0,38(s+1)(s-1)^2 + 0,144(s-1)^3} = \\ &= \frac{s^3 - s^2 + 3s - 3}{0,024s^3 + 0,688s^2 + 4,552s + 2,736} \end{aligned}$$

Wynika stąd, że współczynniki wielomianu charakterystycznego są następujące: $a_3 = 0,024, a_2 = 0,688, a_1 = 4,552, a_0 = 2,736$.

Ponieważ wszystkie współczynniki wielomianu charakterystycznego są dodatnie, zatem jest spełniony warunek konieczny kryterium Hurwita. W związku z tym można

przystąpić do konstruowania wyznaczników. Główny wyznacznik Hurwita przedstawia się następująco:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,688 & 0,024 & 0 \\ 2,736 & 4,552 & 0,688 \\ 0 & 0 & 2,736 \end{vmatrix}$$

Odpowiednio podwyznaczniki są następujące:

$$\Delta_1 = a_2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} > 0$$

Wynika stąd, że badany układ dyskretny jest stabilny, ponieważ odpowiadający mu model ciągły, powstały w wyniku przekształcenia biliniowego, jest stabilny. Numerycznie wyznaczone pierwiastki modelu ciągłego są następujące: $s_1 = -19, s_2 = -9, s_3 = -\frac{2}{3}$.

Dzieki zastosowaniu przekształcenia biliniowego można wyznaczyć pierwiastki modelu dyskretnego odpowiadające wyznaczonym pierwiastkom modelu ciągłego

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{s_1 + 1}{s_1 - 1} = \frac{-19 + 1}{-19 - 1} = 0,9 & z_2 &= \frac{s_2 + 1}{s_2 - 1} = \frac{-9 + 1}{-9 - 1} = 0,8 \\ z_3 &= \frac{s_3 + 1}{s_3 - 1} = \frac{-\frac{2}{3} + 1}{-\frac{2}{3} - 1} = -0,2 \end{aligned}$$

\square

UWAGA 14. *Analizując przydatność przekształcenia biliniowego do badania stabilności układów dyskretnych, należy powiedzieć, że jest ono uniarkowawne przydatne ze względu na dość duży nakład pracy w przypadkach modeli wyższych rzędów.*

4.1.5. Teoria Lapunowa badania stabilności układów nieliniowych

Gdy mamy dany układ sterowania, pierwszym i najważniejszym pytaniem jest, czy układ jest stabilny. Jakościowo układ jest uważany za stabilny, jeżeli po starcie z punktu pracy będzie pozostawać on w pobliżu tego punktu. Na przykład dla układu sterowania samolotem typowy problem stabilności jest związany z następującym pytaniem: czy zakłócenie trajektorii lotu z powodu podmuchu wiatru będzie miało wpływ na znaczące odchylenie trajektorii w późniejszej części lotu? Wymagany tutaj, aby punktem pracy układu była trajektoria lotu bez zakłóceń. W każdym układzie sterowania, liniowym czy też nieliniowym, problem stabilności występuje i powinien być uważanie prześledzowany.

Najbardziej użytecznym i ogólnym podejściem do studiowania stabilności nieliniowych układów sterowania jest teoria wprowadzona przez rosyjskiego matematyka Aleksandra Lapunowa [155]. W pracy „Ogólny problem stabil-

ności ruchu” Lapunow przedstawia dwie metody analizy stabilności. Pierwsza z tych metod jest zwana metodą pośrednią, druga zaś – metodą bezpośrednią. Pierwsza metoda pozwala badać stabilność lokalną, a druga – stabilność w ograniczonym lub nieograniczonym obszarze przestrzeni stanów układów liniowych.

Były tworzone różne odmiany i udoskonalenia metod Lapunowa. Dzisiaj, metoda linearyzacji Lapunowa (metoda pośrednia) reprezentuje teoretyczne uzasadnienie sterowania liniowego, podczas gdy bezpośrednia metoda Lapunowa stała się najważniejszym narzędziem w analizie i projektowaniu układów nieliniowych. Razem, metoda linearyzacji i metoda bezpośrednia tworzą tzw. teorię stabilności Lapunowa.

Przed omówieniem głównych pojęć stabilności rozpatrymy kilka względnie prostych, pomocniczych kwestii.

Układy nieliniowe. Nieliniowy układ dynamiczny jest zwykle przedstawiany przez układ nieliniowych równań różniczkowych

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \quad (4.32)$$

gdzie f jest nieliniową funkcją wektorową, a \mathbf{x} jest wektorem zmiennych stanu o wymiarze $n \times 1$. Dana wartość wektora stanu też jest nazywana punktem, ponieważ odpowiada on punktowi w przestrzeni stanów. Liczba zmiennych stanu n jest nazywana rzędem układu. Rozwiązaniami $\mathbf{x}(t)$ równania (4.32) zwykle odpowiadają krzywej w przestrzeni stanów, gdy t zmienia się od zera do niekończości, jak było to w analizie metodą phasorzy fazowej dla przypadku $n = 2$. Ta krzywa ogólnie jest nazywana trajektorią stanów lub trajektorią układu. Ważne jest to, że chociaż w równaniu (4.32) nie ma wyodrębnionych wejść jako zmiennych, to bezpośrednio są one stosowane w sprzężeniach zwrotnych układów sterowania. Przyczyną jest równanie (4.32), które może przedstawiać dynamikę zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego, z wejściemi będącymi funkcjami stanów \mathbf{x} i czasu t , dlatego nie są widoczne one w dynamice zamkniętej pętli. Szczególnie, jeżeli dynamika jest opisana zależnością

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, u, t)$$

a sterowanie za pomocą

$$u = g(\mathbf{x}, t)$$

Wtedy dynamika zamknięta pętlą ma postać

$$\dot{\mathbf{x}} = f[\mathbf{x}, g(\mathbf{x}, t), t]$$

która można zapisać w formie (4.32). Oczywiście, równanie (4.32) może też przedstawać układy dynamiczne, które nie mają żadnych sygnałów sterujących, tak jak w swobodnie poruszającym się wahadle.

Układy autonomiczne i nieautonomiczne. Układy liniowe są klasyfikowane jako stacjonarne lub niestacjonarne, zależnie od tego, czy macierz układu zmienia się w czasie, czy też nie. W ogólnym kontekście nieliniowych układów, te przyjotniki są zastępowane przez „autonomiczne” i „nieautonomiczne”.

DEFINICJA 56

Nieliniowy układ opisany równaniem (4.32) jest autonomiczny, jeżeli f nie zależy wprost od czasu, tj. jeżeli równanie stanów układu może być zapisane jako

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \quad (4.33)$$

w przeciwnym razie układ jest nazywany nieautonomicznym.

Oczywiście, liniowe układy stacjonarne (ang. *Linear Time-Invariant* – LTI) są autonomiczne, a liniowe układy niestacjonarne (ang. *Linear Time-Varying* – LT,V) są nieautonomiczne. Ścisłe mówiąc, wszystkie fizyczne układy są nieautonomiczne, ponieważ żadna z ich charakterystyk dynamicznych nie jest stała w czasie. Pojęcie układu autonomicznego jest pojęciem idealizowanym, tak jak pojęcie układu liniowego. W praktyce właściwości układu często zmieniają się bardzo wolno i trocheśmy zaniedbać ich zmiany czasowe, nie popełniając znacznych błędów. Ważne jest to, że dla układów sterowania powyższa definicja jest dla dynamiki zamkniętej pętli. Układ sterowania traktowany jako połączenie sterownika i obiektu (włączając czujniki i urządzenia wykonawcze), a zatem nieautonomicznej natury układu sterowania może być zmienność czasowa obiektu lub sterowania. Obiekt stacjonarny opisany równaniem

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, u)$$

można sprowadzić do układu nieautonomicznego, zamkniętego pętlą, jeżeli wybierzemy sterowanie zależne od czasu, tj. jeżeli $u = g(\mathbf{x}, t)$. Na przykład układ zamknięty pętlą, dla prostego obiektu $\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x} + u$, może być nieliniowy i niestacjonarny przez wybór u , które jest nieliniowe i zmienne w czasie (np. $u = -x^2 \sin t$). W rzeczywistości adaptacyjne układy sterowania dla obiektów liniowych stacjonarnych zwykle mają w układzie zamkniętym systemy nieliniowe i nieautonomiczne. Zasadnicza różnica między autonomicznymi i nieautonomicznymi układami polega na tym, że trajektoria stanów układów autonomicznych jest niezależna od początkowego czasu, podczas gdy dla układu nieautonomicznego generale tak nie jest. Jak wiadomo analiza liniowych układów stacjonarnych jest dużo łatwiejsza niż liniowych układów niestacjonarnych. Tak samo jest w przypadku układów nieliniowych. Ogólnie mówiąc, układy autonomiczne mają względnie prostsze właściwości i ich analiza jest dużo łatwiejsza. Z tej przyczyny w dalszym ciągu będziemy koncentrować się na analizie układów autonomicznych, opisanych wzorem (4.33).

Punkty równowagi

DEFINICJA 57

Stan x^ jest stanem równowagi (albo punktem równowagi) układu wtedy gdy, jeżeli $x(t)$ staje się równe x^* , to pozostaje równe x^* dla całego czasu $t \rightarrow \infty$.*

Matematycznie oznacza to, że stały wektor x^* spełnia warunek

$$0 = f(x^*) \quad (4.34)$$

Punkty równowagi mogą być wyznaczone przez rozwiązywanie nieliniowego równania algebraicznego (4.34). Liniowy układ stacjonarny

$$\dot{x} = Ax \quad (4.35)$$

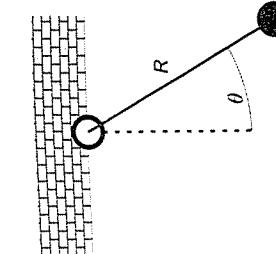
ma pojedyńczy punkt równowagi (początek układu współrzędnych 0), jeżeli macierz A jest nieosobliwa. Jeżeli macierz A jest osobliwa, to ma nieskończenie wiele punktów równowagi, które są zawarte w jądrze (przestrzeni zerowej) macierzy A , tj. podprzestrzeni definiowanej jako $Ax = 0$. Z tego wynika, że punkty równowagi nie są izolowane, jak widać w przykładzie $\ddot{x} + \dot{x} = 0$, w którym wszystkie punkty na osi x płaszczyzny fazowej są punktami równowagi. Nieliniowy układ może mieć kilka (albo nieskończoność dużo) izolowanych punktów równowagi, co zostało pokazane wczesniej.

PRZYKŁAD 52 (wahadło)

Rozważmy wahadło (rys. 4.25), którego dynamika jest opisana następującym nieliniowym równaniem autonomicznym:

$$MR^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + Mgr\sin\theta = 0 \quad (4.36)$$

gdzie: R – długość wahadła, M – jego masa, b – współczynnik tarcia przy zawiasie, g – przyspieszenie ziemskie.



Rys. 4.25. Wahadło

Niech $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, a równoważnymi równaniami w przestrzeni stanów są

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.37)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{b}{MR^2}x_2 + \frac{g}{R}\sin x_1 \quad (4.38)$$

Punkty równowagi są więc otrzymywane z równań
a stąd ich współrzędne wynoszą $(0, 0)$ i $(\pi, 0)$. Fizycznie, punkty te pokrywają się doładownie z pozycją pionową górną i dolną wahadła. \square

W analizie i projektowaniu układów liniowych, dla uproszczenia, często prększtalcamy równania układu liniowego w taki sposób, że punkt równowagi jest początkiem przestrzeni stanów. Możemy zrobić to samo dla układów nielinowych (4.33), o danym punkcie równowagi. Niech x^* będzie interesującym nas punktem równowagi. Wtedy, przez wprowadzenie nowej zmiennej

$$y = x - x^* \quad (4.39)$$

i zamianę $y = x - x^*$ w równaniu (4.33), otrzymamy nowe równanie

$$\dot{y} = f(y + x^*) \quad (4.39)$$

Łatwo można sprawdzić, że jest jednoznaczna zgodność między rozwiązaniami równań (4.33) i (4.39) i w dodatku $y = 0$. Rozwiązywanie odpowiadające $x = x^*$ jest punktem równowagi równania (4.39). Dlatego, zamiast studiowania zachowania równania (4.33) w sąsiedztwie x^* , można analizować zachowanie równania (4.33) w sąsiedztwie początku układu współrzędnych.

Pojęcia stabilności

Na początku wprowadzimy intuicyjne pojęcie stabilności, czyli jak powinien zachowywać się układ w pobliżu danego punktu pracy. Jednak układy nieliniowe mogą mieć dużo bardziej złożone zachowania niż układy liniowe, więc zwykłe pojęcie stabilności nie ma wszystkich istotnych cech, które chcemy opisać. Istnieje pewna liczba bardziej wyrafinowanych pojęć stabilności, takich jak *stabilność asymptotyczna, stabilność wykładnicza i globalna stabilność asymptotyczna*. Nizej zdefiniujemy te pojęcia formalnie dla układów autonomicznych i objaśnimy ich praktyczne znaczenie.

Stabilność i niestabilność. Dla jasności będziemy używać następujących oznaczeń: B_R oznacza otoczenie sferyczne (lub kule) definiowaną przez $\|x\| < R$ w przestrzeni stanów, a S_R powierzchnię tej sfery, definiowaną przez $\|x\| = R$. Weźmy pod uwagę układ autonomiczny nieliniowy opisany równaniem

$$\dot{x} = f(x) \quad (4.40)$$

przy czym x jest n -wymiarowym wektorem stanu, a $f(x)$ – nieliniową ogólną funkcją wektorową spełniającą warunek Lipschitza. Niech $x_r = 0$ będzie punktem równowagi tego układu, czyli $f(0) = 0$.

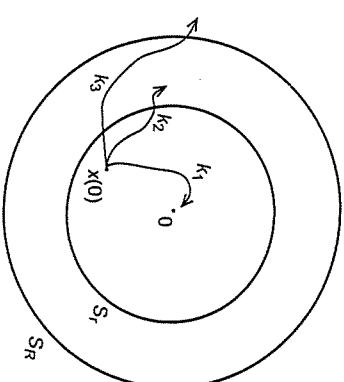
DEFINICJA 58

Mówimy, że stan (punkt) równowagi $x_r = 0$ jest stabilny, jeżeli dla dowolnego $R > 0$ istnieje $r > 0$ takie, że jeżeli $\|x(0)\| < r$, to $\|x(t)\| < R$ dla każdego $t > 0$. W przeciwnym razie stan (punkt) równowagi jest niewystabilny.

DEFINICJA 59

Stan (punkt) równowagi $x_r = 0$ jest stabilny asymptotycznie, jeżeli jest on stabilny i w dodatku istnieje pewne $r > 0$ takie, że z $\|x(0)\| < r$ wynika, iż $x(t) \rightarrow 0$, gdy $t \rightarrow \infty$.

Punkt równowagi jest stabilny, jeżeli w dowolnej chwili trajektoria układu zaczynająca się w punkcie $x(0)$ leżącym wewnątrz kuli B_r znajduje się w kuli B_R (rys. 4.26, krzywa k_2). Stabilność asymptotyczna oznacza, że punkt równowagi jest stabilny i w dodatku stany zaczynające się blisko 0 faktycznie dążą do 0, gdy czas t dąży do nieskończoności. Na rysunku 4.26 widzimy, że trajektorie zaczynające się wewnątrz kuli B_r dążą do początku układu współrzędnych. Kula B_r jest nazywana dziedziną przyciągania punktów równowagi. Dziedzina przyciągania punktów równowagi odnosi się do dużych obszarów, to jest do wszystkich punktów takich, że trajektorie zapoczątkowane w tych punktach ostatecznie dążą do początku. Punkty równowagi, które są stabilne w sensie Lapunowa, ale nie są stabilne asymptotycznie nazywamy stabilnymi nieasymptotycznie (na granicy stabilności) (rys. 4.26, krzywa k_3). Punkt równowagi jest niesabilny, jeżeli istnieje co najmniej jedna kula B_R taka, że dla każdego $r > 0$, nieważne jak malego, trajektoria układu zaczyna się wewnątrz kuli B_r i opusz-



Rys. 4.26. Trajektorie fazowe dotyczące stanów równowagi
 k_1 – układ stabilny asymptotycznie, k_2 – układ stabilny nieasymptotycznie (na granicy stabilności), k_3 – układ niesabilny

ca kule B_R (rys. 4.26, krzywa k_3). Niestabilne punkty węzlowe lub siodła w układach drugiego rzędu są przykładami niesabilnych punktów równowagi. Niestabilny punkt równowagi jest bardzo niepożądzany, ponieważ prowadzi często do cyklu granicznego lub kończy się uszkodzeniem mechanicznych lub elektrycznych elementów obiektu.

W wielu zastosowaniach inżynierczych nie jest wystarczająca świadomość, że system będzie dążył do punktu równowagi w nieskończonym czasie. Potrzeba jest też ocena, jak szybko trajektoria systemu dąży do punktu 0. W tym celu może być stosowane pojęcie stabilności eksponentjalnej (wykładniczej).

DEFINICJA 60

Stan (punkt) równowagi $x = 0$ jest stabilny eksponentjalnie (wykładniczo), jeżeli istnieje dwie liczby dodatnie α i λ takie, że

$$\forall_{t>0} \quad \|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\lambda t} \quad (4.41)$$

w jakiejś kuli B_r dokola początku układu współrzędnych.

Wyrażenie (4.41) oznacza, że wektor stanów eksponentjalnie stabilizuje układ, dając do początku szybciej niż funkcja wykładnicza. Dodatnia liczba λ jest często nazywana współczynnikiem zbieżności wykładniczej. Na przykład układ

$$\dot{x} = - (1 + \sin^2 x) x$$

jest wykładniczo zbieżny do $x = 0$ ze współczynnikiem $\lambda = 1$. Naprawdę jego rozwiążaniem jest

$$x(t) = x(0)e^{-\int_0^t [1 + \sin^2 \tau] dt}$$

i dla tego

$$|x(t)| \leq |x(0)| e^{-t}$$

Z powyższych obliczeń wynika, że wykładnicza stabilność implikuje asymptotyczną stabilność. Ale asymptotyczna stabilność nie gwarantuje stabilności wykładniczej, co można zobaczyć na przykładzie układu

$$\dot{x} = -x^2, \quad x(0) = 1 \quad (4.42)$$

którego rozwiążaniem jest $x = \frac{1}{(1+t)}$, funkcja wolniej zbieżna niż jakakolwiek funkcja wykładnicza $e^{-\lambda t}$ (dla $\lambda > 0$).

Stabilność lokalna i globalna. Powyższe definicje są tak formułowane, aby scharakteryzować lokalne zachowanie układów tj. jak rozwija się stan po startie z punktu w pobliżu punktu równowagi. Lokalne właściwości mało mówią o tym,

jak układ będzie się zachowywał, gdy stan początkowy będzie się znajdował w pewnej odległości od punktu równowagi. Dlatego potrzebne są globalne pojęcia, aby opisać także i takie przypadki.

DEFINICJA 61

Jeżeli asymptotyczna (lub wykładnicza) stabilność występuje dla dowolnego początkowego stanu, to mówimy, że punkt równowagi jest globalnie stabilny asymptotycznie (lub wykładniczo).

Liniowe układy stacjonarne są albo stabilne asymptotycznie, albo stabilne nieasymptotycznie, lub też niestabilne, jak można wnioskować z rozwiązań układu liniowego. Liniowa stabilność asymptotyczna jest zawsze globalna i wykładnicza, a liniowa niestabilność zawsze powoduje, że układ wykładniczo dąży do nieskończoności. To wyjaśnia, dlaczego wyrafinowane pojęcia stabilności wprowadzone tutaj nie były spotykane wcześniej w analizie liniowych systemów. Są one potrzebne tylko w analizie systemów nieliniowych.

Linearizacja i stabilność lokalna

Metoda pośrednia Lapunowa. Metoda linearizacji Lapunowa dotyczy lokalnej stabilności układów nieliniowych. Jest to formalizacja intuicyjnego pojęcia, że nieliniowy układ powinien zachowywać się podobnie do układu przybliżonego (linearyzowanego) w malym zakresie zmian sygnałów. Ponieważ wszystkie fizyczne układy z natury są nieliniowe, metoda linearizacji Lapunowa służy więc głównie uzasadnieniu używania liniowych technik sterowania w praktyce. Pokazuje ona, że stabilność osiągnięta przez liniowe sterowanie gwarantuje lokalną stabilność oryginalnego układu fizycznego.

Rozważmy autonomiczny układ opisany równaniem (4.33) i przyjmijmy, że funkcja $f(x)$ jest ciągła i różniczkowalna. Wtedy dynamika układu może być zapisana jako

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=0} x + f_{h.o.t.}(x) \quad (4.43)$$

gdzie $f_{h.o.t.}$ oznacza wyrazy wyższego rzędu rozwinięcia w szeregu Taylora. Stwierdzimy, że rozwinięcie w szeregu Taylora zaczyna się bezpośrednio od członu pierwszego rzędu, wynika z faktu, że $f(0) = 0$, stąd 0 jest punktem równowagi. Oznaczmy przez stałą macierz \mathbf{A} , macierz Jacobiego funkcji f względem x , przy $x = 0$ (macierz $n \times n$ elementów $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$), czyli

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=0}$$

Wtedy układ o opisie

$$\dot{x} = \mathbf{A}x \quad (4.44)$$

jest nazywany linearizacją (lub liniową aproksymacją) oryginalnego nieliniowego układu z punktem równowagi w zerze. Podobnie układ nieautonomiczny, nieliniowy z wejściem sterującym u można opisać równaniem

$$\dot{x} = f(x, u)$$

takim, że $f(0, 0) = 0$. Wówczas możemy napisać

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=0, u=0} x + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)_{x=0, u=0} u + f_{h.o.t.}(x, u)$$

gdzie $f_{h.o.t.}$ oznacza wyrazy wyższego rzędu w rozwinięciu w szeregu Taylora. Macierz \mathbf{A} jest macierzą Jacobiego funkcji f względem x , jako że $x = 0, u = 0$ i macierz \mathbf{B} jest macierzą Jacobiego funkcji f względem u , jako że $x = 0, u = 0$ (macierz $n \times m$ elementów $\frac{\partial f_i}{\partial u_j}$, gdzie m jest liczbą wejść)

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=0, u=0} \quad \mathbf{B} = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)_{x=0, u=0}$$

Układ

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u$$

jest linearizacją (lub liniową aproksymacją) oryginalnego nieliniowego układu przy $x = 0, u = 0$. Ponadto, wybór sterowania w postaci $u = u(x)$ umożliwia przekształcenie oryginalnego nieautonomicznego układu w autonomiczny układ zamknięty pętla, mający punkt równowagi dla $x = 0$. Liniowa aproksymacja sterowania jest zapisana jako

$$u \approx \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0} x = \mathbf{G}x$$

Dynamika zamknięta pętla może być liniowo aproksymowana jako

$$\dot{x} = f(x, u(x)) \approx (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{G})x$$

Oczywiście, to samo liniowe przybliżenie może być otrzymane bezpośrednio, jeśli rozpatrzmy autonomiczny układ zamknięty pętlą

$$\dot{x} = f(x, u(x)) = f_1(x)$$

i zlinearizujemy funkcję f_1 względem x , dla punktu równowagi $x = 0$. W praktyce, aby znaleźć liniaryzację układu, często jest dużo prostsze pominięcie w dynamice członów wyższego rzędu niż 1, co ilustruje poniższy przykład.

PRZYKŁAD 53

Rozważmy układ

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2^2 + x_1 \cos x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + x_1 (x_1 + 1) + x_1 \sin x_2\end{aligned}$$

Jego liniaryzacja w $x = 0$ jest

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 0 + x_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + 0 + x_1\end{aligned}$$

Układ zlinearyzowany może być napisany jako

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

Podobna procedura może być zastosowana do układu sterowania. Rozważmy system

$$\ddot{x} + 4\dot{x}^5 + (x^2 + 1) u = 0$$

Układ może być liniowo aproksymowany przy $x = 0$ jako

$$\ddot{x} + 0 + (0 + 1)u \approx 0$$

tzn. że układ zlinearyzowany może być zapisany w formie

$$\ddot{x} = -u$$

Przyjmijmy, że sterowanie dla oryginalnego układu nieliniowego było wybrane jako

$$u = \sin x + x^3 + \dot{x} \cos^2 x$$

wtedy zlinearyzowana dynamika zamknięta pętla jest przedstawiona jako

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$$

Wynik powyższy pokazuje dokładne powiązanie między stabilnością układu liniowego (4.44) a stabilnością oryginalnego układu nieliniowego (4.40).

TWIERDZENIE 12 (metoda pośrednia Lapunowa)

- Jeżeli zlinearyzowany układ jest stabilny (tj. wszystkie wartości własne macierzy A leżą dokładnie w lewej połłaszczyźnie), to wtedy punkt równowagi oryginalnego układu nieliniowego jest asymptotycznie stabilny lokalnie.
- Jeżeli zlinearyzowany układ jest niesabilny (tj. co najmniej jedna wartość własne macierzy A leży dokładnie w prawej połłaszczyźnie), to wtedy punkt równowagi układu nieliniowego jest niesabilny.
- Jeżeli zlinearyzowany układ jest na granicy stabilności (tj. wszystkie wartości własne macierzy A leżą w lewej połłaszczyźnie, ale przynajmniej jedna z nich leży na osi jaw), to wtedy nie można nic wyrzyskować z aproksymacji liniowej (punkt równowagi może być stabilny, asymptotycznie stabilny lub niesabilny dla układu nieliniowego).

Jeżeli układ zlinearyzowany jest stabilny lub niesabilny, to wtedy przez aproksymację w pobliżu punktu równowagi układ nieliniowy jest także lokalnie stabilny lub lokalnie niesabilny. Jeżeli zlinearyzowany układ jest na granicy stabilności, to członki wyższego rzędu (4.43) mogą mieć decydujący wpływ na to, czy nieliniowy układ jest stabilny, czy niesabilny. Jak zobaczymy w przykładzie 54 proste nieliniowe układy mogą być globalnie asymptotycznie stabilne, podczas gdy ich liniowe przybliżenia są tylko nieasymptotycznie stabilne. Nie można więc prosto wnioskować własności nieliniowego układu z jego niesymptotycznego stabilnego liniowego przybliżenia.

PRZYKŁAD 54

Rozważmy układ pierwszego rzędu

$$\dot{x} = ax + bx^5$$

Początek układu współrzędnych jest jednym z dwóch punktów równowagi tego układu. Liniaryzacja tego układu dookoła początku układu współrzędnych jest dana następująco:

$$\dot{x} = ax$$

Zastosowanie metody liniaryzacji Lapunowa wskazuje następujące własności stabilności nieliniowego układu:

- $a < 0$: asymptotyczne stabilny;
- $a > 0$: niesabilny;
- $a = 0$: nie można nic powiedzieć na podstawie liniaryzacji.

W innym przypadku układem nieliniowym jest

$$\dot{x} = bx^5$$

Tutaj metoda liniaryzacji Lapunowa zawodzi, ponieważ gdy, jak zobaczymy w dalszym ciągu, bezpośrednią metodą Lapunowa łatwo możemy rozwiązać ten problem. □

Twierdzenia o liniaryzacji Lapunowa pokazują, że projektowanie liniowego sterowania jest sprawą konsekwencji. Trzeba tak zaprojektować sterownik, aby układ pozostawał w jego „liniowym zakresie”. Jest to duże ograniczenie liniowego projektu, gdyż istnieje pytania, na które jest trudno odpowiedzieć. Jaki duży jest liniowy zakres? Co jest obszarem stabilności (jak duże jest r w definicji 58)? Te pytania motywują do głębszego zbadania problemu nieliniowego sterowania, za pomocą bezpośredniej metody Lapunowa.

Metoda bezpośrednia Lapunowa. Metoda bezpośrednia jest potężnym narzędziem do analizy układów nieliniowych i dlatego tzw. analiza Lapunowa często odnosi się do metody bezpośredniej. Metoda ta jest uogólnieniem pojęcia energii związanego z układem mechanicznym. Ruch tego układu jest stabilny, jeżeli jego całkowita mechaniczna energia zmniejsza się przez cały czas. Używając metody bezpośredniej w analizie stabilności układów nieliniowych, tworzymy skalarną energię jako funkcję Lapunowa dla układu

i sprawdzamy, czy się ona zmniejsza. Metoda bezpośrednia jest odpowiednia dla wszystkich rodzajów układów sterowania, które są zmiennie lub niezmienne w czasie, ograniczonego lub nieograniczonego wymiaru. Ograniczenie tej metody polega na tym, że trudno jest znaleźć funkcję Lapunowa dla danego układu. Choćiąż bezpośrednią metodą Lapunowa jest pierwotnie metoda analizy stabilności, może być używana do rozwiązywania innych problemów w sterowaniu nieliniowym. Ważna jest możliwość zastosowania jej do projektowania sterowników nieliniowych. Metoda bezpośrednią może służyć również do estymacji osiągów układów sterowania i testowania jego odporności na zakłócenia.

Podstawowa filozofia bezpośrednią metody Lapunowa jest matematycznym rozszerzeniem fizycznej obserwacji. Jeżeli całkowita energia układu mechanicznego lub elektrycznego jest ciągle rozpraszana, to wtedy układ liniowy lub nieliniowy ostatecznie musi zatrzymać się w punkcie równowagi. Tak więc, bieżąc zmiany pojedynczej funkcji skalarnej, możemy wnioskować o stabilności układu. Rozważmy nieliniowy układ sprężynowy amortyzator mas (rys. 4.27), którego równanie dynamiczne jest zapisane w postaci

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + k_0x + k_1x^3 = 0 \quad (4.45)$$

gdzie $b\dot{x}$ przedstawia nieliniowe tłumienie, a $(k_0x + k_1x^3)$ przedstawia nieliniowy człon sprężyny. Przyjmijmy, że masa jest odciągana od naturalnej dłuższości sprężyny na dużą odległość i wtedy zwalniała. Czy wynikający z tego faktu ruch będzie stabilny? Bardzo trudno jest odpowiedzieć na to pytanie, używając definicji stabilności, ponieważ ogólne rozwiązywanie tego nieliniowego równania jest niedostępne. Metoda liniaryzacji też nie może być zastosowana, ponieważ ruch zaczyna się na zewnątrz obszaru liniowego (w każdym razie liniowe przybliżenie układu jest tylko nieasymptotycznie stabilne). Jednakże analiza energii układu może nam duży powiedzieć o ruchu układu.

Porównując definicję stabilności i energii mechanicznej, łatwo można zauważyć kilka związków między energią mechaniczną a pojęciem stabilności opisywanym wcześniej:

- zerowa energia odpowiada punktowi równowagi ($x = 0, \dot{x} = 0$),
- z asymptotycznej stabilności wynika zbliżność energii mechanicznej do zera,
- niestabilność jest związana ze wzrostem energii mechanicznej.

Związki te wskazują, że wartość wielkości skalarnej energii mechanicznej pośrednio obrazuje wielkość wektora stanów. Ponadto, właściwości stabilności układu mogą być charakteryzowane zmianami energii mechanicznej układu. Współczynnik zmian energii podczas ruchu układu są łatwo otrzymywane przez różnicowanie pierwszego równania (4.46) i użycie (4.45)

$$\dot{V}(x) = m\dot{x}\ddot{x} + (k_0x + k_1x^3)\dot{x} = \dot{x}(-b\dot{x}|x|) = -b|\dot{x}|^3 \quad (4.47)$$

Z równania (4.47) wynika, że energia układu, zaczynająca się od jakiejś początkowej wartości, ciągle jest rozpraszana przez tłumik, aż masa się zatrzyma, tj. aż $\dot{x} = 0$. Fizycznie łatwo można zauważyć, że masa w końcu musi spocząć w pozycji naturalnej dłuższości sprężyny, ponieważ przy jakiejkolwiek innej pozycji niż własna dłuższość, sila jest niezerowa. Bezpośrednia metoda Lapunowa jest oparta na uogólnieniu pojęć z układu sprężynowego amortyzatora masy do bardziej złożonych układów. Mając dany układ nielinowych równań różniczkowych, podstawowe postępowanie w bezpośredniej metodzie Lapunowa polega na stworzeniu skalarnej funkcji dla układu dynamicznego i zbadaniu znaku jej pochodnej. W ten sposób wyniki stabilności mogą być otrzymane na podstawie równań różniczkowych bez używania trudnych definicji stabilności [186].

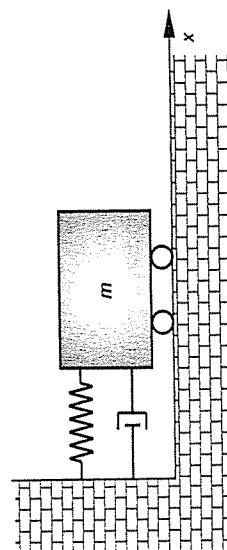
W formułowaniu bezpośrednią metodę Lapunowa korzystać będziemy z pojęć funkcji dodatnio i ujemnie określonej oraz pojęć funkcji dodatnio półokreślonej i ujemnie półokreślonej.

DEFINICJA 62

Punkcję skalarną $V(x)$ wektora stanu x nazywamy dodatnio (ujemnie) określona w obszarze Ω , zawiązującym początek układu współrzędnych przestrzeni stanów ($x = 0$), jeżeli funkcja ta w każdym punkcie tego obszaru Ω , różnym od początku układu współrzędnych $x \neq 0$, przybiera wartość dodatnią (ujemną), a wartość równą zeru tylko w punkcie $x = 0$ (rys. 4.28).

Przykładem funkcji dodatnio określonej w n -wymiarowej przestrzeni jest funkcja (rys. 4.28 i rys. 4.29)

$$V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \int_0^x (k_0x + k_1x^3) dx = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k_0x^2 + \frac{1}{4}k_1x^4 \quad (4.46)$$



Rys. 4.27. Nieliniowy sprężynowy amortyzator masy

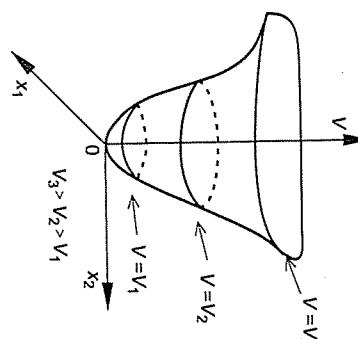
Całkowita energia mechaniczna układu jest sumą jego energii kinetycznej i energii potencjalnej

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

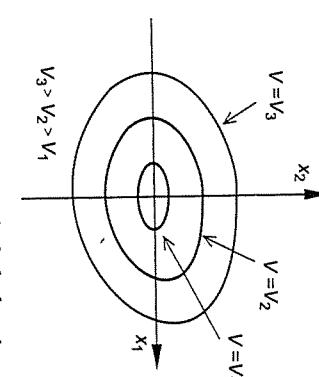
gdyż funkcja ta w dowolnym punkcie przestrzeni, różnym od początku układu współrzędnych, $x \neq 0$ ($x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$). W analogiczny sposób można wykazać, że funkcja

$$V(x) = - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

jest w n -wymiarowej przestrzeni funkcją ujemnie określona.



Rys. 4.28. Przykład dodatnio określonej funkcji $V(x_1, x_2)$, narysowany za pomocą komputeru.



Rys. 4.29. Przykład dodatnio określonej funkcji $V(x_1, x_2)$, narysowany za pomocą komputeru.

DEFINICJA 63
Funkcję skalarną $V(x)$ wektora stanu x nazywamy dodatnio (ujemnie) półokreśloną w obszarze Ω , zauważającym początek układu współrzędnych przestrzeni stanów ($x = 0$), jeżeli funkcja ta w dowolnym punkcie tego obszaru Ω przyjmuje wartość nieujemną (niedodatnią).

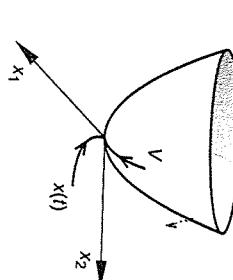
Funkcja dodatnio (ujemnie) półokreśloną w obszarze Ω może więc przyjmować wartość równą zeru nie tylko w punkcie $x = 0$, ale również w punktach tego obszaru Ω różnych od początku układu współrzędnych. Na przykład funkcja $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ jest funkcją dodatnio określona na płaszczyźnie x_1, x_2 , a funkcja dodatnio półokreśloną w przestrzeni trójwymiarowej x_1, x_2, x_3 , gdyż funkcja ta przyjmuje wartość równą零 dla $x_1 = 0, x_2 = 0$ i dowolnego x_3 .

Funkcję dodatnio półokreśloną nazywa się niekiedy w literaturze funkcją nieujemnie określzoną, a funkcję ujemnie półokreśloną, funkcję niedodatnio określzoną.

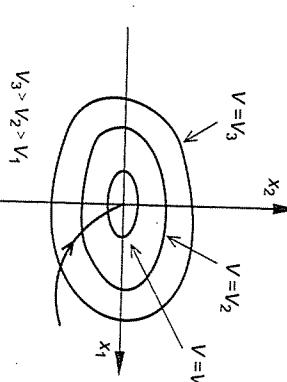
DEFINICJA 64

Jednoznaczna funkcję skalarną $V(x)$ wektora stanu x , ciągłą wraz z pierwotnymi pochodnymi względem zmiennych stanu x_1, x_2, \dots, x_n , nazywamy funkcją Lapunowa w obszarze Ω (rys. 4.30, 4.31), jeżeli:

- funkcja ta jest dodatnio określona w obszarze Ω , tzn. $V(x) > 0$ dla $x \neq 0$ i $V(0) = 0$,
- pochodna względem czasu t funkcji $V(x)$ jest ujemnie określona w obszarze Ω (dla $x \neq 0$ i $\dot{V} = 0$ tylko dla $x = 0$) lub jest ujemnie półokreśloną w tym obszarze Ω ($\dot{V}(x) \leq 0$ dla dowolnego $x \in \Omega$).



Rys. 4.30. Przykład funkcji $V(x_1, x_2)$ będącej funkcją Lapunowa



Rys. 4.31. Przykład funkcji $V(x_1, x_2)$ będącej funkcją Lapunowa, narysowany za pomocą komputera

Korzystając z pojęcia funkcji Lapunowa, pierwsze twierdzenie Lapunowa, czyli tzw. twierdzenie o stabilności, można sformułować następująco:

TWIERDZENIE 13 (pierwsze twierdzenie Lapunowa)

Układ nieliniowy opisany równaniem (4.40) jest stabilny asymptotycznie w obszarze Ω , zauważającym początek układu współrzędnych (punkt równoostrzałoną w obszarze Ω , której pochodna względem czasu $\dot{V}(x)$ uzupełniającej funkcję Lapunowa $V(x)$ dodatnio określzoną w tym obszarze Ω . Jeżeli pochodna $\dot{V}(x)$ jest funkcją ujemnie półokreśloną w obszarze Ω , to układ nieliniowy jest stabilny w tym obszarze Ω , ale niekoniecznie asymptotycznie stabilny.

PRZYKŁAD 55

Wykażemy, że układ nietlumiony opisany równaniem

$$\ddot{x} + a\dot{x} + x + bx^3 = 0 \quad (a > 0, b > 0) \quad (4.48)$$

jest stabilny w punkcie równowagi $x = 0, \dot{x} = 0$ dla dowolnych warunków początkowych. Wprowadzając zmienne stanu $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$, możemy równanie (4.48) zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - ax_2 - bx_2^3 \end{aligned} \quad (4.49)$$

Za funkcję Lapunowa przyjmujemy formę kwadratową dodatnio określona w całej płaszczyźnie x_1, x_2

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \quad (4.50)$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} \dot{x}_2 = \\ &= x_1 \dot{x}_2 - x_2 (x_1 + ax_2 + bx_2^3) = -(ax_2^2 + bx_2^4) \end{aligned} \quad (4.51)$$

Dla $a > 0$ i $b > 0$ pochodna $\dot{V}(x)$ jest ujemnie półokreślona w całej płaszczyźnie x_1, x_2 . Zgodnie z twierdzeniem 13 układ opisany równaniem (4.48) jest stabilny dla dowolnych warunków początkowych. \square

Twierdzenie Lapunowa dla stabilności lokalnej**TWIERDZENIE 14 (stabilność lokalna)**

Jeżeli, w kuli B_{Ro} istnieje skalarная funkcja $V(x)$ z ciągłą czaszką w pierwszym pochodnym takim, że:

- $V(x)$ jest dodatnio określona (lokalnie w B_{Ro}),
 - $\dot{V}(x)$ jest ujemnie półokreślona (lokalnie w B_{Ro}),
- to wtedy punkt równowagi 0 jest stabilny. Jeżeli, faktycznie, pochodna $\dot{V}(x)$ jest lokalnie ujemnie określona w B_{Ro} , to wtedy stabilność jest asymptotyczna (rys. 4.32).

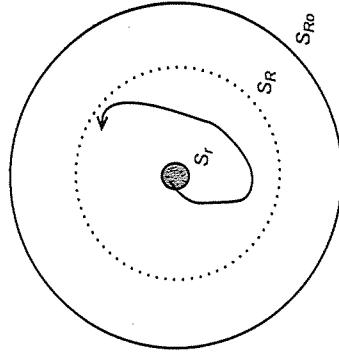
PRZYKŁAD 56 (stabilność lokalna)

Proste wahadło z tlumieniem jest opisane równaniem

$$\ddot{\theta} + \dot{\theta} + \sin \theta = 0$$

Rozważmy następującą skalarną funkcję:

$$V(x) = (1 - \cos \theta) + \frac{\dot{\theta}^2}{2}$$



Rys. 4.32. Realizacja twierdzenia 14

Sprawdzić można, że funkcja ta jest lokalnie dodatnio określona. Przedstawia ona całkowitą energię wahadła, będącą sumą energii potencjalnej i kinetycznej. Jej pochodna po czasie

$$\dot{V}(x) = \dot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta} \ddot{\theta} = -\dot{\theta}^2 \leq 0$$

Dlatego, powołując się na powyższe twierdzenie, wywnioskować można, że początek układu współrzędnych jest stabilnym punktem równowagi. Drogą nie analizując fizycznej zjawiska, łatwo można zauważyć przyczynę, dla której $V(x) \leq 0$, mianowicie człon tłumiący absorbujący energię. W rzeczywistości, \dot{V} wskazuje na możliwość rozpraszania energii w wahadle. Na podstawie tej funkcji Lapunowa nie można wyśnuć wniosków na temat asymptotycznej stabilności systemu, ponieważ pochodna $V(x)$ jest tylko ujemnie półokreślona. \square

Następny przykład ilustruje wynik asymptotycznej stabilności.

PRZYKŁAD 57 (stabilność asymptotyczna)

Przestudiujmy stabilność układu nieliniowego, zdefiniowanego jako

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(x_1^2 + x_2^2 - 2) - 4x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= 4x_1^2x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 2) \end{aligned}$$

dookola jego punktu równowagi przy początku układu współrzędnych. Dana jest dodatnio określona funkcja

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Jej pochodna V wzduż jakiegokolwiek trajektorii układu wynosi

$$\dot{V}(x) = 2(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 2)$$

Pochodna \dot{V} jest lokalnie ujemnie określona w dwuwymiarowej kuli B_2 , tj. w okolicy definiowanej przez $x_1^2 + x_2^2 < 2$. Dlatego, powyższe twierdzenie wskazuje, że początek układu współrzędnych jest lokalnie stabilny asymptotycznie. \square

Twierdzenie Lapunowa dla stabilności globalnej

Podane wcześniej twierdzenie 14 ma zastosowanie w analizie stabilności lokalnej. Aby zapewnić globalną stabilność asymptotyczną układu, należałoby oznaczyć, że kula B_{R_0} w powyższym „lokalnym” twierdzeniu musi być rozszerzona na całą przestrzeń stanu. Jest to konieczne, ale nie jest wystarczające. Dodatkowy warunek, jaki funkcja V musi spełniać, to: $V(x)$ musi być promieniowo nieograniczona, przez co many na myśl, że $V(x) \rightarrow \infty$, gdy $\|x\| \rightarrow \infty$ (innymi słowy, gdy x zmierza do nieskończoności w dowolnym kierunku). Wtedy otrzymujemy następujące twierdzenie:

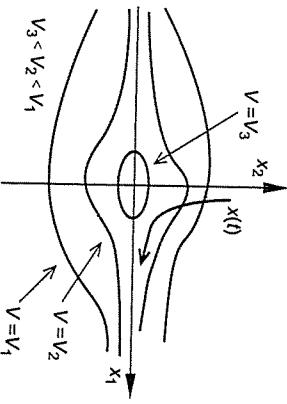
TWIERDZENIE 15 (stabilność globalna)

Jeżeli istnieje skalarna funkcja V stanu x , z ciągłymi pochodnymi pierwszego rzędu takimi, że

- $V(x)$ jest dodatnio określona,
- $\dot{V}(x)$ jest ujemnie określona,
- $V(x) \rightarrow \infty$, gdy $\|x\| \rightarrow \infty$,

to wtedy punkt równowagi w początku układu współrzędnych jest globalnie stabilny asymptotycznie.

Warunek promieniowej nieograniczoneści ma zagwarantować, że poziomice krzywych (albo poziomice powierzchni w przypadku systemów wyższego rzędu) $V(x) = V_\alpha$ odpowiadają krzywym zamkniętym. Istnieje możliwość, że krzywe nie są zamknięte. Jest to możliwe dla trajektorii stanów drążących z dala od punktu równowagi, nawet gdyby trajektoria stanu przechodziła przez poziomice odpowiadające bardziej małemu V_α . Na przykład dla dodatnio określonej funkcji $V = \left[\frac{x_1^2}{1+x_1^2+x_2^2} \right] + x_2^2$ krzywe $V(x) = V_\alpha$ dla $V_\alpha > 1$ są krzywymi otwartymi. Na rysunku 4.33 pokazano różnicę stanu podczas ruchu ku krzywym o coraz mniejszej „energii”.



Rys. 4.33. Ilustracja do twierdzenia 15

PRZYKŁAD 58

Rozważmy układ

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1 (x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 (x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}$$

Początek układu współrzędnych przestrzeni stanów jest punktem równowagi dla tego układu. Niech V będzie dodatnio określona funkcją

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

Pochodna V wzdłuż jakiejkolwiek trajektorii układu jest równa

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -2(x_1^2 + x_2^2)^2$$

i jest ujemne określona. Dlatego, początek układu współrzędnych jest punktem równowagi globalnie stabilnym asymptotycznie. Globalność tej stabilności daje nam do zrozumienia, że początek układu współrzędnych jest jedynym punktem równowagi układu. \square

4.1.6. Metody doboru funkcji Lapunowa

Po przedstawieniu teorii Lapunowa popartej kilkoma przykładami można spróbować zabrać się za praktyczne problemy nieliniowego sterowania. Jedenakże, cała teoria opisuje wszystko w ogólnym zarysie, a nie przedstawia, jak znaleźć funkcję Lapunowa. W tym punkcie zostaną przedstawione dwie metody znajdowania tej funkcji. Pierwsza zostanie przedstawiona metoda Krasowskiego, a następnie metoda zmiennych gradientów.

Metoda Krasowskiego

Metoda Krasowskiego przedstawia prosty sposób znajdowania funkcji Lapunowa dla autonomicznych układów nieliniowych postaci (4.40), mianowicie $V = f^T f$. Podstawowym celem metody jest proste sprawdzenie, czy ten szczególny wybór naprawę prowadzi do funkcji Lapunowa.

TWIERDZENIE 16 (Krasowski)

Rozważamy autonomiczny układ zdefiniowany zależnością (4.40), z punktem równowagi w początku układu współrzędnych. Niech $A(x)$ będzie macierzą Jacobiego układu

$$A(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \quad (4.52)$$

Jeżeli macierz

$$F = A + A^T \quad (4.53)$$

jest ujemnie określona w sąsiedztwie Ω , to wtedy punkt równowagi w początku układu współrzędnych jest asymptotycznie stabilny. Funkcja Lapunowa dla tego układu jest

$$(4.54) \quad V(x) = f^T(x)Bf(x)$$

gdzie B jest macierzą symetryczną o stałych, niezależnych od czasu elementach. Często jest to macierz jednostkowa i wtedy funkcja (4.54) może być zapisana w postaci

$$(4.55) \quad V(x) = f^T(x)f(x)$$

Jeżeli Ω jest całą przestrzenią stanu i w dodatku $V(x) \rightarrow \infty$, gdy $\|x\| \rightarrow \infty$, to wtedy punkt równowagi jest globalnie stabilny asymptotycznie.

Z powyższych rozważań wynika następujący tok postępowania podczas badania stabilności układów nieliniowych metodą Krasowskiego:

Krok 1. Mając równanie (4.40) opisujące układ nieliniowy, wyznaczamy funkcję Lapunowa w postaci (4.54) lub (4.55).

Krok 2. Korzystając z zależności (4.52) i (4.53), wyznaczamy macierz F .

Krok 3. W przypadku gdy $B = 1$, korzystając z twierdzenia Sylvestera, sprawdzamy, czy macierz F jest ujemnie określona. Jeżeli tak, to rozpatrywany układ jest stabilny asymptotycznie.

Dowód. Po pierwsze założmy, że z ujemnie określonej funkcji F wynika, że $f'(x) \neq 0$ dla $x \neq 0$. Z tego, że macierz kwadratowa $F(x)$ jest ujemnie określona dla niezerowego x , widać, że macierz Jacobiego $A(x)$ jest odwracalna. Założymy, że macierz A jest osobliwa. Wtedy można znaleźć niezerowy wektor y_0 taki, że $A(x)y_0 = 0$. W równaniu

$$y_0^T F y_0 = 2y_0^T A y_0$$

osobliwość macierzy A implikuje, że $y_0^T F y_0 = 0$, co zaprzecza założonej ujemnej określoności F .

Odwrocalność i ciągłość macierzy A gwarantuje, że funkcja $f(x)$ może być odwracalna. Z tego wynika, że dynamiczny układ opisany równaniem (4.33) ma tylko jeden punkt równowagi w Ω (inaczej różne punkty równowagi odpowiadalyby tej samej wartości f), tj. $f(x) \neq 0$ dla $x \neq 0$.

Możemy teraz pokazać początkową asymptotyczną stabilność. Funkcja skalarna $V(x) = f^T(x)f(x)$ jest dodatnio określona. Korzystając z faktu, że $f = Af$, pochodna V może zostać zapisana jako

$$\dot{V}(x) = f^T f + f^T f = f^T A f + f^T A^T f = f^T F f$$

Z ujemnie określonej funkcji F wynika ujemna określoność \dot{V} . Dlatego, zgodnie z bezpośrednią metodą Lapunowa, stan równowagi w początku układu współrzędnych jest asymptotycznie stabilny. Globalna stabilność asymptotyczna układu jest gwarantowana przez zastosowanie globalnej wersji bezpośredniej metody Lapunowa.

Zilustrujmy użyteczność metody Krasowskiego na prostym przykładzie.

PRZYKŁAD 59

Rozważmy nieliniowy układ

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -6x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3 \end{aligned}$$

Z powyższych równań obliczamy macierz

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -6 - 6x_2^2 \end{bmatrix}, \quad F = A + A^T = \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12 - 12x_2^2 \end{bmatrix}$$

Macierz F , jak widać, jest ujemnie określona w całej przestrzeni stanów. Dlatego też, punkt w początku układu współrzędnych jest stabilny asymptotycznie, a funkcja Lapunowa jest

$$V(x) = f^T(x)f(x) = (-6x_1 + 2x_2)^2 + (2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3)^2$$

Ponieważ $V(x) \rightarrow \infty$ dla $\|x\| \rightarrow \infty$, więc punkt równowagi w początku układu współrzędnych jest globalnie stabilny asymptotycznie. \square

Chociaż powyższa teoria jest bardzo prosta, jej przydatność jest ograniczona w praktyce, ponieważ jakobiany wielu układów nie gwarantują wymaganej ujemnej określoności. W dodatku, dla układów wysokiego rzędu trudno jest sprawdzić, czy macierz F jest ujemnie określona dla każdego x . Uogólnienie metody Krasowskiego jest następujące:

TWIERDZENIE 17 (uogólniona metoda Krasowskiego)

Rozważmy autonomiczny układ zdefiniowany zależnością (4.40), z punktem równowagi w początku układu współrzędnych i niech $A(x)$ będzie macierz Jacobego układu. Wtedy wystarczającoym warunkiem, aby początek układu współrzędnych był asymptotycznie stabilny, jest istnienie dwóch symetrycznych dodatnio określonych macierzy P i Q takich, że dla $\forall x \neq 0$ macierz

$$F(x) = A^T P + P A + Q$$

jest ujemnie półokreślona w jakimś sąsiedztwie Ω początku układu współrzędnych. Funkcja $V(x) = f^T P f$ jest wtedy funkcją Lapunowa dla układu. Jeżeli obszar Ω jest całą przestrzenią stanów i jeżeli $V(x) \rightarrow \infty$, gdy $\|x\| \rightarrow \infty$, to wtedy układ jest globalnie stabilny asymptotycznie.

Dowód. Twierdzenie to może być udowodnione podobnie jak poprzednie. Dostatnia określoność $V(x)$ może być wyrowadzona tak jak przedtem. Ponadto, pochodna V może być obliczona następująco:

$$\dot{V} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = f^T P A(x) f + f^T P A^T(x) P f = f^T F f - f^T Q f$$

Ponieważ F jest ujemnie półokreślona i Q jest dodatnio określona, więc V jest ujemnie określona i punkt równowagi w początku układu współrzędnych jest asymptotycznie stabilny. Jeżeli $V(x) \rightarrow \infty$, gdy $\|x\| \rightarrow \infty$, to bezpośrednia metoda Lapunowa wskazuje na globalną stabilność asymptotyczną układu.

Metoda zmiennych gradientów

Metoda zmiennych gradientów jest formalnym podejściem do budowania funkcji Lapunowa. Niech funkcja skalarna $V(x)$ będzie związana z jej nachyleniem ∇V przez zależność całkową

$$V(x) = \int_0^x \nabla V dx$$

gdzie

$$\nabla V = \left\{ \frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right\}^T$$

jest gradientem V . Ażeby uzyskać funkcję skalarną V , gradient funkcji musi spełnić szereg warunków

$$\frac{\partial \nabla V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \nabla V_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (4.56)$$

Zauważmy że i -ty składnik ∇V_i jest prostą pochodną kierunkową $\frac{\partial V}{\partial x_i}$. Na przykład dla przypadku $n = 2$ powyższe warunki przyjmują postać

$$\frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1}$$

W zasadzie metoda zmiennych gradientów postuluje formę gradientu ∇V , zamiast przyjmowania formy funkcji V Lapunowa. Przyjmujemy, że gradient funkcji jest w postaci

$$\nabla V_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (4.57)$$

gdzie a_{ij} są określonymi współczynnikami. Prowadzi to do następującego po- stępowania przy szukaniu funkcji V Lapunowa:

PROCEDURA 6

Krok 1. Przyjmujemy, że ∇V jest dane z zależności (4.57).

Krok 2. Rozwiążajemy równanie dla współczynników a_{ij} tak, aby spełniały warunki (4.56).

Krok 3. Ograniczany współczynnik w (4.57) tak, że funkcja \dot{V} jest ujemnie półokreślona co najmniej lokalnie.

Krok 4. Obliczamy funkcję V z ∇V przez całkowanie.

Krok 5. Sprawdzamy, czy V jest dodatnio określona.

Spełnienie warunków implikuje, że wynik powyższego całkowania jest niezależny od drogi całkowania. Jest zwykle wygodniej obliczać V przez całkowanie kolejno wzdłuż drogi, która jest równoległa do każdej osi, tj.

$$\begin{aligned} V(x) = & \int_0^{x_1} \nabla V_1(x_1, 0, \dots, 0) dx_1 + \int_0^{x_2} \nabla V_2(x_1, x_2, \dots, 0) dx_2 + \\ & + \int_0^{x_n} \nabla V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \end{aligned}$$

PRZYKŁAD 60

Użyjemy metody zmiennego gradientu do szukania funkcji Lapunowa dla nieliniowego układu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 + 2x_1 x_2^2 \end{aligned}$$

Przyjmujemy, że gradient zmiennej funkcji Lapunowa ma następującą postać:

$$\begin{aligned} \nabla V_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \nabla V_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned}$$

Układ równań jest opisany przez

$$\frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1}$$

$$a_{12} + x_2 \frac{\partial a_{12}}{\partial x_2} = a_{21} + x_1 \frac{\partial a_{21}}{\partial x_1}$$

Jeżeli współczynniki są wybrane jako

$$a_{11} = a_{22} = 1, \quad a_{12} = a_{21} = 0$$

to prowadzi do

$$\nabla V_1 = x_1, \quad \nabla V_2 = x_2$$

Wtedy \dot{V} może być obliczone z zależności

$$\dot{V} = \nabla V_1 \dot{x}_1 - 2x_1^2 - 2x_2^2(1 - x_1 x_2)$$

Tak więc \dot{V} jest lokalnie ujemnie określona w obszarze $(1 - x_1 x_2) > 0$. Funkcja V może być obliczona z zależności

$$V(x) = \int_0^{x_1} x_1 dx_1 + \int_0^{x_2} x_2 dx_2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \quad (4.58)$$

Jak widać funkcja (4.58) jest dodatnio określona i dlatego jest zapewniona asymptotyczna stabilność. Zauważmy, że (4.58) nie jest jedyną funkcją Lapunowa wyznaczoną metodą zmiennych gradientów. Na przykład weźmy

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = x_2^2, \quad a_{21} = 3x_2^2, \quad a_{22} = 3$$

Otrzymujemy funkcję dodatnio określoną

$$V = \frac{x_1^2}{2} + \frac{3}{2}x_2^2 + x_1 x_2^3 \quad (4.59)$$

której pochodną jest

$$\dot{V} = -2x_1^2 - 6x_2^2 - 2x_2^2(x_1 x_2 + 3x_1^2 x_2^2)$$

Łatwo można sprawdzić, że V jest funkcją lokalnie ujemnie określona i dla tego wzór (4.59) przedstawia inną funkcję Lapunowa dla tego układu. \square

4.1.7. Podsumowanie

Stabilność jest zasadniczym pojęciem w analizowaniu i projektowaniu układów sterowania. Różne pojęcia stabilności, takie jak stabilność Lapunowa, stabilność asymptotyczna, stabilność wykładnicza, i stabilność globalna asymptotyczna, albo wykładnicza, muszą być zdefiniowane, żeby dokładnie charakteryzować złożone i bogate pojęcie stabilności układów nieliniowych.

Z analitycznych rozwiązań nieliniowych równań różniczkowych zwykłych nie można otrzymać informacji na temat stabilności układu. Dwie metody Lapunowa mają większe znaczenie w okresleniu stabilności układu nieliniowego.

Metoda liniaryzacji może być używana dla układów poruszających się w niewielkim obszarze dookoła punktu równowagi. Ma to głównie teoretyczną wartość, usprawiedlwiąc używanie sterowania liniowego w projektowaniu i analizie słabo nieliniowych układów fizycznych.

Metoda bezpośrednią, opierającą się na funkcjach Lapunowa, nie jest ograniczona do ruchu w danym obszarze. W zasadzie, ta metoda jest odpowiednia dla wszystkich układów dynamicznych, liniowych czy też nieliniowych, ciągłych lub dyskretnych, skończonego rzędu lub nieskończonym rzędem, i w małym lub dużym zakresie ruchu. Jednak ma ona poważną wadę: problem wyznaczenia funkcji Lapunowa dla danego układu. Nie istnieje żadne ogólne efektywne podejście do wyznaczania funkcji Lapunowa. Często wykorzystuje się metodę prób i błędów, doświadczanie, intuicję do poszukiwania stosownych funkcji Lapunowa. Niektóre proste matematyczne techniki, takie jak metoda Krasowskiego lub metoda zmiennych gradientów, mogą też być pomocne.

4.1.8. Jak to zrobić w MATLAB-ie

W zakresie kryteriów stabilności układów liniowych w MATLAB-ie nie przewidziano funkcji realizujących te kryteria ze względu na funkcję ROOTS, która wyznacza numerycznie pierwiastki wielomianu. Nie ma więc potrzeby stosowania kryteriów stabilności. Wiadomo, że kryteria stabilności służą do pośredniego sprawdzenia położenia biegunków na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Sens ich stosowania znika, jeżeli mamy do dyspozycji funkcję podającą dokładne wartości pierwiastków wielomianu. W części dotyczącej badania stabilności układów dynamicznych są dostępne jedynie funkcje rozwiązujące liniowe równanie Lapunowa.

FUNKCJA ROOTS:

Funkcja wyznacza pierwiastki wielomianu o podanych współczynnikach. $\mathbf{P} = \text{ROOTS}(\mathbf{C})$ zwraca pierwiastki wielomianu o współczynnikach podanych w wektorze \mathbf{C} . Współczynniki są podawane w porządku malejącym od współczynnika przy najwyższej potędze zmiennej. \square

FUNKCJA MARGIN:

Funkcja wyznacza zapas fazowy i amplitudy modelu liniowego. $[\mathbf{Gm}, \mathbf{Pm}, \mathbf{Wcg}, \mathbf{Wcp}] = \text{MARGIN}(\mathbf{SYS})$ wyznacza zapas amplitudy G_m i fazy P_m oraz odpowiadające im częstotliwości W_{cg} oraz W_{cp} dla modelu SYS o jednym wejściu i jednym wyjściu. Wzmocnienie G_m jest określone jako $\frac{1}{G}$, gdzie G jest wzmacnieniem w punkcie, w którym przesunięcie fazowe osiąga -180° . Przesunięcie fazowe jest podawane w stopniach. W decybelach zapas amplitudy jest określony jako

$$G_{m,B} = 20 \log G_m$$

Jeżeli występuje kilka punktów, dla których przesunięcie fazowe równe jest -180° , to wtedy wybierany jest punkt o wzmacnieniu najbliższej wartości 0 dB. $[\mathbf{Gm}, \mathbf{Pm}, \mathbf{Wcg}, \mathbf{Wcp}] = \text{MARGIN}(\mathbf{MAG}, \mathbf{PHASE}, \mathbf{W})$ określa zapas fazy i amplitudy na podstawie charakterystyki Bodego, określonej za pomocą parametrów MAG i PHASE dla pulsacji podanych w wektorze \mathbf{W} . Wartości te można najłatwiej otrzymać za pomocą funkcji BODE.

MARGIN(SYS) rysuje charakterystyki Bodego modelu SYS i zaznacza na nich zapas fazowy i amplitudy.

FUNKCJA LYAP:

Funkcja rozwiązuje ciągłe równanie Lapunowa. $\mathbf{X} = \text{LYAP}(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ rozwiązuje równanie Lapunowa postaci $\mathbf{AX} + \mathbf{XA}^T + \mathbf{C} = 0$ gdzie \mathbf{A} i \mathbf{C} są macierzami identycznych rozmiarów, a macierz \mathbf{C} jest dodatnio określona.

$\mathbf{X} = \text{LYAP}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ rozwiązuje równanie Sylwestra.

$$\mathbf{AX} + \mathbf{XB} + \mathbf{C} = 0$$

które jest ogólniejszą postacią równania Lapunowa. Macierze \mathbf{A} , \mathbf{B} i \mathbf{C} są dane i nie muszą być identycznych rozmiarów. Jedynym ograniczeniem nakładanym na dane macierze jest wykonalność mnożenia, aby równanie Sylvestera mogło być spełnione.

FUNKCJA DLYAP:

Funkcja rozwiązuje dyskretnie równanie Lapunowa.

$$\mathbf{X} = \text{DLYAP}(\mathbf{A}, \mathbf{C})$$
 rozwiązuje równanie Lapunowa postaci

$$\mathbf{AXA}^T - \mathbf{X} + \mathbf{C} = 0$$

gdzie \mathbf{A} i \mathbf{C} są macierzami identycznych rozmiarów, a macierz \mathbf{C} jest dodatnio określona.

PRZYKŁAD 61

Wyznaczmy pierwiastki następującego wielomianu:

$$x^7 - 3x^6 + x^4 - x^3 + 13x^2 - 8$$

Do obliczenia pierwiastków danego wielomianu wykorzystujemy następujące polecenie:
 $\text{p}=roots([1 -3 0 1 -1 13 0 -8]);$

w którym argumentem jest wektor zawierający współczynniki wielomianu zmiennej x . Po wykonaniu tego polecenia w zmiennej \mathbf{p} otrzymujemy pierwiastki tego wielomianu

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2,6837 \\ 1,7480 \\ -0,1022 + 1,4431i \\ -0,1022 - 1,4431i \\ 0,8212 \\ -1,2628 \\ -0,7857 \end{bmatrix}$$

PRZYKŁAD 62

Dla ciągłego układu liniowego danego równaniem stanu

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

wykazemy stabilność globalną.

W celu wykazania globalnej stabilności badanego układu należy skonstruować funkcję Lapunowa, która niezależnie od wartości zmiennych stanu x_1 , x_2 oraz x_3 będzie

przyjmować wartości nieujemne. Przyjmijmy, że kandydatką na funkcję Lapunowa jest funkcja

$$V(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

gdzie $W \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ jest parametrem.

Jeżeli uda się dobrą parametr W tak, aby

$$\forall_{x_1, x_2, x_3, \quad x_1 x_2 x_3 \neq 0} \quad V(x_1, x_2, x_3) > 0$$

oraz

$$\forall_{x_1, x_2, x_3, \quad x_1 x_2 x_3 \neq 0} \quad \frac{d}{dt} V(x_1, x_2, x_3) < 0$$

gdzie $W \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ jest parametrem.

Spłnienie tych warunków jest jednoznacznego dla układu liniowego i funkcji Lapunowa (4.60) ze znalezieniem rozwiązania równania Lapunowa postaci

$$\mathbf{AW} + \mathbf{WA}^T + \mathbf{Q} = 0 \quad (4.61)$$

gdzie \mathbf{A} jest daną macierzą systemu, a \mathbf{Q} jest dowolna macierzą dodatnio określona, np. macierzą jednostkową. W związku z tym definiujemy macierz systemu badanego modelu

$$\mathbf{A} = [-5 \ 1 \ -1; 0 \ -2 \ 1; -2 \ 0 \ -3];$$

i przystępujemy do rozwiązania równania (4.61) dla $\mathbf{Q} = \mathbb{I}_3$

$$\mathbf{W} = \text{lyap}(\mathbf{A}, \text{eye}(3));$$

Pozyskiwanym rozwiązaniem jest

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0,1153 & 0,0264 & -0,0502 \\ 0,0264 & 0,2647 & 0,0294 \\ -0,0502 & 0,0294 & 0,2001 \end{bmatrix}$$

Istnienie rozwiązania równania Lapunowa implikuje stabilność globalną badanego modelu liniowego. Jako ćwiczenie pozostawiamy sprawdzenie, że wyznaczona macierz \mathbf{W} zapewnia spełnienie trzech warunków stawianych w twierdzeniu Lapunowa o stabilności globalnej. \square

UWAGA 15. Analiza stabilności, za pomocą komputera, przypadków nietypowych modeli jest utrudniona ze względu na brak algorytmu wyboru funkcji Lapunowa. Wybór funkcji Lapunowa dokonuje się bardzo często na podstawie własnych doświadczeń. Z tego względu brak jest w pakietach obliczeniowych rozwiązań pozwalających badać stabilność modeli nieliniowych.

PRZYKŁAD 63

Dla modelu o transmitancji

$$K(s) = \frac{s + 0,5}{s(0,1s^3 + 0,7s^2 + 0,3)}$$

zaznaczamy zapas fazy i amplitudy na charakterystykach Bodego.

Definiujemy model $K(s)$

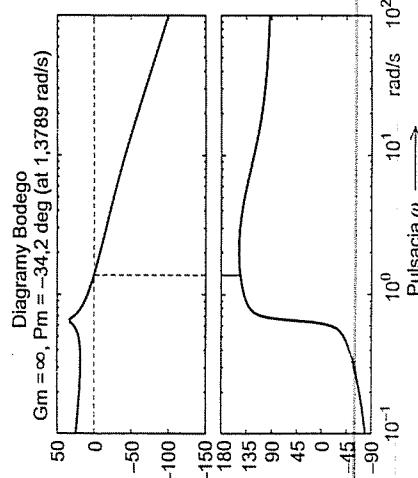
$$\text{SYS}=\text{tf}([1 0.5], [0.1 0.7 0 0.3 0]);$$

i wykonując polecenie

`margin(SYS);`

uzyskujemy odpowiedni wykres, który pokazano na rys. 4.34.

UWAGA 16. Długość pionowej kreski na wykresie fazowym odpowiada zapasowi fazy. W tym przypadku jest to zapas ok. 45° .



Rys. 4.34. Zapas fazy i amplitudy transmitancji $K(s)$ z układu 63

DEFINICJA 65

Stan $x_k \in \mathbb{R}^n$ układu opisanego równaniami (4.62), (4.63) nazywamy ogólnym w q krokach, jeżeli istnieje ciąg wymuszeń $\{u_0, u_1, \dots, u_{q-1}\}$, który przeprowadza układ ten z zerowego stanu początkowego x_0 do zadanego stanu końcowego x_k , czyli dla $x_0 = 0, x_q = x_k$.

DEFINICJA 66

Układ opisany równaniami (4.62), (4.63) nazywamy osiągalnym, jeżeli dla dowolnego stanu końcowego $x_k \in \mathbb{R}^n$ istnieje liczba naturalna q oraz ciąg wymuszeń $\{u_0, u_1, \dots, u_{q-1}\}$, który przeprowadza układ ten z zerowego stanu początkowego x_0 do zadanego stanu końcowego x_k , czyli dla $x_0 = 0, x_q = x_k$.

TWIERDZENIE 18

Układ (4.62), (4.63) jest osiągalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony jeden z warunków:

- $\text{rząd } [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n$ (4.64)

- $\text{Im } [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = \mathbb{R}^n$ (4.65)

- $\text{rząd } [\mathbb{I}_n z - A, B] = n$ (4.66)

dla wszystkich skończonych $z \in \mathbb{C}$.

Dowód. Korzystając z rozwiązaania

$$x_i = A^i x_0 + \sum_{j=0}^{i-1} A^{i-j-1} B u_j \quad (4.67)$$

równania (4.62) dla $i = n$, $x_0 = 0$, $x_n = x_k$, otrzymamy

$$x_k = \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-j-1} B u_j = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

Z zależności (4.68) wynika, że dla dowolnego $x_k \in \mathbb{R}^n$ istnieje ciąg wymuszeń $\{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (4.64). Z definicji obrazu oraz zależności (4.68) wynika, że istnieje ciąg wymuszeń $\{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}$, który przeprowadza układ (4.62), (4.63) ze stanu $x_0 = 0$

4.2. Osiągalność, sterowalność, obserwonalność i odwarzalność układów liniowych

Weźmy pod uwagę standardowy liniowy układ dyskretny

$$x_{i+1} = Ax_i + Bu_i \quad (4.62)$$

$$y_i = Cx_i + Du_i, \quad i \in Z_+ = \{0, 1, 2, \dots\} \quad (4.63)$$

przy czym $x_i \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem stanu, $u_i \in \mathbb{R}^m$ i $y_i \in \mathbb{R}^p$ są odpowiednio wektorem wymuszenia (wejścia) i odpowiedzi (wyjścia), a $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

do stanu \mathbf{x}_k wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathbf{x}_k \in \text{Im} [\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (4.69)$$

Układ (4.62), (4.63) jest więc osiągalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (4.65), gdyż \mathbf{x}_k jest dowolnym wektorem $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$.

Wykażemy, że warunek (4.66) implikuje (4.64). Niech \mathbf{v}^T będzie lewym wektorem własnym macierzy \mathbf{A} odpowiadającym wartością własnezą z , tzn.

$$\mathbf{v}^T [\mathbb{I}\mathbf{z} - \mathbf{A}] = 0 \quad (4.70)$$

Wykażemy, że $\mathbf{v}^T \mathbf{A}^i$ dla $i = 1, \dots, n-1$ są również lewymi wektorami własnymi macierzy \mathbf{A} , odpowiadającymi wartością własnezą z . Z zależności (4.70) mamy $\mathbf{v}^T \mathbf{A} = \mathbf{v}^T \mathbf{z} = z\mathbf{v}^T$. Korzystając z tej zależności, otrzymamy kolejno

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T \mathbf{A} [\mathbb{I}\mathbf{z} - \mathbf{A}] &= z\mathbf{v}^T [\mathbb{I}\mathbf{z} - \mathbf{A}] = 0, \\ \mathbf{v}^T \mathbf{A}^2 [\mathbb{I}\mathbf{z} - \mathbf{A}] &= z\mathbf{v}^T \mathbf{A}^2 [\mathbb{I}\mathbf{z} - \mathbf{A}] = 0, \\ &\vdots \\ \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{n-1} [\mathbb{I}\mathbf{z} - \mathbf{A}] &= z\mathbf{v}^T \mathbf{A}^{n-1} [\mathbb{I}\mathbf{z} - \mathbf{A}] = 0 \end{aligned} \quad (4.71)$$

Niech V będzie podprzestrzenią wszystkich wektorów ortogonalnych do wszystkich kolumn macierzy \mathbf{B} . Warunek (4.66) implikuje, że

$$\forall_{v \neq 0} \quad \mathbf{v}^T [\mathbb{I}\mathbf{z} - \mathbf{A}, \mathbf{B}] \neq 0 \quad (4.72)$$

Jeżeli $\mathbf{v} \in V$, tzn. $\mathbf{v}^T \mathbf{B} = 0$, to z zależności (4.72) many $\mathbf{v}^T [\mathbb{I}\mathbf{z} - \mathbf{A}] \neq 0$ i \mathbf{v}^T nie jest lewym wektorem własnym macierzy \mathbf{A} . Wobec tego przynajmniej jeden z wektorów własnych $\mathbf{v}^T \mathbf{A}, \dots, \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{n-1}$ macierzy \mathbf{A} nie należy do V i wtedy zachodzi

$$\mathbf{v}^T [\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \neq 0, \quad \mathbf{v} \neq 0 \quad (4.73)$$

Tak więc warunek (4.66) implikuje warunek (4.64).

Wykażemy z kolei, że warunek (4.64) implikuje warunek (4.66).

Niech $\mathbf{v} \in V$. W tym przypadku (4.73) implikuje

$$\mathbf{v}^T [\mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \neq 0 \quad (4.74)$$

i wobec tego przynajmniej jeden z wektorów $\mathbf{v}^T \mathbf{A}, \dots, \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{n-1}$ nie należy do V . Wektor \mathbf{v}^T nie jest więc lewym wektorem własnym macierzy \mathbf{A} , czyli $\mathbf{v}^T [\mathbb{I}\mathbf{z} - \mathbf{A}] \neq 0$. Spełniony jest więc warunek (4.66).

UWAGA 17. Jeżeli rzad $B = r$, a stopień wielomianu minimumgo macierzy A jest równy m ($m \leq n$), to warunek (4.64) jest równoważny warunkowi rzad $[\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{m-r}\mathbf{B}] = n$

Równoważność tę można udowodnić następująco. Z twierdzenia Cayleya-Hamiltona mamy

$$\mathbf{A}^i = \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} \mathbf{A}^j, \quad i = m, m+1, \dots \quad (4.75)$$

gdzie a_{ij} są pewnymi współczynnikami rzeczywistymi. Z zależności (4.75) wynika, że $\mathbf{A}^i \mathbf{B}$ dla $i \geq m$ są liniowo zależne od $\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{m-1}\mathbf{B}$ i mogą być wyeliminowane z warunku (4.64). Jeżeli dla liczby naturalnej j

$$\text{rzad } [\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{j-1}\mathbf{B}] = \text{rzad } [\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^j\mathbf{B}]$$

to

$$\forall_{i > j} \quad \text{rzad } [\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{j-1}\mathbf{B}] = \text{rzad } [\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{i-1}\mathbf{B}]$$

Każda macierz $\mathbf{A}^i \mathbf{B}$ dla $i = 1, \dots, m-r$ w (4.74) dodaje więc przynajmniej jedną kolumnę liniowo niezależną. Jeżeli więc rzad $B = r$, to warunek (4.74) jest równoważny warunkowi (4.64).

UWAGA 18. Warunek (4.66) jest równoważny warunkowi

$$\forall_{z \in \sigma_A} \quad \text{rzad } [\mathbb{I}_n \mathbf{z} - \mathbf{A}, \mathbf{B}] = n \quad (4.76)$$

gdzie σ_A jest widmem macierzy \mathbf{A} , czyli zbiorem jej wartości własnych.

Równoważność warunków (4.66) i (4.76) wynika z faktu, że macierz $[\mathbb{I}_n \mathbf{z} - \mathbf{A}]$ traci swój pełny rzad tylko dla $z \in \sigma_A$.

UWAGA 19. Jeżeli układ (4.62), (4.63) jest osiągalny, to jest on zawsze ogólny w nie więcej niż n krokach.

Fakt ten wynika natychmiast z twierdzenia Cayleya-Hamiltona, które umożliwia wyrażenie macierzy $\mathbf{A}^i \mathbf{B}$ dla $i = n, n+1, \dots$ w (4.64) za pomocą kombinacji liniowej macierzy $[\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$.

UWAGA 20. Układ o jednym wejściu ($m = 1$) (4.62), (4.63) nie jest ogólny, jeżeli wielomian minimum nie pokrywa się z wielomianem charakterystycznym macierzy \mathbf{A} .

Jeżeli macierz \mathbf{B} jest niezerową macierzą kolumnową i wielomian minimum stopnia m nie pokrywa się z wielomianem charakterystycznym, to $r = \text{rzad } B = 1$ i $m < n$. W tym przypadku warunek (4.74) nie jest spełniony, gdyż macierz $[\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{m-1}\mathbf{B}]$ ma tylko m kolumn.

Osiągalność układu (4.62), (4.63) zależy tylko od macierzy \mathbf{A} i \mathbf{B} tego układu. Zamast, mówić, że układ (4.62), (4.63) jest osiągalny, będący równoważnie mówić, że para (\mathbf{A}, \mathbf{B}) tego układu jest osiągalna.

PRZYKŁAD 64

Wykażemy, że para macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

jest osiągalna dla dowolnych wartości współczynników a_0, a_1, \dots, a_{n-1} .

Korzystając z warunku (4.66), otrzymujemy

$$\text{rząd} [\mathbb{I}_n z - \mathbf{A}, \mathbf{B}] = \text{rząd} \begin{bmatrix} z & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & z & + a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z & -1 & 0 \end{bmatrix} = n$$

gdzież wyznacznik macierzy kwadratowej złożonej z kolumn: drugiej, trzeciej, ..., n -tej macierzy $[\mathbb{I}_n z - \mathbf{A}]$ oraz macierzy \mathbf{B} jest równy $(-1)^{n-1}$ i nie zależy od współczynników $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$. \square

PRZYKŁAD 65

Wykażemy, że para

$$\mathbf{A} = \text{diag} [a_1, a_2, \dots, a_n], \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

jest osiągalna wtedy i tylko wtedy, gdy $a_i \neq 0$ oraz $b_i \neq 0$ dla $i = 1, 2, \dots, n$.

Korzystając z warunku (4.64) oraz uwzględniając, że

$\mathbf{A}^i = \text{diag} [a_1^i, a_2^i, \dots, a_n^i]$ dla $i = 1, 2, \dots, n-1$ otrzymamy

$$\text{rząd} [\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = \text{rząd} \begin{bmatrix} b_1 & a_1 b_1 & \cdots & a_1^{n-1} b_1 \\ b_2 & a_2 b_2 & \cdots & a_2^{n-1} b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_n b_n & \cdots & a_n^{n-1} b_n \end{bmatrix} = n$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $a_i \neq 0$ oraz $b_i \neq 0$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. \square

PRZYKŁAD 66

Wykażemy, że para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

nie jest osiągalna dla dowolnych podmacierzy $\mathbf{A}_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}, \mathbf{A}_{12} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}, \mathbf{A}_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}, \mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}, n_1 + n_2 = n$.

Korzystając z warunku (4.64) oraz biorąc pod uwagę, że

$$\mathbf{A}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^i & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}^i \end{bmatrix} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n-1.$$

(* oznacza podmacierz nieistotną w tych rozważaniach), otrzymamy

$$\text{rząd} [\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = \text{rząd} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_1 & \cdots & \mathbf{A}_{11}^{n-1}\mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} < n$$

dla dowolnych podmacierzy \mathbf{A}_{11} i \mathbf{B}_1 . \square

PRZYKŁAD 67

Wykażemy, że para (\mathbf{A}, \mathbf{B}) jest osiągalna wtedy i tylko wtedy, gdy macierz

$$\mathbf{W} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}^i \mathbf{B} \mathbf{B}^T (\mathbf{A}^T)^i \quad (4.80)$$

jest macierzą dodatnio określona (nieosobliwa).

Z zależności (4.80) wynika, że

$$\mathbf{W} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T \quad (4.81)$$

gdzie

$$\mathbf{R} = [\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (4.82)$$

Niech $\mathbf{z}^T = \mathbf{v}^T \mathbf{R}$. Wówczas

$$\mathbf{z}^T \mathbf{z} = \mathbf{v}^T \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{W} \mathbf{v} \quad (4.83)$$

Z zależności (4.82) wynika, że jeżeli jest spełniony warunek (4.64), to dla każdego $\mathbf{v} \neq 0$ many $\mathbf{z} \neq 0$ i macierz \mathbf{W} jest dodatnio określona (nieosobliwa). Odwrotnie, jeżeli \mathbf{W} jest macierzą dodatnio określona (nieosobliwa), to $\mathbf{z} \neq 0$ dla każdego $\mathbf{v} \neq 0$ i jest spełniony warunek (4.64). \square

PRZYKŁAD 68

Dana jest para nieosiągalna

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

Wykażemy, że stan $\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ jest osiągalny, a stan $\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ nie jest osiągalny.

Jeżeli para (\mathbf{A}, \mathbf{B}) nie jest osiągalna, to stan \mathbf{x}_k jest osiągalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (4.69), który jest równoważny warunkowi

$$\text{rząd} [\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}, \mathbf{x}_k] = \text{rząd} [\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (4.84)$$

Warunek ten jest spełniony dla stanu $x_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, gdyż

$$\text{rząd } [B, AB, x_k] = \text{rząd } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \text{rząd } [B, AB] = \text{rząd } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

Natomiast warunek ten nie jest spełniony dla stanu $x_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, gdyż

$$\text{rząd } [B, AB, x_k] = \text{rząd } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2, \quad \text{rząd } [B, AB] = \text{rząd } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

□

4.2.2. Sterowalność do zera i sterowalność układów dyskretnych

DEFINICJA 67

Stan początkowy $x_0 \in \mathbb{R}^n$ układu (4.62), (4.63) nazywany sterowalnym do zera w q krokach, jeżeli istnieje ciąg wymuszeń $\{u_0, u_1, \dots, u_{q-1}\}$, który przeprowadza układ ten ze stanu x_0 do stanu zerowego $x_k = 0$.

DEFINICJA 68

Układ (4.62), (4.63) nazywamy sterowalnym do zera, jeżeli dla dowolnego stanu początkowego $x_0 \in \mathbb{R}^n$ istnieje liczba naturalna q oraz ciąg wymuszeń $\{u_0, u_1, \dots, u_{q-1}\}$, który przeprowadza układ ten ze stanu x_0 do stanu zerowego $x_k = 0$.

TWIERDZENIE 19

Układ (4.62), (4.63) jest sterowalny do zera, jeżeli jest spełniony jeden z warunków twierdzenia 18.

Dowód. Korzystając z rozwiązania (4.67) równania (4.62) dla $i = n$ i $x_n = 0$, otrzymamy

$$A^n x_0 = - \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-j-1} B u_j = - [B, AB, \dots, A^{n-1} B] \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

Z zależności (4.85) wynika, że istnieje ciąg wymuszeń $\{u_0, u_1, \dots, u_{q-1}\}$ dla dowolnego x_0 , jeżeli jest spełniony warunek (4.64). Równoważność pozostałych warunków dowodzi się w ten sam sposób jak w dowodzie twierdzenia 18.

UWAGA 21. W przypadku ogólnym warunki twierdzenia 18 nie są warunkami koniecznymi sterowalności do zera układu (4.62), (4.63). Jeżeli macierz

$$x_0 = - \sum_{j=0}^{n-1} A^{-(j+1)} B u_j = - A^{-n} [B, AB, \dots, A^{n-1} B] \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

Z zależności (4.86) wynika, że dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}^n$ istnieje ciąg wymuszeń $\{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (4.64), gdzie macierz A^{-n} jest nieosobliwa i nie zmienia rzędu macierzy $[B, AB, \dots, A^{n-1} B]$.

Wniosek 1. Jeżeli macierz A jest nieosobliwa, to warunki twierdzenia 18 są również warunkami koniecznymi sterowalności do zera układu (4.62), (4.63).

PRZYKŁAD 69

Para macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

nie jest osiągalna dla dowolnej wartości współczynnika a , gdyż

$$\text{rząd } [B, AB] = \text{rząd } A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

Para (4.87) jest natomiast sterowalna do zera dla dowolnej wartości współczynnika a , gdyż macierz A jest macierzą nilpotentną, $A^2 = 0$. Wobec tego $A^2 x_0 = 0$ dla dowolnego stanu początkowego x_0 , który można sprawdzić do zera ($x_2 = 0$) za pomocą zerowego ciągu wymuszeń $u_0 = u_1 = 0$. □

TWIERDZENIE 20

Układ (4.62), (4.63) jest sterowalny do zera wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony jeden z warunków:

- $\text{rząd } [B, AB, \dots, A^{n-1} B, A^n] = \text{rząd } [B, AB, \dots, A^{n-1} B] \quad (4.88)$
- $\text{rząd } [\mathbb{I}_n - Ad, B] = n$
- dla wszystkich skończonych $d \in \mathbb{C}$.

Dowód. Jeżeli jest spełniony warunek (4.88), to korzystając z zależności (4.85) możemy wyznaczyć ciąg $\{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}$, który sprawdza dowolny stan początkowy x_0 do stanu zerowego $x_n = \mathbf{0}$. Warunek (4.88) implikuje więc sterowalność do zera układu (4.62), (4.63). Odwrotnie, jeżeli układ (4.62), (4.63) jest sterowalny do zera, to istnieje ciąg wymuszeń $\{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}$ tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (4.88). Zauważmy, że sterowalność do zera różni się od osiągalności tylko skończonymi modami niesiągajnymi. Ponadto dla $z \neq 0$ mamy $[\mathbb{I}_n z - A] = z [\mathbb{I}_n z - A]$, gdzie $d = z^{-1}$. Zastępując w warunku osiągalności wyrażenie $[\mathbb{I}_n z - A]$ wyrażeniem $[\mathbb{I}_n z - Ad]$ pomijamy właściwie skończone mody układu. Warunek (4.89) jest więc warunkiem koniecznym i wystarczającym sterowalności do zera układu (4.62), (4.63).

PRZYKŁAD 70

(ciąg dalszy przykładu 69)

W przykładzie 69 stwierdziliśmy, że para macierzy (4.87) nie jest osiągalna, ale sterowalna do zera dla dowolnej wartości współczynnika a . Wykażemy, że para ta spełnia warunki (4.88), (4.89). Korzystając z (4.90) i biorąc pod uwagę, że $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \dots$

$$\text{rząd } [\mathcal{B}, AB, A^2] = \text{rząd } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{rząd } [B, AB] = \text{rząd } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

Tak więc para (4.87) spełnia warunek (4.88). Spełnia ona również warunek (4.89), gdyż

$$\text{rząd } [\mathbb{I}_n - Ad, B] = \text{rząd } \begin{bmatrix} 1 & -ad & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

dla wszystkich wartości współczynnika a i $d \in \mathbb{C}$.

DEFINICJA 69

Układ (4.62), (4.63) nazywany sterowalnym, jeżeli dla dowolnego stanu początkowego $x_0 \in \mathbb{R}^n$ oraz każdego stanu końcowego $x_k \in \mathbb{R}^n$ istnieje liczba naturalna q oraz ciąg wymuszeń $\{u_0, u_1, \dots, u_{q-1}\}$, który prowadzą ten układ ze stanu x_0 do stanu x_k , czyli dla dowolnych x_0 i x_k , $x_q = x_k$.

TWIERDZENIE 21

Układ (4.62), (4.63) jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony jeden z warunków twierdzenia 18.

Dowód. Przeprowadzenie układu (4.62), (4.63) z dowolnego stanu początkowego $x_0 \in \mathbb{R}^n$ do dowolnego stanu $x_k \in \mathbb{R}^n$ można zrobić na następujące dwa zadania:

- prowadzenie układu ze stanu x_0 do zera,
- przeprowadzenie układu z zerowego stanu początkowego do zadanego stanu końcowego x_k .

Warunki twierdzenia 18 są warunkami dostatecznymi realizacji podzadania 1 oraz warunkami koniecznymi i wystarczającymi realizacji podzadania 2. Tak więc łącznie warunki twierdzenia 18 są warunkami koniecznymi i dostatecznymi sterowalności układu (4.62), (4.63).

Z powyższych rozważań mamy następujący ważny wniosek.

WNIOSK 2. Układ (4.62), (4.63) sterowalny do zera i osiągalny jest również układem sterowalnym.

DEFINICJA 70
Liczba naturalna ν spełniająca warunek

$$\nu := \min_j \left\{ \text{rząd } [B, AB, \dots, A^{j-1}B] = n \right\} \quad (4.91)$$

nazywana indeksem sterowalności pary (A, B) lub układu zapisanego równaniami (4.62), (4.63).

Z warunku (4.91) wynika, że jeżeli para (A, B) jest sterowalna, to $\nu \leq n$ oraz $\nu = n$ dla układu o jednym wejściu ($m = 1$).

UWAGA 24. Warunek (4.64) można zastąpić warunkiem

$$\text{rząd } [B, AB, \dots, A^{\nu-1}B] = n \quad (4.92)$$

przy czym ν jest indeksem sterowalności pary (A, B) .

4.2.3. Obserwonalność układów dyskretnych

Weźmy pod uwagę standardowy liniowy układ dyskretny opisany równaniami (4.62), (4.63).

DEFINICJA 71

Stan początkowy $x_0 \in \mathbb{R}^n$ układu (4.62), (4.63) nazywany *obserwowanym* w q krokach, jeżeli na podstawie danego ciągu wymuszeń $\{u_0, u_1, \dots, u_q\}$ i danego ciągu odpowiedzi $\{y_0, y_1, \dots, y_q\}$ można wyznaczyć jednoznacznie stan początkowy $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tego układu.

DEFINICJA 72

Układ opisany równaniami (4.62), (4.63) nazywamy *obserwowanym*, jeżeli istnieje liczba naturalna q taka, że na podstawie danego ciągu wymuszeń $\{u_0, u_1, \dots, u_q\}$ i danego ciągu odpowiedzi $\{y_0, y_1, \dots, y_q\}$ można wyznaczyć jednoznacznie każdy stan początkowy $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tego układu.

TWIERDZENIE 22

Układ (4.62), (4.63) jest obserwowany wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony jeden z warunków:

- *rzad* $\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$ (4.93)
- *ker* $\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = 0$ (4.94)
- *rzad* $\begin{bmatrix} \mathbb{I}_n z - A \\ C \end{bmatrix} = n$ (4.95)

dla wszystkich skończonych $z \in \mathbb{C}$. Porównując warunek (4.64) z warunkiem (4.98) oraz warunek (4.66) z warunkiem (4.99), stwierdzamy, że warunki (4.98), (4.99) możemy otrzymać z warunków (4.64), (4.65) i (4.66), zastępując w nich macierz A macierzą A^T i macierz B macierzą C^T . Dowód równoważności warunków (4.93) i (4.95) jest więc dualny do dowodu równoważności warunków (4.64) i (4.66).

UWAGA 25. Jeżeli $\text{rzad } C = r$, a stopień wielomianu minimalnego macierzy A jest równy m ($m \leq n$), to warunek (4.93) jest równoważny warunkowi

$$\text{rzad} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{m-r} \end{bmatrix} = n \quad (4.100)$$

Równoważność tej dowodzimy analogicznie jak równoważność warunków (4.64) i (4.74).

UWAGA 26. Warunek (4.95) jest równoważny warunkowi

$$\text{rzad} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_n z - A \\ C \end{bmatrix} = n \quad (4.101)$$

dla wszystkich $z \in \sigma_A$, gdzie σ_A jest widmem macierzy A , czyli zbiorem jej wartości własne. Równoważność warunków (4.95) i (4.101) wynika z faktu, że macierz $[\mathbb{I}_n z - A]$ traci swój pełny rzad tylko dla $z \in \sigma_A$.

UWAGA 27. Jeżeli układ opisany równaniami (4.62), (4.63) jest obserwowany, to jest on zawsze obserwowany nie wcześniej niż w n krokach. Fakt ten wynika natychmiast z twierdzenia Cayleya-Hamiltona, które umożliwia wyrażenie $C A^i$

Dla danych ciągów $\{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}$, $\{y_0, y_1, \dots, y_{n-1}\}$ z (4.96) możemy wyznaczyć ciąg $\{y'_0, y'_1, \dots, y'_{n-1}\}$. Z równania (4.97) możemy wyznaczyć jednoznacznie stan x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek (4.93). Z definicji jądra macierzy wynika natychmiast, że warunek (4.94) jest równoważny warunkowi (4.93). Transponując macierz $\begin{bmatrix} C \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ oraz macierz

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I}_n z - A \\ C \end{bmatrix}, \quad \text{możemy warunki (4.93) i (4.94) napisać w postaci} \quad (4.98)$$

$$\text{rzad} [\mathbb{C}^T, A^T C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T] = n$$

oraz

$$\text{rzad} [\mathbb{I}_n z - A^T, C^T] = n \quad (4.99)$$

dla $i = n, n+1, \dots, w$ warunku (4.93) za pomocą kombinacji liniowej macierzy C, CA, \dots, CA^{n-1} .

UWAGA 28. *Układ o jednym wyjściu ($p = 1$) (4.62), (4.63) nie jest obserwany, jeżeli wielomian minimálny nie pokrywa się z wielomianem charakterystycznym macierzy A .*

Jeżeli macierz C jest niezerową macierzą wierszową i wielomian minimalny stopnia m nie pokrywa się z wielomianem charakterystycznym, to $r = \text{rząd } C = 1$ i $m < n$. W tym przypadku warunek (4.100) nie jest spełniony, gdyż macierz

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{m-1} \end{bmatrix}$$

ma tylko m wierszy. Obserwonalność układu opisanego równaniami (4.62), (4.63) zależy tylko od macierzy A i C tego układu. Zamiast mówić, że układ (4.62), (4.63) jest obserwacyjny, będziemy równoważnie mówić, że para (A, C) tego układu jest obserwowańa.

DEFINICJA 73

Liczba naturalna μ spełniająca warunek

$$\mu = \min_{\text{rząd } C} \text{rząd} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{\mu-1} \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

nazywamy indeksem obserwonalności pary (A, C) lub układu (4.62),

Z warunku (4.102) wynika, że jeżeli para (A, C) jest obserwowańa, to $\mu \leq n$ oraz $\mu = n$ dla układu o jednym wyjściu ($p = 1$).

UWAGA 29. Warunek (4.93) można zastąpić warunkiem

$$\text{rząd} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{\mu-1} \end{bmatrix} = n \quad (4.103)$$

Przy czym μ jest indeksem obserwonalności pary (A, C) .

PRZYKŁAD 71

Wykażemy, że para

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ \dots \ 0 \ 1] \quad (4.104)$$

jest obserwowańa dla dowolnych wartości współczynników a_0, a_1, \dots, a_{n-1} .

Korzystając z warunku (4.95), otrzymamy

$$\text{rząd} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_n z - A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & z & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & z + a_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gdzie wyznacznik macierzy kwaadratowej złożonej z wierszy: drugiego, trzeciego, ..., n -tego macierzy $[\mathbb{I}_n z - A]$ oraz macierz C jest równy $(-1)^{n-1}$ i nie zależy od wartości współczynników a_0, a_1, \dots, a_{n-1} . \square

PRZYKŁAD 72

Wykażemy, że para

$$A = \text{diag}[a_1, a_2, \dots, a_n], \quad C = \text{diag}[c_1, c_2, \dots, c_n] \quad (4.105)$$

jest obserwowańa wtedy i tylko wtedy, gdy $a_i \neq 0$ oraz $c_i \neq 0$ dla $i = 1, 2, \dots, n$.

Korzystając z warunku (4.93) oraz uwzględniając, że

$$A^i = \text{diag}[a_1^i, a_2^i, \dots, a_n^i], \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

otrzymamy

$$\text{rząd} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \text{rząd} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_1 a_1 & c_2 a_2 & \dots & c_n a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 a_1^{n-1} & c_2 a_2^{n-1} & \dots & c_n a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $a_i \neq 0$ oraz $c_i \neq 0$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. \square

PRZYKŁAD 73

Wykażemy, że para

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad C = [C_1 \ 0] \quad (4.106)$$

nie jest obserwowańa dla dowolnych podmacierzy $A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{p \times n_1}$, $n_1 + n_2 = n$.

Korzystając z warunku (4.93) oraz biorąc pod uwagę, że

$$\mathbf{A}^i = \begin{bmatrix} A_{11}^i & \mathbf{0} \\ * & A_{22}^i \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

(*) oznacza podmacierz nieistotną w tych rozważaniach), otrzymamy

$$\text{rząd} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} = \text{rząd} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_1 \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{C}_1 \mathbf{A}_{11}^{n-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} < n$$

dla dowolnych podmacierzy \mathbf{A}_{11} i \mathbf{C}_1 . \square

PRZYKŁAD 74

Wykażemy, że para (\mathbf{A}, \mathbf{C}) jest obserwowały wtedy i tylko wtedy, gdy macierz

$$\mathbf{W} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{C}^T (\mathbf{A}^T)^i \mathbf{C} \mathbf{A}^i \quad (4.107)$$

jest macierzą dodatnio określona (nieosobliwą).

Z zależności (4.107) wynika, że

$$\mathbf{W} = \mathbf{H}^T \mathbf{H}$$

gdzie

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Niech $\mathbf{z} = \mathbf{Hv}$. Wówczas

$$\mathbf{z}^T \mathbf{z} = \mathbf{v}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{W} \mathbf{v} \quad (4.109)$$

Z (4.109) wynika, że jeżeli jest spełniony warunek (4.93), to dla każdego $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ mamy $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ i macierz \mathbf{W} jest dodatnio określona (nieosobliwą). Odwrotnie, jeżeli \mathbf{W} jest macierzą dodatnio określona (nieosobliwą), to $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ dla każdego $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ i jest spełniony warunek (4.93). \square

UWAGA 30. Jeżeli para (\mathbf{A}, \mathbf{C}) nie jest obserwowały, to można wyznaczyć \mathbf{x}_0 z równania (4.97) tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd} \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{y}'_0 \\ \mathbf{CA} & \mathbf{y}'_1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} & \mathbf{y}'_{n-1} \end{bmatrix} = \text{rząd} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.110)$$

Lub równoważnicie

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}'_0 \\ \mathbf{y}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}'_{n-1} \end{bmatrix} \in \text{Im} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.111)$$

Z twierdzenia Kroneckera-Capellego zastosowanego do równania (4.97) wynika, że równanie to ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (4.110) lub równoważnicie warunek (4.111). Równanie (4.97) może mieć więcej niż jedno rozwiązanie.

PRZYKŁAD 75

Para macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \ 1] \quad (4.112)$$

jest nieobserwowały. Niech w przypadku 1: $\begin{bmatrix} \mathbf{y}'_0 \\ \mathbf{y}'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, w przypadku 2: $\begin{bmatrix} \mathbf{y}'_0 \\ \mathbf{y}'_1 \end{bmatrix} =$

jest nieobserwowały. Niech w przypadku 1 równanie (4.97) ma postać

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.113)$$

a w przypadku 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.114)$$

W przypadku 1 warunek (4.110) jest spełniony, gdyż

$$\text{rząd} \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{y}'_0 \\ \mathbf{CA} & \mathbf{y}'_1 \end{bmatrix} = \text{rząd} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{rząd} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \text{rząd} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

a w przypadku 2 warunek ten nie jest spełniony, gdyż

$$\text{rząd} \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{y}'_0 \\ \mathbf{CA} & \mathbf{y}'_1 \end{bmatrix} = \text{rząd} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2, \quad \text{rząd} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \text{rząd} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

Równanie (4.113) ma nieskończenie wiele rozwiązań $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1-a \\ a \end{bmatrix}$, a – dowolna liczba, a równanie (4.114) nie ma rozwiązania. \square

4.2.4. Odtwarzalność układów dyskretnych

Weźmy pod uwagę standardowy liniowy układ dyskretny opisany równaniami (4.62), (4.63).

DEFINICJA 74

Stan $x_q \in \mathbb{R}^n$ układu (4.62), (4.63) nazywany odtwarzalnym w q krokach, jeżeli na podstawie danego ciągu wymuszeń $\{u_0, u_1, \dots, u_{q-1}\}$ i danego ciągu odpowiedzi $\{y_0, y_1, \dots, y_{q-1}\}$ można wyznaczyć jednoznacznie stan x_q tego układu.

DEFINICJA 75

Układ (4.62), (4.63) nazywany odtwarzalnym, jeżeli istnieje liczba naturalna q taka, że na podstawie danego ciągu wymuszeń $\{u_0, u_1, \dots, u_{q-1}\}$ i danego ciągu odpowiedzi $\{y_0, y_1, \dots, y_{q-1}\}$ można wyznaczyć jednoznacznie każdy stan $x_q \in \mathbb{R}^q$ tego układu.

TWIERDZENIE 23

Układ (4.62), (4.63) jest odtwarzalny, jeżeli jest spełniony jeden z warunków twierdzenia 22.

Dowód. Jeżeli q jest takie, że jest spełniony jeden z warunków twierdzenia 22, to układ jest obserwowywalny i znając ciągi $\{u_0, u_1, \dots, u_{q-1}\}, \{y_0, y_1, \dots, y_{q-1}\}$ możemy wyznaczyć stan początkowy x_0 tego układu. Następnie korzystając z rozwiązań (4.67) równania (4.62) dla $i = q$, możemy wyznaczyć poszukiwany wektor stanu

$$x_q = A^q x_0 + \sum_{j=0}^{q-1} A^{q-j-1} B u_j \quad (4.115)$$

Tak więc każdy z warunków twierdzenia 22 jest warunkiem wystarczającym odtwarzalności układu (4.62), (4.63).

UWAGA 31. Żaden z warunków twierdzenia 22 nie jest warunkiem koniecznym odtwarzalności układu (4.62), (4.63), tzn. można wyznaczyć wektor x_q nawet wtedy, gdy żaden z tych warunków nie jest spełniony.

PRZYKŁAD 76

Para macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

nie spełnia warunku (4.93), gdyż

$$\operatorname{rząd} \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \operatorname{rząd} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = 1$$

Parata nie jest obserwowawalna i nie możemy wyznaczyć stanu początkowego x_0 , znając y_0 i y_1 dla $u_0 = u_1 = 0$. Natomiast możemy wyznaczyć stan x_2 tego układu. W tym

prypadku znane są $y_0 = Cx_0 = x_{10} + x_{20}$ oraz $y_1 = C Ax_0 = 3(x_{10} + x_{20})$, gdzie $x_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$. Z równania

$$x_2 = A^2 x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3y_0 \\ 2y_1 \end{bmatrix}$$

możemy więc wyznaczyć x_2 , znając y_0 i y_1 .

UWAGA 32. Jeżeli macierz A jest nieosobliwa, to warunki twierdzenia 22 są również warunkami koniecznymi odtwarzalności układu (4.62), (4.63). Jeżeli $\det A \neq 0$, to istnieje macierz odwrotna A^{-1} i mnożąc równanie

$$x_n = A^n x_0 + \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-j-1} B u_j \quad (4.116)$$

przez A^{-n} otrzymamy

$$x_0 = A^{-n} x_n - \sum_{j=0}^{n-1} A^{-(j+1)} B u_j \quad (4.117)$$

Z porównania zależności (4.116) i (4.117) wynika, że jeżeli $\det A \neq 0$, to można rolę x_0 zamienić z x_n . Zatem w tym przypadku warunki konieczne i dostateczne obserwonalności odtwarzalności są takie same.

TWIERDZENIE 24

Układ (4.62), (4.63) jest odtwarzalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony jeden z warunków:

$$\bullet \operatorname{rząd} \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \operatorname{rząd} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \\ A^n \end{bmatrix} \quad (4.118)$$

$$\bullet \operatorname{rząd} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_n - Ad \\ C \end{bmatrix} = n \quad (4.119)$$

dla wszystkich skończonych $d \in \mathbb{C}$.

Dowód tego twierdzenia jest analogiczny (duálny) do dowodu twierdzenia 20.

UWAGA 33. Warunek (4.119) jest równoważny warunkowi

$$\forall d \in \sigma_A \quad \operatorname{rząd} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_n - Ad \\ C \end{bmatrix} = n \quad (4.120)$$

gdzie σ_A jest zbiorem wszystkich wartości d , dla których $\det[\mathbb{I}_n - Ad] = 0$. Równoważność warunków (4.119) i (4.120) wynika z faktu, że macierz $[\mathbb{I}_n - Ad]$ traci swój pełny rzęd tylko dla $d \in \sigma_A$.

PRZYKŁAD 77

(ciąg dalszy przykładu 76)

W przykładzie 76 stwierdziliśmy, że para (4.115) nie jest obserwowały, natomiast para ta spełnia warunek (4.120), gdyż

$$\forall_{d \in \sigma} \text{ rzad } \begin{bmatrix} \mathbb{I}_n - Ad \\ C \end{bmatrix} = \text{rzad } \begin{bmatrix} 1-d & -d \\ 2d & 1-2d \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \text{rzad } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

Para ta jest więc odtwarzalna i można wyznaczyć x_2 , zajmując y_0, y_1 dla $u_0 = u_1 = 0$ (patrz przykład 76).

4.2.5. Dyskretnie układy dualne

DEFINICJA 76
Dyskretny układ opisany równaniami

$$x_{i+1} = Ax_i + C^T u_i \quad (4.121)$$

$$y_i = B^T x_i + Du_i, \quad i \in Z_+ = \{0, 1, 2, \dots\} \quad (4.122)$$

nazywamy układem dualnym dla układu opisanego

$$(4.123)$$

$$x_{i+1} = Ax_i + Bu_i$$

$$y_i = Cx_i + Du_i, \quad i \in Z_+ = \{0, 1, 2, \dots\} \quad (4.124)$$

- TWIERDZENIE 25**
- *Układ opisany równaniami (4.123), (4.124) jest osiągalny (obserwowany) wtedy i tylko wtedy, gdy jego układ dualny (4.121), (4.122) jest obserwowany (osiągalny).*
 - *Układ opisany równaniami (4.123), (4.124) jest sterowany do zera (odkwarzalny) wtedy i tylko wtedy, gdy jego układ dualny (4.121), (4.122) jest odkwarzalny (sterowany do zera).*

Dowód. Zgodnie z twierdzeniem 18 układ opisany równaniami (4.123), (4.124) jest osiągalny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rzad } [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n \quad (4.125)$$

Jak wiadomo transpozycja macierzy nie zmienia jej rzędu. Transponując macierz $[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$,trzymamy więc

$$\text{rzad } \begin{bmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \vdots \\ B^T (A^T)^{n-1} \\ (A^T)^n \end{bmatrix} = \text{rzad } \begin{bmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \vdots \\ B^T (A^T)^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (4.126)$$

Zgodnie z twierdzeniem 22 układ dualny (4.121), (4.122) jest więc układem obserwowanym. Odwrotnie, jeżeli układ (4.121), (4.122) jest obserwowany, to jest spełniony warunek (4.126), który po transpozycji przyjmuje postać (4.125).

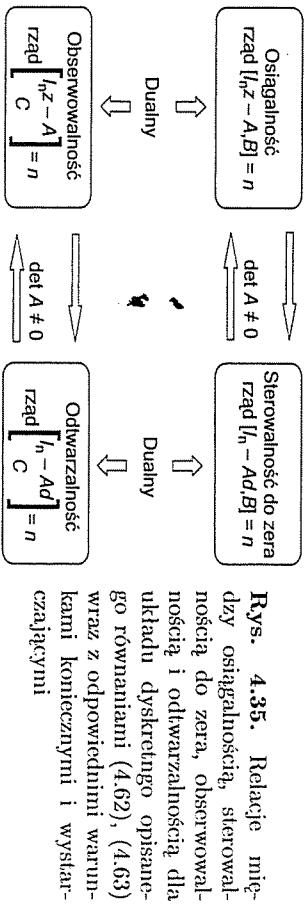
Zgodnie z twierdzeniem 20 układ (4.123), (4.124) jest sterowany do zera jeżeli jest spełniony warunek

$$\text{rzad } [B, AB, \dots, A^{n-1}B, A^n] = \text{rzad } [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \quad (4.127)$$

Po transpozycji warunek ten przyjmuje postać

$$\text{rzad } \begin{bmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \vdots \\ B^T (A^T)^{n-1} \\ (A^T)^n \end{bmatrix} = \text{rzad } \begin{bmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \vdots \\ B^T (A^T)^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.128)$$

Zgodnie z twierdzeniem 24 warunek (4.128) implikuje odtwarzalność układu opisanego równaniami (4.121), (4.122). Odwrotnie, jeżeli układ (4.121), (4.122) jest odtwarzalny, to jest spełniony warunek (4.128), który po transpozycji przyjmuje postać (4.127). Zgodnie z twierdzeniem układ (4.123), (4.124) jest więc układem odtwarzalnym. Podsumowaniem tych rozważań jest rysunek 4.35.



4.2.6. Osiągalność wyjściowa układów dyskretnych

Weźmy pod uwagę standardowy układ dyskretny opisany równaniami (4.62), (4.63).

DEFINICJA 77

Układ (4.62), (4.63) nazywany osiągalnym wyjściowo, jeżeli dla dowolnego wektora odpowiedzi $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^p$ istnieje liczba naturalna q i ciąg wymuszeń $\{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_q\}$ taki, że dla zerowego stanu początkowego $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ odpowiedź $\mathbf{y}_q = \mathbf{y}_k$.

TWIERDZENIE 26

Układ (4.62), (4.63) jest osiągalny wyjściowo wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rzad } [D, CB, CAB, \dots, CA^{n-1}B] = p \quad (4.129)$$

Dowód. Podstawiając rozwiązaniami (4.67) równania (4.62) dla $i = n$, $x_0 = \mathbf{0}$ do (4.63) otrzymamy

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_k &= \sum_{j=0}^{n-1} CA^{n-j-1}Bu_j + Du_n = \\ &= [D, CB, CAB, \dots, CA^{n-1}B] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{u}_{n-1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_0 \end{bmatrix} \quad (4.130) \end{aligned}$$

Z zależności (4.130) wynika, że dla dowolnego \mathbf{y}_k istnieje ciąg wymuszeń $\{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_q\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (4.129).

Z warunku (4.129) wynika, że układ opisany równaniami (4.62), (4.63) o jednym wyjściu ($p = 1$) z $\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$ jest zawsze układem osiągalnym wyjściowo. Wykażemy, że każdy osiągalny układ (4.62), (4.63) z macierzą $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ nie jest osiągalny wyjściowo, jeżeli rzad $C < p$. Jeżeli $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, to warunek (4.129) możemy napisać w postaci

$$\begin{aligned} \text{rzad } [CB, CAB, \dots, CA^{n-1}B] &= \text{rzad } \{C[B, AB, \dots, A^{n-1}B]\} \leqslant \\ &\leqslant \min (\text{rzad } C, \text{rzad } [B, AB, \dots, A^{n-1}B]) \leqslant \text{rzad } C < p \end{aligned}$$

gdzie rzad $[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n > p$. Warunek (4.129) nie jest więc spełniony i układ opisany równaniami (4.62), (4.63) nie jest osiągalny wyjściowo.

WNIOSEK 3. Układ (4.62), (4.63) z macierzą $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ nie jest osiągalny wyjściowo, jeżeli rzad $C < p$.

PRZYKŁAD 78

Zbadamy osiągalność wyjściową układu (4.62), (4.63) o macierzach

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.131)$$

W tym przypadku $n = 3$, $m = 1$, $p = 2$. Biorąc pod uwagę, że

$$\mathbf{C}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{CAB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{CA}^2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

oraz korzystając z warunku (4.129), otrzymamy

$$\text{rzad } [D, CB, CAB, CA^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} = 2$$

Układ ten jest więc osiągalny wyjściowo. \square

PRZYKŁAD 79

Wykażemy, że układ (4.62), (4.63) o macierzach

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{0} \quad (4.132)$$

jest osiągalny i obserwowany, ale nie jest osiągalny wyjściowo.

Korzystając z (4.64) i (4.93), otrzymamy

$$\text{rzad } [B, AB, A^2B] = \text{rzad } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} = 3$$

$$\text{rzad } \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \text{rzad } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 3$$

Układ ten jest więc osiągalny i obserwowany. Natomiast układ ten nie jest osiągalny wyjściowo, gdyż nie jest spełniony warunek (4.129), tj.

$$\text{rzad } [CB, CAB, CA^2B] = \text{rzad } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

Ten sam wynik otrzymamy z wniosku 3, gdyż $\text{rzad } C = 1 < p = 2$. \square

4.2.7. Osiągalność i sterowalność układów ciągłych

Niech dany będzie standardowy liniowy ciągły opisany równaniami

$$(4.133)$$

$$(4.134)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

przy czym $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem stanu $u = u(t) \in \mathbb{R}^m$ i $y = y(t) \in \mathbb{R}^p$ są odpowiednio wektorem wymuszeń (wejścia) i odpowiedzi (wyjścia), a $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ i $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

$$x_k = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.141)$$

przy czym

$$v_i = \int_0^{t_k} a_i(t - \tau)u(\tau)d\tau, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (4.142)$$

Z zależności (4.141) i (4.142) wynika, że dla dowolnego stanu ciąg $\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ i odpowiednio $u(t)$, $t \in [0, t_k]$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (4.135). Z definicji obrazu macierzy oraz zależności (4.141), wynika że istnieje ciąg $\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$, który przeprowadza układ (4.133), (4.134) ze stanu $x_0 = 0$ do stanu x_k wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x_k \in \text{Im } [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \quad (4.143)$$

Z założenia x_k jest dowolnym wektorem przestrzeni \mathbb{R}^n , układ (4.133), (4.134) jest więc osiągalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (4.135) i (4.137) dowodzi się tak samo, jak w dowodzie twierdzenia 18.

UWAGA 34. Jeżeli $\text{rzad } B = r$, a stopień wielomianu minimalnego macierzy A jest równy m ($m \leq n$), to warunek (4.135) jest równoważny warunkowi

$$\text{rzad } [B, AB, \dots, A^{m-r}B] = n \quad (4.144)$$

Równoważność tę dowodzi się tak samo jak równoważność warunków (4.64) i (4.74) dla układu dyskretnego (4.62), (4.63).

UWAGA 35. Warunek (4.137) jest równoważny warunkowi

$$\forall s \in \sigma_A \quad \text{rzad } [\mathbb{I}_n s - A, B] = n \quad (4.145)$$

gdzie σ_A jest widmem macierzy A , czyli zbiorem jej wartości własnych.

UWAGA 36. Układ o jednym wejściu ($m = 1$) nie jest osiągalny, jeżeli wielomian minimalny nie pokrywa się z wielomianem charakterystycznym macierzy A . Dowód jest taki sam jak dla układu dyskretnego (4.62), (4.63) przy uwa-

Z twierdzenia Cayleya-Hamiltona (lub wzoru Sylvestera) mamy

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)A^i \quad (4.140)$$

gdzie $a_i(t)$ są liniowo niezależnymi funkcjami czasu t . Podstawiając zależność (4.140) do zależności (4.139), otrzymamy

$$x_k = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.141)$$

Dowód. Korzystając z rozwiązańia

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (4.138)$$

równania (4.133) dla $x_0 = 0$, $t = t_k$, $x(t_k) = x_k$, otrzymamy

$$x_k = \int_0^{t_k} e^{A(t_k-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (4.139)$$

Osiągalność układu ciągłego opisanego zależnościami (4.133), (4.134) zależy tylko od macierzy \mathbf{A} i \mathbf{B} tego układu. Zamast mówić, że układ (4.133), (4.134) jest osiągalny bieżniemy równoważnie mówić, że para (\mathbf{A}, \mathbf{B}) tego układu jest osiągalna. Z porównania warunków (4.64), (4.65), (4.66), (4.74), (4.76) z warunkami (4.135), (4.136), (4.137), (4.144), (4.145) wynika, że kryteria osiągalności układów ciągłych i dyskretnych są takie same. Przykłady 64÷66 są takie same dla układów ciągłych. Odpowiednikiem przykładu 67 dla układu ciągłego jest niżej podany przykład.

PRZYKŁAD 80

Wykażemy, że para (\mathbf{A}, \mathbf{B}) układu ciągłego opisanego równaniami (4.133), (4.134) jest osiągalna wtedy i tylko wtedy, gdy macierz

$$\mathbf{W} = \int_0^{t_k} \mathbf{e}^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}^T \tau} d\tau, \quad t_k > 0 \quad (4.146)$$

jest określona dodatnio (nieosobienna).

Jeżeli \mathbf{W} jest macierzą dodatnio określona (nieosobienna), to istnieje macierz odwrotna i jest określone wymuszenie

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{B}^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}^T(t_k-t)} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{x}_k \quad \text{dla } t \in [0, t_k] \quad (4.147)$$

które przeprowadza układ ten ze stanu $\mathbf{x}_0 = 0$ do stanu $\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}_k$. Rzeczywiście, podstawiając (4.147) do (4.139), otrzymamy

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_k) &= \int_0^{t_k} \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t_k-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}^T(t_k-\tau)} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{x}_k d\tau = \\ &= \int_0^{t_k} \mathbf{e}^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}^T\tau} d\tau \mathbf{W}^{-1} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k \end{aligned}$$

Jeżeli układ opisany równaniami (4.133), (4.134) nie jest osiągalny, to istnieje wymuszenie $\mathbf{u}(t)$, $t \in [0, t_k]$ takie, że dla $\mathbf{x}_0 = 0$, $\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}_k$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (4.143) lub równoważnie, gdy

$$\operatorname{rząd} [\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}, \mathbf{x}_k] = \operatorname{rząd} [\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (4.148)$$

PRZYKŁAD 81

Wyznaczmy podprzestrzeń stanów osiągalnych dla układu (4.133), (4.134), którego macierze \mathbf{A} i \mathbf{B} są równe

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.149)$$

Para (4.149) nie jest osiągalna, gdyż

$$\operatorname{rząd} [\mathbf{B}, \mathbf{AB}] = \operatorname{rząd} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

Zgodnie z warunkiem (4.143) lub (4.148) poszukiwana podprzestrzeń stanów osiągalnych jest kombinacją liniową kolumn macierzy $[\mathbf{B}, \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, czyli ma postać $\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$. \square

DEFINICJA 80

Stan początkowy $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ układu (4.133), (4.134) nazywany sterowanym do zera w czasie t_k , jeżeli istnieje wymuszenie (sterowanie) $\mathbf{u}(t)$, $t \in [0, t_k]$, które przeprowadza ten układ ze stanu \mathbf{x}_0 do stanu zerowego $\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{0}$.

DEFINICJA 81

Układ (4.133), (4.134) nazywany sterowalnym do zera, jeżeli dla dowolnego stanu początkowego $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ istnieje chwila $t_k > 0$ oraz wymuszenie (sterowanie) $\mathbf{u}(t)$, $t \in [0, t_k]$, które przeprowadza ten układ ze stanu \mathbf{x}_0 do stanu zerowego $\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{0}$.

Wykażemy, że sterowalność do zera układu ciągłego (4.133), (4.134) jest równoważna osiągalności. Korzystając z rozwiązań (4.138) równania (4.133) dla $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ i $\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{0}$, otrzymamy

$$\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{e}^{\mathbf{At}_k} \mathbf{x}_0 + \int_0^{t_k} \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t_k-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau = 0$$

oraz po pomnożeniu obu stron przez $\mathbf{e}^{-\mathbf{At}_k}$

$$\mathbf{x}_0 = - \int_0^{t_k} \mathbf{e}^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (4.150)$$

gdzie $\mathbf{e}^{\mathbf{At}_k}$ jest macierzą nieosobienną dla dowolnej macierzy \mathbf{A} i chwili t_k . Z powrotnia zależności (4.150) i (4.139) wynika, że sterowalność do zera układu ciągłego jest równoważna jego osiągalności. Zostało zatem udowodnione następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 28

Układ (4.133), (4.134) jest sterowalny do zera wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony jeden z warunków twierdzenia 27.

UWAGA 37. Definicja indeksu sterowalności układu ciągłego (4.133), (4.134) jest taka sama jak definię dla układu dyskretnego (4.62), (4.63).

DEFINICJA 82

Układ (4.133), (4.134) nazywamy sterowalnym, jeżeli dla dowolnego stanu początkowego x_0 i dowolnego stanu koncowego x_k istnieje chwila $t_k > 0$ oraz wymuszenie (sterowanie) $u(t)$, $t \in [0, t_k]$, które przeprowadza ten układ ze stanu x_0 do stanu x_k , czyli dla dowolnych x_0, x_k , $x(t_k) = x_k$.

TWIERDZENIE 29

Układ (4.133), (4.134) jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony jeden z warunków twierdzenia 27.

Dowód. Przeprowadzenie układu (4.133), (4.134) z dowolnego stanu początkowego x_0 do dowolnego stanu koncowego x_k możemy podzielić na następujące dwa podzadania:

- sprowadzenie stanu x_0 do zera,
- przeprowadzenie układu z zerowego stanu początkowego do dowolnego stanu końcowego x_k .

Zgodnie z twierdzeniem 28 i twierdzeniem 27 układ opisany równaniami (4.133), (4.134) jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony jeden z warunków twierdzenia 27.

Z twierdzeń 27, 28 i 29 wynika następujący ważny wniosek.

Wniosek 4. Dla układu ciągłego (4.133), (4.134) osiągalność, sterowalność do zera i sterowalność są pojęciami równoważnymi.

PRZYKŁAD 82

Wykażemy, że para (A, B) jest sterowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest sterowalna para

$$\bar{A} = T A T^{-1}, \quad \bar{B} = T B \quad (4.151)$$

dla dowolnej nieosobliwej macierzy T .

Łatwo sprawdzić, że

$$\bar{A}^2 = (T A T^{-1})(T A T^{-1}) = T A^2 T^{-1}, \quad \bar{A}^3 = (T A^2 T^{-1})(T A T^{-1}) = T A^3 T^{-1}$$
ogólnie
$$\bar{A}^k = T A^k T^{-1}, \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots, n-1$$
oraz
$$\bar{A}^k \bar{B} = (T A^k T^{-1}) T B = T A^k B, \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (4.152)$$

Korzystając z (4.152), dla $k = 0, 1, \dots, n-1$ otrzymamy

$$\begin{aligned} \text{rzd} [\bar{B}, A\bar{B}, \dots, A^{n-1}\bar{B}] &= \text{rzd} \{T[B, AB, \dots, A^{n-1}B]\} = \\ &= \text{rzd} [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \end{aligned} \quad (4.153)$$

gdzie macierz T jest niesobliwa. Zgodnie z twierdzeniem 29 para (A, B) jest sterowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest sterowalna para (4.151). \square

4.2.8. Obserwowalność i odtwarzalność układów ciągłych

Weźmy pod uwagę standardowy układ ciągły opisany równaniami (4.133), (4.134).

DEFINICJA 83

Stan początkowy $x_0 \in \mathbb{R}^n$ układu opisany równaniami (4.133), (4.134) nazywamy obserwowlanym w chwili $t_k > 0$, jeżeli na podstawie danych wymuszenia $u(t)$ i odpowiadzi $y(t)$ dla $t \in [0, t_k]$ można jednoznacznie wyznaczyć stan x_0 tego układu.

DEFINICJA 84

Układ (4.133), (4.134) jest obserwowlanym wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony jeden z warunków:

- $\text{rzd} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$

$$\bullet \text{ rzd} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (4.154)$$

$$\bullet \ker \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.155)$$

$$\bullet \forall s \in \mathbb{C}, s < \infty \quad \text{rzd} \begin{bmatrix} I_n s - A \\ C \end{bmatrix} = n \quad (4.156)$$

Dowód. Podstawiając rozwiązanie (4.138) równania (4.133) do (4.134), otrzymamy

$$\begin{aligned} y'(t) &= y(t) - \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau - D u(t) = C e^{At} x_0 \\ &\quad - \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau - D u(t) \end{aligned} \quad (4.157)$$

4. Własności układów

Dla danych $\mathbf{y}(t)$ i $\mathbf{u}(t)$ dla $t \in [0, t_k]$ możemy wyznaczyć $\mathbf{y}'(t)$ dla $t \in [0, t_k]$. Różniczkując $(n-1)$ -krotnie względem t równość $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$, otrzymamy

$$\begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{y}'(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}\mathbf{y}'(t)}{dt^{n-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 \quad (4.158)$$

Z równania (4.158) możemy wyznaczyć jednoznacznie stan \mathbf{x}_0 wtedy i tylko jeśli równoważność warunków (4.154). Z definicji jądra wynika natychmiast równoważność warunków (4.154) i (4.156) jest taki sam jak dowód równoważności warunków (4.64) i (4.66).

Analogicznie jak dla układu dyskretnego można wykazać, że warunek (4.154) jest równoważny warunkowi (4.100), a warunek (4.156) warunkowi (4.101). UWAGA 38. *Układ ciągły o jednym wyjściu ($p=1$) nie jest obserwowałny, macierzy \mathbf{A} tego układu nie pokrywa się z wielomianem charakterystycznym*

Obserwowałość układu dyskretnego przy uwadze 28.

W przypadku ciągłego (4.133), (4.134) zależy tylko od macierzy \mathbf{A} będącymi równoważne mówić, że układ (4.133), (4.134) jest obserwowałny.

Definicja indeksu obserwowania mówi, że para (\mathbf{A}, \mathbf{C}) tego układu jest obserwowała, taka sama jak dla układu dyskretnego opisanego równaniami (4.62), (4.63).

PRZYKŁAD 83
Wykażemy, że para (\mathbf{A}, \mathbf{C}) jest obserwowała wtedy i tylko wtedy, gdy macierz

$$\mathbf{W}' = \int_0^{t_k} e^{\mathbf{A}^T \tau} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A} \tau} d\tau, \quad t_k > 0 \quad (4.159)$$

jest dodatnio określona (nieosobliwa).

Z zależności (4.157) wynika, że stan \mathbf{x}_0 możemy jednoznacznie wyznaczyć wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{y}(t) \neq \mathbf{0}$. Wobec tego całkując w granicach od

$$[\mathbf{y}'(t)]^T \mathbf{y}'(t) = \mathbf{x}_0^T e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A} t} \mathbf{x}_0$$

otrzymamy

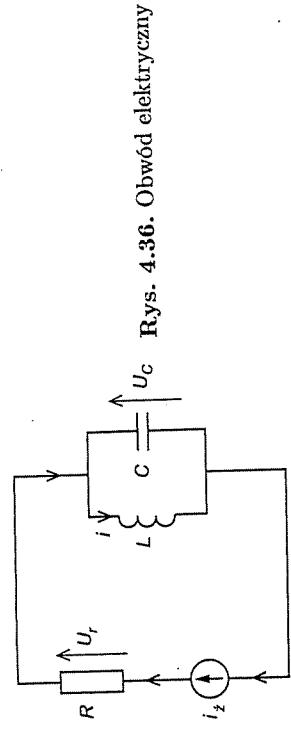
$$\int_0^{t_k} [\mathbf{y}'(\tau)]^T \mathbf{y}'(\tau) d\tau = \mathbf{x}_0^T \left(\int_0^{t_k} e^{\mathbf{A}^T \tau} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A} \tau} d\tau \right) \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^T \mathbf{W}' \mathbf{x}_0 \quad (4.160)$$

Z (4.160) wynika, że para (\mathbf{A}, \mathbf{C}) jest obserwowała wtedy i tylko wtedy, gdy macierz

$$(4.159) \text{ jest dodatnio określona (nieosobliwa).}$$

Obwód ten nie jest obserwowałny, gdyż $\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$. Zauważmy, że w tym przypadku znając i_k oraz U_R nie możemy wyznaczyć stanu początkowego $\begin{bmatrix} U_C(0) \\ i(0) \end{bmatrix}$ tego obwodu. Jeżeli za odpowiedź \mathbf{y} przyjmiemy napięcie U_C na kondensatorze, to macierz $C = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \text{rzad} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = 2$ dla niezerowej pojemności kondensatora. □

4.2. Osiągalność, sterowalność, obserwowałość i odwarzalność układów liniowych



Rys. 4.36. Obwód elektryczny
W obwodzie elektrycznym przedstawionym na rys. 4.36 za zmienne stanu przyjmujemy napięcie U_C na kondensatorze oraz prąd i w cewce, za wymuszenie prąd źródłowy i_u , a za odpowiedź napięcie U_R na rezystancji R .

PRZYKŁAD 84

W obwodzie elektrycznym przedstawionym na rys. 4.36 za zmienne stanu przyjmujemy napięcie U_C na kondensatorze oraz prąd i w cewce, za wymuszenie prąd źródłowy i_u , a za odpowiedź napięcie U_R na rezystancji R .

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_C \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_C \\ i \end{bmatrix} \quad (4.134)$$

$$y = U_R = Ri_k$$

które zapisujemy w postaci równań (4.133), (4.134)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_C \\ i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_C \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} \\ y &= [0 \ 0] \begin{bmatrix} U_C \\ i \end{bmatrix} + Ri_k \end{aligned}$$

W tym przypadku mamy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \ 0], \quad D = R$$

$$\int_0^{t_k} [y'(\tau)]^T y'(\tau) d\tau = \mathbf{x}_0^T \left(\int_0^{t_k} e^{\mathbf{A}^T \tau} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A} \tau} d\tau \right) \mathbf{x}_0$$

Obwód ten nie jest obserwowałny, gdyż $\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$. Zauważmy, że w tym przypadku znając i_k oraz U_R nie możemy wyznaczyć stanu początkowego $\begin{bmatrix} U_C(0) \\ i(0) \end{bmatrix}$ tego obwodu. Jeżeli za odpowiedź \mathbf{y} przyjmiemy napięcie U_C na kondensatorze, to macierz $C = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \text{rzad} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = 2$ dla niezerowej pojemności kondensatora. □

DEFINICJA 85

Stan x_k układu (4.133), (4.134) nazywamy odtwarzalnym w czasie $t_k > 0$, jeżeli na podstawie danego wymuszenia $u(t)$ i odpowiedzi $y(t)$ dla $t \in [0, t_k]$, można wyznaczyć jednoznacznie stan x_k tego układu.

DEFINICJA 86

Układ (4.133), (4.134) nazywamy odtwarzalnym, jeżeli dla dowolnego stanu końcowego $x_k \in \mathbb{R}^n$ istnieje chwila $t_k > 0$ taka, że na podstawie danego wymuszenia $u(t)$ i odpowiedzi $y(t)$ dla $t \in [0, t_k]$ można wyznaczyć jednoznacznie stan $x_k = x(t_k)$ tego układu.

TWIERDZENIE 31

Układ (4.133), (4.134) jest odtwarzalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony jeden z warunków twierdzenia 30.

Dowód. Zgodnie z twierdzeniem 30 można wyznaczyć dowolny stan początkowy x_0 układu opisanego równaniami (4.133), (4.134) wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony jeden z warunków tego twierdzenia.

Znając x_0 możemy wyznaczyć x_k na podstawie wzoru

$$x_k = e^{At_k}x_0 + \int_0^{t_k} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (4.161)$$

Tak więc układ (4.133), (4.134) jest odtwarzalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony Jeden z warunków twierdzenia 30.

Z twierdzeń 30, 31 wynika następujący wniosek.

Wniosek 5. Odtwarzalność układu ciągłego (4.133), (4.134) jest równoważna jego obserwowałości.

DEFINICJA 87

Układ ciągły

$$\dot{x} = Ax + C^T u \quad (4.162)$$

$$y = B^T x + D^T u \quad (4.163)$$

nazywamy układem dualnym dla układu

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.164)$$

$$y = Cx + Du \quad (4.165)$$

TWIERDZENIE 32

Układ (4.164), (4.165) jest sterowalny (obserwowany) wtedy i tylko wtedy, gdy jego układ dualny (4.162), (4.163) jest obserwowany (sterowany).

Dowód tego twierdzenia jest taki sam, jak twierdzenia 25 dla układu dyskretnego. Analogicznie jak osiągalność wyjściową dla układów dyskretnych, możemy również zdefiniować pojęcie sterowalności wyjściowej dla układu ciągłego (4.133), (4.134). Układ ciągły (4.133), (4.134) jest sterowany wyjściowo wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (4.129).

4.2.9. Stabilizowalność i wykrywalność układów dyskretnych i ciągłych

Weźmy pod uwagę układ dyskretny opisany równaniami (4.62), (4.63).

TWIERDZENIE 33

Wartość własne z_i macierzy A tego układu nazywamy osiągalną wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rzad } [\mathbb{I}_n z_i - A, B] = n \quad (4.166)$$

Układ (4.62), (4.63) jest osiągalny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne z_i $i = 1, \dots, n$ macierzy A tego układu są osiągalne. Układy dyskretny (4.62), (4.63) jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne z_i macierzy A leżą wewnątrz okręgu o promieniu równym 1 i środku w początku układu współrzędnych płaszczyzny złożonej z, zwany krótko okresem jednostkowym.

DEFINICJA 88
Układ dyskretny (4.62), (4.63) nazywamy stabilizowanym, jeżeli wszystkie nieosiągalne wartości własne z_i macierzy A tego układu leżą wewnątrz okręgu jednostkowego.

TWIERDZENIE 34

Układ dyskretny (4.62), (4.63) jest stabilizowany wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall |z| \geq 1 \text{ rzad } [\mathbb{I}_n z - A, B] = n \quad (4.167)$$

Dowód. Z definicji 88 oraz warunku (4.166) wynika natychmiast, że układ opisany równaniami (4.62), (4.63) jest stabilizowany wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (4.167).

Zostanie wykazane, że dla niestabilnego układu dyskretnego (4.62), (4.63) można dobrać macierz K sprzeżenia zwrotnego $\mathbf{u}_i = K\mathbf{x}_i$ tak, aby układ zamknięty $\mathbf{x}_{i+1} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}_i$ był układem stabilnym asymptotycznym wtedy i tylko wtedy, gdy układ ten jest stabilizowalny. Stabilizowalność układu jest więc warunkiem koniecznym i wystarczającym do jego stabilizacji poprzez dobór sprzeżenia zwrotnego od wektora stanu. Z porównania warunków (4.66) i (4.167) wynika, że każdy osiągalny układ (4.62), (4.63) jest również układem stabilizowalnym. Twierdzenie odwrotne jest prawdziwe tylko wtedy, gdy układ (4.62), (4.63) jest stabilny asymptotycznie, tzn. że każdy stabilny asymptotycznie układ (4.62), (4.63) stabilizowalny jest również ogólny.

PRZYKŁAD 85

Wykażemy, że para macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.168)$$

jest stabilizowalna, ale nie jest osiągalna.

Macierz \mathbf{A} parę (4.168) ma wartość własną $z_1 = 2$ i $z_2 = 0,1$. Korzystając z (4.166), otrzymamy

$$\text{rzad}[\mathbb{I}_n z_1 - \mathbf{A}, \mathbf{B}] = \text{rzad} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1,9 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

oraz

$$\text{rzad}[\mathbb{I}_n z_2 - \mathbf{A}, \mathbf{B}] = \text{rzad} \begin{bmatrix} -1,9 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

Tak więc wartość własna $z_1 = 2$ jest osiągalna, a wartość własna $z_2 = 0,1$ nie jest osiągalna. Wartunek (4.167) jest spełniony i zgodnie z twierdzeniem 34 para (4.168) jest stabilizowalna. Para ta nie jest osiągalna, gdyż wartość własna $z_2 = 0,1$ nie jest osiągalna. \square

DEFINICJA 89

Wartość własna z_i macierzy \mathbf{A} układu opisanego równaniami (4.62), (4.63) nazywamy obserwowną wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rzad} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_n z_i - \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = n \quad (4.169)$$

Układ (4.62), (4.63) jest obserwowny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne z_i , $i = 1, \dots, n$, macierzy \mathbf{A} tego układu są obserwowne.

DEFINICJA 90

Układ dyskretny (4.62), (4.63) nazywamy wykrywalnym, jeżeli wszystkie nieobserwowane wartości własne z_i macierzy \mathbf{A} tego układu leżą wewnątrz okręgu jednostkowego.

TWIERDZENIE 35

Układ dyskretny (4.62), (4.63) jest wykrywalny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigvee_{|z|>1} \text{rzad} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_n z_i - \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = n \quad (4.170)$$

Dowód. Z definicji 89 oraz warunku (4.169) wynika natychmiast, że układ opisany równaniami (4.62), (4.63) jest wykrywalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (4.170).

Zostanie wykazane, że dla układu dyskretnego opisanego równaniami (4.62), (4.63) o niedostępnych wektorach stanu można zbudować obserwator odtwarzający niedostępne zmienne stanu wtedy i tylko wtedy, gdy układ ten jest wykrywalny. Wykrywalność układu jest więc warunkiem koniecznym i dostatecznym możliwości odtworzenia niedostępnych zmiennych stanu za pomocą obserwatora. Z porównania warunków (4.95) i (4.169) wynika, że każdy obserwowylny układ (4.62), (4.63) jest również układem wykrywalnym. Twierdzenie odwrotne jest prawdziwe tylko wtedy, gdy układ (4.62), (4.63) jest stabilny asymptotycznie, tzn. każdy stabilny asymptotycznie układ (4.62), (4.63) wykrywalny jest również obserwowny.

PRZYKŁAD 86

Wykażemy, że para macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.171)$$

jest wykrywalna, ale nie jest obserwowna. Macierz \mathbf{A} parę (4.171) ma wartości własne $z_1 = 2$ i $z_2 = 0,1$. Korzystając z (4.169), otrzymamy

$$\text{rzad} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_n z_1 - \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = \text{rzad} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1,9 \end{bmatrix} = 2$$

oraz

$$\text{rzad} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_n z_2 - \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = \text{rzad} \begin{bmatrix} -1,9 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

Tak więc wartość własna $z_1 = 2$ jest obserwowała, a wartość własna $z_2 = 0,1$ nie jest obserwowała. Warunek (4.170) jest spełniony i zgodnie z twierdzeniem 35 para (4.171) jest wykrywana. Para ta nie jest obserwowalna, gdyż wartość własna $z_2 = 0,1$ nie jest obserwowała. \square

TWIERDZENIE 36

Układ ciągły opisany równaniami (4.133), (4.134) jest osiągalny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne s_i , $i = 1, \dots, n$ macierzy A tego układu są osiągane.

Układ ciągły (4.133), (4.134) jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne s_i macierzy \mathbf{A} tego układu leżą w lewej części płaszczyzny zmiennej zespolonej s .

DEFINICJA 91

Układ ciągły (4.133), (4.134) jest stabilizowany, jeżeli wszystkie nieosiągane wartości własne si macierzy A tego układu leżą w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej.

TWIERDZENIE 37

Układ ciągły (4.133), (4.134) jest stabilizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \operatorname{Re} s \geq 0 \quad \operatorname{rzad} [\mathbb{I}_n s - A, B] = n \quad (4.172)$$

Dowód tego twierdzenia jest analogiczny do dowodu twierdzenia 34. Z równania warunków (4.137) i (4.172) wynika, że każdy osiągalny układ (4.133), (4.134) jest również układem stabilizowalnym. Twierdzenie odwrotne jest prawdziwe tylko wtedy, gdy układ (4.133), (4.134) jest stabilny asymptotycznie, tzn. każdy stabilny asymptotycznie układ (4.133), (4.134) stabilizowany jest również osiągalny.

DEFINICJA 92

Wartość własna siły macierzy A układu ciągłego (4.133), (4.134) nazywamy obserwowalną wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_n s_i - A \\ C \end{bmatrix} = n \quad (4.173)$$

Układ ciągły (4.133), (4.134) jest obserwowalny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne s_i , $i = 1, \dots, n$, macierzy A tego układu są obserwowalne.

DEFINICJA 93

Ustad ciągły (4.133), (4.134) nazywamy ujawnionym, jeżeli wszelkie nieobserwowalne wartości własne si macierzy **A** tego układu leżą w lewej połowie płaszczyzny zmiennnej zespolonej.

WIERDZENIE 38

Ust&ad czagty (4.133), (*4.134*) jest wykrywalny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \text{Re } s \geq 0 \quad \text{rgd} \begin{bmatrix} \ln s - A \\ C \end{bmatrix} = n \quad (4.174)$$

Dowód tego twierdzenia jest analogiczny do dowodu twierdzenia 35. Z równania warunków (4.156) i (4.174) wynika, że każdy obserwowalny układ ciągły (4.133), (4.134) jest układem wykrywalnym. Twierdzenie odwrotne jest prawdziwe tylko wtedy, gdy układ (4.133), (4.134) jest stabilny asymptotycznie, tzn. każdy stabilny asymptotycznie układ (4.133), (4.134) wykrywalny jest również obserwowalny.

Dania Jako para maciegały (A, B) układu ciągiego lub dyskretnego. Założany, że para ta nie jest osiągalna, czyli

$$\text{rzad } [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = r < n \quad \text{oraz} \quad \text{rzad } B = m \quad (4.175)$$

Z założenia (4.175) wynika, że ciąg wektorów

$B_1, B_2, \dots, B_m, AB_1, AB_2, \dots, AB_m, A^2B_1, A^2B_2, \dots, A^{m-1}B_m$ (4.176)

	x	x	x	\dots	x	A^0
	x	x	x	\dots	x	A^1
	x	0	x	\dots	0	A^2
	0	0	\dots			A^3
			\ddots			\vdots
A^n						

Rys. 4.37. Tablica – diagram do wyznaczania wektorów liniowo niezależnych

Wartość własnej s_i macierzy A układu ciągłego (4.133), (4.134) nazywamy obserwowalną wtedy i tylko wtedy, gdy

Kolumny tej tablicy odpowiadają kolejnym kolumnom B_1, B_2, \dots, B_m macierzy \mathbf{B} , a wiersze kolejnym potęgami $\mathbf{A}_0^1, \mathbf{A}^1, \dots, \mathbf{A}^{m-1}$ macierzy \mathbf{A} . Wektor $\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{B}_j$ leży w i -tym wierszu oraz j -tej kolumnie tej tablicy. Wyboru n liniowo niezależnych wektorów ciągu (4.176) można dokonać, badając liniową niezależność elementów tablicy (rys. 4.37) wg wierszy lub kolumn. Badanie liniowej niezależności wg wierszy przeprowadzimy następująco. Założenia rząd $\mathbf{B} = m$ wynika, że wszystkie kolumny B_1, B_2, \dots, B_m macierzy \mathbf{B} są liniowo niezależne. Zaznaczamy ten fakt, umieszczając znak \times we wszystkich komórkach pierwszego wiersza tablicy (rys. 4.37). Jeżeli wektor \mathbf{AB}_1 jest liniowo niezależny od B_1, B_2, \dots, B_m , to umieszczaemy znak \times w komórce odpowiadającej \mathbf{AB}_1 i badamy liniową niezależność kolejno wektorów $\mathbf{AB}_2, \mathbf{AB}_3, \dots$, aż znajdziemy wektor, na przykład $\mathbf{A}^2\mathbf{B}_2$, który jest liniowo zależny od wszystkich wybranych wcześniej liniowo niezależnych wektorów. W komórce $\mathbf{A}^2\mathbf{B}_2$ umieszczaamy znak 0. Wszystkie wektory odpowiadające komórkom w tej samej kolumnie poniżej znaku 0 są również liniowo zależne od wcześniejszej wybranych liniowo niezależnych wektorów. W komórkach tych nie umieszczaamy żadnego znaku. Następnie przechodzimy do badania liniowej niezależności następnych wektorów $\mathbf{A}^2\mathbf{B}_3, \mathbf{A}^2\mathbf{B}_4, \dots$. Kontynuując tę procedurę, możemy wyznaczyć r liniowo niezależnych wektorów ciągu (4.176). Dodając do tych wektorów $n - r$ liniowo niezależnych kolumn b_{r+1}, \dots, b_n , tworzymy z nich macierz nieosobliwą postaci

$$P = [B_1, \mathbf{AB}_1, \dots, \mathbf{A}^{d_1-1}B_1, B_2, \mathbf{AB}_2, \dots, \mathbf{A}^{d_2-1}B_2,$$

$$B_3, \dots, \mathbf{A}^{d_m-1}B_m, b_{r+1}, \dots, b_n] \quad (4.177)$$

przy czym d_1, d_2, \dots, d_m są indeksami osiągalności pary (\mathbf{A}, \mathbf{B}) spełniającymi warunek $d_1 + d_2 + \dots + d_m = n$.

TWIERDZENIE 39

Jeżeli jest spełniony warunek (4.175), to istnieje macierz nieosobliwa (4.177) taka, że

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_3 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.178)$$

$$\mathbf{A}_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}, \quad \mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{r \times m}$$

przy czym para $(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1)$ jest osiągalna oraz

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} p_1 \mathbf{Ab}_{r+1} & \cdots & p_1 \mathbf{Ab}_n \\ p_2 \mathbf{Ab}_{r+1} & \cdots & p_2 \mathbf{Ab}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_r \mathbf{Ab}_{r+1} & \cdots & p_r \mathbf{Ab}_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_r \end{bmatrix} [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n] \quad (4.179) \\ \mathbf{A}_3 &= \begin{bmatrix} p_{r+1} \mathbf{Ab}_{r+1} & \cdots & p_{r+1} \mathbf{Ab}_n \\ p_{r+2} \mathbf{Ab}_{r+1} & \cdots & p_{r+2} \mathbf{Ab}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_n \mathbf{Ab}_{r+1} & \cdots & p_n \mathbf{Ab}_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)} \end{aligned}$$

Dowód. Mnożąc lewostronnie macierz (4.177) przez macierz \mathbf{A} , otrzymamy

$$\begin{aligned} \mathbf{AP} &= [\mathbf{AB}_1, \mathbf{A}^2\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{A}^{d_1}\mathbf{B}_1, \mathbf{AB}_2, \mathbf{A}^2\mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{A}^{d_2}\mathbf{B}_2, \\ &\quad \mathbf{AB}_3, \dots, \mathbf{A}^{d_m}\mathbf{B}_m, \mathbf{Ab}_{r+1}, \dots, \mathbf{Ab}_n] \quad (4.180) \end{aligned}$$

Z zależności $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} = \mathbb{I}_n$ wynika, że

$$p_k \mathbf{P}_r = 0 \quad \text{oraz} \quad p_k \mathbf{B} = 0, \quad k = r+1, \dots, n \quad (4.181)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_r &= [\mathbf{B}_1, \mathbf{AB}_1, \dots, \mathbf{A}^{d_1-1}\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{AB}_2, \dots \\ &\quad \dots, \mathbf{A}^{d_2-1}\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \dots, \mathbf{A}^{d_m-1}\mathbf{B}_m] \quad (4.182) \end{aligned}$$

Zo sposobu wyboru r liniowo niezależnych kolumn macierzy (4.182) wynika, że kolumna $\mathbf{A}^d\mathbf{B}_i$, $i = 1, \dots, m$ jest liniową kombinacją kolumn macierzy \mathbf{P}_r . Biorąc pod uwagę te fakty, otrzymamy

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} [\mathbf{AP}_r, \mathbf{Ab}_{r+1}, \dots, \mathbf{Ab}_n] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_3 \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{B}} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_m] = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Aby udowodnić, że para $(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1)$ jest osiągalna, wykażemy, że rząd $[B_1, A_1B_1, \dots, A_1^{r-1}B_1] = r$

Korzystając z zależności (4.178) oraz z twierdzenia Cayleya-Hamiltona, łatwo wykazać, że

$$\begin{aligned} r &= \text{rząd } [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = \\ &= \text{rząd } \{P[\bar{B}, \bar{A}\bar{B}, \dots, \bar{A}^{n-1}\bar{B}]\} = \text{rząd } [\bar{B}, \bar{A}\bar{B}, \dots, \bar{A}^{n-1}\bar{B}] = \\ &= \text{rząd } \left[\begin{matrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \right] = \text{rząd } [B_1, A_1B_1, \dots, A_1^{r-1}B_1] \end{aligned}$$

Z zależności (4.178) wynika, że para (A, B) została rozłożona na część ogólną (A_1, B_1) oraz część nieosiągalną $(A_3, 0)$.

PRZYKŁAD 87

Dana jest para macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.183)$$

Para ta jest nieosiągalna, gdyż

$$r = \text{rząd } [B, AB, A^2B] = \text{rząd } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2$$

Wybierając jako kolumny macierzy P (4.177) B , AB oraz $b_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, otrzymamy

$$P = [B, AB, b_n] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad P^{-1} = P$$

Wobec tego

$$\bar{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

oraz

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = 0$$

Para macierzy (A_1, B_1) jest osiągalna, gdyż

$$\text{rząd } [B_1, A_1B_1] = \text{rząd } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 \quad \square$$

Weźmy z kolei pod uwagę parę (A, C) układu ciągłego lub dyskretnego. Zakładamy, że para ta nie jest obserwowały, czyli

$$\text{rząd } \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = r' < n \quad \text{oraz} \quad \text{rząd } C = p \quad (4.184)$$

Na podstawie twierdzenia 25 wyniki otrzymane dla pary (A, B) można przemieścić na parę dualną (A^T, C^T) . Dla pary (A, C) ciąg (4.176) ma postać

$$\dots, C_1^T, C_2^T, \dots, C_p^T, A^T C_1^T, A^T C_2^T, \dots, A^T C_p^T, (A^T)^2 C_1^T, (A^T)^2 C_2^T, \dots, (A^T)^{n-1} C_p^T \quad (4.185)$$

gdzie C_i jest i -tym ($i = 1, \dots, p$) wierszem macierzy C . Z założenia (4.184) wynika, że ciąg (4.185) zawiera dokładnie r' liniowo niezależnych kolumn, które możemy wybrać w różny sposób. Korzystając z tablicy (rys. 4.37) dla pary (A^T, C^T) i ze sposobu badania liniowej niezależności wg wierszy, otrzymamy r' liniowo niezależnych kolumn, które uzupełniamy $n - r'$ liniowo niezależnymi kolumnami $C_{r'+1}^T, \dots, C_n^T$. Z kolumn tych tworzymy macierz nicosobliwą postaci

$$Q = [C_1^T, A^T C_1^T, \dots, (A^T)^{h_1-1} C_1^T, C_2^T, A^T C_2^T, \dots, (A^T)^{h_2-1} C_2^T, C_3^T, \dots, (A^T)^{h_p-1} C_p^T, C_{r'+1}^T, \dots, C_n^T]^T \quad (4.186)$$

przy czym h_1, h_2, \dots, h_p są indeksami obserwowałości pary (A, C) spełniającymi warunek $h_1 + h_2 + \dots + h_p = r'$.

TWIERDZENIE 40

Jeżeli jest spełniony warunek (4.184), to istnieje macierz nicosobliwa (4.186) taka, że

$$\bar{A} = Q A Q^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = C Q^{-1} = [C_1 \ 0], \quad A_1 \in \mathbb{R}^{r' \times r'}, \quad C_1 \in \mathbb{R}^{p \times r'} \quad (4.187)$$

przy czym para (A_1, C_1) jest obserwowańa oraz

$$A_2 = \begin{bmatrix} c_{r'+1} A q_1 & \cdots & c_{r'+1} A q_{r'} \\ c_{r'+2} A q_1 & \cdots & c_{r'+2} A q_{r'} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n A q_1 & \cdots & c_n A q_{r'} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-r') \times r'}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix} [q_1, q_2, \dots, q_r'] \quad (4.188)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} c_{r'+1} A q_{r'+1} & \cdots & c_{r'+1} A q_n \\ c_{r'+2} A q_{r'+1} & \cdots & c_{r'+2} A q_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n A q_{r'+1} & \cdots & c_n A q_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-r') \times (n-r')}$$

$$\forall i, i = 1, \dots, n, \text{ jest } i\text{-tą kolumną macierzy } Q^{-1}.$$

Twierdzenia jest dualny względem dowodu twierdzenia 39. Z za-

nymka, że para (A, C) została rozłożona na część obserwo-

nych i część nieobserwowańa $(A_3, 0)$.

Paru

Wybieraj:

$$P = [B, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{r \text{ zerami}}]$$

Wobec tego

$$\bar{A} = P^{-1} A P = \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix}}_{\text{część osiągalna}}, \quad P = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = P B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = C P^{-1} = [0 \ C_2 \ 0 \ C_4]$$

przy czym $(A_{11}, B_1, 0)$ przedstawia część osiągalną i nieobserwowaną, $(A_{22}, B_2, C_2) -$ część osiągalną i obserwowaną, $(A_{33}, 0, 0)$ – część nieosiągalną i nieobserwowaną, $(A_{44}, 0, C_4) -$ część nieosiągalną i obserwowaną (rys. 4.38).

$$\bar{B} = P^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{część osiągalna})$$

oraz

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dowód tego twierdzenia wynika z twierdzeń 39 i 40 oraz możliwości dekompozycji części osiągalnej i nieosiągalnej układu na część obserwowaną i nieobserwowaną. Nizej zostanie podany inny dowód, oparty na geometrycznym podejściu, z którego wynika natychmiast praktyczna procedura dekompozycji układu, składająca się z pięciu kroków.

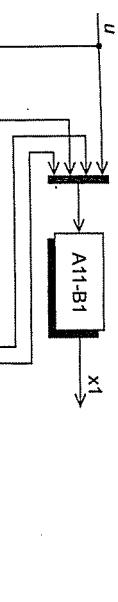
TWIERDZENIE 41
Dla układu liniowego nieosiągalnego i nieobserwowanego istnieje macierz nieosobliwa P taka, że

$$\bar{A} \triangleq P A P^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = P B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.189)$$

(4.190)

przy czym $(A_{11}, B_1, 0)$ przedstawia część osiągalną i nieobserwowaną, $(A_{22}, B_2, C_2) -$ część osiągalną i obserwowaną, $(A_{33}, 0, 0)$ – część nieosiągalną i nieobserwowaną, $(A_{44}, 0, C_4) -$ część nieosiągalną i obserwowaną (rys. 4.38).

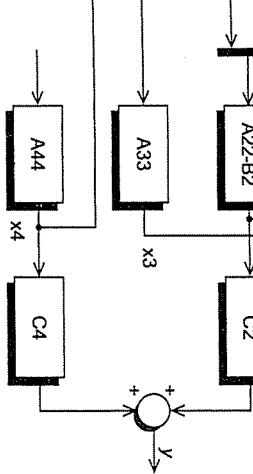
$$\begin{aligned} X_1 &= X_s \cap X_{\bar{s}} \\ X_2 &= X_s \cap (X_{\bar{s}} + X_o) \\ X_3 &= X_{\bar{s}} \cap (X_{\bar{s}} + X_o) \\ X_4 &= X_{\bar{s}} \cap X_o \end{aligned}$$



Rys. 4.38. Dekompozycja Kalmana

PROCEDURA 7

Krok 1. Obliczamy macierze osiągalności i obserwowania



Rys. 4.38. Dekompozycja Kalmana

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} &= [1 \quad -2 \quad 0 \quad -1], \quad \mathbf{D} = [0 \quad 0] \end{aligned} \quad (4.190)$$

Korzystając z procedury 7, wyznaczamy kolejno:

Krok 1. Macierz osiągalności \mathbf{R} i macierz obserwowania \mathbf{O}

$$\mathbf{R} = [\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}], \quad \mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.191)$$

Krok 2. Wyznaczamy podprzestrzenie liniowe:

– osiągalności

$$\mathbf{X}_s = \text{Im } \mathbf{R}$$

– nieosiągalności

$$\mathbf{X}_{\bar{s}} = \ker(\mathbf{R}^T)$$

– obserwowania

$$\mathbf{X}_o = \text{Im } (\mathbf{O}^T)$$

– nieobserwowania

$$\mathbf{X}_{\bar{o}} = \ker(\mathbf{O})$$

Krok 3. Wyznaczamy podprzestrzenie (jako przekroje i sumy podprzestrzeni (4.192))

$$(4.193)$$

Dokonamy dekompozycji układu liniowego o macierzach

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = [1 \quad -2 \quad 0 \quad -1], \quad \mathbf{D} = [0 \quad 0] \quad (4.194)$$

Krok 5. Korzystając z zależności (4.190), wyznaczamy macierze $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}$, $\bar{\mathbf{C}}$.

PRZYKŁAD 89

$$\mathbf{R} = [B \ AB \ A^2B \ A^3B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.194)$$

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \mathbf{CA}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Krok 2. Wyznaczamy kolejno

– podprzestrzeń osiągalności

$$\mathbf{X}_s = \text{Im } \mathbf{R} = \text{Im} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.192)$$

– podprzestrzeń obserwowania

$$\mathbf{X}_o = \text{Im } \mathbf{O}^T = \text{Im} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4.2. Osiągalność, sterowalność, obserwonalność i odwracalność układów liniowych 267

- podprzestrzeń nieosiągalności

$$\mathbf{X}_s = \ker(\mathbf{R}^T) = \text{Im} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- podprzestrzeń nieobserwonalności

$$\mathbf{X}_{\bar{o}} = \ker \mathbf{O} = \text{Im} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Krok 3. Korzystając z zależności (4.193), otrzymamy

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_s \cap \mathbf{X}_{\bar{o}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_s \cap (\mathbf{X}_{\bar{s}} + \mathbf{X}_o) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_{\bar{o}} \cap (\mathbf{X}_{\bar{s}} + \mathbf{X}_o) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_4 = \mathbf{X}_{\bar{s}} \cap \mathbf{X}_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Krok 4. Korzystając z wektorów bazowych podprzestrzeni, wyznaczamy

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{oraz } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Krok 5. Korzystając z zależności (4.190), wyznaczamy poszukiwanie macierze w postaci kanonicznej

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{P} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Z rysunku 4.23 wynika, że:

- wymuszenie \mathbf{u} oddziałuje bezpośrednio tylko na dwie części układu, na część osiągalną i nieobserwowaną oraz na część osiągalną i obserwowaną;

- jeżeli więc pozostałe dwie części układu w chwili początkowej mają zerowe warunki ($x_3(0) = 0, x_4(0) = 0$), to ich zmienne stanu są równe zeru dla wszystkich chwil $t > 0$;
- wejście układu jest połączone w wyjściem tylko przez część osiągalną i obserwowaną;
- na wyjście układu wpływa pośrednio również dynamika części nieosiągalnej i nieobserwowej;
- na wyjście układu wpływa również dynamika części nieosiągalnej i obserwowej;
- na dynamice części osiągalnej i nieobserwowej mają wpływ dynamiki pozostały trzech części układu, ale dynamika tej pierwszej części nie wpływa na dynamikę pozostałych trzech części układu;
- znając wymuszenie \mathbf{u} i odpowiedź \mathbf{y} układu, nie jesteśmy w stanie wyznaczyć warunków początkowych części osiągalnej i nieobserwowanej oraz części nieosiągalnej i nieobserwowanej, gdyż odpowiedź y nie zależy bezpośrednio od dynamiki tych części układu.

Z trójkatnej postaci macierzy $\bar{\mathbf{A}}$ wynika, że wielomian charakterystyczny tej macierzy (ale również i macierzy \mathbf{A}) jest iloczynem wielomianów charakterystycznych macierzy $A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}$, tzn.

$$\begin{aligned} \det[\mathbb{I}_n \lambda - \mathbf{A}] &= \det [\mathbb{I}_n \lambda - \mathbf{P}^{-1} \bar{\mathbf{A}} \mathbf{P}] = \det \left\{ \mathbf{P}^{-1} [\mathbb{I}_n \lambda - \bar{\mathbf{A}}] \mathbf{P} \right\} = \\ &= \det [\mathbb{I}_n \lambda - \bar{\mathbf{A}}] = \det [\mathbb{I}_{n_1} \lambda - A_{11}] \det [\mathbb{I}_{n_2} \lambda - A_{22}] \\ &\quad \det [\mathbb{I}_{n_3} \lambda - A_{33}] \det [\mathbb{I}_{n_4} \lambda - A_{44}] \end{aligned} \quad (4.195)$$

UWAGA 39. Dla układu ciągłego $\lambda = s$, a dla układu dyskretnego $\lambda = z$.

TWIERDZENIE 42

Macierz transmitancji układu liniowego o macierzach $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ i \mathbf{D} jest równa macierzy transmitemacji tylko części osiągalnej i obserwowanej tego układu, tzn.

$$\mathbf{T}(\lambda) = \mathbf{C} [\mathbb{I}_n \lambda - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} \mathbf{F}^T \mathbf{D} = \mathbf{C} [\mathbb{I}_{n_2} \lambda - \mathbf{A}_{22}]^{-1} \mathbf{B}_2 + \mathbf{D} \quad (4.196)$$

Dowód. Korzystając z zależności (4.190), możemy napisać

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\lambda) &= \mathbf{C} [\mathbb{I}_n \lambda - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} = \bar{\mathbf{C}} \mathbf{P} [\mathbb{I}_n \lambda - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{P}^{-1} \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{D} = \\ &= \bar{\mathbf{C}} \mathbf{P} [\mathbf{P}^{-1} (\mathbb{I}_n \lambda - \mathbf{A}) \mathbf{P}]^{-1} \mathbf{P}^{-1} \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{D} = \bar{\mathbf{C}} [\mathbb{I}_n \lambda - \mathbf{A}]^{-1} \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{D} = \\ &= [\mathbf{0} \ C_2 \ \mathbf{0} \ C_4] \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{n_1} \lambda - A_{11} & -A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ 0 & \mathbb{I}_{n_2} \lambda - A_{22} & 0 & -A_{24} \\ 0 & 0 & \mathbb{I}_{n_3} \lambda - A_{33} & -A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{I}_{n_4} \lambda - A_{44} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} + \mathbf{D} = \end{aligned}$$

□

$$= [0 \ C_2 \ 0 \ C_4] \begin{bmatrix} [\mathbb{I}_{n_1}\lambda - A_{11}]^{-1} & * & * & * \\ 0 & [\mathbb{I}_{n_2}\lambda - A_{22}]^{-1} & * & * \\ 0 & 0 & [\mathbb{I}_{n_3}\lambda - A_{33}]^{-1} & * \\ 0 & 0 & 0 & [\mathbb{I}_{n_4}\lambda - A_{44}]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ D = C_2[\mathbb{I}_{n_2}\lambda - A_{22}]^{-1}B_2 + D$$

przy czym $*$ oznacza macierze nieistotne w tych rozważaniach.

TWIERDZENIE 43

Stosując sprzężenie zwoonne od stanu

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{K}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{K}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{K}_3\mathbf{x}_3 + \mathbf{K}_4\mathbf{x}_4 \quad (4.197)$$

można zmienić wartości własne tylko macierzy \mathbf{A}_{11} i \mathbf{A}_{22} , a stosując

spojrzenie zwoonne od wyjścia

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}\mathbf{y} \quad (4.198)$$

można zmienić wartości własne tylko macierzy \mathbf{A}_{22} .

Dowód. Podstawiając (4.197) do równania $\dot{\mathbf{x}} = P\dot{\mathbf{x}} = \bar{A}\dot{\mathbf{x}} + \bar{B}\mathbf{u}$, otrzymany

$$\dot{\mathbf{x}} = \bar{A}\dot{\mathbf{x}}$$

przy czym

$$\begin{aligned} \bar{A}_z &= \bar{A} + \bar{B} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} A_{11} + B_1K_1 & A_{12} + B_1K_2 & A_{13} + B_1K_3 & A_{14} + B_1K_4 \\ B_2K_1 & A_{22} + B_2K_2 & B_2K_3 & A_{24} + B_2K_4 \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.200)$$

Z postaci macierzy (4.200) wynika, że przez odpowiedni dobór macierzy K_1 i K_2 można zmienić wartości własne jedynie macierzy A_{11} i A_{22} . Podstawiając z kolei $\mathbf{y} = \bar{C}\bar{\mathbf{x}} = C_2\mathbf{x}_2 + C_4\mathbf{x}_4$ do równania (4.198), a wynik do równania $\dot{\mathbf{x}} = \bar{A}\dot{\mathbf{x}} + Bu$, otrzymamy $\dot{\mathbf{x}} = \hat{A}\bar{\mathbf{x}}$, przy czym

$$\hat{A}_z = \bar{A} + \bar{B}F\bar{C} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} + B_1FC_2 & A_{13} & A_{14} + B_1FC_4 \\ 0 & A_{22} + B_2FC_2 & 0 & A_{24} + B_2FC_4 \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \quad (4.201)$$

Z postaci macierzy (4.201) wynika, że przez odpowiedni dobór macierzy F można zmienić wartości własne jedynie macierzy A_{22} części osiągalnej i obserwowej.

Jak wiadomo układ liniowy jest stabilny zewnętrznie, jeżeli składowa wymuszona odpowiedzi jest ograniczona dla każdego ograniczonego wymuszenia.

TWIERDZENIE 44

Układ liniowy jest stabilny zewnętrznie wtedy i tylko wtedy, gdy jego część osiągalna i obserwowa jest stabilna asymptotycznie.

Dowód. Dowód przeprowadzmy tylko dla układu ciągłego, gdyż dla układu dyskretnego jest analogiczny. Składowa wymuszona odpowiedzi \mathbf{y} na wymuszenie \mathbf{u} jest określona wzorem

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t \mathbf{g}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (4.202)$$

Z tego wzoru wynika, że składowa ta będzie ograniczona na każde ograniczone wymuszenie wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{h}(t) = \int_0^t \mathbf{g}(\tau)d\tau$ jest ograniczona dla każdego t , gdyż

$$|\mathbf{y}(t)| \leq \left| \int_0^t \mathbf{g}(\tau)d\tau \right| |\mathbf{u}(t)| = |\mathbf{h}(t)| |\mathbf{u}(t)|$$

Charakterystyka skokowa $\mathbf{h}(t)$ jest ograniczona wtedy i tylko wtedy, gdy charakterystyka impulsowa $\mathbf{g}(t)$ zanika do zera dla $t \rightarrow \infty$. Z twierdzenia 42 wynika, że ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie biegły macierzy transmitancji operatorowej części osiągalnej i obserwowej leżą w lewej półpłaszczyźnie. Biegły tej macierzy transmitancji pokrywają się z wartościami własnymi macierzy \mathbf{A}_{22} , gdyż nie ma uproszeżeń zer i biegunów (ta część układu jest osiągalna i obserwowa).

TWIERDZENIE 45

Układ liniowy jest stabilizowany (wykrywalny) wtedy i tylko wtedy, gdy część nieosiągalna i nieobserwowa oraz część nieosiągalna i obserwowa (część osiągalna i nieobserwowa) są stabilne asymptotycznie.

Dowód. Z twierdzenia 43 wynika, że za pomocą sprzężenia zwoonnego od stanu możemy zmienić wartości własne tylko części osiągalnej i nieobserwowej oraz części osiągalnej i obserwowej. Obie te części są osiągalne, można więc poprzez dobór macierzy sprzężeń zwoornych przesunąć dowolnie wartości własne macierzy \mathbf{A}_{11} i \mathbf{A}_{22} . Tak więc układ jest stabilizowany wtedy i tylko wtedy, gdy pozostałe dwie części układu są stabilne asymptotycznie. Dowód drugiej części twierdzenia jest dualny.

TWIERDZENIE 46

Zbiór osiągalności R jest sumą prostą

$$R = R_1 \oplus R_2$$

obrazu macierzy osiągalności produktu (4.206), (4.207)

$$R_1 = \text{Im} [B_1 \ A_1 B_1 \ \dots \ A_1^{n-1} B_1] \quad (4.215)$$

oraz obrazu macierzy osiągalności produktu (4.208), (4.209)

$$R_2 = \text{Im} [B_2 \ N B_2 \ \dots \ N^{\mu-1} B_2] \quad (4.216)$$

Dowód. Z rozważań podanych w p. 4.2.1. wynika, że zbiór stanów osiągalnych z x_{10} podkładu (4.206), (4.207) jest określony zależnością (4.216). Z zależności (4.213) wynika, że zbiór stanów osiągalnych podkładu (4.208), (4.209) jest określony zależnością (4.217). Z dekompozycji układu (4.203), (4.204) wynika natychmiast, że zbiór $R(x_{10})$ jest sumą prostą zbiorów R_1 i R_2 .

PRZYKŁAD 90

Dla układu singularnego

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (4.218)$$

wyznaczmy zbiór $R(0)$ stanów osiągalnych z $x_{10} = 0$ oraz sterowania u . Wykażemy, że zbiór ten jest sumą prostą $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2$. Macierz

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

mającą postać (4.210), przy czym $n_1 = 1$, gdyż $\det [E_S - A] = \begin{vmatrix} s-2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & s \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = s-2$,

$$n_2 = 2, \quad A_1 = [2], \quad B_1 = [2], \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mu = 2, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Korzystając z (4.216) i (4.217), otrzymamy

$$R_1 = \text{Im} [B_1, A_1 B_1] = \text{Im} [2, 4] = \mathbb{R}$$

oraz

$$R_2 = \text{Im} [B_2, N B_2] = \text{Im} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{R}^2$$

W celu wyznaczenia sterowania u przeprowadzającego układ z zerowego stanu x_{10} do

zadanego stanu końcowego

$$\bar{x}_k = \begin{bmatrix} x_{k_1} \\ x_{k_2} \\ x_{k_3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R} + \mathbb{R}^2$$

korzystamy ze wzorów (4.211) i (4.213). Ze wzoru (4.211) dla $x_{10} = 0$ otrzymamy

$$\bar{x}_{k_1} = \int_0^{t_k} e^{A_1(t-\tau)} B_1 u(\tau) d\tau = 2e^{2t_k} \int_0^{t_k} e^{-2\tau} u(\tau) d\tau \quad (4.219)$$

a ze wzoru (4.213)

$$\begin{bmatrix} x_{k_2} \\ x_{k_3} \end{bmatrix} = - \sum_{i=0}^{\mu-1} N^i B_2 u^{n(i)}(t_k) = -B_2 u(t_k) - N B_2 \dot{u}(t_k) = \begin{bmatrix} u(t_k) + \dot{u}(t_k) \\ u(t_k) \end{bmatrix} \quad (4.220)$$

Pozyskane sterowanie u powinno spełniać warunki $u(t_k) = x_{k_3}$, $\dot{u}(t_k) = x_{k_2} - x_{k_1}$ oraz (4.219). \square

Z powyższego przykładu wynika, że wyznaczanie sterowania dopuszczalnego, które przeprowadza układ z zadanego stanu początkowego x_{10} do zadanego stanu koncowego, nie jest zadaniem prostym i oczywistym. Nizej zostanie podana ogólna metoda wyznaczania takiego sterowania. Sterowanie to będzie w postaci $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$. Podstawiając to sterowanie do wzoru (4.211), dla $t = t_k$ otrzymamy

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k_1} &= x_1(t_k) = e^{A_1 t_k} x_{10} + \int_0^{t_k} e^{A_1(t_k-\tau)} B_1 u_1(\tau) d\tau + \\ &\quad + \int_0^{t_k} e^{A_1(t_k-\tau)} B_1 u_2(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.221)$$

oraz

$$\bar{x}_{k_1} = x_{k_1} - \int_0^{t_k} e^{A_1(t_k-\tau)} B_1 u_2(\tau) d\tau \in \text{Im} [B_1, A B_1, \dots, A_1^{n_1-1} B_1] \quad (4.222)$$

Niech

$$V(w_1, t) = \int_0^t w_1(\tau) e^{A_1 \tau} B_1 B_1^T e^{A_1^T \tau} w_1(\tau) d\tau \quad (4.223)$$

przy czym $w_1(t)$ jest niezerowym wielomianem zmiennej t . Łatwo wykazać, że $\text{Im} [V(w_1, t)] = \text{Im} [B_1, A B_1, \dots, A_1^{n_1-1} B_1]$

$$(4.224)$$

Z równań (4.222) i (4.224) wynika, że istnieje wektor z spełniający równość $V(w_1, t_k) z = \bar{x}_{k_1}$

$$(4.225)$$

Niech

$$\forall_{0 \leq t \leq t_k} \mathbf{u}_1(t) = [t \ (t - t_k)]^{2\mu} \mathbf{B}_1^T e^{A_1^T(t_k - t)} \mathbf{z}$$

Różniczkując względem t wyrażenie (4.226), łatwo sprawdzić, że

$$\frac{d^i u_1(t)}{dt^i} \Big|_{t=t_k} = 0 \quad (4.227)$$

Wobec tego ze wzoru (4.213) otrzymamy

$$\begin{aligned} x_{k_2} &= x_2(t_k) = - \sum_{i=0}^{\mu-1} N^i \mathbf{B}_2 \mathbf{u}^{(i)}(t_k) = - \sum_{i=0}^{\mu-1} N^i \mathbf{B}_2 (\mathbf{u}_1(t_k) + \mathbf{u}_2(t_k))^{(i)} = \\ &= - \sum_{i=0}^{\mu-1} N^i \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_2^{(i)}(t_k) \end{aligned} \quad (4.228)$$

Wektor \mathbf{x}_{k_2} nie zależy więc od $\mathbf{u}_1^{(i)}(t_k)$, a zależy tylko od $\mathbf{u}_2^{(i)}(t_k)$ dla $i = 0, 1, \dots, \mu-1$.

Skladową $\mathbf{u}_2(t)$ wyznaczamy w postaci wielomianu

$$\forall_{0 \leq t \leq t_k} \mathbf{u}_2(t) = \mathbf{u}_{20} + \mathbf{u}_{21}(t - t_k) + \dots + \frac{\mathbf{u}_{2\mu-1}}{(\mu-1)!} (t - t_k)^{\mu-1} \quad (4.229)$$

Przy czym

$$u_{2i} = \frac{d^i u_2(t)}{dt^i} \Big|_{t=t_k} \quad (4.230)$$

Z powyższych rozważań wynika następująca procedura wyznaczania sterowania $\mathbf{u}(t)$.

PROCEDURA 8

Krok 1. Mając dane \mathbf{N} , \mathbf{B}_2 i \mathbf{x}_{k_2} , wyznaczamy \mathbf{u}_{2i} dla $i = 0, 1, \dots, \mu-1$ spełniające równość

$$x_{k_2} = - \sum_{i=0}^{\mu-1} N^i \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_{2i} \quad (4.231)$$

Krok 2. Korzystając z zależności (4.229), wyznaczamy $\mathbf{u}_2(t)$.

Krok 3. Wybieramy $\mathbf{w}_1(t) = t^\mu (t - t_k)^\mu$ i wyznaczamy macierz $\mathbf{V}(\mathbf{w}_1, t)$ określającą wzorem (4.223).

Krok 4. Znając $\mathbf{u}_2(t)$, z zależności (4.222) wyznaczamy wektor $\bar{\mathbf{x}}_{k_1}$, a z zależności (4.225) wektor \mathbf{z} .

Krok 5. Korzystając z zależności (4.226), wyznaczamy składową $\mathbf{u}_1(t)$.

Krok 6. Poszukiwane sterowanie $\mathbf{u}(t)$ jest więc równe

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_1(t) + \mathbf{u}_2(t) = -1 \cdot 2t + 2,1851 \cdot 10^{-2}(t^2 - t)^4 e^{-2t} \quad (4.232)$$

PRZYKŁAD 91

(ciąg dalszy przykładu 90)

Wyznaczymy sterowanie $\mathbf{u}(t)$ przeprowadzające układ (4.218) ze stanu $\mathbf{x}_{10} = 0$ do stanu końcowego $\mathbf{x}_k = [2 \ 3 \ 1]^T$ dla $t_k = 1$. Korzystając z procedury 8, otrzymamy kolejno:

Krok 1. Z zależności (4.231) mamy

$$x_{k_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = -\mathbf{B}_2 \mathbf{u}_{20} - \mathbf{N} \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_{21} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_{20} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_{21}$$

Zatem $\mathbf{u}_{20} = 1$, $\mathbf{u}_{21} = 2$.

Krok 2. Podstawiając powyższe wartości \mathbf{u}_{20} i \mathbf{u}_{21} do równania (4.229), otrzymamy

$$\mathbf{u}_2(t) = \mathbf{u}_{20} + \mathbf{u}_{21}(t - t_k) = -1 + 2t$$

Krok 3. W tym przypadku $w_1(t) = t^2(t-1)^2 = t^4 - 2t^3 + t^2$ i korzystając z zależności (4.223), otrzymamy

$$\begin{aligned} V(w_1, t_k) &= \int_0^{t_k} w_1(\tau) e^{A_1 \tau} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T \mathbf{A}_1^T \tau \mathbf{u}_1(\tau) d\tau = \\ &= 4 \int_0^1 (\tau^4 - 2\tau^3 + \tau^2) e^{4\tau} (\tau^4 - 2\tau^3 + \tau^2) d\tau = 2705,2617 \end{aligned}$$

Krok 4. Korzystając z zależności (4.222), obliczamy

$$\bar{x}_{k_1} = 2 - 2 \int_0^1 e^{2(1-\tau)} (-1 + 2\tau) d\tau = 4$$

Z zależności (4.225) mamy

$$z = \frac{\bar{x}_{k_1}}{V(w_1, t_k)} = \frac{4}{2705,2617} = 1,47786 \cdot 10^{-3}$$

Krok 5. Składowa $\mathbf{u}_1(t)$ ma więc postać

$$\mathbf{u}_1(t) = [t(t - t_k)]^{2\mu} \mathbf{B}_1^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}_1^T(t_k - t)} \mathbf{z} = 2,1851 \cdot 10^{-2}(t^2 - t)^4 e^{-2t}$$

Krok 6. Poszukiwane sterowanie $\mathbf{u}(t)$ jest więc równe

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_1(t) + \mathbf{u}_2(t) = -1 \cdot 2t + 2,1851 \cdot 10^{-2}(t^2 - t)^4 e^{-2t}$$

□

DEFINICJA 98

Układ singularny (4.202) nazywamy *R-sterowalnym*, jeśli dla dowolnej zadanej chwilą $t_k > 0$, stanu początkowego $\mathbf{x}_{10} \in \mathbb{R}^{n_1}$ oraz każdego zadanego $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n(\mathbf{x}_{10})$ istnieje dopuszczalne sterowanie $\mathbf{u}(t)$ takie, że

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} x_1(t_k) \\ x_2(t_k) \end{bmatrix} = \mathbf{x}_k \quad (4.233)$$

TWIERDZENIE 47

Układ (4.203), (4.204) jest R-sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony jeden z warunków:

- $\operatorname{rząd} [\mathbf{B}_1, \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{A}_1^{n_1-1} \mathbf{B}_1] = n_1$

$$(4.233)$$

- $\operatorname{rząd} [\mathbb{I}_{n_1} s - \mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1] = n_1$
dla wszystkich skończonych $s \in \mathbb{C}$,
- $\operatorname{rząd} [\mathbf{E}_s - \mathbf{A}, \mathbf{B}] = n$

dla wszystkich skończonych $s \in \mathbb{C}$.

Dowód. Zbiór osiągalności $R = \mathbb{R}^{n_1} \oplus R_2$, gdzie zbiór R_2 jest określony zależnością (4.217). Zauważmy, że $\operatorname{Im} [\mathbf{B}_1, \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{A}_1^{n_1-1} \mathbf{B}_1] = \mathbb{R}^{n_1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (4.233). Równoważność warunków (4.233) i (4.234) dowodzi się tak samo jak w dowodzie twierdzenia 18. Korzystając z zależności (4.210), możemy napisać

$$\operatorname{rząd} [\mathbf{E}_s - \mathbf{A}, \mathbf{B}] = \operatorname{rząd} \left\{ \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{n_1} s - \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N_s - \mathbb{I}_{n_2} \end{bmatrix} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= \operatorname{rząd} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{n_1} s - \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N_s - \mathbb{I}_{n_2} \end{bmatrix} =$$

$$= n_2 + \operatorname{rząd} [\mathbb{I}_{n_1} s - \mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1]$$

Z zależności (4.236) wynika, że warunek (4.235) jest równoważny warunkowi (4.234), ponieważ $\det [N_s - \mathbb{I}_{n_2}] \neq 0$ dla wszystkich skończonych $s \in \mathbb{C}$.

4.2.13. Sterowalność i sterowalność impulsowa układów singularnych

Weźmy pod uwagę układ singularny (4.203), (4.204) spełniający warunek (4.205). Układ ten rozkładany na dwa podukłady: standardowy (4.206), (4.207) i ścisłe singularny (4.208), (4.209).

DEFINICJA 99

Układ (4.203), (4.204) nazywamy sterowalnym, jeżeli dla dowolnego stanu początkowego $x_0 \in \mathbb{R}^m$ i każdego $x_k \in \mathbb{R}^n$ istnieje chwila $t_k > 0$ oraz dopuszczalne sterowanie $u(t)$, $t \in [0, t_k]$ takie, że $x(t_k) = x_k$.

TWIERDZENIE 48

Układ (4.203), (4.204) jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony jeden z warunków:

- $\operatorname{rząd} [\mathbf{B}_1, \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{A}_1^{n_1-1} \mathbf{B}_1] = n_1$ i
 $\operatorname{rząd} [\mathbf{B}_2, \dots, N^{n_2-1} \mathbf{B}_2] = n_2$

$$(4.237)$$

- $\forall_{s \in \mathbb{C}, s < \infty} \operatorname{rząd} [\mathbb{I}_{n_1} s - \mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1] = n_1$ i $\operatorname{rząd} [\mathbf{N}, \mathbf{B}_2] = n_2$
- $\forall_{s \in \mathbb{C}, s < \infty} \operatorname{rząd} [\mathbf{E}_s - \mathbf{A}, \mathbf{B}] = n$ i $\operatorname{rząd} [\mathbf{E}, \mathbf{B}] = n$

$$(4.238)$$

$$(4.239)$$

Dowód. Jeżeli jest spełniony warunek (4.237), to zgodnie z twierdzeniem 46 każdy stan $x_k \in \mathbb{R}^n$ jest osiągalny z dowolnego stanu początkowego, a więc istnieje chwila $t_k > 0$ oraz sterowanie $u(t)$, $t \in [0, t_k]$ takie, że $x(t_k) = x_k$. Układ opisany równaniami (4.203), (4.204) jest więc sterowalny. Odwrotnie, jeżeli układ (4.203), (4.204) jest sterowalny, to $\operatorname{Im} [\mathbf{B}_1, \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{A}_1^{n_1-1} \mathbf{B}_1] = \mathbb{R}^{n_1}$ oraz $\operatorname{Im} [\mathbf{B}_2, \mathbf{N} \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{N}^{n_2-1} \mathbf{B}_2] = \mathbb{R}^{n_2}$ i są spełnione warunki (4.237). Równoważność warunków $\operatorname{rząd} [\mathbb{I}_{n_1} s - \mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1] = n_1$ dla wszystkich skończonych $s \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{rząd} [\mathbf{B}_1, \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{A}_1^{n_1-1} \mathbf{B}_1] = n_1$$

oraz warunków $\operatorname{rząd} [\mathbb{I}_{n_2} s - \mathbf{N}, \mathbf{B}_2] = n_2$ dla wszystkich skończonych $s \in \mathbb{C}$ i

$$\operatorname{rząd} [\mathbf{B}_2, \mathbf{N} \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{N}^{n_2-1} \mathbf{B}_2] = n_2$$

dowodzi się tak samo jak w dowodzie twierdzenia 18. Macierz nilpotentna \mathbf{N} ma tylko zerowe wartości własne. Wobec tego

$$\begin{aligned} \operatorname{rząd} [\mathbf{B}_2, \mathbf{N} \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{N}^{n_2-1} \mathbf{B}_2] &= \operatorname{rząd} [\mathbb{I}_{n_2} s - \mathbf{N}, \mathbf{B}_2]_{s=0} = \\ &= \operatorname{rząd} [\mathbf{N}, \mathbf{B}_2] = n_2 \end{aligned}$$

Warunki (4.238) są więc równoważne warunkom (4.237). Równoważność warunków

$$\operatorname{rząd} [\mathbb{I}_{n_1} s - \mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1] = n_1 \quad i$$

$$\operatorname{rząd} [\mathbf{E}_s - \mathbf{A}, \mathbf{B}] = n$$

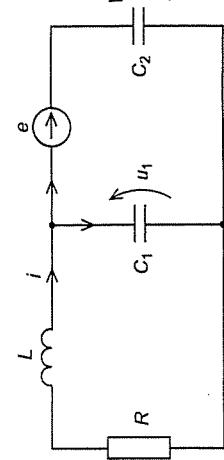
dla wszystkich skończonych $s \in \mathbb{C}$ została wykazana w dowodzie twierdzenia 47. Korzystając z zależności (4.210), możemy napisać

$$\begin{aligned} \operatorname{rząd} [\mathbf{E}, \mathbf{B}] &= \operatorname{rząd} \left\{ \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{n_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N} \end{bmatrix} \mathbf{Q}^{-1}, \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \operatorname{rząd} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{n_1} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{N} & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} = n_1 + \operatorname{rząd} [\mathbf{N}, \mathbf{B}_2] \end{aligned} \quad (4.240)$$

Z zależności (4.240) wynika, że warunki rząd $[E, B] = n$ i rząd $[N, B_2] = n_2$ są równoważne.

PRZYKŁAD 92

Dany jest obwód elektryczny o schemacie pokazanym na rysunku 4.39 i znanych pojemnościach C_1, C_2 , rezystancji R i indukcyjności L . Za zmienne stanu przyjmujemy napięcia u_1 i u_2 na kondensatorach oraz prąd i w cewce, za wymuszenie napięcie źródłowe e , a za odpowiedź napięcie u_2 .



Rys. 4.39. Obwód elektryczny do przykładu 92

$P[1 \times (\frac{1}{L})], L[2 \times (\frac{1}{C_2})], L[3 \times (\frac{C_2}{C_1+C_2})]$ na macierz

$$[Es - A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & R+sL \\ sC_1 & sC_2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

przekształcamy ją w postać

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I}_{n_1}s - A_1 & 0 \\ 0 & Ns - \mathbb{I}_{n_2} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} s + \frac{R}{L} & \frac{C_2}{C_1+C_2} & 0 \\ -\frac{1}{LC_2} & s & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

Wykonując powyższe lewe działania na wierszach macierzy jednostkowej \mathbb{I}_3 , otrzymamy macierz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{C_2}{C_1+C_2} \\ 0 & \frac{1}{C_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C_2}{C_1+C_2} \end{bmatrix}$$

a wykonując prawe działania na kolumnach macierzy \mathbb{I}_3 , otrzymamy macierz

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & \frac{C_2}{C_1+C_2} & 1 \\ 0 & \frac{C_2}{C_1+C_2} & -\frac{C_1}{C_2} \\ \frac{1}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Z zależności (4.226) mamy

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{C_2}{C_1+C_2} \\ \frac{1}{LC_2} & 0 \end{bmatrix}, \quad N = [0] \quad (4.242)$$

oraz

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = PB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{C_2}{C_1+C_2} \\ 0 & \frac{1}{C_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C_2}{C_1+C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C_2}{C_1+C_2} \\ 0 \\ \frac{C_2}{C_1+C_2} \end{bmatrix} \quad (4.243)$$

Zbadany sterowalność tego układu, korzystając kolejno z trzech równoważnych warunków (4.237), (4.238), (4.239) twierdzenia 48. Korzystając z warunków (4.237) oraz elementarnie $P[1+2 \times (-\frac{C_1}{C_2})], P[1, 3], P[2+3 \times (\frac{C_2}{C_1+C_2})], L[1+3 \times (-\frac{C_2}{C_1+C_2})]$,

jest regularny, tj. $\det[Es - A] = 1 + (R+sL)(C_1+C_2)s$. Stosując działania elementarne

(4.242), (4.243), otrzymamy

$$\text{rząd} [\mathbf{B}_1, \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1] = \text{rząd} \begin{bmatrix} \frac{C_2}{C_1 + C_2} & -\frac{RC_2}{L(C_1 + C_2)} \\ 0 & \frac{1}{L(C_1 + C_2)} \end{bmatrix} = 2 = n_1$$

oraz

$$\text{rząd} [\mathbf{B}_2, \mathbf{N} \mathbf{B}_2] = \text{rząd} \left[\frac{C_2}{C_1 + C_2}, 0 \right] = 1 = n_2$$

Układ ten jest więc sterowalny. Ten sam wynik otrzymamy, korzystając z warunków (4.238)

$$\forall s \in \mathbb{C}, s < \infty \quad \text{rząd} [\mathbb{I}_{n_1}, s - \mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1] = \text{rząd} \begin{bmatrix} s + \frac{R}{L} & \frac{C_2}{C_1 + C_2} & \frac{C_2}{C_1 + C_2} \\ -\frac{1}{L C_2} & s & 0 \end{bmatrix} = 2$$

i

$$\text{rząd} [\mathbf{N}, \mathbf{B}_2] = \text{rząd} \left[0, \frac{C_2}{C_1 + C_2} \right] = 1$$

oraz z warunków (4.239), gdyż

$$\forall s \in \mathbb{C}, s < \infty \quad \text{rząd} [\mathbf{E}s - \mathbf{A}, \mathbf{B}] = \text{rząd} \begin{bmatrix} 1 & 0 & R + sL & 0 \\ sC_1 & sC_2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

i

$$\text{rząd} [\mathbf{E}, \mathbf{B}] = \text{rząd} \begin{bmatrix} 0 & 0 & L & 0 \\ C_1 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

□

Z twierdzenia 48 wynikają następujące dwa wnioski:

Wniosek 6. Podkład ścisłe singularny (4.208), (4.209) jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony jeden z warunków:

$$\text{rząd} [\mathbf{B}_2, \mathbf{N} \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{N}^{\mu-1} \mathbf{B}_2] = n_2 \quad (4.244)$$

$$\text{rząd} [\mathbf{N}, \mathbf{B}_2] = n_2 \quad (4.245)$$

$$\text{rząd} [\mathbf{E}, \mathbf{B}] = n \quad (4.246)$$

Wniosek 7. Układ singularny (4.203), (4.204) jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy podkład standardowy (4.206), (4.207) i podkład ścisłe singularny (4.208), (4.209) są sterowalne.

Rozwiążanie (4.211) podkładu standardowego (4.206), (4.207) i podkład ścisłe singularny składowych impulsowych. Składowe takie są zawarte jedynie w rozwiążaniu

(4.212) podkładu ścisłe singularnego (4.208), (4.209). Składowe impulsowe są wywokane niedopasowanym warunkiem początkowym \mathbf{x}_{20} lub skokami wymuszającymi $\mathbf{u}(t)$ i jego pochodnymi.

Korzystając z zależności

$$\mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{u}^{[i]} + \mathbf{u}^{[i-1]}(0) + \dots + \delta^{(i-1)} \mathbf{u}(0)$$

możemy rozwiązać (4.212) napisać w postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2(t) = & - \sum_{i=0}^{\mu-1} \mathbf{N}^i \mathbf{B}_2 \mathbf{u}^{[i]}(t) - \\ & - \sum_{i=0}^{\mu-2} \delta^{(i)} \mathbf{N}^i \left[\mathbf{N} \mathbf{x}_{20} + \sum_{j=0}^{\mu-2-i} \mathbf{N}^{j+1} \mathbf{B}_2 \mathbf{u}^{[j]}(0) \right] \end{aligned} \quad (4.247)$$

przy czym $[i]$ oznacza i -tą pochodną regularną, a (i) oznacza i -tą pochodną dystrybutywczą.

Ze wzoru (4.218) wynika, że rozwiązanie $\mathbf{x}_2(t)$ nie zawiera impulsów tylko wtedy, gdy

$$\mathbf{N} \mathbf{x}_{20} \in \text{Im} [\mathbf{N} \mathbf{B}_2, \mathbf{N}^2 \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{N}^{\mu-1} \mathbf{B}_2] \quad (4.248)$$

Warunek początkowy \mathbf{x}_{10} dla podkładu standardowego (4.206), (4.207) może być dowolny. Rozwiążanie $\mathbf{x}(t)$ równania (4.203) nie zawiera impulsów Diraca i ich pochodnych, jeżeli warunek początkowy $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ spełnia warunek

$$\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{n_1} \oplus \{ \text{Im} [\mathbf{B}_2, \mathbf{N} \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{N}^{\mu-1} \mathbf{B}_2] + \ker \mathbf{N} \} \quad (4.249)$$

gdzie \oplus oznacza sumę prostą podprzestrzeni. Niech

$$\mathbb{I}_\tau(\mathbf{w}, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{I}_{2\tau}(\mathbf{w}, t) \end{bmatrix}, \quad \mathbb{I}_{2\tau}(\mathbf{w}, t) = \sum_{i=0}^{\mu-2} \delta^{(i)}(t - \tau) \mathbf{N}^{i+1} \mathbf{w} \quad (4.250)$$

reprezentuje składowe impulsowe wektora $\mathbf{x}(t)$ pojawiające się w chwili τ , np. $\mathbb{I}_{\tau=0}(\mathbf{x}_{20}, t)$ reprezentuje składowe impulsowe wektora $\mathbf{x}(t)$ w chwili początkowej $\tau = 0$ spowodowane warunkiem początkowym \mathbf{x}_{20} .

DEFINICJA 100

Układ singularny (4.203), (4.204) nazywany sterowalnym impulsowo, jeżeli dla dowolnego warunku początkowego \mathbf{x}_{20} , dowolnej chwili $\tau > 0$ oraz każdego wektora $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n_2}$ istnieje dopuszczalne sterowanie $\mathbf{u}(t)$ takie, że $\mathbf{x}_i(\tau) = \mathbb{I}_\tau(\mathbf{w}, t)$.

Sterowalność impulsowa układu singularnego charakteryzuje jego zdolność generacji składowych impulsowych przez dopuszczalne wymuszenie, tzn. w zbiorze dopuszczalnych sterowań istnieje takie sterowanie, które generuje w chwili

τ składowe impulsowe w wektorze $\mathbf{x}(t)$ będące dowolnym elementem zbioru $\mathbb{I}_\tau(\mathbb{R}^{n_2}, t) = \{\mathbb{I}_\tau(w, t) : w \in \mathbb{R}^{n_2}\}$.

TWIERDZENIE 49

Układ singularny (4.203), (4.204) jest sterowalny impulsowo wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony jeden z warunków:

- $\ker N + \text{Im } [\mathbf{B}_2, \mathbf{N}\mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{N}^{\mu-1}\mathbf{B}_2] = \mathbb{R}^{n_2}$

$$\bullet \quad \ker N + \text{Im } \mathbf{B}_2 + \text{Im } \mathbf{N} = \mathbb{R}^{n_2} \quad (4.252)$$

$$\bullet \quad \text{Im } \mathbf{N} = \text{Im } [\mathbf{B}_2, \mathbf{N}\mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{N}^{\mu-1}\mathbf{B}_2] \quad (4.253)$$

$$\bullet \quad \text{rząd } \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{E} & \mathbf{B} \end{bmatrix} = n + \text{rząd } \mathbf{E} \quad (4.254)$$

Dowód. Z rozwiązaania (4.212) równania (4.208) poduktadu ścisłe singularnego wynika, że istnieje sterowanie dopuszczalne, które generuje w chwili τ dowolne składowe impulsowe w wektorze $\mathbf{x}(t)$ będące elementem zbioru $\mathbb{I}_\tau(\mathbb{R}^{n_2}, t)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (4.251). Układ singularny (4.203), (4.204) jest więc sterowalny impulsowo wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (4.251). Aby wykazać równoważność warunków (4.251), (4.252), zauważmy, że

$$\begin{aligned} \text{Im } [\mathbf{B}_2, \mathbf{N}\mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{N}^{\mu-1}\mathbf{B}_2] &= \text{Im } [\mathbf{I}_s - \mathbf{N}, \mathbf{B}_2]_{s=0} = \\ &= \text{Im } [\mathbf{N}, \mathbf{B}_2] = \text{Im } \mathbf{N} + \text{Im } \mathbf{B}_2 \end{aligned} \quad (4.255)$$

gdzie macierz nilpotentna \mathbf{N} ma tylko zerowe wartości własne. Podstawiając (4.255) do (4.251), otrzymamy poszukiwaną zależność (4.252). Uwzględniając warunek (4.251) oraz biorąc pod uwagę, że $\mathbf{N}^\mu = \mathbf{0}$, otrzymamy

$$\begin{aligned} \text{Im } \mathbf{N} &= \mathbf{N}^{\mathbb{R}^{n_2}} = \mathbf{N} (\text{Im } [\mathbf{B}_2, \mathbf{N}\mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{N}^{\mu-1}\mathbf{B}_2] + \ker \mathbf{N}) = \\ &= \text{Im } [\mathbf{N}, \mathbf{B}_2, \mathbf{N}^2\mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{N}^{\mu-1}\mathbf{B}_2] \end{aligned} \quad (4.256)$$

gdzie $\ker \mathbf{N} = 0$. Z zależności (4.256) wynika, że warunki (4.251), (4.253) są równoważne. Biorąc pod uwagę fakt, że mnożenie lewostronne i prawostronne macierzy przez macierz nieosobliwą nie zmienia jej rzędu oraz równania (4.210), możemy napisać

$$\text{rząd } \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{E} & \mathbf{B} \end{bmatrix} = \text{rząd } \left\{ \text{diag } [\mathbf{P}, \mathbf{P}] \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{E} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \text{diag } [\mathbf{Q}, \mathbf{Q}, \mathbb{I}_{n_1}] \right\} =$$

$$\begin{aligned} &= \text{rząd } \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{n_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \mathbb{I}_{n_1} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbb{I}_{n_2} & \mathbf{0} & \mathbf{N} & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} = 2n_1 + \text{rząd } \begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbb{I}_{n_2} & \mathbf{N} & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} = \\ &= 2n_1 + \text{rząd } \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{N}^2 & \mathbf{N}\mathbf{B}_2 \\ \mathbb{I}_{n_2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = n + n_1 + \text{rząd } [\mathbf{N}^2, \mathbf{N}\mathbf{B}_2] = n + \text{rząd } \mathbf{E} \end{aligned} \quad (4.257)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd } [\mathbf{N}^2, \mathbf{N}\mathbf{B}_2] = \text{rząd } \mathbf{N} \quad (4.258)$$

gdzie $\text{rząd } \mathbf{E} = n_1 + \text{rząd } \mathbf{N}$. łatwo wykazać, że zachodzi równość (4.258) wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony jeden z trzech pierwszych warunków twierdzenia 49.

Zauważmy, że sterowalność impulsowa układu singularnego (4.203), (4.204) zależy tylko od macierzy \mathbf{N} i \mathbf{B}_2 . Zamiast mówić, że układ (4.203), (4.204) jest sterowalny impulsowo, będziemy równoważnie mówić, że para $(\mathbf{N}, \mathbf{B}_2)$ jest sterowalna impulsowo.

PRZYKŁAD 93

Korzystając z twierdzenia 49, sprawdzimy, czy obwód elektryczny opisany równaniami (4.241) jest sterowalny impulsowo. W przykładzie 92 wykazano, że dla tego obwodu elektrycznego

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & L \\ C_1 & C_2 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -R \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.259)$$

oraz

$$\mathbf{N} = 0, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} C_2 \\ C_1 + C_2 \end{bmatrix} \quad (4.260)$$

Korzystając z warunków (4.254) i (4.259), otrzymamy

$$\begin{aligned} &\text{rząd } \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{E} & \mathbf{B} \end{bmatrix} = \text{rząd } \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & L & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -R & 0 & 0 & L \\ 0 & 0 & 1 & C_1 & C_2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 5 = n + \text{rząd } \mathbf{E} \end{aligned} \quad (4.254)$$

gdzie $\text{rząd } \mathbf{E} = 2$. Warunek (4.254) jest więc spełniony z trzech pierwszych warunków twierdzenia 49, gdyż w tym przypadku $\ker \mathbf{N} = \mathbb{R}$, $\text{Im } \mathbf{N} = 0$ i $\text{Im } \mathbf{B}_2 = \mathbb{R}$. \square

Z porównania twierdzeń 48 i 49 wynika następujący ważny wniosek.

WNIOSEK 8. Układ singularny sterowalny jest sterowalny impulsowo.
Wniosek ten potwierdza przykład 93, gdyż obwód elektryczny jest sterowalny (przykład 92), a więc jest również sterowalny impulsowo. Niech macierz nilpotentna $N \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ ma postać kanoniczną Jordana

$$N = \text{diag}[I_0, J_1, \dots, J_k]$$

przy czym J_0 jest macierzą zerową, a

$$J_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q_i \times q_i}, \quad i = 1, \dots, k$$

oraz $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_k > 1$.

TWIERDZENIE 50. *Układ singularny o m wejściach (4.203), (4.204) nie jest sterowalny impulsowo, jeżeli jest spełniony jeden z warunków:*

- $m(\mu - 1) < r$
- $k > m$

$$\bullet \sum_{i=1}^k q_i > m(q_1 - 1) + k \quad (4.265)$$

gdzie $r = \text{rząd } N$, a μ jest indeksem macierzy N .

Dowód. Z warunku (4.253) many

$$\text{Im } B = \sum_{i=1}^{\mu-1} \text{Im}(N^i B_2)$$

oraz

$$\dim \text{Im } N \leq \sum_{i=1}^{\mu-1} \dim \text{Im}(N^i B_2)$$

Biorąc pod uwagę, że $\dim \text{Im } N = r$ i $\dim \text{Im}(N^i B_2) \leq m$, $i = 1, \dots, \mu-1$, z (4.266) otrzymamy

$$r \leq m(\mu - 1)$$

Jeżeli jest spełniony warunek (4.263), to nie może być spełniony warunek (4.267), a więc i warunek (4.253). Układ ten nie jest więc sterowalny impulsowo.

Z postaci macierzy (4.262) wynika, że $\ker J_j \subset \text{Im } J_i$ dla $i = 1, \dots, k$ oraz

$$\dim \text{Im } N = \text{rząd } N = \sum_{i=1}^k q_i - k \quad (4.268)$$

Wniosek ten potwierdza przykład 93, gdyż obwód elektryczny jest sterowalny (przykład 92), a więc jest również sterowalny impulsowo. Niech macierz nilpotentna $N \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ ma postać kanoniczną Jordana

$$(4.261)$$

Jeżeli $k > m$, to z zależności (4.268) wynika, że warunek (4.252) nie może być spełniony, a więc układ nie jest sterowalny impulsowo. Podstawiając zależność (4.268), oraz $\mu = q_1$ do (4.263), otrzymamy warunek (4.265).

PRZYKŁAD 94

Wykażemy, że układ singularny (4.203), (4.204) o macierzach

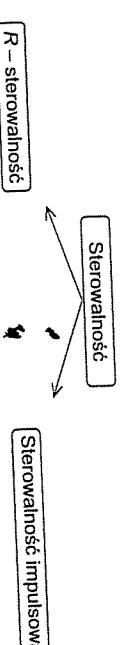
$$N = \text{diag}[J_1, J_2], \quad J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = [b_1, \dots, b_5]^T \quad (4.269)$$

nie jest sterowalny impulsowo dla dowolnych elementów macierzy B_2 . W tym przypadku $k = 2$, $q_1 = 3$, $q_2 = 2$, $n = 1$. Korzystając z warunku (4.265), otrzymamy

$$q_1 + q_2 = 5 > m(q_1 - 1) + k = 4$$

Warunek (4.265) jest więc spełniony i rozpatrywany układ nie jest sterowalny impulsowo dla dowolnych elementów macierzy B_2 . Ten sam wynik otrzymamy, korzystając z warunku (4.263) oraz z warunku (4.264). W pierwszym przypadku $m(\mu - 1) = 2 < r = q_1 + q_2 - k = 3$, a w drugim przypadku $k = 2 > m = 1$. \square

Z porównania twierdzeń 47 i 48 oraz wniosku 8 wynika, że sterowalność implikuje R -sterowalność i sterowalność impulsową układu singularnego (rys. 4.40).



Rys. 4.40. Relacje między sterowalnością, R -sterowalnością i sterowalnością impulsową dla układu singularnego

4.2.14. R -obserwowałość układów singularnych

Weźmy pod uwagę układ singularny (4.203), (4.204) spełniający warunek (4.205). Układ ten rozkładamy na dwa podukłady: standardowy (4.206), (4.207) i ściśle singularny (4.208), (4.209).

DEFINICJA 101

Układ singularny (4.203), (4.204) nazywany *R-observowalnym*, jeżeli istnieje chwilę t_k taka, że znając wymuszenie $\mathbf{u}(t)$ i odpowiadający mu stan $\mathbf{x}(t)$ dla $t \in [0, t_k]$, możemy wyznaczyć jednoznacznie dowolny stan $\mathbf{x}(t)$ należący do zbioru osiągalności R tego układu, czyli $\mathbf{x} \in R$.

PRZYKŁAD 95

Zbadamy *R-observowalność* obwodu elektrycznego opisanego równaniami (4.241). Macierze E , A i C dla tego obwodu są równe

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & L \\ C_1 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -R \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 1 \ 0] \quad (4.274)$$

TWIERDZENIE 51

Układ (4.203), (4.204) jest *R-observowalny* wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony jeden z warunków:

$$\bullet \operatorname{rzad} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A_1 \\ \vdots \\ C_1 A_1^{n_1-1} \end{bmatrix} = n_1 \quad (4.270)$$

$$\bullet \forall_{s \in \mathbb{C}, s < \infty} \operatorname{rzad} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{n_1} s - A_1 \\ C_1 \end{bmatrix} = n_1 \quad (4.271)$$

$$\bullet \forall_{s \in \mathbb{C}, s < \infty} \operatorname{rzad} \begin{bmatrix} E_s - A \\ C \end{bmatrix} = n \quad (4.272)$$

Dowód. Znając N , B_2 i $\mathbf{u}(t)$, możemy z zależności (4.213) wyznaczyć $\mathbf{x}_2(t)$, a następnie $\mathbf{y}_1(t) = \mathbf{y}(t) - C_2 \mathbf{x}_2(t) = C_1 \mathbf{x}_1(t)$. Układ (4.203), (4.204) jest więc *R-observowalny* wtedy i tylko wtedy, gdy jest obserwowyły pod układ standardowy (4.206), (4.207). Z twierdzenia 30, zastosowanego do pod układu (4.206), (4.207), otrzymujemy natychmiast warunki (4.270) i (4.271). Korzystając z zależności (4.210), możemy napisać

$$\operatorname{rzad} \begin{bmatrix} E_s - A \\ C \end{bmatrix} = \operatorname{rzad} \left\{ \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_s - A \\ C \end{bmatrix} Q^{-1} \right\} = \quad (4.273)$$

$$= \operatorname{rzad} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{n_1} s - A_1 & 0 \\ 0 & N_s - \mathbb{I}_{n_2} \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix} = n_2 + \operatorname{rzad} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{n_1} s - A_1 \\ C_1 \end{bmatrix}$$

gdyż $\det[N_s - \mathbb{I}_{n_2}] \neq 0$. Z zależności (4.273) wynika, że warunki (4.271) i (4.272) są równoważne.

R-observowalność zależy tylko od macierzy A_1 i C_1 . Zamiast mówić, że układ (4.203), (4.204) jest *R-observowalny*, będziemy mówić równoważnie, że para (A_1, C_1) jest *R-observowalna*.

4.2. Osiągalność, sterowalność, obserwowałość i oddziałalność układów liniowych**PRZYKŁAD 95**

Zbadamy *R-observowalność* obwodu elektrycznego opisanego równaniami (4.241). Macierze E , A i C dla tego obwodu są równe

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & L \\ C_1 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -R \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 1 \ 0] \quad (4.274)$$

Uwzględniając warunek (4.272), otrzymamy

$$\forall_{s \in \mathbb{C}, s < \infty} \operatorname{rzad} \begin{bmatrix} E_s - A \\ C \end{bmatrix} = \operatorname{rzad} \begin{bmatrix} C_1 s & C_2 s & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 3$$

Warunek (4.272) jest więc spełniony i obwód ten jest *R-sterowalny*. Ten sam wynik otrzymamy, korzystając z warunków (4.270) i (4.271). Biorąc pod uwagę, że

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{C_2}{C_1 + C_2} \\ \frac{1}{LC_2} & 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{C_2}{C_1 + C_2} \end{bmatrix} \quad (4.275)$$

oraz korzystając z warunku (4.271), otrzymamy

$$\forall_{s \in \mathbb{C}, s < \infty} \operatorname{rzad} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{n_1} s - A_1 \\ C_1 \end{bmatrix} = \operatorname{rzad} \begin{bmatrix} s + \frac{R}{L} & \frac{C_2}{C_1 + C_2} \\ -\frac{1}{LC_2} & s \\ 0 & \frac{C_2}{C_1 + C_2} \end{bmatrix} = 2$$

a z warunku (4.270)

$$\operatorname{rzad} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A_1 \end{bmatrix} = \operatorname{rzad} \begin{bmatrix} 0 & \frac{C_2}{C_1 + C_2} \\ \frac{1}{LC_2(C_1 + C_2)} & 0 \end{bmatrix} = 2$$

Z twierdzenia 51 wynika następujący wniosek:

Wniosek 9. Układ singularny (4.203), (4.204) jest *R-observowalny* wtedy i tylko wtedy, gdy jest *R-observowalny* jego podkład standardowy (4.206), (4.207).

4.2.15. Obserwowałość układów singularnych

Weźmy pod uwagę układ singularny opisany równaniami (4.203), (4.204) spełniający warunek (4.205). Układ ten rozkładamy na dwa podkłady: standardowy (4.206), (4.207) i ścisłe singularny (4.208), (4.209).

DEFINICJA 102

Układ singularny (4.203), (4.204) nazywany obserwowanym, jeżeli istnieje chwila t_k taka, że zauważ wyruszenie $u(t)$ i odpowiadź $y(t)$ dla $t \in [0, t_k]$, możemy wyznaczyć jednoznacznie dowolny stan początkowy x_0 tego układu.

TWIERDZENIE 52

Układ (4.203), (4.204) jest obserwowany wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony jeden z warunków:

- $\text{rząd} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A_1 \\ \vdots \\ C_1 A_1^{n_1-1} \end{bmatrix} = n_1$ oraz $\text{rząd} \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2 N \\ \vdots \\ C_2 N^{\mu-1} \end{bmatrix} = n_2$ (4.276)
- $\forall s \in \mathbb{C}, s < \infty \quad \text{rząd} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{n_1} s - A_1 \\ C_1 \end{bmatrix} = n_1$ oraz $\text{rząd} \begin{bmatrix} N \\ C_2 \end{bmatrix} = n_2$ (4.277)
- $\forall s \in \mathbb{C}, s < \infty \quad \text{rząd} \begin{bmatrix} E^s - A \\ C \end{bmatrix} = n$ oraz $\text{rząd} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n$ (4.278)

Dowód. Z dekompozycji układu (4.203), (4.204) na dwa niezależne podukłady (4.206), (4.207) i (4.208), (4.209) wynika, że zadanie wyznaczenia stanu początkowego x_0 można również rozłożyć na dwa niezależne zadania wyznaczenia stanu początkowego x_{10} podukładu standardowego (4.206), (4.207) oraz stanu początkowego x_{20} podukładu singularnego (4.208), (4.209). Z twierdzenia 30 wynika, że pierwszy z warunków (4.276) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym obserwowałości podukładu (4.206), (4.207). Należy więc wskazać, że drugi z warunków (4.206) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym obserwowałości podukład (4.208), (4.209). Bez straty ogólności możemy założyć, że $u(t) = 0$ dla $t \in [0, t_k]$. W tym przypadku z zależności (4.212) otrzymamy

$$x_2(t) = \sum_{i=1}^{\mu-1} \delta^{(i-1)}(t) N^i x_{20}$$

oraz

$$y_2(t) = C_2 x_2(t) = \sum_{i=1}^{\mu-1} \delta^{(i-1)}(t) C_2 N^i x_{20} \quad (4.279)$$

Z równania (4.279) wynika, że $y_2(t) = 0$ dla $t \in [0, t_k]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker C_2 N^i = 0$ dla $i = 0, 1, \dots, \mu-1$ lub równoważnie

$$\ker \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2 N \\ \vdots \\ C_2 N^{\mu-1} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.280)$$

Warunek (4.280) jest równoważny drugiemu z warunków (4.276). Równoważność pierwszych z warunków (4.276), (4.277) i (4.278) wynika natychmiast z twierdzenia 51. Równoważność drugich z warunków (4.276) i (4.277) można wykazać następująco:

$$\text{rząd} \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2 N \\ \vdots \\ C_2 N^{\mu-1} \end{bmatrix} = \text{rząd} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{n_2} s - C_2 \\ \vdots \\ \mathbb{I}_{n_2} s - C_2 \end{bmatrix}_{|s=0} = \text{rząd} \begin{bmatrix} N \\ C_2 \end{bmatrix}$$

gdyż macierz nilpotentna N ma tylko zerowe wartości własne. Korzystając z zależności (4.210), możemy napisać

$$\begin{aligned} \text{rząd} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} &= \text{rząd} = \left\{ P^{-1} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} Q^{-1} \right\} = \text{rząd} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} = \\ &= n_1 + \text{rząd} \begin{bmatrix} N \\ C_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.281)$$

Z zależności (4.281) wynika równoważność drugich z warunków (4.277) i (4.278).

PRZYKŁAD 96

Zbadamy obserwowałość obwodu elektrycznego opisanego równaniami (4.241). W przykładzie 95 wykazaliśmy, że pierwsze z warunków twierdzenia 52 są spełnione, gdyż obwód ten jest R -obserwowlany. Wystarczy więc sprawdzić tylko jeden z drugich warunków twierdzenia 52, aby zbadać obserwowałość tego obwodu. Korzystając z drugiego z warunków (4.278) oraz (4.274), otrzymamy

$$\text{rząd} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = \text{rząd} \begin{bmatrix} 0 & \sigma & L \\ C_1 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 = n$$

Drugi z warunków (4.278) jest więc spełniony i obwód ten jest obserwowlany. Ten sam wynik otrzymamy, korzystając z drugich warunków (4.277) i (4.276). Z drugiego z warunków (4.277) oraz biorąc pod uwagę, że $N = 0$, $C_2 = \begin{bmatrix} -\frac{C_1}{C_2} \end{bmatrix}$, otrzymamy

$$\text{rząd} \begin{bmatrix} N \\ C_2 \end{bmatrix} = \text{rząd} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{C_1}{C_2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 = n_2$$

• dla $\mathbf{u}(t) \equiv 0$ brak składowych impulsowych w odpowiedzi implikuje brak takich składowych w wektorze stanu. Korzystając z zależności (4.212), dla $\mathbf{u}(t) \equiv 0$ i $\tau = 0$ otrzymamy

$$\mathbf{y}_\tau(t) = \mathbf{C}_2 \mathbf{x}_{2\tau}(t) = - \sum_{i=1}^{\mu-1} \delta^{(i-1)}(t) \mathbf{C}_2 \mathbf{N}^i \mathbf{x}_{20} = \mathbf{0}$$

4.2.16. Obserwonalność impulsowa układów singularnych

Weźmy pod uwagę układ singularny (4.203), (4.204) rozłożony na dwa podukłady: standardowy (4.206), (4.207) i ścisłe singularny (4.208), (4.209).

DEFINICJA 103

Układ singularny (4.203), (4.204) nazywamy obserwualnym impulsowo, jeżeli dla dowolnej chwili $\tau \geq 0$ można jednoznacznie wyznaczyć składową impulsową $\mathbf{x}_\tau(t)$ wektora stanu $\mathbf{x}(t)$ na podstawie znajomości składowej impulsowej odpowiedzi $\mathbf{y}_\tau(t)$ i składowej wymuszenia $\Delta \mathbf{u}_\tau(t)$.

Obserwonalność impulsowa układu singularnego charakteryzuje możliwość jednoznacznego wyznaczenia składowej impulsowej wektora stanu, na podstawie znajomości składowych impulsowych wymuszenia i odpowiedzi tego układu.

TWIERDZENIE 53
Układ singularny (4.203), (4.204) jest obserwualny impulsowo wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony jeden z warunków:

- $\ker \mathbf{H} \cap \text{Im } \mathbf{N} = \mathbf{0}$,

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_2 \mathbf{N} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_2 \mathbf{N}^{\mu-1} \end{bmatrix} \quad (4.282)$$
- $\ker \mathbf{N} \cap \ker \mathbf{C}_2 \cap \text{Im } \mathbf{N} = \mathbf{0}$
- $\ker \mathbf{N} = \ker \mathbf{H} \mathbf{N}$

(4.287)

Z zależności (4.286) i (4.287) otrzymujemy warunek (4.284). Równoważność warunków (4.284) i (4.282) można udowodnić następująco. Założymy, że jest spełniony warunek (4.284). Wtedy dla dowolnego wektora $\mathbf{v} \in \ker \mathbf{H} \cap \text{Im } \mathbf{N}$ istnieje taki wektor \mathbf{z} , że $\mathbf{v} = \mathbf{N}\mathbf{z}$. Ponadto $\mathbf{z} \in \ker \mathbf{H}$ wynika, że $\mathbf{z} \in \ker \mathbf{H}\mathbf{N} = \ker \mathbf{N}$, czyli $\mathbf{N}\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Zatem $\mathbf{v} = \mathbf{N}\mathbf{z} = \mathbf{0}$, co implikuje warunek (4.282). Odwrotnie, jeżeli będzie spełniona warunek (4.282). Wtedy dla dowolnego wektora $\mathbf{v} \in \ker \mathbf{H}\mathbf{N}$, $\mathbf{N}\mathbf{v} \in \ker \mathbf{H} \cap \text{Im } \mathbf{N}$ mamy $\mathbf{N}\mathbf{v} = \mathbf{0}$, czyli $\mathbf{v} \in \ker \mathbf{N}$ oraz $\ker \mathbf{H}\mathbf{N} \subseteq \ker \mathbf{N}$. Uwzględniając, że $\ker \mathbf{H} \subseteq \ker \mathbf{H}\mathbf{N}$, otrzymamy więc $\ker \mathbf{H}\mathbf{N} = \ker \mathbf{N}$. Warunki (4.282) i (4.284) są więc równoważne. Aby wykazać równoważność warunków (4.282) i (4.283), zauważmy, że

$$\ker \mathbf{H} = \ker \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_s - \mathbf{N} & \\ \hline \mathbf{C}_2 & \end{array} \right]_{s=0} = \ker \left[\begin{array}{c} \mathbf{N} \\ \hline \mathbf{C}_2 \end{array} \right] = \ker \mathbf{N} \cap \ker \mathbf{C}_2 \quad (4.288)$$

Dowód. Składowe impulsowe występują tylko w poduktadzie singularnym (4.208), (4.209). Układ jest obserwualny impulsowo wtedy i tylko wtedy, gdy

gdyż macierz nilpotentna \mathbf{N} ma tylko zerowe wartości własne. Podstawiając zależność (4.288) do (4.282), otrzymamy warunek (4.284). Korzystając z zale-

4. Własności układów

4.2. Osiągalność, sterowalność, obserwowałość i odtwarzalność układów liniowych

nosci (4.210), możemy napisać, że

$$\begin{aligned} \text{rzad } \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \\ 0 & C \end{bmatrix} &= \text{rzad } \left\{ \text{diag} \begin{bmatrix} P^{-1}, P^{-1}, I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \\ 0 & C \end{bmatrix} \text{diag} \begin{bmatrix} Q^{-1}, Q^{-1} \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \text{rzad } \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 & A_1 & 0 \\ 0 & N & 0 & I_{n_2} \\ 0 & 0 & I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N \end{bmatrix} = 2n_1 + \text{rzad } \begin{bmatrix} E & A \\ N & I_{n_2} \\ 0 & N \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} = \\ &= n + n_1 + \text{rzad } \begin{bmatrix} N^2 \\ C_2 N \end{bmatrix} = n + \text{rzad } E \end{aligned}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rzad } \begin{bmatrix} N^2 \\ C_2 N \end{bmatrix} \quad (4.289)$$

gdyż $\text{rzad } E = n_1 + \text{rzad } N$. łatwo wykazać, że zachodzi równość (4.289) wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony jeden z warunków (4.282), (4.284).

Zauważmy, że obserwowałość impulsowa układu singularnego (4.203), (4.204) zależy tylko od macierzy N i C_2 . Zamiast mówić, że układ (4.203), (4.204) jest obserwowałny impulsowo, będziemy również mówić, że para (N, C_2) jest obserwowałała impulsowo.

PRZYKŁAD 97

Korzystając z twierdzenia 53 sprawdzić, czy obwód elektryczny opisany równaniami (4.241) jest obserwowałny impulsowo. Biorąc pod uwagę zależność (4.259) i $C = [0 \ 1 \ 0]$ oraz uwzględniając warunek (4.285), otrzymamy

$C = \text{diag}[J_1, J_2], \quad J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = [c_1 \dots c_5] \quad (4.293)$

nie jest obserwowałny impulsowo dla dowolnych elementów macierzy C_2 . W tym przypadku $k = 2, q_1 = 3, q_2 = 2, p = 1$. Korzystając z warunku (4.292), otrzymamy

$$q_1 + q_2 = 5 > p(q_1 - 1) + k = 4$$

Warunek (4.292) jest więc spełniony i rozpatrywany układ nie jest obserwowałny impulsowo dla dowolnych elementów macierzy C_2 . Ten sam wynik otrzymamy, korzystając z pozostałych dwóch warunków twierdzenia 54. Korzystając z (4.290), otrzymamy $p(\mu - 1) = 2 < r = q_1 + q_2 - k = 3$, a z warunku (4.291) odpowiednio $k = 2 > p = 1$.

Z porównania twierdzeń 51 i 52 oraz warunku (4.75) wynika, że obserwowałość implikuje R -obserwowałość i obserwowałość impulsową układu singularnego (rys. 4.41). □

$$\begin{aligned} \text{rzad } \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \\ 0 & C \end{bmatrix} &= \text{rzad } \begin{bmatrix} 0 & 0 & L & -1 & 0 & -R \\ C_1 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L \\ 0 & 0 & 0 & C_1 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 5 = n + \text{rzad } E \end{aligned}$$

gdyż $\text{rzad } E = 2$. Warunek (4.285) jest więc spełniony i obwód ten jest obserwowałny impulsowo. Ten sam wynik otrzymamy, korzystając z trzech pozostałych warunków twierdzenia 53, gdyż $\ker N = \mathbb{R}$, $\text{Im } N = 0$ i $\text{Im } C_2 = \mathbb{R}$. □

Z porównania twierdzeń 52 i 53 wynika następujący ważny wniosek:

TWIERDZENIE 54

Układ singularny o p wyjściach (4.203), (4.204) nie jest obserwowałny impulsowo, jeżeli jest spełniony jeden z warunków:

- $p(\mu - 1) < r$
- $k > p$
- $\sum_{i=1}^k q_i > p(q_1 - 1) + k$

przy czym $r = \text{rzad } N$, a μ jest indeksem macierzy N .

*** Dowód tego twierdzenia jest dualny względem dowodu twierdzenia 50.

PRZYKŁAD 98

Wykażemy, że układ singularny (4.203), (4.204) o macierzach

$$N = \text{diag}[J_1, J_2], \quad J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = [c_1 \dots c_5] \quad (4.293)$$

nie jest obserwowałny impulsowo dla dowolnych elementów macierzy C_2 . W tym przypadku $k = 2, q_1 = 3, q_2 = 2, p = 1$. Korzystając z warunku (4.292), otrzymamy

$$q_1 + q_2 = 5 > p(q_1 - 1) + k = 4$$

Warunek (4.292) jest więc spełniony i rozpatrywany układ nie jest obserwowałny impulsowo dla dowolnych elementów macierzy C_2 . Ten sam wynik otrzymamy, korzystając z (4.290), otrzymamy $p(\mu - 1) = 2 < r = q_1 + q_2 - k = 3$, a z warunku (4.291) odpowiednio $k = 2 > p = 1$.



$R - \text{obserwowałość}$

$\text{Obserwowałość impulsowa}$

Rys. 4.41. Relacje między obserwowałością, R -obserwowałością i obserwowałością impulsową dla układu singularnego

DEFINICJA 104

Układ singularny

$$E^T \dot{x} = A^T x + C^T u$$

$$\mathbf{y} = B^T x$$

nazywanym *układem dualnym dla (względem) układu*

$$E\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\mathbf{y} = Cx$$

TWIERDZENIE 55

- *Układ singularny* (4.296), (4.297) jest sterowany (obszerowany) wtedy i tylko wtedy, gdy układ dualny (4.294), (4.295) jest obserwowany (sterowany).
- *Układ singularny* (4.296), (4.297) jest sterowany (R-sterowany) wtedy i tylko wtedy, gdy układ dualny (4.294), (4.295) jest R-obszerowany (sterowany).
- *Układ singularny* (4.296), (4.297) jest sterowany impulsowo (obszerowany impulsowo) wtedy i tylko wtedy, gdy układ dualny (4.294), (4.295) jest obserwowany impulsowo (sterowany impulsowo).

Dowód. Zgodnie z twierdzeniem 48 układ singularny (4.296), (4.297) jest sterowany wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione warunki (4.239). Biorąc pod uwagę, że transpozycja macierzy nie zmienia jej rzędu, z warunku (4.239) otrzymamy

$$\begin{aligned} \text{rząd } [E_s - A, B] &= \text{rząd } \begin{bmatrix} E^T s - A^T \\ B^T \end{bmatrix} = n \quad \text{oraz} \\ \text{rząd } [E, B] &= \text{rząd } \begin{bmatrix} E^T \\ B^T \end{bmatrix} = n \end{aligned}$$

Otrzymane warunki, zgodnie z twierdzeniem 52, są warunkami koniecznymi i wystarczającymi obserwonalności układu dualnego (4.294), (4.295). Dowody w pozostałych przypadkach są podobne.

Równoważne warunki konieczne i wystarczające steronalności (*R-steronalności i sterowności impulsowej*) oraz obserwonalności (*R-obszerowności i obszerowności impulsowej*) można wyrowadzić, jeżeli zamiast dekompozycji układu (4.203), (4.204) na dwa produkty (4.206), (4.207) i (4.208), (4.209) będziemy stosować inne postacie kanoniczne układu singularnego.

4.2. Osiągalność, sterowność, obserwonalność i odtwarzalność układów liniowych

295

Jeżeli rząd $E = r < n$, to istnieje para macierzy nieosobliwych P i Q taka, że

$$PEQ = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad PAQ = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.294)$$

$$PB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad CQ = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \quad (4.295)$$

$$\mathbf{y} = Cx \quad (4.296)$$

$$A_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}, \quad A_{22} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}, \quad B_1 \in \mathbb{R}^{p \times (n-r)}, \quad B_2 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times m}, \quad C_1 \in \mathbb{R}^{p \times r}, \quad C_2 \in \mathbb{R}^{p \times (n-r)} \quad (4.297)$$

Korzystając z tych nowych podmacierzy, można warunek rząd $[E, B] = n$ w twierdzeniu 48 zastąpić równoważnym warunkiem rząd $B_2 = n - r$. Rzeczywiście, korzystając z zależności (4.298), możemy napisać

$$\begin{aligned} n &= \text{rząd } [E, B] = \text{rząd } \left\{ P^{-1}[E, B] \begin{bmatrix} Q^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I}_m \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \text{rząd } \begin{bmatrix} \mathbb{I}_r & \mathbf{0} & B_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_2 \end{bmatrix} = r + \text{rząd } B_2 \end{aligned}$$

Zatem rząd $B_2 = n - r$. Analogicznie warunek rząd $\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n$ w twierdzeniu 52 można zastąpić równoważnym warunkiem rząd $C_2 = n - r$. Korzystając również z zależności (4.298), możemy napisać

$$\begin{aligned} n &= \text{rząd } \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = \text{rząd } \left\{ \begin{bmatrix} P^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} Q^{-1} \right\} = \\ &= \text{rząd } \begin{bmatrix} \mathbb{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = r + \text{rząd } C_2 \end{aligned}$$

Zatem rząd $C_2 = n - r$. Analogicznie możemy postawić z innymi warunkami.

4.2.17. Dekompozycja układów singularnych

Weźmy pod uwagę układ singularny (4.203), (4.204) spełniający warunek regularności (4.205). Układ ten rozkładamy na dwa produkty: standardowy (4.206), (4.207) i scisłe singularny (4.208), (4.209). Zgodnie z twierdzeniem rozłączne częstki

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \\ \vdots \\ \dot{x}_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{aligned} y_1 &= [0 \ C_{12} \ 0 \ C_{14}] \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \end{bmatrix} \\ y &= [0 \ C_{22} \ 0 \ C_{24}] \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{24} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.299)$$

przy czym

$$P_1 A_1 P_1^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix};$$

$$P_1 B_1 = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C_1 P_1^{-1} = [0 \ C_{12} \ 0 \ C_{14}] \quad (4.300)$$

$x_{1i} \in \mathbb{R}^{n_{1i}}, i = 1, 2, 3, 4; \sum_{i=1}^4 n_{1i} = n_1$; P_1 jest macierzą nieosobliwą ($\det P_1 \neq 0$) przekształcenia. Traktując macierze N , B_2 , C_2 jako macierze układu regułarnego ($\det [I_{n_2}, s - N] \neq 0$), rozkładamy go również zgodnie z twierdzeniem 41 na cztery rozłączne części

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & N_{14} \\ 0 & N_{22} & 0 & N_{24} \\ 0 & 0 & N_{33} & N_{34} \\ 0 & 0 & 0 & N_{44} \end{bmatrix};$$

$$P_2 B_2 = \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C_2 P_2^{-1} = [0 \ C_{22} \ 0 \ C_{24}] \quad (4.301)$$

Definiując $\bar{x}_i = \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_{1i}+n_{2i}}$ oraz

$$\bar{E}_{ii} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & N_{ii} \end{bmatrix}; \quad \bar{A}_{ii} = \begin{bmatrix} A_{ii} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix}; \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B^{1i} \\ B^{2i} \end{bmatrix}; \quad i = 1, 2$$

$$\bar{E}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N_{ij} \end{bmatrix}; \quad \bar{A}_{ij} = \begin{bmatrix} A_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad (i \neq j) \quad (4.303)$$

możemy łącznie równania (4.299) i (4.302) napisać w postaci

$$\begin{bmatrix} \bar{E}_{11} & \bar{E}_{12} & \bar{E}_{13} & \bar{E}_{14} \\ 0 & \bar{E}_{22} & 0 & \bar{E}_{24} \\ 0 & 0 & \bar{E}_{33} & \bar{E}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{E}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \\ \dot{\bar{x}}_3 \\ \dot{\bar{x}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \bar{A}_{13} & \bar{A}_{14} \\ 0 & \bar{A}_{22} & 0 & \bar{A}_{24} \\ 0 & 0 & \bar{A}_{33} & \bar{A}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{A}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

$$y = [0 \ C_{22} \ 0 \ C_{24}] \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{bmatrix} \quad (4.304)$$

TWIERDZENIE 56

Dla układu liniowego singularnego niesterownego i nieobserwownego opisanego zależnościami (4.203), (4.204) istnieją macierze nieosobliwe równoważności siennie, które przekształcają układ ten w postać (4.304), przy czym:

- produkt singularny (\bar{E}_{11} , \bar{A}_{11} , \bar{B}_1 , 0) jest sterowny i nieobserwowny,

$N_{ij} \in \mathbb{R}^{n_{2i} \times n_{2j}}, i, j = 1, 2, 3, 4$; $B_{2i} \in \mathbb{R}^{n_{2i} \times n_1}, i = 1, 2, C_{2j} \in \mathbb{R}^{p \times n_{2j}}, j = 1, 2, 4$; $\sum_{i=1}^4 n_{2i} = n_2$; P_2 jest macierzą nieosobliwą ($\det P_2 \neq 0$) przekształcenia; N_{ii} ($i = 1, 2, 3, 4$) są macierzami nilpotentnymi. Korzystając z zależności (4.301), możemy równania produktuściel singularnego (4.208), (4.209) napisać w postaci

- produkt singularny $(\bar{E}_{22}, \bar{A}_{22}, \bar{B}_2, \bar{C}_2)$ jest sterowany i obserwowany,
- produkt singularny $(\bar{E}_{33}, \bar{A}_{33}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ jest niesterowany i nieobserwowany,
- produkt singularny $(\bar{E}_{44}, \bar{A}_{44}, \mathbf{0}, \bar{C}_4)$ jest niesterowany i obserwowany.

Dowód. Macierze równoważności silnej przekształcające układ (4.203), (4.204) w postać (4.303) są iloczynami macierzy równoważności silnej P, Q dekomponujących Weierstrassa-Kroneckera, które dekomponują ten układ na poduklady (4.206), (4.207) i (4.208), (4.209), macierzy podobieństwa $\begin{bmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_2 \end{bmatrix}$, która przekształca poduklady te w postaci odpowiednio (4.299) i (4.302) oraz macierzy zmiennych definiujących podwektory $\bar{x}_i, i = 1, \dots, 4$. Korzystając z warunków (4.239) dla podukładu $(\bar{E}_{11}, \bar{A}_{11}, \bar{B}_1, \mathbf{0})$ otrzymamy

$$\text{rzad } [\bar{E}_{11}s - \bar{A}_{11}, \bar{B}_1] = \text{rzad } \begin{bmatrix} \mathbb{I}s - A_{11} & \mathbf{0} & B_{11} \\ \mathbf{0} & N_{11}s - \mathbb{I} & B_{21} \end{bmatrix} = n_{11} + n_{21}$$

gdzie $\text{rzad } [\mathbb{I}s - A_{11}, B_{11}] = n_{11}$, a macierz N_{11} jest nilpotentna i macierz $[N_{11}s - \mathbb{I}]$ jest nieosobliwa dla wszystkich skończonych $s \in \mathbb{C}$. Pierwszy z warunków (4.239) jest więc spełniony. Sprawdzamy z kolei drugi z tych warunków, który jest również spełniony, gdyż

$$\text{rzad } [\mathbb{I}s - N_{11}, B_{21}]|_{s=0} = \text{rzad } [N_{11}, B_{21}] = n_{21}$$

oraz

$$\text{rzad } [E_{11}, B_1] = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} & B_{11} \\ \mathbf{0} & N_{11} & B_{21} \end{bmatrix} = n_{11} + n_{21}$$

Podkład $(\bar{E}_{11}, \bar{A}_{11}, \bar{B}_1, \mathbf{0})$ jest więc sterowany. Nieobserwonalność tego podkłdu wynika z faktu, że jego macierz $C = \mathbf{0}$. Wykażemy, że podkład $(\bar{E}_{22}, \bar{A}_{22}, \bar{B}_2, \bar{C}_2)$ jest sterowany i osiągany. Korzystając z warunków (4.239), otrzymamy

$$\text{rzad } [\bar{E}_{22}s - \bar{A}_{22}, \bar{B}_2] = \text{rzad } \begin{bmatrix} \mathbb{I}s - A_{22} & \mathbf{0} & B_{12} \\ \mathbf{0} & N_{22}s - \mathbb{I} & B_{22} \end{bmatrix} = n_{12} + n_{22}$$

gdzie $\text{rzad } [\mathbb{I}s - A_{22}, B_{12}] = n_{12}$, a macierz N_{22} jest nilpotentna i macierz $[\mathbb{I}s - N_{22}s - \mathbb{I}]$ jest nieosobliwa dla wszystkich skończonych $s \in \mathbb{C}$. Podobnie

$$\text{rzad } [\bar{E}_{22}, \bar{B}_2] = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} & B_{12} \\ \mathbf{0} & N_{22} & B_{22} \end{bmatrix} = n_{12} + n_{22}$$

gdziż

$$\text{rzad } \begin{bmatrix} \bar{E}_{22}s - \bar{A}_{22} \\ \bar{C}_2 \end{bmatrix} = \text{rzad } \begin{bmatrix} \mathbb{I}s - A_{22} & \mathbf{0} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} = n_{12} + n_{22}$$

Warunki (4.239) są więc spełnione i produkad ten jest sterowany. Aby wykazać, że produkad ten jest również obserwonalny, korzystamy z warunków (4.278). Korzystając z zależności (4.303), otrzymamy wówczas

$$\text{rzad } \begin{bmatrix} \bar{E}_{22}s - \bar{A}_{22} \\ \bar{C}_2 \end{bmatrix} = \text{rzad } \begin{bmatrix} \mathbb{I}s - A_{22} & \mathbf{0} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} = n_{12} + n_{22}$$

gdziż

$$\text{rzad } \begin{bmatrix} \mathbb{I}s - \bar{A}_{22} \\ \bar{C}_{12} \end{bmatrix} = n_{12}$$

a macierz N_{22} jest nilpotentna i macierz $[\mathbb{I}s - N_{22}s - \mathbb{I}]$ jest nieosobliwa dla wszystkich skończonych $s \in \mathbb{C}$. Podobnie

$$\text{rzad } \begin{bmatrix} \bar{E}_{22} \\ \bar{C}_{22} \end{bmatrix} = \text{rzad } \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} = n_{12} + n_{22}$$

gdziż

$$\text{rzad } \begin{bmatrix} \mathbb{I}s - N_{22} \\ C_{22} \end{bmatrix} = \text{rzad } \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} = n_{12} + n_{22}$$

Warunki (4.278) są więc spełnione i produkad ten jest również obserwowywalny. Niesterowalność i nieobserwonalność produkadu $(\bar{E}_{33}, \bar{A}_{33}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ wynika z faktu, że macierze B i C tego produkadu są zerowe. Obserwonalność produkadu $(\bar{E}_{44}, \bar{A}_{44}, \mathbf{0}, C_4)$ dowodzi się analogicznie.

Definiując

$$\hat{x}_1 = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_2 = \begin{bmatrix} \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{bmatrix}$$

oraz

$$\hat{E}_{11} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{11} & \bar{E}_{12} \\ \mathbf{0} & \bar{E}_{22} \end{bmatrix}, \quad \hat{E}_{12} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{13} & \bar{E}_{14} \\ \mathbf{0} & \bar{E}_{24} \end{bmatrix}, \quad \hat{E}_{22} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{33} & \bar{E}_{34} \\ \mathbf{0} & \bar{E}_{44} \end{bmatrix},$$

$$\hat{A}_{11} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_{12} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{13} & \bar{A}_{14} \\ \mathbf{0} & \bar{A}_{24} \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_{22} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{33} & \bar{A}_{34} \\ \mathbf{0} & \bar{A}_{44} \end{bmatrix},$$

$$\hat{B}_1 = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{C}_1 = [\mathbf{0} \ \bar{C}_2], \quad \hat{C}_2 = [\mathbf{0} \ \bar{C}_4]$$

możemy równania (4.304) napisać w postaci

$$\begin{bmatrix} \hat{E}_{11} & \hat{E}_{12} \\ 0 & \hat{E}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & \hat{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} \quad (4.305)$$

W sposób analogiczny jak w dowodzie twierdzenia 56 można wykazać, że podkład $(\hat{E}_{11}, \hat{E}_{11}, \hat{B}_1)$ jest sterowalny. Z tego powodu układ singularny (4.305) nazywamy układem w postaci kanonicznej sterowalnej. Definiując natomiast

$$\tilde{x}_1 = \begin{bmatrix} \bar{x}_4 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_2 = \begin{bmatrix} \bar{x}_3 \\ \bar{x}_1 \end{bmatrix}$$

możemy równania (4.304) napisać w postaci

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_{11} & 0 \\ \tilde{E}_{21} & \tilde{E}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \quad (4.306)$$

gdzie

$$\tilde{E}_{11} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{44} & 0 \\ \bar{E}_{24} & \bar{E}_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{E}_{21} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{34} & 0 \\ \bar{E}_{14} & \bar{E}_{12} \end{bmatrix}, \quad \tilde{E}_{22} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{33} & 0 \\ \bar{E}_{13} & \bar{E}_{11} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_{11} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{44} & 0 \\ \tilde{A}_{24} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_{21} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{34} & 0 \\ \tilde{A}_{14} & \tilde{A}_{12} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_{22} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{33} & 0 \\ \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{11} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}_1 = [\bar{C}_2 \ \bar{C}_4], \quad \tilde{C}_2 = [0 \ \bar{C}_4]$$

Analogicznie jak wyżej można wykazać, że podkład $(\tilde{E}_{11}, \tilde{E}_{11}, \tilde{C}_1)$ jest obserwowałny. Z tego powodu układ singularny (4.194) nazywamy układem w postaci kanonicznej obserwowejnej.

4.2.18. Jak to zrobić w MATLAB-ie

W MATLAB-ie zaimplementowano funkcje wyznaczające macierze sterowalności i obserwowałości.

FUNKCJA OBSV:

Funkcja tworzy macierz obserwowałości modelu zmiennych stanu.

OB = OBSV(A, C) tworzy macierz obserwowałości w następującej postaci:

$$OB = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

gdzie n jest rozmiarem macierzy A .

CO = OBSV(SYS) zwraca macierz obserwowałości modelu zmiennych stanu SYS. Polecenie **CO = OBSV(SYS.a, SYS.b)** daje dokładnie ten sam wynik i może być stosowane zamiennie.

FUNKCJA CTRB:

Funkcja tworzy macierz sterowalności modelu zmiennych stanu.

$$OB = CTRB(A, B) \text{ tworzy macierz sterowalności w następującej postaci:}$$

$$OB = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

gdzie n jest rozmiarem macierzy A .

CO = CTRB(SYS) zwraca macierz sterowalności modelu zmiennych stanu SYS. Polecenie **CO = CTRB(SYS.a, SYS.b)** daje dokładnie ten sam wynik i może być stosowane zamiennie.

PRZYKŁAD 99

Wyznaczmy macierz sterowalności i obserwowałości następującego modelu zmiennych stanu:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0,2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Definiujemy macierze modelu

$$A = [-1 \ 0 \ 0,2; 0 \ -2 \ 1; 1 \ 0 \ -3];$$

$$B = [1; 0; 1];$$

$$C = [1 \ 2 \ 0; 0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 1];$$

Definiujemy obiekt SYS zawierający model zmiennych stanu

$$SYS = SS(A, B, C, 0);$$

i następnie wyznaczamy macierze obserwowałości i sterowalności

$$OB = obsv(SYS);$$

$$St = ctrb(SYS);$$

□

4.3. Zera i Bieguny

4.3.1. Układy SISO

Weźmy pod uwagę ciągły układ dynamiczny opisany transmitancją operatorową

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \quad (4.307)$$

gdzie: $n(s)$ – wielomian stopnia $k_n(n(s) \in \mathbb{R}[s], \deg n(s) = k_n)$; $d(s)$ – wielomian stopnia $k_d(d(s) \in \mathbb{R}[s], \deg d(s) = k_d > k_n)$.

Stopień licznika funkcji wymiernej (4.307) jest nie mniejszy niż stopień mianownika tej funkcji.

DEFINICJA 105

Miejsca zerowe wielomianu $n(s)$ nazywamy zerami transmitancji operatorowej (4.307).

DEFINICJA 106

Miejsca zerowe wielomianu $d(s)$ nazywamy biegunami transmitancji operatorowej (4.307).

Jeżeli więc chcemy wyznaczyć zera i biegundy transmitancji, to musimy znaleźć miejsca zerowe odpowiednio jej licznika i mianownika.

PRZYKŁAD 100

Dana jest transmitancja

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+2s-3} \quad (4.308)$$

Wówczas $n(s) = s+2, d(s) = s^2 + 2s - 3$. Miejsca zerowe tych wielomianów

$$\begin{aligned} s_1 &= -2 \\ s_1 &= 1, \quad s_2 = -3 \end{aligned} \quad (4.309)$$

Zgodnie z definicjami (105, 106) układ o transmitancji (4.308) ma jedno zero w punkcie $s = -2$ oraz dwa biegundy w punktach $s = 1, s = -3$. \square

W przypadku układów o jednym wejściu i jednym wyjściu (układy SISO) transmitancja jest wyrażona funkcją wymierną ($G(s) \in R(s)$) i wyznaczenie zer i biegundów nie sprawia problemów.

Jesli natomiast mamy do czynienia z układem o wielu wejściach i wielu wyjściach (układy MIMO), to transmitancja jest wyrażona macierzą o wymiarach

$m \times n$, w której elementy są funkcjami wymiernymi. Mówimy też, że mamy do czynienia z macierzową funkcją wymierną.

Układ dynamiczny o m wejściach i n wyjściach może być opisany transmitancją

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \dots & G_{1m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1}(s) & \dots & G_{nm}(s) \end{bmatrix} \quad (4.310)$$

gdzie $G_{ij}(s) \in R(s)$.

4.3.2. Postać Smitha macierzy

Wielomianem macierzowym stopnia r nazywamy wielomian

$$P(s) = P_0 + sP_1 + s^2P_2 + \dots + s^{r-1}P_{r-1} + s^rP_r \quad (4.311)$$

gdzie $P_i \in \mathbb{R}^{mn \times n}$, $i = 0, \dots, r$ oraz $\text{rząd } P(s) = r$.

Pierścień wszystkich wielomianów macierzowych wymiaru $m \times n$ o wspólnym rzeczywistym oznaczać będziejący przez $\mathbb{R}^{mn \times n}[s]$.

Wówczas możemy napisać $P(s) \in \mathbb{R}^{mn \times n}[s]$.

Na każdym wielomianie macierzowym możemy wykonać następujące operacje elementarne:

1) zamiana dwóch wierszy lub kolumn między sobą,

2) pomnożenie dowolnego wiersza lub kolumny przez stałą, różną od zera,

3) dodanie do dowolnego wiersza (kolumny) innego wiersza (kolumny) pomnożonego przez stałą.

Wykonanie operacji elementarnych na wielomianie macierzowym nie zmienia jego rzędu.

Dla każdej macierzy wielomianowej $P(s) \in \mathbb{R}^{mn \times n}[s]$ (rząd $P(s) = r$) można znaleźć operacje elementarne, które przekształcą macierz $P(s)$ w macierz

$$P_s(s) = \left[\begin{array}{cccccc} \epsilon_1 & \dots & & & & & \\ \vdots & \epsilon_2 & \dots & & & & \\ & \vdots & \ddots & & & & \\ & & & \epsilon_r(s) & 0 & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & 0 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{mn \times n}[s] \quad (4.312)$$

Wielomiany $\epsilon_1(s), \epsilon_2(s), \dots, \epsilon_r(s)$ stojące na przekątnej macierzy $P_s(s)$ spełniają warunki:

- współczynnik przy największej potędze każdego z nich jest równy 1 (są wielomianami monicznymi),
- wielomian $\epsilon_i(s)$ dzieli bez reszty wielomian $\epsilon_{i+1}(s)$ ($\epsilon_i(s) \mid \epsilon_{i+1}(s)$).

Macierz $P_s(s)$ nazywany postacią Smitha macierzy $P(s)$, a wielomiany $\epsilon_1(s), \epsilon_2(s), \dots, \epsilon_r(s)$ wielomianami invariantnymi macierzy $P(s)$.

Ponieważ operacje elementarne na wierszach i kolumnach macierzy $P(s)$ są reprezentowane przez pewne macierze unimodalne nad pierścieniem wielomianów, więc można napisać równość

$$P(s) = L(s)P_s(s)R(s),$$

$$L(s), R(s) \in \mathbb{U}(s)$$

przy czym: $\mathbb{U}(s)$ – pierścień wielomianów macierzowych unimodalnych nad $\mathbb{R}[s]$.

Algorytm wyznaczania postaci Smitha macierzy $P(s)$

- Jeśli $P(s)$ jest macierzą wielomianową o znanych wymiarze $m \times n$, to należy w tej macierzy wybrać element o najmniejszym stopniu i stosując działania elementarne przenieść go na pozycję (1, 1) macierzy $P(s)$.
- Następnie należy podzielić każdy element stojący w pierwszym wierszu i pierwszej kolumnie przez element stojący na pozycji (1, 1) oraz w miejscu dzielnika wstawić resztkę z dzielenia.
- Jeżeli element z pozycji (1, 1) nie dzieli elementu (2, 2), to stosując działania elementarne należy umieścić go na pozycji (1, 2) lub (2, 1) i powtórzyć czynności z p. 2.

Przy wyznaczaniu postaci Smitha macierzy $P(s)$ należy też skorzystać z zależności

$$\frac{\Delta_i}{\epsilon_i} = \Delta_{i-1}$$

gdzie $i = 1, \dots, r$ – rzad $P(s)$; Δ_i – największy wspólny dzielnik wszystkich minorów wymiaru $i \times i$ macierzy $P(s)$.

Korzystając z tej zależności, można wyznaczyć wszystkie wielomiany macierzy $P(s)$, a tym samym postać Smitha tej macierzy.

PRZYKŁAD 101

Dana jest macierz

$$P(s) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ s^2 + s - 4 & 2s^2 - s - 8 \\ s^2 - 4 & 2s^2 - 8 \end{bmatrix}$$

Obliczamy

$$\Delta_0 = 1$$

$$\Delta_1 = \text{NWD}\{1, -1, s^2 + s - 4, 2s^2 - s - 8, s^2 - 4, 2s^2 - 8\} = 1$$

$$\Delta_2 = \text{NWD} \left\{ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ s^2 + s - 4 & 2s^2 - s - 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ s^2 - 4 & 2s^2 - 8 \end{vmatrix} \right\} = \begin{vmatrix} s^2 + s - 4 & 2s^2 - s - 8 \\ s^2 - 4 & 2s^2 - 8 \end{vmatrix} = (s+2)(s-2)$$

Wobec tego

$$\epsilon_1 = 1, \quad \epsilon_2 = (s+2)(s-2)$$

oraz postać Smitha macierzy $P(s)$

$$P_s(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (s+2)(s-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.316)$$

□

Postać Smitha dotyczy macierzy wielomianowych i stanowi punkt wyjścia do zdefiniowania postaci kanonicznej macierzy wymiernej, tzw. postaci Smitha-McMilliana.

DEFINICJA 107

Postacią Smitha-McMilliana macierzy wymiernej $G(s)$ rzędu r ($r =$

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{\epsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{\epsilon_2(s)}{\psi_2(s)} & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$(4.314)$$

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{\epsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon_2(s)}{\psi_2(s)} & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ & & 0 & \frac{\epsilon_r(s)}{\psi_r(s)} & 0 & \cdots \\ & & & 0 & 0 & \cdots \\ & & & & \vdots & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (4.317)$$

gdzie $\epsilon_i(s), \psi_i(s)$ są wielomianami monicznymi względnie pierwszymi $\text{NWD}(\epsilon_i(s), \psi_i(s)) = 1$ oraz spełniają warunki podzielności $\epsilon_i(s) \mid \epsilon_{i+1}(s)$, $\psi_i(s) \mid \psi_{i+1}(s)$.

Algorytm wyznaczania postaci Smitha-McMilliana macierzy $P(s)$

- Wyznaczamy najmniejszą wspólną wielokrotność $d(s)$ wszystkich wielomianów występujących w mianowniku elementów macierzy $G(s)$.

2. Wyznaczamy macierz wielomianową $\mathbf{P}(s)$ spełniającą równość

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{d(s)} \mathbf{P}(s)$$

3. Wyznaczamy wielomiany interwariantne $c'_1(s), c'_2(s), \dots, c'_r(s)$ macierzy wielomianowej $\mathbf{P}(s)$.

4. Dla każdego wielomianu invariantnego $\epsilon'_i(s)$ wyznaczamy względnie pierwotne wielomiany $\epsilon_i(s)$ i $\psi_i(s)$ spełniające równanie

$$\frac{\epsilon'_i(s)}{d(s)} = \frac{\epsilon_i(s)}{\psi_i(s)} \quad (4.318)$$

PRZYKŁAD 102

Dana jest transmitancja operatorowa

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{s^2 + 3s + 2}{s^2 + s - 4} & \frac{s^2 + 3s + 2}{2s^2 - s - 8} \\ \frac{s^2 + 3s + 2}{s^2 + 3s + 2} & \frac{s^2 + 3s + 2}{2s - 4} \\ \frac{s - 2}{s + 1} & \frac{s - 2}{s + 1} \end{bmatrix}$$

Wyznaczamy

$$d(s) = (s+1)(s+2) \quad (4.320)$$

Postać Smitha-McMilliana macierzy $\mathbf{G}(s)$ jest następująca:

$$\mathcal{M}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} & 0 \\ 0 & \frac{s-2}{s+1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.3.3. Układy wielowymiarowe MIMO

Do definiowania zer i biegunków układów wielowymiarowych posłużymy się postacią Smitha-McMilliana macierzy transmitancji operatorowych. Niech $\mathbf{G}(s) \in \mathbb{R}^{m \times n}(s)$

będzie transmitancją operatorową, a macierz

$$\mathbf{G}_m(s) = \text{diag} \left\{ \frac{\epsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \frac{\epsilon_2(s)}{\psi_2(s)}, \dots, \frac{\epsilon_r(s)}{\psi_r(s)}, 0, \dots, 0 \right\} \quad (4.323)$$

jest postacią Smitha-McMilliana tej macierzy. Definiujemy wówczas dwa wielomiany

$$\begin{aligned} p(s) &:= \psi_1(s) \cdot \psi_2(s) \cdot \dots \cdot \psi_r(s) & (4.324) \\ z(s) &:= \epsilon_1(s) \cdot \epsilon_2(s) \cdot \dots \cdot \epsilon_r(s) & (4.325) \end{aligned}$$

DEFINICJA 108

Miejsca zerowe wielomianu (4.324) nazywamy *biegunkami transmitancji* i miejsca układu opisanego transmitancją (4.322).

DEFINICJA 109

Miejsca zerowe wielomianu (4.325) nazywamy *zerami transmitancji* i miejsca układu opisanego transmitancją (4.322).

PRZYKŁAD 103

Niech postać Smitha-McMilliana macierzy $\mathbf{G}(s)$ ma wielomiany interwariantne

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= 1 & \epsilon_2 &= s - 2 & (4.326) \\ \psi_1 &= (s+1)(s+2) & \psi_2 &= (s+1) \end{aligned}$$

wówczas wielomian (4.324) ma postać

$$\begin{aligned} p(s) &= (s+1)^2(s+2) & (4.327) \\ \text{a. wielomian } (4.325) \text{ ma postać} \\ z(s) &= (s-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4.328) \\ \text{Biegung tego układu należą do zbioru } \{-1, -1, 2\}, \text{ a zero do zbioru } \{2\}. \quad \square \end{aligned}$$

DEFINICJA 110

Stopień wielomianu (4.324) nazywamy stopniem *McMilliana macierzy* (4.322).

UWAGA 40. Jeśli zo jest zerem transmitancji $\mathbf{G}(s)$, to macierz $\mathbf{G}(s)$ traci dla $s = z_0$ pełny rzad.

Z definicji zera wynika, że przekątna macierzy transmitancji $\mathbf{G}(s)$ z reguły nie ma zer. Ponieważ zero jest punktem phaszczyzny zespolenej, dla których $\mathbf{G}(s)$ traci rzad, więc w przypadku $\mathbf{G}(s)$ o różnej liczbie wierszy i kolumn jednocześnie kilka minorów tej macierzy musiałyby być równych零 w tym samym punkcie.

4.3.4. Biegunki i zera w nieskończoności

Załóżmy, że

$$G(s) = k \frac{s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} \quad (4.329)$$

Jeśli $n > m$, to mówimy, że transmitancja $G(s)$ ma $n - m$ zer w nieskończoności. Jeśli $n < m$ to mówimy, że transmitancja $G(s)$ ma $n - m$ biegunów w nieskończoności.

DEFINICJA 111

Niech $H(\lambda) = G\left(\frac{1}{\lambda}\right)$. Bieguny i zera transmitancji $G(s)$ dla $s = \infty$ są biegunami i zerami transmitancji $H(\lambda)$ dla $\lambda = 0$.

TWIERDZENIE 57

Jeśli macierz $G(s)$ jest macierzą kwadratową, to ma ona wiele biegunów i zer (uwzględniając biegony i zera w nieskończoności).

Dowód.

$$H(\lambda) = G\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\det H(\lambda) = \det G\left(\frac{1}{\lambda}\right) = k \frac{z\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{p\left(\frac{1}{\lambda}\right)}$$

$$z(s) = \prod_{i=1}^m (s - z_i)$$

$$p(s) = \prod_{i=1}^n (s - p_i)$$

$$z\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \lambda^{-m} \prod_{i=1}^m (1 - \lambda z_i)$$

$$p\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \lambda^{-n} \prod_{i=1}^n (1 - \lambda p_i)$$

$$det H(\lambda) = k \lambda^{n-m} \frac{\prod_{i=1}^m (1 - \lambda z_i)}{\prod_{i=1}^n (1 - \lambda p_i)}$$

niech

z_∞ – liczba zer transmitancji $H(\lambda)$ w zerze

p_∞ – liczba biegunów transmitancji $H(\lambda)$ w zerze

$z_\infty - p_\infty = n - m$

z_f – liczba skończonych zer transmitancji $G(s)$

p_f – liczba skończonych biegunów transmitancji $G(s)$

$p_f - z_f = n - m$

wówczas
 $p_f - z_f = z_\infty - p_\infty$
 $z_\infty + z_f = p_f + p_\infty$

4.4. Postacie kanoniczne

4.4.1. Redukcja macierzy do postaci Frobeniusa

Dwie macierze kwadratowe $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ nazywamy podobnymi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz nieosobliwa $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ taka, że

$$B = PAP^{-1}$$

przy czym P nazywamy macierzą przekształcenia przez podobieństwo.

TWIERDZENIE 58

Macierze podobne mają równe wielomiany charakterystyczne

$$\det [\mathbb{I}_n s - B] = \det [\mathbb{I}_n s - A] \quad (4.332)$$

Dowód. Korzystając z (4.331), możemy napisać

$$\begin{aligned} \det [\mathbb{I}_n s - B] &= \det [P\mathbb{P}^{-1}s - PAP^{-1}] = \det \{P[\mathbb{I}_n s - A]P^{-1}\} = \\ &= \det P \det [\mathbb{I}_n s - A] \det P^{-1} = \det [\mathbb{I}_n s - A] \end{aligned}$$

gdzie $\det P^{-1} = (\det P)^{-1}$.

DEFINICJA 112

Macierz

$$A_{F1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{lub}$$

$$(4.333)$$

$$A_{F2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

nazywamy macierzą w postaci pierwszej lub odpowiednio drugiej Frobe-

Rozwijając wyznacznik według n -tego wiersza (lub odpowiednio n -tej kolumny), łatwo sprawdzić, że

$$\det [\mathbb{I}_n s - \mathbf{A}_{F1}] = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & s + a_{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

oraz

$$\det [\mathbb{I}_n s - \mathbf{A}_{F2}] = \begin{vmatrix} s & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & s & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & a_{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

Wielomian $w(s)$ nazywany wielomianem zerującym macierzy \mathbf{A} , jeżeli $w(\mathbf{A}) = 0$. Każda macierz kwadratowa ma co najmniej jeden wielomian zerujący. Zgodnie z twierdzeniem Cayleya-Hamiltona każda macierz kwadratowa \mathbf{A} spełnia swoje równanie charakterystyczne $\varphi(\mathbf{A}) = 0$, gdzie $\varphi(\mathbf{A}) = \det [\mathbb{I}s - \mathbf{A}]$. Wielomianem minimalnym $\psi(s)$ macierzy kwadratowej \mathbf{A} nazywany wielomianem zerującym tej macierzy najmniejszego stopnia o współczynniku równym jedności przy zmiennej s w najwyższej potędze. Każdy wielomian zerujący macierzy \mathbf{A} jest podzielny bez reszty przez wielomian minimalny tej macierzy [87]. Wielomian minimalny $\psi(s)$ macierzy \mathbf{A} jest związany z jej wielomianem charakterystycznym $\varphi(\mathbf{A})$ zależnością

$$\psi(s) = \frac{\varphi(s)}{D_{n-1}(s)} \quad (4.336)$$

przy czym $D_{n-1}(s)$ jest największym wspólnym dzielnikiem wszystkich elementów macierzy dokształconej $[\mathbb{I}s - \mathbf{A}]_{\text{ad}}$. Po wykreśleniu w macierzy $[\mathbb{I}_n s - \mathbf{A}_{F1}]$ (lub macierzy $[\mathbb{I}_n s - \mathbf{A}_{F2}]$) n -tego wiersza i pierwszej kolumny (pierwszego wiersza i n -tej kolumny) otrzymamy minor równy $(-1)^{n-1}$. Wobec tego największy wspólny dzielnik wszystkich minorów stopnia $n-1$ macierzy $[\mathbb{I}_n s - \mathbf{A}_{F1}]$ (lub $[\mathbb{I}_n s - \mathbf{A}_{F2}]$) jest równy jedności, czyli $D_{n-1}(s) = 1$. Ze wzoru (4.336) wynika, że w tym przypadku $\psi(s) = \varphi(s)$.

DEFINICJA 113

Macierz, dla której wielomian minimalny pokrywa się z wielomianem charakterystycznym, nazywamy macierzą cykliczną.

Macierze \mathbf{A}_{F1} i \mathbf{A}_{F2} są więc macierzami cyklicznymi.

Problem 1. Dana jest macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Należy wyznaczyć odpowiadającą jej macierz w postaci Frobeniusa \mathbf{A}_{F1} lub \mathbf{A}_{F2} oraz macierz nieosobliwą \mathbf{P} taką, że

$$\mathbf{A}_{F1} = \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} \quad \text{lub} \quad \mathbf{A}_{F2} = \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} \quad (4.337)$$

Powstaje pytanie, czy każdą macierz kwadratową \mathbf{A} można sprowadzić do postaci \mathbf{A}_{F1} lub \mathbf{A}_{F2} . Na to pytanie daje odpowiedź następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 59

Macierz kwadratową $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ można sprowadzić przez podobieństwo do postaci \mathbf{A}_{F1} lub \mathbf{A}_{F2} wtedy i tylko wtedy, gdy jest macierzą cykliczną.

Dowód. Macierz \mathbf{A}_{F1} (\mathbf{A}_{F2}) jest macierzą cykliczną, a więc jej wielomian minimalny pokrywa się z wielomianem charakterystycznym. Zgodnie z twierdzeniem 58 macierze podobne, a więc \mathbf{A} i \mathbf{A}_{F1} (\mathbf{A}_{F2}) mają równe wielomiany charakterystyczne. Zatem macierz \mathbf{A} musi być macierzą cykliczną. Z drugiej strony wiadomo, że [87] macierze \mathbf{A} i \mathbf{B} są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy macierze $[\mathbb{I}s - \mathbf{A}]$ i $[\mathbb{I}s - \mathbf{B}]$ mają te same wielomiany niezmienne. Jeżeli macierz \mathbf{A} jest macierzą cykliczną, to macierze $[\mathbb{I}_n s - \mathbf{A}]$ i $[\mathbb{I}_n s - \mathbf{A}_{F1}]$ ($[\mathbb{I}_n s - \mathbf{A}_{F2}]$) mają te same wielomiany niezmienne (jednym wielomianem niezmieniennym różnym od 1 jest wielomian minimálny), a więc są podobne.

PRZYKŁAD 104

Macierz skalarną $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ (w tym dla $a = 1$ macierz jednostkowej \mathbb{I}_2) nie można sprowadzić przez podobieństwo do postaci $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_0 & a_1 \end{bmatrix}$ lub $\begin{bmatrix} 0 & a_0 \\ 1 & a_1 \end{bmatrix}$, gdyż macierz skalarna nie jest macierzą cykliczną. Wielomian charakterystyczny tej macierzy jest równy $\psi(s) = \begin{vmatrix} s-a & 0 \\ 0 & s-a \end{vmatrix} = (s-a)^2$, natomiast wielomian minimalny $\varphi(s) = s-a$, gdyż największy wspólny dzielnik wszystkich minorów stopnia pierwszych

Niejszostała podane dwie metody wyznaczania macierzy \mathbf{A}_{F1} (\mathbf{A}_{F2}) oraz macierzy przekształcenia \mathbf{P} spełniającej równość (4.337).

Metoda 1. Dla danej macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dobieramy macierz wierszową $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ tak, aby para (\mathbf{A}, \mathbf{C}) była obserwowalna, czyli

Krok 4. Korzystając z zależności (4.341), wyznaczamy wiersze p_1, p_2, \dots, p_n macierzy P .

$$\det \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \neq 0 \quad (4.338)$$

UWAGA 41. Przynie kazda macierz $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ wybierana na chwil trafit bædzie spełniaæ warunek (4.338), gdzj w przestrzeni parametrów elementy macierzy C , niespełniajce tego warunku, lezq na piaszczyste.

Macierz P wybieramy tak, aby

$$PAP^{-1} = A_{F1} \text{ oraz } CP^{-1} = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \in \mathbb{R}^{1 \times n} \quad (4.339)$$

Niech p_i bædzie i -tym wierszem macierzy P , $i = 1, \dots, n$. Korzystając z zależności (4.339) i (4.333), možemy napisać

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad (4.340)$$

$$= s^3 - 4s^2 + 5s - 2$$

Krok 2. Macierz A_{F1} ma więc postać

$$A_{F1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix} \quad (4.345)$$

Wykonując mnożenie i porównując odbiegłe wiersze z (4.340), otrzymamy

$$p_1 = C, \quad p_2 = p_1 A, \quad p_3 = p_2 A, \quad \dots, \quad p_n = p_{n-1} A \quad (4.341)$$

Znajac C i A , z zależności (4.341) možemy kolejno wyznaczyć poszukiwanie wiersze p_1, p_2, \dots, p_n macierzy P . Z powyższych rozważań wynika, więc następujaca procedura rozwiązywania problemu 1 wg metody 1.

PROCEDURA 9

Sprawdzenie macierzy do postaci kanonicznej Frobeniusa A_{F1} .

Krok 1. Obliczamy współczynniki a_0, a_1, \dots, a_{n-1} wielomianu charakterystycznego macierzy A ,

$$\varphi(s) = \det[I_n s - A] = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 \quad (4.342)$$

Krok 2. Znajac a_0, a_1, \dots, a_{n-1} , wyznaczamy macierz A_{F1} lub A_{F2} .

Krok 3. Wybieramy $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ tak, aby był spełniony warunek (4.338).

4. Postacie kanoniczne

Krok 4. Korzystając z zależności (4.341), wyznaczamy wiersze p_1, p_2, \dots, p_n macierzy P .

UWAGA 42. Wybór macierzy C ma wpływ na postać macierzy P , ale nie ma wpływu na postać Frobeniusa A_{F1} .

PRZYKŁAD 105

Dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.343)$$

wyznaczmy macierz przekształcenia przez podobieństwo P sprawdzającą te macierz do postaci Frobeniusa A_{F1} . Łatwo sprawdzić, że macierz (4.343) jest macierza cykliczna, a więc zadanie ma rozwiązanie. Korzystając z procedury 9, otrzymamy kolejno:

Krok 1. Wielomian charakterystyczny macierzy (4.343) ma postać

$$\varphi(s) = \det[I_n s - A] = \begin{vmatrix} s-1 & -1 & 0 \\ 0 & s-1 & 0 \\ 1 & 0 & s-2 \end{vmatrix} = (s-2)(s-1)^2 =$$

$$= s^3 - 4s^2 + 5s - 2 \quad (4.344)$$

Krok 2. Macierz A_{F1} ma więc postać

$$A_{F1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix} \quad (4.345)$$

Krok 3. Wybieramy $C = [1 \ 0 \ 1]$, które spełnia warunek (4.338), gdyż

$$\det \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

Krok 4. Korzystając z zależności (4.341), otrzymamy

$$p_1 = C = [1 \ 0 \ 1], \quad p_2 = p_1 A = [0 \ 1 \ 2], \quad p_3 = p_2 A = [-2 \ 1 \ 4]$$

Poszukiwana macierz przekształcenia ma więc postać

$$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (4.346)$$

Jeżeli poszukujemy macierzy \bar{P} przekształcającej macierz A do postaci A_{F2} , to wygodnie jest wybierać macierz kolumnową $b \in \mathbb{R}^n$ tak, aby para (A, b)

była sterowalna, czyli

$$\det[b, Ab, \dots, A^{n-1}b] \neq 0$$

Niech \bar{p}_i będzie i -ta kolumną macierzy \bar{P} , $i = 1, \dots, n$. Korzystając z

$$\bar{P}^{-1}A\bar{P} = A_{F^2} \quad \text{oraz} \quad \bar{P}^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.348)$$

możemy napisać

$$\begin{aligned} A[\bar{p}_1 \ \bar{p}_2 \ \dots \ \bar{p}_n] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= [\bar{p}_1 \ \bar{p}_2 \ \dots \ \bar{p}_n] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \end{aligned} \quad (4.349)$$

$$b = [\bar{p}_1 \ \bar{p}_2 \ \dots \ \bar{p}_n] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wykonując mnożenie i porównując odpowiednie kolumny w zależności (4.349), otrzymamy

$$\bar{p}_1 = b, \quad \bar{p}_2 = A\bar{p}_1, \quad \bar{p}_3 = A\bar{p}_2, \quad \dots, \quad \bar{p}_n = A\bar{p}_{n-1} \quad (4.350)$$

Znając A i b , z zależności (4.350) możemy kolejno wyznaczyć poszukiwane kolumny $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n$ macierzy \bar{P} .

UWAGA 43. Wybór macierzy b ma wpływ na postać macierzy \bar{P} , ale nie ma wpływu na postać Frobeniusa A_{F^2} .

Z powyższych rozważań wynika więc następująca procedura rozwiązania problemu 1.

PROCEDURA 10

Sprawdzenie macierzy do postaci kanonicznej Frobeniusa A_{F^2} .

Krok 1. Obliczamy współczynniki a_0, a_1, \dots, a_{n-1} wielomianu charakterystycznego macierzy A , tak jak w procedurze 9.

Krok 2. Znając współczynniki a_0, a_1, \dots, a_{n-1} wielomianu charakterystycznego (4.342), wyznaczamy macierz A_{F^2} .

Krok 3. Wybieramy $b \in \mathbb{R}^n$ tak, aby był spełniony warunek (4.347).

Krok 4. Korzystając z zależności (4.350), wyznaczamy kolumny $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n$ macierzy \bar{P} .

PRZYKŁAD 106

Dla macierzy (4.343) wyznaczamy macierz \bar{P} sprzedająca tę macierz do postaci Frobeniusa A_{F^2} .

Krok 1. Wyznaczamy wielomian charakterystyczny macierzy (4.343) postaci (4.344).

Krok 2. Macierz A_{F^2} ma więc postać

$$A_{F^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (4.351)$$

$$\begin{aligned} \text{Krok 3. Wybieramy } b &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ które spełnia warunek (4.347), gdyż} \\ \det[b, Ab, A^2b] &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Krok 4. Korzystając z zależności (4.350), otrzymamy} \\ \bar{p}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{p}_2 = A\bar{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \bar{p}_3 = A\bar{p}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pozyskiwana macierz przekształcenia ma więc postać

$$\bar{P} = [\bar{p}_1 \ \bar{p}_2 \ \bar{p}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \quad (4.352)$$

□

Metoda 2. Dla danej macierzy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dobieramy macierz $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ tak, aby był spełniony warunek (4.338). Wykażemy, że poszukiwana macierz przekształcająca macierz A do postaci Frobeniusa A_{F^1} jest równa

$$P = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.353)$$

Mnożąc lewostronnie macierz (4.353) przez \mathbf{A} , otrzymamy

$$\mathbf{P}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^n \end{bmatrix} \quad (4.354)$$

Korzystając z twierdzenia Cayleya-Hamiltona, możemy napisać

$$\mathbf{A}^n = -a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} - \dots - a_1\mathbf{A} - a_0\mathbb{I}$$

(a_i są współczynnikami wielomianu charakterystycznego wzór (4.342)) oraz

$$\mathbf{C}\mathbf{A}^n = -a_{n-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} - \dots - a_1\mathbf{C}\mathbf{A} - a_0\mathbf{C} \quad (4.355)$$

Podstawiając zależność (4.355) do (4.354) oraz korzystając z faktu, że $\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} = \mathbb{I}_n$, otrzymamy

$$\mathbf{A}_{F1} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \\ -\sum_{i=0}^{n-1} a_i \mathbf{C}\mathbf{A}^i \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n \\ -\sum_{i=0}^{n-1} a_i \mathbf{p}_{i+1} \end{bmatrix} [\hat{\mathbf{p}}_1 \ \hat{\mathbf{p}}_2 \ \dots \ \hat{\mathbf{p}}_n] =$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Macierz ta pokrywa się z macierzą (4.346) otrzymaną w przykładzie 105.

$$\begin{aligned} (4.356) \quad & \text{W przypadku wyznaczania macierzy } \bar{\mathbf{P}} \text{ przekształcającej macierz } \mathbf{A} \text{ w postać } \\ & \text{skrajną } \mathbf{A}_{F2} = \bar{\mathbf{P}}^{-1}\mathbf{A}\bar{\mathbf{P}} \text{ wybierany macierz kolumnową } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \text{ tak, aby był ona spełniona warunek (4.347). Wykażemy, że poszukiwana macierz } \bar{\mathbf{P}} \text{ jest równa} \\ & \bar{\mathbf{P}} = [\mathbf{b} \ \mathbf{Ab} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] \end{aligned}$$

Mnożąc lewostronnie macierz (4.357) przez \mathbf{A} , otrzymamy

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{P}} = [\mathbf{Ab} \ \mathbf{A}^2\mathbf{b} \ \dots \ \mathbf{A}^n\mathbf{b}] \quad (4.357)$$

gdzie \mathbf{p}_i jest i -tym wierszem macierzy \mathbf{P} , a $\bar{\mathbf{p}}_j$ jest j -tą kolumną macierzy $\bar{\mathbf{P}}^{-1}$.

Z powyższych rozważań wynika więc następująca procedura rozwiązywania problemu 1 wg metody 2.

PROCEDURA 11

Sprawdzenie macierzy do postaci kanonicznej Frobeniusa \mathbf{A}_{F1} .

Krok 1. Obliczamy współczynniki a_0, a_1, \dots, a_{n-1} wielomianu charakterystycznego (4.342) macierzy \mathbf{A} .

Krok 2. Znajając współczynniki a_0, a_1, \dots, a_{n-1} wielomianu charakterystycznego (4.342), wyznaczamy macierz \mathbf{A}_{F1} .

Krok 3. Wybieramy $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^n$ tak, aby był spełniony warunek (4.338).

Krok 4. Korzystając ze wzoru (4.353), wyznaczamy poszukiwaną macierz \mathbf{P} .

PRZYKŁAD 107

Korzystając z procedury 11 wyznaczamy macierz \mathbf{P} przekształcającą macierz (4.343) do postaci Frobeniusa \mathbf{A}_{F1} . Korzystając z tej procedury, otrzymamy kolejno

Krok 1. Wielomian charakterystyczny ma postać (4.344).

Krok 2. Macierz \mathbf{A}_{F1} ma więc postać (4.345).

Krok 3. Wybieramy $\mathbf{C} = [1 \ 0 \ 1]$ (takie same jak w przykładzie 105), które spełnia warunek (4.338).

Krok 4. Korzystając ze wzoru (4.353), otrzymamy poszukiwaną macierz.

$$(4.358) \quad \mathbf{A}^n\mathbf{b} = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i \mathbf{A}^i\mathbf{b} = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i \bar{\mathbf{p}}_i$$

gdzie $\bar{\mathbf{p}}_i$ jest i -tą kolumną macierzy $\bar{\mathbf{P}}$. Podstawiając zależność (4.359) do zaznaczonego (4.358) oraz korzystając z faktu, że $\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} = \mathbb{I}_n$, otrzymamy

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{F2} &= \bar{\mathbf{P}}^{-1} \mathbf{A} \bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \vdots \\ \bar{p}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_1 & \bar{p}_2 & \cdots & \bar{p}_n & -\sum_{i=0}^{n-1} a_i \bar{p}_i \end{bmatrix} = \quad (4.360) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

gdzie

$$\bar{p}_i \bar{p}_j = \begin{cases} 0 & \text{dla } i \neq j \\ 1 & \text{dla } i = j \end{cases}$$

gdzie \bar{p}_i jest i -tym wierszem macierzy $\bar{\mathbf{P}}^{-1}$.

Z powyższych rozważań wynika więc następująca procedura rozwiązywania problemu 1.

PROCEDURA 12

Sprawdzenie macierzy do postaci kanonicznej Frobeniusa \mathbf{A}_{F2} .

Krok 1. Obliczamy współczynniki a_0, a_1, \dots, a_{n-1} wielomianu charakterystycznego (4.342) macierzy \mathbf{A} .

Krok 2. Znając współczynniki a_0, a_1, \dots, a_{n-1} wielomianu charakterystycznego, wyznaczamy macierz \mathbf{A}_{F2} .

Krok 3. Wybieramy $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ tak, aby był spełniony warunek (4.347).

Krok 4. Korzystając ze wzoru (4.357), wyznaczamy poszukiwaną macierz $\bar{\mathbf{P}}$.

PRZYKŁAD 108

Korzystając z procedury 12, wyznaczamy macierz $\bar{\mathbf{P}}$ przekształcającą macierz (4.343) do postaci Frobeniusa \mathbf{A}_{F2} . Korzystając z tej procedury, otrzymamy kolejno:

- Krok 1.* Wielomian charakterystyczny ma postać (4.344).
- Krok 2.* Macierz \mathbf{A}_{F2} ma więc postać (4.351).
- Krok 3.* Wybieramy $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, które spełnia warunek (4.344).
- Krok 4.* Korzystając ze wzoru (4.357), wyznaczamy poszukiwaną macierz

$$\bar{\mathbf{P}} = [\mathbf{b} \ \mathbf{Ab} \ \mathbf{A}^2 \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \quad (4.361)$$

□

Zauważmy, że macierz (4.361) różni się od macierzy (4.352) z przykładu 106

$$\text{dla } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \text{ Gdybyśmy wybrali } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ otrzymalibyśmy również macierz}$$

$\bar{\mathbf{P}}$ postaci (4.352). Metodę działań elementarnych sprowadzania macierzy \mathbf{A} do postaci Frobeniusa można znaleźć w pracy [87].

4.4.2. Redukcja macierzy do postaci kanonicznej Jordana

Metoda działań elementarnych

DEFINICJA 114

Działaniami elementarnymi na macierzy wielomianowej $\mathbf{W}(s) \in \mathbb{C}^{n \times m}[s]$ nazywamy następujące działania:

Krok 1. Pomnożenie dowolnego i -tego wiersza (lub kolumny) przez liczbę (skalar) $c \neq 0$. Działanie to oznaczać będziemy przez $L[i \times c]$ ($P[i \times c]$).

Krok 2. Dodanie do dowolnego i -tego wiersza (kolumny) j -iego wiersza (kolumny) pomnożonego przez wielomian $w(s)$. Działanie to oznaczać będziemy przez $L[i + j \times w(s)]$ ($P[i + j \times w(s)]$).

Krok 3. Zamiana miejscami i -tego wiersza oraz j -tego wiersza (kolumny). Działanie to oznaczać będziemy przez $L[i, j]$ ($P[i, j]$).

Powyższe działania elementarne wykonywane na wierszach (kolumnach) są równoważne lewostronnemu (prawostawnemu) pomnożeniu macierzy $\mathbf{W}(s)$ przez odpowiednie macierze unimodularne (macierze o wyznacznikach niezeroowych niezależnych od zmiennej s). Macierze unimodularne otrzymujemy z macierzy jednostkowej po wykonaniu dowolnej liczby działań elementarnych na jej wierszach i kolumnach. Stosując działania elementarne na wierszach i kolumnach, każdą macierz \mathbb{I}_n^s , $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ można przekształcić w macierz postaci Smitha [87], tj.

$$[\mathbb{I}_n s - \mathbf{A}]_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & i_{p+1}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & i_n(s) \end{bmatrix}, \quad (4.362)$$

$$0 \leq p \leq n-1$$

przy czym $i_{p+1}(s), \dots, i_n(s)$ są wielomianami inwariantnymi o współczynniku równym 1 przy najwyższej potędze co najmniej stopnia pierwszego takimi, że $i_{k+1}(s)$ dzieli się bez reszty przez $i_k(s)$ dla $k = p+1, \dots, n-1$. Wielomiany inwariantne (niezmiennicze) $i_k(s)$ są jednoznacznie określone zależnością

$$i_k(s) = \frac{D_k(s)}{D_{k-1}(s)}, \quad (D_0(s) = 1) \quad \text{dla} \quad k = p+1, \dots, n-1 \quad (4.363)$$

gdzie $D_k(s)$ jest największym wspólnym dzielnikiem wszystkich minorów stopnia k macierzy $[\mathbb{I}_n s - A]$. Niech wielomian charakterystyczny macierzy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ma postać

$$\varphi(s) = \det[\mathbb{I}_n s - A] = (s - s_1)^{m_1}(s - s_2)^{m_2} \cdots (s - s_q)^{m_q} \quad (4.364)$$

gdzie s_1, s_2, \dots, s_q są różnymi wartościami własnymi macierzy A , a m_1, m_2, \dots, m_q są krotnościami tych wartości własnych, spełniającymi warunek $\sum_{i=0}^q m_i = n$.

Niech wielomiany inwariantne $i_{p+1}(s), \dots, i_n(s)$ macierzy A mają postać

$$i_{p+1}(s) = (s - s_1)^{m_{p+1,1}}(s - s_2)^{m_{p+1,2}} \cdots (s - s_q)^{m_{p+1,q}}$$

$$i_n(s) = (s - s_1)^{m_{n,1}}(s - s_2)^{m_{n,2}} \cdots (s - s_q)^{m_{n,q}} \quad (4.365)$$

przy czym

$$0 \leq m_{p+1,1} \leq \cdots \leq m_{n,1} \leq m_1$$

$$0 \leq m_{p+1,q} \leq \cdots \leq m_{n,q} \leq m_q \quad (4.366)$$

Nierówności (4.366) wynikają z faktu podzielności bez reszty wielomianu invariantnego $i_{k+1}(s)$ przez wielomian $i_k(s)$ dla $k = p, \dots, n-1$.

DEFINICJA 115

Dzielnikami elementarnymi macierzy A nazywamy różne od jedności wyrażenia $(s - s_1)^{m_{p+1,1}}, (s - s_2)^{m_{p+1,2}}, \dots, (s - s_q)^{m_{n,q}}$, występujące w wielomianach invariantnych (4.365).

Dzielnik elementarny $(s - s_i)^{m_i}$ jest jedynym dzielnikiem elementarnym macierzy

4.4. Postacie kanoniczne

$$J_i = \begin{bmatrix} s_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i} \quad \text{lub}$$

$$J'_i = \begin{bmatrix} s_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & s_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_i & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & s_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i} \quad (4.367)$$

DEFINICJA 116

Macierze J_i i J'_i nazywamy odpowiednio klatką Jordana pierwszego i drugiego rodzaju.

Jeżeli jednej wartości własnej s_i odpowiada t dzielników elementarnych, to tej wartości własnejej odpowiada t klatek Jordana $J_{i1}, J_{i2}, \dots, J_{it}$, które tworzą macierz diagonalną, zwaną blokiem Jordana.

$$\text{diag}[J_{i1}, J_{i2}, \dots, J_{it}]$$

Niech J_1, J_2, \dots, J_k będą klatkami Jordana postaci (4.367), odpowiadającymi k dzielnikom elementarnym macierzy A . Wszystkie dzielniki elementarne macierzy A są również dzielnikami elementarnymi macierzy blokowo-diagonalej postaci

$$A_J = \text{diag}[J_1, J_2, \dots, J_k] \in \mathbb{C}^{n \times n} \quad (4.368)$$

DEFINICJA 117

Macierz (4.368) nazywamy postacią kanoniczną Jordana macierzy A (krótko macierz Jordana).

Macierze A i A_J , jako mające te same dzielniki invariantne, są podobne [87]. Istnieje więc macierz nieosobliwa P taka, że

$$A = P^{-1} A_J P$$

UWAGA 44. Macierz Jordana macierzy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ma postać diagonalną, wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie dzielniki elementarne są stopnia pierwszego.

Z powyższych rozważań wynika następująca procedura sprowadzania dowolnej macierzy kwadratowej do postaci kanonicznej Jordana:

PROCEDURA 13

Sprawdzenie macierzy do postaci kanonicznej Jordana.

Krok 1. Stosując działania elementarne na wierszach i kolumnach macierzy $[\mathbb{I}_n s - A]$, sprawdzamy ją do postaci kanonicznej Smitha (4.362).

Krok 2. Znajając wielomiany invariantne $i_{p+1}(s), \dots, i_n(s)$, wyznaczamy dzielniki elementarne $(s - s_1)^{m_{p+1}}, \dots, (s - s_q)^{m_n}$, q macierz A .

Krok 3. Znając dzielniki elementarne, wyznaczamy poszukiwaną postać kanoniczną Jordana (4.368) macierzy A .

PRZYKŁAD 109

Korzystając z procedury 13 wyznaczmy postać kanoniczną Jordana A_J macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.370)$$

Korzystając z procedury 13, otrzymamy kolejno:

Krok 1. Wykonujemy działania elementarne $P[1 + 2 \times (s - 1)], L[2 + 1 \times (s - 1)]$, $P[3 + 1 \times (-s + 2)], L[2 \times -1], L[2 + 3 \times (s - 1)]$, $L[1 \times -1], L[2, 3], L[1, 2]$ na macierzy

$$[\mathbb{I}_n s - A] = \begin{bmatrix} s - 1 & -1 & 0 \\ 0 & s - 1 & 0 \\ 1 & 0 & s - 2 \end{bmatrix}$$

Otrzymany jej postać kanoniczną Smitha

$$[\mathbb{I}_n s - A]_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (s - 1)^2(s - 2) \end{bmatrix}$$

Krok 2. Macierz (4.370) ma tylko jeden wielomian invariantny różny od jedności $i_n(s) = (s - 1)^2(s - 2)$, czyli jest macierzą cykliczną. Dzielnikami elementarnymi macierzy (4.370) są więc $(s - 1)^2$ i $(s - 2)$.

Krok 3. Poszukiwana postać kanoniczna Jordana jest więc następująca:

$$A_J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.371)$$

Wyznaczanie macierzy przekształcających metodą wektorów własnych

Dana jest macierz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ oraz jej postać kanoniczna Jordana (4.368). Należy wyznaczyć macierz przekształcającą równość (4.369). Niech i -ta klatka J_i , odpowiadająca wartości wiąsnej s_i , ma postać (4.367), a poszukiwa-

na macierz

$$\begin{aligned} P &= [P_1 \ P_2 \ \dots \ P_k], \\ P_i &= [p_{i1} \ p_{i2} \ \dots \ p_{ik}] \in \mathbb{R}^{n \times n_i}, \quad i = 1, \dots, k \end{aligned} \quad (4.372)$$

Mnożąc prawostronne równość (4.369) przez P , otrzymamy

$$AP = PA_J$$

a po uwzględnieniu (4.372), (4.367) i (4.368)

$$AP_i = P_i A_{J_i} \quad \text{dla } i = 1, \dots, k$$

oraz

$$A [p_{i1} \ p_{i2} \ \dots \ p_{in_i}] = [p_{i1} \ p_{i2} \ \dots \ p_{in_i}] \begin{bmatrix} s_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & s_i \end{bmatrix} \quad (4.373)$$

Wykonując mnożenie, z równości odpowiednich kolumn otrzymamy

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} - \mathbb{I}_n s_i]p_{i1} &= 0, & [\mathbf{A} - \mathbb{I}_n s_i]p_{i2} &= p_{i1}, \dots, \\ [\mathbf{A} - \mathbb{I}_n s_i]p_{in_i} &= p_{i, n_i-1} \end{aligned} \quad (4.374)$$

Z pierwszego z równań (4.374) wyznaczamy p_{i1} , a znając p_{i1} , z drugiego z tych dwóch wyznaczamy p_{i2} i odpowiednio z ostatniego p_{in_i} . Powtarzając obliczenia kolejno dla $i = 1, \dots, k$, wyznaczamy wszystkie kolumny poszukiwanej macierzy P .

PRZYKŁAD 110

Wyznaczmy macierz P przekształcającą macierz (4.370) w macierz postaci kanonicznej Jordana (4.371).

Macierz (4.370) ma jedną wartość podwójną $s_1 = 1$ i jedną wartość jednokrotną $s_2 = 2$. Korzystając z (4.374), dla $i = 1, s_1 = 1, n_1 = 2$ otrzymamy

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} - \mathbb{I}_n s_1]P_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} P_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ [\mathbf{A} - \mathbb{I}_n s_1]P_{12} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P_{12} = P_{11} \end{aligned}$$

□

Rozwiązyując te równania, otrzymamy

$$\mathbf{P}_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{P}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Z pierwszego z równań (4.374) dla $i = 2, s_2 = 2$ many

$$[\mathbf{A} - \mathbb{I}_n s_1] \mathbf{P}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{P}_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Poznakiwana macierz \mathbf{P} ma więc postać

$$\mathbf{P} = [\mathbf{P}_{11} \ \mathbf{P}_{12} \ \mathbf{P}_{21}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

□

Metoda działań elementarnych wyznaczania macierzy przekształcenia \mathbf{P} jest podana w pracy [87].

Metoda wektorów redukcji macierzy do postaci Jordana

Dana jest dowolna macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Należy wyznaczyć jej postać kanoniczną Jordana \mathbf{A}_J oraz macierz przekształcenia przez podobieństwo $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ spełniającą równość

$$\mathbf{A}_J = \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1}$$

Niech zostanie podana metoda rozwiązywania tego zadania niewymagająca wyznaczania macierzy kanonicznej Śniutka oraz dzieleniów elementarnych macierzy \mathbf{A} . Podstawa tej metody jest poniższa procedura obliczania liniowo niezależnych (uogólnionych) wektorów własnych macierzy \mathbf{A} .

PROCEDURA 14

Krok 1. Wyznaczamy wartości własne s_1, s_2, \dots, s_q macierzy \mathbf{A} oraz ich krotności (algebraiczne) n_1, n_2, \dots, n_q , tzn.

$$\det [\mathbb{I}_n s - \mathbf{A}] = (s - s_1)^{n_1} (s - s_2)^{n_2} \cdots (s - s_q)^{n_q} \quad (4.377)$$

Krok 2. Dla każdej wartości własnej $s_i, i = 1, \dots, q$ wyznaczamy n_i liniowo niezależnych (uogólnionych) wektorów własnych. W tym celu obliczany kolejno $(\mathbf{A} - s_i \mathbb{I}_n), (\mathbf{A} - s_i \mathbb{I}_n)^2, \dots, (\mathbf{A} - s_i \mathbb{I}_n)^m$, aż otrzymamy równość

$$\text{rząd } [\mathbf{A} - s_i \mathbb{I}_n]^m = \text{rząd } [\mathbf{A} - s_i \mathbb{I}_n]^{m+1}. \text{ Następnie z równania} \quad (4.378)$$

$$[\mathbf{A} - s_i \mathbb{I}_n]^m \mathbf{x}_m = 0$$

wyznaczamy wektor \mathbf{x}_m taki, że $[\mathbf{A} - s_i \mathbb{I}_n]^{m-1} \mathbf{x}_m \neq 0$ oraz ciąg wektorów

$$\mathbf{x}_{m-1} = [\mathbf{A} - s_i \mathbb{I}_n] \mathbf{x}_m,$$

$$\mathbf{x}_{m-2} = [\mathbf{A} - s_i \mathbb{I}_n] \mathbf{x}_{m-1}, \dots, \mathbf{x}_1 = [\mathbf{A} - s_i \mathbb{I}_n] \mathbf{x}_2$$

Jeżeli $m = n_i$, to wektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ są poszukiwanymi liniowo niezależnymi wektorami własnymi. Jeżeli $m < n_i$, to wyznaczany z równania

$$[\mathbf{A} - s_i \mathbb{I}_n]^m \mathbf{y}_m = 0 \quad (4.380)$$

nowy uogólniony liniowo niezależny wektor \mathbf{y}_m odpowiadający tej samej wartościowej s_i oraz ciąg wektorów

$$\mathbf{y}_{m-1} = [\mathbf{A} - s_i \mathbb{I}_n] \mathbf{y}_m, \quad (4.381)$$

$$\mathbf{y}_{m-2} = [\mathbf{A} - s_i \mathbb{I}_n] \mathbf{y}_{m-1}, \dots, \mathbf{y}_1 = [\mathbf{A} - s_i \mathbb{I}_n] \mathbf{y}_2$$

Procedurę te powtarzamy aż do otrzymania łącznie n_i liniowo niezależnych wektorów własnych.

Procedurę 14 można uzasadnić następująco. Mnożąc lewostronnie równość (4.376) przez macierz \mathbf{P}^{-1} , otrzymamy $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P}$. Niech $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ będą kolejnymi kolumnami macierzy \mathbf{P}^{-1} odpowiadającymi klatek Jordana J_i o postaci (4.367). Z powyższej zależności otrzymamy

$$[\mathbf{A} - s_i \mathbb{I}_n] \mathbf{x}_1 = 0, \quad [\mathbf{A} - s_i \mathbb{I}_n] \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1, \dots, \quad [\mathbf{A} - s_i \mathbb{I}_n] \mathbf{x}_m = \mathbf{x}_{m-1} \quad (4.382)$$

Mnożąc lewostronnie drugą z zależności (4.382) przez macierz $[\mathbf{A} - s_i \mathbb{I}_n]$ i uwzględniając pierwszą z zależności (4.383), otrzymamy

$$[\mathbf{A} - s_i \mathbb{I}_n]^2 \mathbf{x}_2 = [\mathbf{A} - s_i \mathbb{I}_n] \mathbf{x}_1 = 0 \quad (4.383)$$

Analogicznie, mnożąc lewostronnie trzecią z zależności przez macierz

$$[\mathbf{A} - s_i \mathbb{I}_n]^3 \mathbf{x}_3 = [\mathbf{A} - s_i \mathbb{I}_n]^2 \mathbf{x}_2 = 0 \quad (4.384)$$

oraz po odpowiedniej liczbie kroków

$$[\mathbf{A} - s_i \mathbb{I}_n]^m \mathbf{x}_m = 0 \quad (4.385)$$

Niech w przypadku ogólnym wartości własne s_i o krotności n_i odpowiadają h ciągów liniowo niezależnych wektorów własnych o długości (liczbie wektorów w tym ciągu) odpowiednio $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_h$, przy czym $m_1 + m_2 + \dots + m_h = n_i$. Liczby $m_i, i = 1, \dots, h$ określają wymiarysty klatek Jordana odpowiadających wartości własne s_i . Mając ciągi liniowo niezależnych wektorów liniowo niezależnych (uogólnionych) wektorów własnych $x_1^{s_1}, x_2^{s_1}, \dots, x_{m_1}^{s_1}, \dots, x_1^{s_2}, x_2^{s_2}, \dots, x_{m_2}^{s_2}, \dots, x_1^{s_q}, x_2^{s_q}, \dots, x_{m_q}^{s_q}$, oznaczamy macierz

W tym przypadku $m = 2 < n_1 = 3$, gdyż $\text{rząd } [\mathbf{A} - s_1 \mathbb{I}_n]^2 = \text{rząd } [\mathbf{A} - s_1 \mathbb{I}_n]^3 = 1$. Korzystając z zależności (4.378), wyznaczamy z równania

$$[\mathbf{A} - s_1 \mathbb{I}_n]^2 \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

wektor \mathbf{x}_2 spełniający warunek $[\mathbf{A} - s_1 \mathbb{I}_n] \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$. Otrzymamy wówczas $\mathbf{x}_2 = [1, 0, 0, 1]^T$. W tym przypadku z zależności (4.379) mamy

$$\mathbf{x}_1 = [\mathbf{A} - s_1 \mathbb{I}_n] \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ponieważ $n_1 = 3$, a $m = 2$, musimy więc wyznaczyć jeszcze jeden wektor \mathbf{x}_3 odpowiadający $s_1 = 1$ liniowo niezależny od \mathbf{x}_1 i \mathbf{x}_2 . Zgodnie ze sposobem przedstawionym w kroku 2 procedury 14 wektor ten wyznaczamy z równania ($\tilde{m} = 1$)

$$[\mathbf{A} - s_1 \mathbb{I}_n] \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Otrzymamy wtedy $\mathbf{x}_3 = [0, 0, 1, 0]^T$. Wektor własny \mathbf{x}_4 , odpowiadający wartości $s_2 = 2$, liniowo niezależny od $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ i \mathbf{x}_3 wyznaczamy z równania

$$[\mathbf{A} - s_2 \mathbb{I}_n] \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Równanie to spełnia $\mathbf{x}_4 = [2, 1, -1, 0]^T$. Poszukiwana macierz \mathbf{P}^{-1} zgodnie z (4.385) ma więc postać

$$\mathbf{P}^{-1} = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3 \ \mathbf{x}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.391)$$

Poszukiwana postać kanoniczna Jordana macierzy (4.392) jest więc następująca:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_J &= \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.392) \end{aligned}$$

Postać macierzy (4.392) możemy napisać natychmiast na podstawie znajomości wartości własnych $s_1 = 1, s_2 = 2$ oraz długości $m_2, \tilde{m} = 1, n_2 = 1$ ciągów wektorów własnych odpowiadających tym wartościom własnym. \square

Diagonalizacja macierzy

Weźmy pod uwagę macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ o niekoniecznie różnych wartościach własnych s_1, s_2, \dots, s_n . Zgodnie z rozważaniami w p. 4.4.2, macierz \mathbf{A} jest podobna do macierzy diagonalnej złożonej z wartości własnych s_1, s_2, \dots, s_n wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie dzielniki elementarne tej macierzy są pierwszego stopnia. W tym przypadku z postaci diagonalnej wynika, że

$$\dim \ker [\mathbf{A} - s_i \mathbb{I}_n] = n_i$$

gdzie n_i jest krotnością (algebraiczną) wartości własnej s_i . Krotność algebraiczna wartości własnej s_i jest więc równa jej krotności geometrycznej, zdefiniowanej zależnością (4.393) [87]. Macierz \mathbf{A} , spełniająca ten warunek, nazywamy macierzą prostej struktury. Wykażemy, że dla każdej macierzy prostej struktury $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ istnieje macierz nieosobienna

$$\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \dots \ \mathbf{p}_n] \quad (4.394)$$

taką, że

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \text{diag}[s_1, s_2, \dots, s_n] \quad (4.395)$$

gdzie \mathbf{p}_i jest i -tym wektorem własnym odpowiadającym wartościowej własnej s_i , $i = 1, \dots, n$. Jeżeli macierz \mathbf{A} jest macierzą prostej struktury, to każdej wartościowej s_i odpowiada wektor własny \mathbf{p}_i , czyli

$$\mathbf{A} \mathbf{p}_i = s_i \mathbf{p}_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.396)$$

Wektory własne $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ są liniowo niezależne [87]. Wobec tego macierz (4.394) jest nieosobienna. Z zależności (4.396) dla $i = 1, \dots, n$ mamy

$$\mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{P} \text{diag}[s_1, s_2, \dots, s_n] \quad (4.397)$$

a po pomnożeniu lewostronnym przez \mathbf{P}^{-1} otrzymujemy równość (4.395). W przypadku szczególnym, gdy macierz \mathbf{A} ma różne wartości własne ($s_i \neq s_j$,

$i \neq j, i, j = 1, \dots, n$, z powyższych rozważań otrzymujemy następujący ważny wniosek.

WNIOSK 11. Każda macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ o różnych wartościach własnych s_1, s_2, \dots, s_n można przekształcić przez podobieństwo w postać diagonalną $\text{diag}[s_1, s_2, \dots, s_n]$.

Wektory własne $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ wyznaczany, rozwiązując równanie

$$[\mathbf{A} - s_i \mathbb{I}_n] \mathbf{p}_i = 0 \quad \text{dla } i = 1, \dots, n \quad (4.398)$$

lub biorąc za wektor \mathbf{p}_i dowolną niezerową kolumnę macierzy dodanej $[\mathbf{A} - s_i \mathbb{I}_n]_{\text{ad}}$ [87].

PRZYKŁAD 113

Wyznaczymy macierz \mathbf{P} przekształcającą macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.399)$$

w macierz diagonalną.

Wielomian charakterystyczny tej macierzy ma postać

$$\det[\mathbb{I}_n s - \mathbf{A}] = \begin{vmatrix} s-2 & 0 & 0 \\ 0 & s-2 & 0 \\ -1 & 1 & s-1 \end{vmatrix} = (s-1)(s-2)^2 \quad (4.400)$$

Macierz (4.399), ma więc jedną wartość jednoznaczną $s_1 = 1$ i jedną dwukrotną $s_2 = 2$. Jest ona macierzą prostej struktury, gdyż jest spełniony warunek (4.393), bowiem

$$\text{rzad}[\mathbf{A} - s_2 \mathbb{I}_n] = \text{rzad} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 1$$

Można więc macierz (4.399) sprowadzić do postaci diagonalnej $\text{diag}[s_1, s_2, s_2] = \text{diag}[1, 2, 2]$. Z równania (4.398) dla $s_1 = 1$ w postaci

$$[\mathbf{A} - s_1 \mathbb{I}_n] \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mamy $\mathbf{p}_1 = [0 \ 0 \ 1]^T$. Z równania (4.398) dla $s_2 = 2$

$$[\mathbf{A} - s_2 \mathbb{I}_n] \mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = 2, 3$$

wynika, że równanie to spełniają następujące dwa liniowo niezależne wektory

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Poszukiwana macierz \mathbf{P} ma więc postać

$$\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Łatwo sprawdzić, że

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \square$$

4.4.3. Postacie kanoniczne macierzy układów o jednym wejściu

Weźmy pod uwagę dyskretny lub ciągły układ liniowy o jednym wejściu ($m = 1$) opisany równaniami stanu, którego macierze $\bar{\mathbf{A}}_1, \bar{\mathbf{b}}_1$ mają postać

$$\bar{\mathbf{A}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{b}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.401)$$

DEFINICJA 118

Macierze (4.401) nazywamy macierzami w postaci kanonicznej stereo-walnej lub równoważnie w pierwszej postaci kanonicznej Brunowskiego-Luenbergera (PPKB-L).

Para macierzy (4.401) jest osiągalna (sterowalna), gdyż

$$[\bar{\mathbf{b}}_1, \bar{\mathbf{A}}_1 \bar{\mathbf{b}}_1, \dots, \bar{\mathbf{A}}_1^{n-1} \bar{\mathbf{b}}_1] = \mathbb{I}_n$$

Wykażemy, że jeżeli dowolna para (\mathbf{A}, \mathbf{b}) jest osiągalna, to istnieje macierz nieosobliwia $\mathbf{P}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ taka, że

$$\mathbf{P}_1 \mathbf{A} \mathbf{P}_1^{-1} = \bar{\mathbf{A}}_1 \quad \text{i} \quad \mathbf{P}_1 \mathbf{b} = \bar{\mathbf{b}}_1$$

przy czym para $(\bar{\mathbf{A}}_1, \bar{\mathbf{b}}_1)$ ma postać (4.401). Korzystając z zależności (4.403), łatwo stwierdzić, że $\bar{\mathbf{A}}_1^k = \mathbf{P}_1 \mathbf{A}^k \mathbf{P}_1^{-1}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, oraz $\bar{\mathbf{A}}_1 \bar{\mathbf{b}}_1 = \mathbf{P}_1 (\mathbf{A} \mathbf{b})$,

$\bar{A}_1^2\bar{b}_1 = P_1(A^2b), \dots, \bar{A}_1^{n-1}\bar{b}_1 = P_1(A^{n-1}b)$. Wobec tego

$$P_1[b, Ab, \dots, A^{n-1}b] = [\bar{b}_1, \bar{A}_1\bar{b}_1, \dots, \bar{A}_1^{n-1}\bar{b}_1]$$

oraz

$$\begin{aligned} P_1[b, Ab, \dots, A^{n-1}b] &= [\bar{b}_1, \bar{A}_1\bar{b}_1, \dots, \bar{A}_1^{n-1}\bar{b}_1][b, Ab, \dots, A^{n-1}b]^{-1} \\ &= [b, Ab, \dots, A^{n-1}b] \end{aligned} \quad (4.404)$$

gdzie spełnione jest równanie (4.402), a z założenia, iż para (A, b) jest sterowalna wynika, że macierz osiągalności $R = [b, Ab, \dots, A^{n-1}b]$ jest odwracalna (nieosobliwa). Macierze podobne mają równe wielomiany charakterystyczne (twierdzenie 58). Wobec tego, rozwijając wyznacznik według n -tej kolumny, otrzymamy

$$\begin{aligned} \det[\mathbb{I}_n s - A] &= \det[\mathbb{I}_n s - \bar{A}_1] = \begin{vmatrix} s & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & s & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & s & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & s + a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 \end{aligned} \quad (4.405)$$

Zostało więc udowodnione ponizsze twierdzenie.

TWIERDZENIE 60
Jeżeli para (A, b) jest osiągalna, to istnieje macierz niesobliwka P_1 postaci (4.404), która przekształca tą parę wg zależności (4.403) w postać kanoniczną sterowalną (4.401).

Z powyższych rozważań wynika następująca procedura wyznaczania pary (4.401) oraz macierzy P_1 dla dowolnej pary osiągalnej (A, b) .

PROCEDURA 15

Wyznaczanie postaci kanonicznej sterowalnej pary (A, b) .

Krok 1. Wyznaczamy współczynniki a_0, a_1, \dots, a_{n-1} wielomianu charakterystycznego macierzy A .

$$\det[\mathbb{I}_n s - A] = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 \quad (4.406)$$

Krok 2. Znając współczynniki a_0, a_1, \dots, a_{n-1} , wyznaczamy poszukiwaną parę (4.401).

Krok 3. Korzystając ze wzoru (4.404), wyznaczamy poszukiwaną macierz P_1 .

PRZYKŁAD 114

Wyznaczmy macierz P_1 przekształcającą parę

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 21 & -21 & -19 \\ 20 & -18 & -18 \\ 15 & -13 & -15 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.407)$$

w postać kanoniczną sterowalną (sterowalna), gdyż macierz osiągalności

Para (4.407) jest osiągalna (sterowalna), gdyż macierz osiągalności

$$[b, Ab, A^2b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.408)$$

jest nieosobliwa. Korzystając z procedury 15, otrzymamy kolejno

$$\begin{aligned} \text{Krok 1. Wielomian charakterystyczny ma postać} \\ \det[\mathbb{I}_n s - A] &= \det[\mathbb{I}_n s - \bar{A}_1] = \begin{vmatrix} s - \frac{21}{2} & 21 & \frac{19}{2} \\ -10 & s + 9 & 9 \\ -15 & \frac{13}{2} & s + \frac{15}{2} \end{vmatrix} = s^3 + 6s^2 + 12s + 8 \\ &\quad (4.409) \end{aligned}$$

Krok 2. Poszukiwana para (4.401) ma więc postać

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}, \quad \bar{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.410)$$

Krok 3. Korzystając ze wzoru (4.404) oraz (4.408), otrzymamy

$$P_1 = [b, Ab, A^2b]^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right]^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.411)$$

□

Z zależności (4.403) many

$$AP_1^{-1} = P_1^{-1} \bar{A} \quad \text{oraz} \quad b = P_1^{-1} \bar{b} \quad (4.412)$$

Niech \bar{P}_i będzie i -ta ($i = 1, \dots, n$) kolumną macierzy P_1^{-1} . Korzystając z (4.412) i (4.401), możemy napisać

PRZYKŁAD 115

Wyznaczmy macierz P_2 przekształcającą parę (4.407) w postać kanoniczną regulatorowa (4.415). W przykładzie 4.342 wykazaliśmy, że para (4.407) jest osiągalna, gdyż macierz (4.408) jest nieosobienna. Korzystając z procedury 16, otrzymamy kolejno

Krok 1. Wielomian charakterystyczny macierzy A pary (4.407) ma postać (4.409).

Krok 2. Poszukiwana para (4.415) ma więc postać

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{bmatrix}, \quad \bar{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.419)$$

Krok 3. Korzystając ze wzoru (4.417), otrzymany

$$\begin{aligned} P_2 &= [\bar{b}_2, \bar{A}_2 \bar{b}_2, \bar{A}_2^2 \bar{b}_2] [b_2, A_2 b_2, A_2^2 b_2]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 7 & -5 & -7 \\ -29 & 17 & 31 \end{bmatrix} \quad (4.420) \end{aligned}$$

□

Z zależności (4.416) mamy

$$AP_2^{-1} = P_2^{-1} \bar{A}_2 \quad \text{oraz} \quad b = P_2^{-1} \bar{b}_2 \quad (4.421)$$

Niech \hat{p}_i będzie i -ta ($i = 1, \dots, n$) kolumną macierzy P_2^{-1} . Korzystając z (4.421) i (4.415), możemy napisać

$$A[\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_n] = [\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_n] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix},$$

przy czym

$$M = [\bar{b}_2, \bar{A}_2 \bar{b}_2, \dots, \bar{A}_2^{n-1} \bar{b}_2] \quad (4.425)$$

Dowód. Z zależności (4.403) i (4.416) mamy

$$A = P_1^{-1} \bar{A}_1 P_1 = P_2^{-1} \bar{A}_2 P_2 \quad \text{oraz} \quad \bar{b}_2 = P_1^{-1} \bar{b}_1 = P_2^{-1} \bar{b}_2$$

Wobec tego

$$\bar{A}_2 = P_2 P_1^{-1} \bar{A}_1 P_1 P_2^{-1} = M \bar{A}_1 M^{-1} \quad \text{oraz} \quad \bar{b}_2 = P_2 P_1^{-1} \bar{b}_1 = M \bar{b}_1 \quad (4.426)$$

przy czym

$$M = P_2 P_1^{-1} \quad (4.426)$$

Podstawiając zależności (4.417) i (4.404) do równania (4.426), otrzymamy

$$\begin{aligned} M &= [\bar{b}_2, \bar{A}_2 \bar{b}_2, \dots, \bar{A}_2^{n-1} \bar{b}_2] [b, Ab, \dots, A^{n-1} b]^{-1} [b, Ab, \dots, A^{n-1} b] = \\ &= [\bar{b}_2, \bar{A}_2 \bar{b}_2, \dots, \bar{A}_2^{n-1} \bar{b}_2] \end{aligned} \quad (4.425)$$

Wykonując mnożenie i porównując odpowiednie kolumny z (4.422), otrzymamy

many

$$\hat{p}_n = b, \quad \hat{p}_{n-1} = \hat{p}_n a_{n-1} + A \hat{p}_n,$$

$$\hat{p}_{n-2} = \hat{p}_n a_{n-2} + A \hat{p}_{n-1}, \dots, \hat{p}_1 = \hat{p}_n a_1 + A \hat{p}_2$$

$$(4.423)$$

4. Własności układów

Na przykład dla pary (4.407) (patrz przykład 114) otrzymamy

$$\bar{p}_3 = b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{p}_2 = \hat{p}_3 a_2 + A \hat{p}_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad \hat{p}_1 = \hat{p}_3 a_1 + A \hat{p}_2 = \begin{bmatrix} -14 \\ -5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

oraz

$$P_2^{-1} = [\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3] = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -14 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & -6 & -7 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -37 & 49 & 39 \\ -5 & 7 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Wynik ten jest zgodny z wynikiem otrzymanym w przykładzie 115. Widać również, że wyznaczanie P_2^{-1} i P_2 na podstawie zależności (4.423) jest obliczeniowo prostsze niż ze wzoru (4.417).

TWIERDZENIE 62

Niech para (\bar{A}_1, \bar{b}_1) będzie w postaci kanonicznej sterownej, a para (\bar{A}_2, \bar{b}_2) w postaci kanonicznej regulatorowej pary (A, b) . Wtedy para te są związane zależnościami

$$\bar{A}_2 = M \bar{A}_1 M^{-1}, \quad \bar{b}_2 = M \bar{b}_1 \quad (4.424)$$

PRZYKŁAD 116

Dla pary (4.407) wyznaczmy macierz (4.425) oraz sprawdzmy, czy są spełnione zależności (4.424).

W przykładzie 114 wyznaczono parę (\bar{A}_1, \bar{b}_1) postaci (4.403), w przykładzie 115 parę (\bar{A}_2, \bar{b}_2) postaci (4.419). Korzystając z (4.425) i (4.419), otrzymamy

$$\mathbf{M} = [\bar{b}_2, \bar{A}_2 \bar{b}_2, \bar{A}_2^2 \bar{b}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 24 \end{bmatrix} \quad (4.427)$$

Latwo sprawdzić, że

$$\begin{aligned} \bar{A}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{bmatrix} = M \bar{A}_1 M^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 24 \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned} \quad (4.427)$$

Macierz (4.427) spełnia więc zależności (4.424). \square

Analogicznie jak twierdzenia 60 i 61 można udowodnić kolejne dwa: 63 i 64.

TWIERDZENIE 63

Jeżeli para (\bar{A}, \bar{b}) jest osiągalna, to istnieje macierz nieosobliwa P_3 postaci

$$P_3 = [\bar{b}_3, \bar{A}_3 \bar{b}_3, \dots, \bar{A}_3^{n-1} \bar{b}_3] [\bar{b}, \bar{Ab}, \dots, \bar{A}^{n-1} \bar{b}]^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{b}_3, \bar{Ab}, \dots, \bar{A}^{n-1} \bar{b} \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.428)$$

która przekształca tę parę w postać kanoniczną

$$\begin{aligned} \bar{A}_3 &= P_3 A P_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix}, \\ \bar{b}_3 &= P_3 b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.429)$$

przy czym a_0, a_1, \dots, a_{n-1} są współczynnikami wielomianu charakterystycznego (4.406) macierzy A .

Kolumny p_1, p_2, \dots, p_n macierzy P_4 można wyznaczyć kolejno z zależności

$$\begin{aligned} p_1 &= \bar{b}, & p_2 &= a_{n-1} p_1 + Ap_1, \\ p_3 &= a_{n-2} p_1 + Ap_2, & \dots, p_n &= a_1 p_1 + Ap_{n-1} \end{aligned} \quad (4.433)$$

4.4.4. Postacie kanoniczne macierzy układów o jednym wyjściu

Weźmy pod uwagę dyskretny lub ciągły układ liniowy o jednym wyjściu ($p = 1$) opisany równaniami stanu, którego macierze \bar{A}_1, \bar{c}_1 mają postacie

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, & \bar{c}_1 &= [1 \ 0 \ \cdots \ 0] \end{aligned} \quad (4.434)$$

Kolumny $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n$ macierzy P_3 można wyznaczyć kolejno z zależności

$$\begin{aligned} \tilde{p}_n &= b, & \tilde{p}_{n-1} &= A \tilde{p}_n, & \tilde{p}_{n-2} &= A \tilde{p}_{n-1}, \dots, \tilde{p}_1 &= A \tilde{p}_2 \end{aligned} \quad (4.430)$$

DEFINICJA 120 Macierze (4.434) nazywamy macierzami w postaci kanonicznej obserwowej lub równoważnie w pierwszej postaci kanonicznej Brunowskiego-Luenbergera (PPKB-L).

Para macierzy (4.434) jest obserwowała, gdyż

$$\begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_1 \hat{A}_1 \\ \vdots \\ \hat{c}_1 \hat{A}_1^{n-1} \end{bmatrix} = \mathbb{I}_n$$

Wykażemy, że jeżeli dowolna para macierzy (A, c) jest obserwowała, to istnieje macierz nieosobliwa $Q_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ taka, że

$$Q_1^{-1} A Q_1 = \hat{A}_1, \quad c Q_1 = \hat{c}_1 \quad (4.436)$$

przy czym para (\hat{A}_1, \hat{c}_1) ma postać (4.434). Korzystając z zależności (4.436), łatwo sprawdzić, że $\hat{A}_1^k = Q_1^{-1} A^k Q_1$, $k = 1, \dots, n-1$, oraz

$$\hat{c}_1 \hat{A}_1 = (cA) Q_1, \quad \hat{c}_1 \hat{A}_1^2 = (cA)^2 Q_1, \dots, \hat{c}_1 \hat{A}_1^{n-1} = (cA)^{n-1} Q_1$$

Wobec tego

$$\begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_1 \hat{A}_1 \\ \vdots \\ \hat{c}_1 \hat{A}_1^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} Q_1$$

oraz

$$Q_1 = \begin{bmatrix} c & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ cA & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \cdots & s & -1 \\ cA^{n-1} & 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & s + a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.437)$$

gdyż spełniona jest zależność (4.435), a z założenia, że para (A, c) jest obserwowała wynika, że macierz obserwowałości

$$H = \begin{bmatrix} c & s \\ cA & a_0 \\ \vdots & a_1 \\ cA_1^{n-1} & a_2 \end{bmatrix} = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0 \quad (4.438)$$

jest nieosobliwa. Ponieważ macierze podobne mają równe wielomiany charakterystyczne, rozwijając więc wyznacznik według n -tego wiersza, otrzymamy

$$\det[\mathbb{I}_n s - A] = \det[\mathbb{I}_n s - \hat{A}_1] = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s & -1 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & s + a_{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0 \quad (4.439)$$

$$Z \text{ zależności } (4.436) \text{ otrzymamy} \quad (4.440)$$

$$Q_1^{-1} A = \hat{A}_1 Q_1^{-1} \quad \text{oraz} \quad c = \hat{c}_1 Q_1^{-1}$$

Niech q_i będzie i -tym ($i = 1, \dots, n$) wierszem macierzy Q_1^{-1} . Korzystając z zależności (4.440) i (4.434), możemy napisać

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \quad \text{oraz}$$

$$c = [1 \ 0 \ \cdots \ 0] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \quad (4.441)$$

Wykonując mnożenie i porównując odpowiednie wiersze z (4.411), otrzymamy

$$q_1 = c, \quad q_2 = q_1 A, \quad q_3 = q_2 A, \dots, q_n = q_{n-1} A \quad (4.442)$$

Korzystając z zależności (4.442), możemy wyznaczyć kolejno wiersze macierzy Q_1^{-1} i następnie Q_1 . Zostało więc udowodnione następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 65

Jeżeli para (A, c) jest obserwowała, to istnieje macierz nieosobliwa Q_1 postaci (4.437), która przekształca tę parę w zależności (4.436) w postać kanoniczną obserwowałą (4.434).

Wiersze macierzy Q_1^{-1} można wyznaczyć kolejno, korzystając z zależności (4.442). Z powyższych rozważań wynika następująca procedura wyznaczania pary (4.434) oraz macierzy Q_1 dla dowolnej pary obserwowałyj (A, c):

PROCEDURA 17

Krok 1. Wyznaczamy współczynniki a_0, \dots, a_{n-1} wielomianu charakterystycznego (4.406) macierzy \mathbf{A} .

Krok 2. Znajając współczynniki a_0, a_1, \dots, a_{n-1} , wyznaczamy poszukiwaną parę (4.434).

Krok 3. Korzystając ze wzoru (4.437) lub z zależności (4.442), wyznaczamy macierz \mathbf{Q}_1^{-1} oraz \mathbf{Q}_1 .

PRZYKŁAD 117

Wyznaczamy macierz \mathbf{Q}_1 przekształcającą parę

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [0 \ 1 \ 0] \quad (4.443)$$

w postać kanoniczną obserwowlaną (4.434).

Para macierzy (4.443) jest obserwowlana, gdyż macierz obserwowlaności

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}\mathbf{A} \\ \mathbf{c}\mathbf{A}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

jest nieosobliwa ($\det \mathbf{H} = -8$). Korzystając z procedury 17, otrzymamy kolejno.

Krok 1. Wielomian charakterystyczny ma postać

$$\det [\mathbb{I}_n s - \mathbf{A}] = \begin{vmatrix} s & 2 & -5 \\ -1 & s - 3 & -1 \\ 0 & 0 & s - 3 \end{vmatrix} = s^3 - 6s^2 + 11s - 6 \quad (4.444)$$

Krok 2. Poszukiwana para macierz (4.434) ma więc postać

$$\hat{\mathbf{A}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{c}}_1 = [1 \ 0 \ 0] \quad (4.445)$$

Krok 3. Korzystając z zależności (4.442), otrzymamy

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{c} = [0 \ 1 \ 0], \quad \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_1 \mathbf{A} = [1 \ 3 \ 1], \quad \mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_2 \mathbf{A} = [3 \ 7 \ 11]$$

Wobec tego

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 11 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{Q}_1 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -26 & 11 & -1 \\ 8 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.446)$$

□

Weźmy z kolei pod uwagę dyskretny lub ciągły układ liniowy o jednym wyjściu ($p = 1$) opisany równaniami stanu, którego macierze \mathbf{A}_2 i \mathbf{c}_2 mają

postacie

$$\hat{\mathbf{A}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{c}}_2 = [0 \ \cdots \ 0 \ 1] \quad (4.447)$$

DEFINICJA 121

Macierze (4.447) nazywamy macierzami w postaci kanonicznej obserwatorowej lub równoważne w drugiej postaci kanonicznej Brunovskiego-Luenbergera (DPKB-L).

Para (4.447) jest obserwowlana, gdyż macierz obserwowlaności

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{c}}_2 \\ \hat{\mathbf{c}}_2 \hat{\mathbf{A}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{c}}_2 \hat{\mathbf{A}}_2^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & \star \\ 1 & a_{n-1} & \cdots & \star \end{bmatrix} \quad (4.448)$$

(\star oznacza element nieistotny w tych rozważaniach) jest nieosobliwa. Wykażemy, że jeżeli dowolna para macierzy (\mathbf{A}, \mathbf{c}) jest obserwowlana, to istnieje macierz nieosobliwa $\mathbf{Q}_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ taka, że

$$\mathbf{Q}_2^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}_2 = \hat{\mathbf{A}}_2, \quad \mathbf{c} \mathbf{Q}_2 = \hat{\mathbf{c}}_2 \quad (4.449)$$

Przy czym para $(\hat{\mathbf{A}}_2, \hat{\mathbf{c}}_2)$ ma postać (4.447). W analogiczny sposób jak dla pary (4.436) można wykazać, że

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}\mathbf{A}_1^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{c}}_2 \\ \hat{\mathbf{c}}_2 \hat{\mathbf{A}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{c}}_2 \hat{\mathbf{A}}_2^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.450)$$

Ponieważ macierze podobne mają równe wielomiany charakterystyczne, powiązając więc wyznacznik według n -tej kolumny, otrzymamy

$$\det [\mathbb{I}_n s - \mathbf{A}] = \det [\mathbb{I}_n s - \hat{\mathbf{A}}_2] = \begin{vmatrix} s & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & s & \cdots & 0 & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & s & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & s + a_{n-1} \end{vmatrix} = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \quad (4.451)$$

4. Własności układów

4.4. Postacie kanoniczne

Z równań (4.449) many

$$\mathbf{Q}_2^{-1}\mathbf{A} = \hat{\mathbf{A}}_2\mathbf{Q}_2^{-1} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{c} = \hat{\mathbf{c}}_2\mathbf{Q}_2^{-1} \quad (4.452)$$

Niech \mathbf{q}_i będzie i -tym ($i = 1, \dots, n$) wierszem macierzy \mathbf{Q}_2^{-1} . Korzystając z zależności (4.452) i (4.447), możemy napisać

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_1 \\ \bar{\mathbf{q}}_2 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{q}}_n \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_1 \\ \bar{\mathbf{q}}_2 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{q}}_n \end{bmatrix} \quad \text{oraz}$$

$$\mathbf{c} = [0 \ \cdots \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_1 \\ \bar{\mathbf{q}}_2 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{q}}_n \end{bmatrix} \quad (4.453)$$

Wykonując mnożenie i porównując odpowiednie wiersze z zależności (4.453), otrzymamy

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{q}}_n &= \mathbf{c}, & \bar{\mathbf{q}}_{n-1} &= a_{n-1}\bar{\mathbf{q}}_n + \bar{\mathbf{q}}_n\mathbf{A}, \\ \bar{\mathbf{q}}_{n-2} &= a_{n-2}\bar{\mathbf{q}}_n + \bar{\mathbf{q}}_{n-1}\mathbf{A}, & \dots, \bar{\mathbf{q}}_1 &= a_1\bar{\mathbf{q}}_n + \bar{\mathbf{q}}_2\mathbf{A} \end{aligned} \quad (4.454)$$

Korzystając z zależności (4.454), możemy wyznaczyć kolejno wiersze macierzy \mathbf{Q}_2^{-1} i następnie \mathbf{Q}_2 . Zostało więc udowodnione następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 66

Jedna para (\mathbf{A}, \mathbf{c}) jest obserwowała, to istnieje macierz nicosobliwa \mathbf{Q}_2^{-1} postaci (4.450), która przekształca tę parę wg zależności (4.449) w postać kanoniczną obserwowlaną (4.447).

Wiersze macierzy \mathbf{Q}_2^{-1} można wyznaczyć kolejno, korzystając z zależności (4.454). Z powyższych rozważań wynika następująca procedura wyznaczania pary macierzy (4.447) oraz macierzy \mathbf{Q}_2 dla dowolnej pary obserwowej (\mathbf{A}, \mathbf{c}) :

PROCEDURA 18

Krok 1. Wyznaczamy współczynniki a_0, \dots, a_{n-1} wielomianu charakterystycznego (4.406) macierzy \mathbf{A} .

Krok 2. Znając współczynniki a_0, a_1, \dots, a_{n-1} , wyznaczamy poszukiwaną parę (4.447).

Krok 3. Korzystając ze wzoru (4.450) lub z zależności (4.454), wyznaczamy macierz \mathbf{Q}_2^{-1} oraz \mathbf{Q}_2 .

PRZYKŁAD 118

Wyznaczmy macierz \mathbf{Q}_2 przekształcającą parę (4.443) w postać kanoniczną obserwatorową (4.447).

W przykładzie 117 wykazałismy, że para (4.443) jest obserwowała. Korzystając z procedury 18, otrzymujemy kolejno:

Krok 1. Wielomian charakterystyczny ma postać (4.444).

Krok 2. Poszukiwana para (4.447) ma więc postać

$$\hat{\mathbf{A}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{c}}_2 = [0 \ 0 \ 1] \quad (4.455)$$

Krok 3. Korzystając z zależności (4.454), otrzymamy

$$\bar{\mathbf{q}}_3 = \mathbf{c} = [0 \ 1 \ 0], \quad \bar{\mathbf{q}}_2 = a_2\bar{\mathbf{q}}_3 + \bar{\mathbf{q}}_3\mathbf{A} = [1 \ -3 \ 1], \quad \bar{\mathbf{q}}_1 = a_1\bar{\mathbf{q}}_3 + \bar{\mathbf{q}}_2\mathbf{A} = [-3 \ 0 \ 5]$$

Wobec tego

$$\mathbf{Q}_2^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_1 \\ \bar{\mathbf{q}}_2 \\ \bar{\mathbf{q}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{Q}_2 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \quad \square$$

Z porównania rozważań dla pary (\mathbf{A}, \mathbf{b}) układu o jednym wejściu i rowiązań dla pary (\mathbf{A}, \mathbf{c}) układu o jednym wejściu oraz twierdzeń 25 i 34 wynika, że jeśli w twierdzeniach 60 i 61 zamiast pary (\mathbf{A}, \mathbf{b}) przyjmijemy parę dualną $(\mathbf{A}^T, \mathbf{c}^T)$, to z twierdzeń tych otrzymany odpowiednio twierdzenia 65 i 66. Analogicznie, zastępując w twierdzeniach 63 i 64 pary (\mathbf{A}, \mathbf{b}) parami dualnymi $(\mathbf{A}^T, \mathbf{c}^T)$, otrzymamy dławne twierdzenia dla układu o jednym wejściu.

4.4.5. Postacie kanoniczne macierzy układów o wielu wejściach

Dana jest para (\mathbf{A}, \mathbf{B}) , $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, układu dyskretnego lub ciągłego o m ($m > 1$) wejściach. Zakładamy, że para ta jest osiągalna, czyli

$$\text{rząd } [\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = n \quad (4.456)$$

oraz

$$\text{rząd } \mathbf{B} = m. \quad (4.457)$$

Niech \mathbf{B}_i będzie i -ta ($i = 1, \dots, m$) kolumną macierzy \mathbf{B} . Z założenia (4.456) wynika, że ciąg kolumn

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_m, \mathbf{AB}_1, \mathbf{AB}_2, \dots, \mathbf{AB}_m, \\ \mathbf{A}^2\mathbf{B}_1, \mathbf{A}^2\mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}_m \end{aligned} \quad (4.458)$$

4. Własności układów

348

$$\begin{aligned} AP_1 &= \left[AB_1, A^2B_1, \dots, A^{d_1}B_1, AB_2, A^2B_2, \dots \right. \\ &\quad \dots, A^{d_2}B_2, AB_3, A^2B_3, \dots, A^{d_m}B_m \Big] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left[p_2, p_3, \dots, p_{d_1}, A^{d_1}B_1, p_{d_1+2}, p_{d_1+3}, \dots \right. \\ &\quad \dots, p_{d_1+d_2}, A^{d_2}B_2, p_{d_1+d_2+2}, \dots, p_n, A^{d_m}B_m \Big] \quad (4.464) \end{aligned}$$

Zesposobu wyboru kolumn liniowo niezależnych (rys. 4.42) wynika, że kolumna $A^{d_i}B_i$ ($i = 1, \dots, m$) jest kombinacją liniową kolumn liniowo niezależnych poprzedzających ją w ciągu (4.458), czyli

$$A^{d_i}B_i = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{d_{k+1}-1} -a_j^{k+1, j} p_{d_1+\dots+d_k+j+1} \quad i = 1, \dots, n \quad (4.465)$$

Niech \bar{p}_i będzie i -tym ($i = 1, \dots, n$) wierszem macierzy P_1^{-1} . Z zależności

$$P_1^{-1}P_1 = I_n \text{ many} \quad (4.466)$$

$$\bar{p}_i p_j = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

Podstawiając zależność (4.465) dla $i = 1, \dots, n$ do (4.464) i uwzględniając (4.466), otrzymamy

$$\bar{A} \equiv P_1^{-1}AP_1 = \begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \vdots \\ \bar{p}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2, p_3, \dots, p_{d_1}, \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{d_{k+1}-1} -a_j^{k+1, j} p_{d_1+\dots+d_k+j+1}, \\ \vdots \\ \bar{p}_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} p_{d_1+2}, p_{d_1+3}, \dots, p_{d_1+d_2}, \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{d_{k+1}-1} -a_j^{k+1, j} p_{d_1+\dots+d_k+j+1}, \\ p_{d_1+d_2+2}, \dots, p_n, \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{d_{k+1}-1} -a_j^{k+1, j} p_{d_1+\dots+d_k+j+1} \Big] = \end{aligned} \quad (4.467)$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \dots & \bar{A}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{A}_{m1} & \dots & \bar{A}_{mm} \end{bmatrix}$$

oraz

$$P_1^{-1}B = \begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \vdots \\ \bar{p}_n \end{bmatrix} [p_1, p_{d_1+1}, \dots, p_{d_1+\dots+d_{m-1}+1}] = \text{diag} [\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_m]$$

gdzie \bar{A}_{ij} i \bar{b}_i , $i, j = 1, \dots, m$ są określone macierzami (4.463). Zostało więc udowodnione następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 67

Jeżeli para (A, B) jest osiągalna, to istnieje macierz niesobliwa P_1 postaci (4.461) taka, że macierze

$$\bar{A} = P_1^{-1}AP_1, \quad \bar{B} = P_1^{-1}B \quad (4.468)$$

mają postać kanoniczną sterowalną (4.463).

Z powyższych rozważań wynika następująca procedura wyznaczania macierzy P_1 oraz postaci kanonicznej (4.463) dowolnej pary osiągalnej (A, B) .

PROCEDURA 19

Wyznaczamy macierz P_1 oraz parę (\bar{A}, \bar{B}) dla macierzy

Krok 1. Stosując wybór kolumn liniowo niezależnych wg wierszy ciągu (4.453), wyznaczamy macierz P_1 postaci (4.461).

Krok 2. Obliczamy macierz odwrotną P_1^{-1} .

Krok 3. Korzystając z zależności (4.468), wyznaczamy poszukiwaną parę (\bar{A}, \bar{B}) .

PRZYKŁAD 119

Wyznaczmy macierz P_1 oraz parę (\bar{A}, \bar{B}) dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.469)$$

Łatwo sprawdzić, że para (4.469) jest osiągalna. Korzystając z procedury 19, otrzymamy kolejno:

Krok 1. Wyznaczamy ciąg (4.458) dla pary (4.469), który ma postać

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array} \quad (4.470)$$

Łatwo zauważyć, że kolumny $B_1, B_2, AB_1, AB_2, A^2B_1, A^2B_2, \dots$ (4.461) utworzone z tych kolumn ma więc postać

$$P_1 = [B_1, B_2, AB_1, AB_2, A^2B_1, A^2B_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad (4.471)$$

W tym przypadku $d_1 = 1, d_2 = 3$.

Krok 2. Obliczamy macierz odwrotną macierzy (4.471)

$$\mathbf{P}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.472)$$

Krok 3. Korzystając z zależności (4.468), otrzymamy

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}_1 = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.473)$$

oraz

$$\bar{\mathbf{B}} = \text{diag}[\bar{\mathbf{b}}_1, \bar{\mathbf{b}}_2] = \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

□

Z dowodu twierdzenia 67 (zależności (4.467)) wynika, że kolumny o numerach $d_1, d_1 + d_2, \dots, d_1 + d_2 + \dots + d_m = n$ zawierają współczynniki kombinacji liniowych (4.467), które wyrażają kolumny $\mathbf{A}^{d_i} \mathbf{B}_i$ ($i = 1, \dots, m$) za pomocą kolumn liniowo niezależnych ciągu (4.458). Badając liniową niezależność kolumn ciągu (4.458), możemy wyznaczyć te współczynniki. Z zależności (4.468) mamy

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}_1 \bar{\mathbf{B}}, \quad \mathbf{A} \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_1 \bar{\mathbf{A}}$$

czyli

$$[\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_m] = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n] \text{diag}[\bar{\mathbf{b}}_1, \bar{\mathbf{b}}_2, \dots, \bar{\mathbf{b}}_m] \quad (4.474)$$

oraz

$$\mathbf{A}[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n] = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \cdots & \bar{\mathbf{A}}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{A}}_{m1} & \cdots & \bar{\mathbf{A}}_{mm} \end{bmatrix} \quad (4.475)$$

Wykonując mnożenie i porównując odpowiednie kolumny z (4.474), (4.475), po uwzględnieniu (4.463), otrzymamy

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{B}_1, & \mathbf{p}_{d_1+1} &= \mathbf{B}_2, & \mathbf{p}_{d_1+d_2+1} &= \mathbf{B}_3, & \dots, & \mathbf{p}_{d_1+\dots+d_{m-1}+1} &= \mathbf{B}_m \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{A} \mathbf{p}_1, & \mathbf{p}_3 &= \mathbf{A} \mathbf{p}_2, & \dots, & \mathbf{p}_{d_1} &= \mathbf{A} \mathbf{p}_{d_1-1}, & \mathbf{p}_{d_1+2} &= \mathbf{A} \mathbf{p}_{d_1+1} \\ \mathbf{p}_{d_1+3} &= \mathbf{A} \mathbf{p}_{d_1+2}, & \dots, & \mathbf{p}_n &= \mathbf{A} \mathbf{p}_{n-1} \end{aligned} \quad (4.476)$$

Znając współczynnik a_k^{ij} kombinacji liniowych (4.465) i korzystając z zależności (4.476), możemy kolejno wyznaczyć kolumny $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ macierzy \mathbf{P}_1^1 .

Z powyższych rozważań wynika następująca procedura wyznaczania macierzy \mathbf{P}_1 oraz pary $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}})$ dla dowolnej osiągalnej pary (\mathbf{A}, \mathbf{B}) :

PROCEDURA 20

Krok 1. Badając liniową niezależność kolumn ciągu (4.458), wyznaczamy współczynniki kombinacji liniowych (4.465) (kolumny $d_1, d_1 + d_2, \dots, n$ macierzy $\bar{\mathbf{A}})$.

Krok 2. Znając te współczynniki, wyznaczamy poszukiwaną parę $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}})$.

Krok 3. Korzystając z zależności (4.476), wyznaczamy kolejne kolumny macierzy \mathbf{P}_1 .

PRZYKŁAD 120

Korzystając z procedury 20, wyznaczmy macierz \mathbf{P}_1 oraz parę $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}})$ dla macierzy (4.469).

Korzystając z tej procedury, otrzymamy kolejno:

Krok 1. Ciąg kolumn (4.458) dla pary (4.469) ma postać (4.470). Kolumna $\mathbf{A}^{d_i} \mathbf{B}_i$ dla $i = 1$ daje się wyrazić za pomocą tylko kolumny \mathbf{B}_2 , czyli $\mathbf{A} \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$

Krok 2. Korzystając z procedury 20, wyznaczmy macierz $\bar{\mathbf{A}}$ dla $i = 2$ otrzymamy

$$\bar{\mathbf{A}}^3 \mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 - 3 \mathbf{A} \mathbf{B}_2 + 4 \mathbf{A}^2 \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 13 \\ -30 \\ 41 \\ -9 \end{bmatrix} \quad (4.478)$$

Pierwsza i czwarta kolumna macierzy $\bar{\mathbf{A}}$ mają więc postacie

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (4.479)$$

Wobec tego poszukiwana para $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}})$ ma postać

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.479)$$

Krok 3. Korzystając z zależności (4.476) i (4.479), otrzymamy

$$\begin{aligned} p_1 = B_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_2 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_3 = Ap_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad p_4 = Ap_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -10 \\ 13 \\ -3 \end{bmatrix} \\ \text{oraz} \end{aligned}$$

$$P_1 = [p_1, p_2, p_3, p_4] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Otrzymane wyniki są zgodne z wynikami uzyskanymi w przykładzie 119.

Z porównania procedur 19 i 20 oraz przykładów 117 i 119 wynika, że wyznaczenie macierzy P_1 i pary (\bar{A} , \bar{B}) na podstawie procedury 20 jest obliczeniowo prostsze.

TWIERDZENIE 68

Jeżeli para (A , B) jest osiągalna, to istnieje macierz niesobliwa P_1 postaci (4.461), która przekształca tą parę w postać kanoniczną (4.463) z obiema macierzami blokowo diagonalnymi

$$\begin{aligned} \bar{A} &= P_1^{-1}AP_1 = \text{diag}[\bar{A}_{11}, \bar{A}_{22}, \dots, \bar{A}_{mm}] \quad (\bar{A}_{ij} = 0, i \neq j), \\ \bar{B} &= P_1^{-1}B = \text{diag}[\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_m] \end{aligned} \quad (4.480)$$

wtedy i, tylko wtedy, gdy

$$\text{przyd } [\bar{B}_i, \bar{A}\bar{B}_i, \dots, \bar{A}^k\bar{B}_i] = d_i \quad \text{dla } k \geq d_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.481)$$

Dowód. Kolumna $A^{d_i}B_i$ dla $i = 1, \dots, m$ jest liniowa kombinacja tylko liniowo niezależnych kolumn $B_i, AB_i, \dots, A^{d_i-1}B_i$ i jest niezależna od pozostałych kolumn macierzy (4.461) wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (4.481). W tym przypadku $A_{ij} = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, m$ i obie macierze \bar{A} i \bar{B} są blokowo diagonalne.

PRZYKŁAD 121

Wyznaczmy macierz P , która przekształca parę

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.482)$$

w postać kanonyczną (4.463).

Korzystając z procedury 20, otrzymamy kolejno:

Krok 1. Ciąg kolumn (4.458) ma w tym przypadku postać

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -4 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.483)$$

$B_1, B_2, AB_1, AB_2, A^2B_1, A^2B_2 =$

$$\begin{aligned} B_1, B_2, AB_1, AB_2, A^2B_1, A^2B_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{i łatwo sprawdzić, że kolumny } B_1, B_2, AB_1, A^2B_2 \text{ są liniowo niezależne, } d_1 &= d_2 = 2, \text{ oraz} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^2B_1 &= -B_1 - 2AB_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad A^2B_2 = -B_2 - AB_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (4.484) \\ \text{Druga i czwarta kolumna macierzy } \bar{A} \text{ mają więc postacie} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Warunek (4.481) jest spełniony, a więc macierze \bar{A} i \bar{B} są blokowo diagonalne.

Krok 2. Poszukiwana para (\bar{A} , \bar{B}) ma postać

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.485)$$

Krok 3. Korzystając z zależności (4.476), otrzymamy

$$\begin{aligned} p_1 = B_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_3 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_2 = Ap_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \\ p_4 = Ap_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Wobec tego

$$P_1 = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.486)$$

4. Własności układów

4.4. Postacie kanoniczne

UWAGA 123

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc} \hat{\mathbf{A}}_{11} & \cdots & \hat{\mathbf{A}}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\mathbf{A}}_{n1} & \cdots & \hat{\mathbf{A}}_{nm} \end{array} \right] \\ & = \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0^{ii} & -a_1^{ii} & -a_2^{ii} & \cdots & -a_{d_i-1}^{ii} \end{array} \right] \\ & = \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_0^{ij} & -a_1^{ij} & \cdots & -a_{d_j-1}^{ij} \end{array} \right], \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, m \quad (4.486) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{B}}_1 \\ & \hat{\mathbf{B}}_2 \\ & \vdots \\ & \hat{\mathbf{B}}_m \end{aligned}, \quad \hat{\mathbf{B}}_i = \left[\begin{array}{ccccc} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & b_{i1} & \cdots & b_{im-i} \end{array} \right]$$

Uwaga. Wzór (4.486) przedstawiający macierz w postaci kanonicznej regulatorowej lub równoważniczej uzupełniający macierz w postaci kanonicznej Branskańskiego-Luenberga.

Wzór (4.486) jest równoważny wzorowi (4.461). Korzystając z \mathbf{q}_i , definiujemy

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_m \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{Q}_i = \left[\begin{array}{c} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_i \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_i \mathbf{A}^{d_i-1} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{q}_{i1} \\ \mathbf{q}_{i2} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{id_i} \end{array} \right] \quad (4.487) \end{aligned}$$

Przyjmując \mathbf{q}_i zależności (4.461) i (4.487), można wykazać, że macierz \mathbf{Q} jest określonej wzorem (4.461). Korzystając z \mathbf{q}_i , definiujemy

$$\mathbf{Q} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{Q}_1 \mathbf{A} \\ \mathbf{Q}_2 \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_m \mathbf{A} \end{array} \right], \quad \mathbf{Q}_i \mathbf{A} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{q}_i \mathbf{A} \\ \mathbf{q}_i \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_i \mathbf{A}^{d_i} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{q}_{i1} \\ \mathbf{q}_{i2} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{id_i} \end{array} \right] \quad (4.488)$$

czyli

$$\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{q}_i \mathbf{A}^{d_i-1} \mathbf{B}_{j+1}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, m - i - 1 \quad (4.493)$$

Zostało więc udowodnione następujące twierdzenie:

Wiersz $\mathbf{q}_i \mathbf{A}^{d_i}$ jest kombinacją liniową wierszy macierzy \mathbf{Q} , czyli

$$\mathbf{q}_i \mathbf{A}^{d_i} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_i-1} -a_k^{ij} \mathbf{q}_{j,k+1} \quad \text{dla } i = 1, \dots, m \quad (4.489)$$

Z równości $\mathbf{Q} \mathbf{Q}^{-1} = \mathbb{I}_n$ otrzymamy

$$\mathbf{q}_{ij} \mathbf{q}_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = k \quad \text{oraz} \quad j = l \\ 0 & \text{dla } i \neq k \quad \text{lub} \quad j \neq l \end{cases} \quad (4.490)$$

Podstawiając równanie (4.489) do (4.488) oraz biorąc pod uwagę zależność (4.490), otrzymamy

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{Q}^{-1} \left[\begin{array}{c} \mathbf{Q}_1 \mathbf{A} \\ \mathbf{Q}_2 \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_m \mathbf{A} \end{array} \right] \\ & = \left[\begin{array}{cccc} \hat{\mathbf{A}}_{11} & \cdots & \hat{\mathbf{A}}_{1m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \hat{\mathbf{A}}_{m1} & \cdots & \hat{\mathbf{A}}_{mm} \end{array} \right] \end{aligned}$$

czyli $\hat{\mathbf{A}}_{ij}$ są określone zależnością (4.486). Z faktu, że \mathbf{q}_i jest i -tym wierszem macierzy \mathbf{P}^{-1} , a $\mathbf{A}^{d_i-1} \mathbf{B}_j$ odpowiednią kolumną macierzy \mathbf{P} wynika, że

$$\mathbf{q}_i \mathbf{A}^{d_i-1} \mathbf{B}_j = \begin{cases} 1 & \text{dla } j = i \\ 0 & \text{dla } j < i \end{cases} \quad (4.491)$$

Korzystając z zależności (4.487) i (4.491), otrzymamy

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{B}}_i = \mathbf{Q}_i \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_i \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_i \mathbf{A}^{d_i-1} \end{array} \right] [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_m] = \\ & = \left[\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_{i1} & \cdots & b_{im-i} \end{array} \right] \end{aligned}$$

czyli

$$(4.493)$$

4. Własności układów

DEFINICJA 123 Macierze

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_{11} & \cdots & \hat{\mathbf{A}}_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{\mathbf{A}}_{m1} & \cdots & \hat{\mathbf{A}}_{mm} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0^{ii} & -a_1^{ii} & -a_2^{ii} & \cdots & -a_{d_i-1}^{ii} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_0^{ij} & -a_1^{ij} & \cdots & -a_{d_j-1}^{ij} \end{bmatrix}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, m \quad (4.486)$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_1 \\ \hat{\mathbf{B}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{B}}_m \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}}_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & b_{i1} & \cdots & b_{im-i} \end{bmatrix}$$

Niech \mathbf{q}_i ($i = 1, \dots, n$) będzie i -tym wierszem macierzy \mathbf{P}_1^{-1} dla macierzy \mathbf{P}_1 -określonej wzorem (4.461). Korzystając z \mathbf{q}_i , definiujemy

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_i \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_i \mathbf{A}^{d_i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{i1} \\ \mathbf{q}_{i2} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{id_i} \end{bmatrix} \quad (4.487)$$

Korzystając z zależności (4.461) i (4.487), można wykazać, że macierz \mathbf{Q} jest nieosobliwa, ponieważ $\det \mathbf{Q} \mathbf{P} = 1$. Oznaczmy kolumny macierzy odwrotnej \mathbf{Q}^{-1} przez $\bar{\mathbf{q}}_{11}, \bar{\mathbf{q}}_{12}, \dots, \bar{\mathbf{q}}_{1d_1}, \bar{\mathbf{q}}_{21}, \bar{\mathbf{q}}_{22}, \dots, \bar{\mathbf{q}}_{2d_2}, \bar{\mathbf{q}}_{31}, \dots, \bar{\mathbf{q}}_{md_m}$. Biorąc pod uwagę zależności (4.487), możemy napisać:

$$\mathbf{Q} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \mathbf{A} \\ \mathbf{Q}_2 \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_m \mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_i \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i \mathbf{A} \\ \mathbf{q}_{i2} \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{id_i} \mathbf{A}^{d_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{i2} \\ \mathbf{q}_{i3} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{id_i} \\ \mathbf{q}_i \mathbf{A}^{d_i} \end{bmatrix} \quad (4.488)$$

4.4. Postacie kanoniczne

Wiersz $\mathbf{q}_i \mathbf{A}^{d_i}$ jest kombinacją liniową wierszy macierzy \mathbf{Q} , czyli

$$\mathbf{q}_i \mathbf{A}^{d_i} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_i-1} -a_k^{ij} \mathbf{q}_{j, k+1} \quad \text{dla } i = 1, \dots, m \quad (4.489)$$

Z równości $\mathbf{Q} \mathbf{Q}^{-1} = \mathbb{I}_n$ otrzymamy

$$\mathbf{q}_{ij} \bar{\mathbf{q}}_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = k \text{ oraz } j = l \\ 0 & \text{dla } i \neq k \text{ lub } j \neq l \end{cases} \quad (4.490)$$

Podstawiając równanie (4.489) do (4.488) oraz biorąc pod uwagę zależność (4.490), otrzymamy

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &= \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{Q}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \mathbf{A} \\ \mathbf{Q}_2 \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_m \mathbf{A} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_{11} & \cdots & \hat{\mathbf{A}}_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{\mathbf{A}}_{m1} & \cdots & \hat{\mathbf{A}}_{mm} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

przy czym $\hat{\mathbf{A}}_{ij}$ są określone zależnością (4.486). Z faktu, że \mathbf{q}_i jest i -tym wierszem macierzy \mathbf{P}^{-1} , a $\mathbf{A}^{d_i-1} \mathbf{B}_j$ odpowiednią kolumną macierzy \mathbf{P} wynika, że

$$\mathbf{q}_i \mathbf{A}^{d_i-1} \mathbf{B}_j = \begin{cases} 1 & \text{dla } j = i \\ 0 & \text{dla } j < i \end{cases} \quad (4.491)$$

Korzystając z zależności (4.487) i (4.491), otrzymamy

$$\hat{\mathbf{B}}_i = \mathbf{Q}_i \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_i \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_i \mathbf{A}^{d_i-1} \end{bmatrix} [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_m] =$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_i \mathbf{A}^{d_i-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & b_{i1} & \cdots & b_{im-i} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

przy czym

$$\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{q}_i \mathbf{A}^{d_i-1} \mathbf{B}_{j+1}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, m - i - 1 \quad (4.493)$$

Zostało więc udowodnione następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 69

Jeżeli para (A, B) jest osiągalna, to istnieje macierz niesobliwia Q postaci (4.487) taka, że macierze

$$(4.494) \quad \hat{A} = Q A Q^{-1}, \quad \hat{B} = Q B$$

mając postać kanoniczną regulatorową.

Z powyższych rozważań wynika następująca procedura wyznaczania macierzy Q oraz postaci kanonicznej (4.486) dla dowolnej pary osiągalnej (A, B) :

PROCEDURA 21

Krok 1. Stosując wybór kolumn liniowo niezależnych wg wierszy z ciągu (4.458), wyznaczamy macierz P postaci (4.461).

Krok 2. Obliczamy macierz odwrotną P^{-1} .

Krok 3. Znajac wiersze q_i ($i = d_1, d_1 + d_2, \dots, n$) macierzy P^{-1} , wyznaczamy macierz Q postaci (4.487) oraz jej macierz odwrotną Q^{-1} .

Krok 4. Korzystając z zależności (4.494), wyznaczamy poszukiwane macierze \hat{A} i \hat{B} .

PRZYKŁAD 122

Wyznaczmy macierz Q oraz parę (\hat{A}, \hat{B}) dla macierzy (4.469).

Korzystając z procedury 21 oraz wyników otrzymanych w przykładzie 119, postępujemy jak nizaj:

Krok 1. Macierz P ma postać (4.471), a $d_1 = 1$, $d_2 = 3$.

Krok 2. Macierz odwrotna P^{-1} ma postać (4.472). Wobec tego

$$q_1 = [1 \ 10 - 2], \quad q_4 = [1 \ 0 \ 0 \ 1] \quad (d_1 = 1, d_1 + d_2 = 4)$$

Krok 3. Macierz Q ma więc postać

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_4 \\ q_4 A \\ q_4 A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.495)$$

a jej macierz odwrotna

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.496)$$

Krok 4. Korzystając z zależności (4.494), otrzymamy

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} = Q A Q^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.497)$$

oraz

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} = Q B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.498)$$

□

Zauważmy, że wiersze o numerach $d_1, d_1 + d_2, \dots, n$ macierzy \hat{A} są równe odpowiednim transponowanym kolumnom o numerach $d_1, d_1 + d_2, \dots, n$ macierzy \tilde{A} . Znając współczynniki kombinacji liniowej (4.465), które wyrażają kolumny A^d, B_i za pomocą kolumn liniowo niezależnych ciągu (4.458), możemy wyznaczyć poszukiwaną macierz \hat{A} . Korzystając z zależności (4.493), możemy wyznaczyć niezerowe i różne od 1 elementy macierzy \hat{B} . Z zależności (4.494) mamy

$$Q^{-1} \hat{B} = B \quad \text{oraz} \quad Q^{-1} \hat{A} = A Q^{-1} \quad (4.499)$$

Korzystając z zależności (4.486) i (4.499), otrzymamy

$$\begin{aligned} [\bar{q}_{11}, \dots, \bar{q}_{1d_1}, \bar{q}_{21}, \dots, \bar{q}_{2d_2}, \bar{q}_{31}, \dots, \bar{q}_{md_n}] \times & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & b_{11} & \dots & b_{1i} & \dots & b_{1m-1} & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{2i} & \dots & b_{2m-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = [B_1 \ B_2 \ \dots \ B_m] \\ \times & \end{aligned} \quad (4.500)$$

oraz

$$[\bar{q}_{11}, \bar{q}_{12}, \dots, \bar{q}_{1d_1}, \bar{q}_{21}, \bar{q}_{22}, \dots, \bar{q}_{2d_2}, \bar{q}_{31}, \dots, \bar{q}_{md_m}] \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \dots & \hat{A}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{A}_{m1} & \dots & \hat{A}_{mm} \end{bmatrix} =$$

$$= \hat{\mathbf{A}} [\bar{q}_{11}, \bar{q}_{12}, \dots, \bar{q}_{1d_1}, \bar{q}_{21}, \bar{q}_{22}, \dots, \bar{q}_{2d_2}, \bar{q}_{31}, \dots, \bar{q}_{md_m}]$$

Wykonując mnożenie i porównując odpowiednie kolumny z zależności (4.500), otrzymamy

$$\begin{aligned} \bar{q}_{1d_1} &= B_1, \bar{q}_{2d_2} = B_2 - b_{11}\bar{q}_{1d_1}, \dots, \bar{q}_{md_m} = B_m - b_{1m-1}\bar{q}_{1d_1} - \dots \\ &\dots - b_{m-1}, 1\bar{q}_{m-1}, d_{m-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{q}_{1d_1} &= A\bar{q}_{1d_1} + a_{d_1}^{11}\bar{q}_{1d_1} + a_{d_1}^{21}\bar{q}_{2d_2} + \dots + a_{d_1}^{m1}\bar{q}_{md_m} \\ \bar{q}_{1d_1-2} &= A\bar{q}_{1d_1-1} + a_{d_1-1}^{11}\bar{q}_{1d_1-1} + a_{d_1-1}^{21}\bar{q}_{2d_2} + \dots + a_{d_1-1}^{m1}\bar{q}_{md_m} \end{aligned} \quad (4.501)$$

$$\bar{q}_{md_m-1} = A\bar{q}_{md_m} + a_{d_m}^{1m}\bar{q}_{1d_1} + a_{d_m}^{2m}\bar{q}_{2d_2} + \dots + a_{d_m}^{m-1,m}\bar{q}_{md_m}$$

Znając elementy macierzy $\hat{\mathbf{A}}$ i $\hat{\mathbf{B}}$ oraz korzystając z zależności (4.501), możemy kolejno wyznaczyć kolumny macierzy \mathbf{Q}^{-1} , a następnie \mathbf{Q} . Z powyższych rozważań wynika następująca procedura wyznaczania macierzy \mathbf{Q} oraz pary ($\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$) dla dowolnej osiągalnej pary macierzy (\mathbf{A} , \mathbf{B}):

PROCEDURA 22

Krok 1. Badając liniową niezależność kolumn ciągu (4.458), wyznaczamy wspólny czynnik kombinacji liniowych (4.465) oraz korzystając z (4.493), wyznaczamy niezerowe elementy b_{ij} macierzy $\hat{\mathbf{B}}$.

Krok 2. Znając te współczynniki, wyznaczamy poszukiwaną parę ($\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$).

Krok 3. Korzystając z zależności (4.501), wyznaczamy kolejne kolumny macierzy \mathbf{Q}^{-1} , następnie \mathbf{Q} .

PRZYKŁAD 123

Korzystając z procedury 22 wyznaczmy macierz \mathbf{Q} oraz parę ($\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$) dla macierzy (4.469).

Korzystając z tej procedury, otrzymamy kolejno:

Krok 1. Ciąg kolumn (4.458) dla pary (4.469) ma postać (4.470). Poszukiwane elementy pierwszego i czwartego wiersza macierzy $\hat{\mathbf{A}}$ wynikają z zależności (4.477), (4.478) i są równe [0 1 0 0], [1 1 - 3 4]. Korzystając z zależności (4.493), otrzymamy

$$\begin{aligned} b_{11} &= q_1 A^{d_1-1} B_2 = q_1 B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \\ \text{rząd} & \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \end{aligned}$$

Krok 2. Poszukiwana para ($\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$) ma więc postać

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Krok 3. Korzystając z zależności (4.501), otrzymamy

$$\begin{aligned} \bar{q}_{11} &= B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{q}_{23} = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \bar{q}_{22} &= A\bar{q}_{23} - 4\bar{q}_{23} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{q}_{21} = A\bar{q}_{22} + 3\bar{q}_{23} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{-1} &= [\bar{q}_{11}, \bar{q}_{21}, \bar{q}_{22}, \bar{q}_{23}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Wynik ten jest zgodny z wynikiem otrzymanym w przykładzie 122. \square

Z porównania procedury 21 i 22 oraz z przykładów 122 i 123 wynika, że wyznaczenie macierzy \mathbf{Q} oraz pary ($\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$) na podstawie procedury 22 jest obliczeniowo prostsze.

4.4.6. Postacie kanoniczne macierzy układów o wielu wyjściach

Weźmy pod uwagę parę (\mathbf{A} , \mathbf{C}), $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$, układu dyskretnego lub ciągłego o p ($p > 1$) wyjściach. Zakładamy, że para ta jest obserwowalna, czyli

$$\begin{aligned} \text{rząd} & \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} = n \end{aligned} \quad (4.502)$$

oraz

$$\operatorname{rzpd} C = p$$

Niech C_i będzie i -tym ($i = 1, \dots, p$) wierszem macierzy C . Z założenia (4.502) wynika, że ciąg wierszy

$$C_1, C_2, \dots, C_p, C_1A, C_2A, \dots, C_pA, C_1A^2, C_2A^2, \dots, C_pA^2, C_1A^3, \dots, C_pA^{n-1} \quad (4.504)$$

zawiera dokładnie n liniowo niezależnych wierszy, a z założenia (4.503), że wszystkie wiersze macierzy C są liniowo niezależne. Przy wyborze wierszy liniowo niezależnych jest wygodnie korzystać z nizej podanej tablicy – diagramu (rys. 4.43).

A^0	A^1	A^2	A^3	\dots	A^{n-1}	
x	x	x	0	...		C_1
x	x	0		...		C_2
x	x	x	0	...		C_3
:	:	:	:	...		\vdots
x	x	0		...		C_p

Rys. 4.43. Tablica-diagram do wyznaczania wierszy liniowo niezależnych

W komórce odpowiadającej kolejnym wierszom C_1, C_2, \dots, C_p macierzy C , a kolumny kolejnym potęgom $A^0, A^1, A^2, \dots, A^{n-1}$ macierzy A (rys. 4.43) leży w i -tym wierszu oraz w j -tej kolumnie tablicy. Wyboru n liniowo niezależnych wierszy ciągu (4.504) można dokonać, badając liniową niezależność elementów tej tablicy wg wierszy lub kolumn. Badanie liniowej niezależności wg wierszy przeprowadzamy następująco. Z założenia wiersze macierzy C są liniowo niezależne. Zaznaczamy ten fakt, umieszczając znak \times we wszystkich komórkach pierwszej kolumny tablicy (rys. 4.43). Jeżeli wiersz C_1A jest liniowo niezależny od wierszy C_1, C_2, \dots, C_p , to umieszczały znak \times w komórce odpowiadającej C_1A i badany liniowo kolejność kolejno wierszy $C_2A, C_3A, \dots, aż$ znajdziemy wiersz, na przykład C_2A^2 , który jest liniowo zależny od wierszy

$$(4.503)$$

zawiera dokładnie i -tym ($i = 1, \dots, p$) wierszem macierzy C . Z założenia (4.503) wynika, że ciąg wierszy

$$C_1, C_2, \dots, C_p, C_1A, C_2A, \dots, C_pA, C_1A^2, \dots, C_pA^2, C_1A^3, \dots, C_pA^{n-1} \quad (4.504)$$

zawiera dokładnie n liniowo niezależnych wierszy, a z założenia (4.503), że wszystkie wiersze macierzy C są liniowo niezależne. Przy wyborze wierszy liniowo niezależnych jest wygodnie korzystać z nizej podanej tablicy – diagramu (rys. 4.43).

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{p-1} \\ C_1A^{h_1-1} \\ C_2A \\ \vdots \\ C_{p-1}A^{h_{p-1}-1} \\ C_pA^{h_p-1} \end{bmatrix} \quad (4.507)$$

przy czym h_1, h_2, \dots, h_p są indeksami obserwowalności (lub indeksami Kronneckera) pary (\mathbf{A}, \mathbf{C}) , spełniającymi warunek

$$\sum_{i=1}^p h_i = n. \quad (4.508)$$

Zauważmy, że:

- h_i jest równe liczbie znaków \times w i -tym wierszu tablicy (rys. 4.43).
- łączna liczba znaków \times w tablicy (rys. 4.43) jest równa n (wynika to z zależności (4.508)).

DEFINICJA 124

Macierz

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & \cdots & \tilde{\mathbf{A}}_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{\mathbf{A}}_{p1} & \cdots & \tilde{\mathbf{A}}_{pp} \end{bmatrix}$$

$$(4.505)$$

Wiersz C_2A^2 możemy wyrazić jako kombinację liniową wierszy (4.505).

$$\begin{aligned} C_2A^2 &= a_{10}C_1 + a_{20}C_2 + \dots + a_{p0}C_p + a_{11}C_1A + a_{21}C_2A + \dots \\ &\quad \dots + a_{p1}C_pA + a_{12}C_1A^2 \end{aligned} \quad (4.506)$$

$$\tilde{A}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0^{ii} & -a_1^{ii} & -a_2^{ii} & \cdots & -a_{h_i-1}^{ii} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{h_i \times h_i}$$

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_0^{ij} & -a_1^{ij} & \cdots & -a_{h_j-1}^{ij} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{h_i \times h_i}$$

$$\tilde{C} = \text{diag} [\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_p], \quad \tilde{c}_i = [1 \ 0 \ \cdots \ 0] \in \mathbb{R}^{h_i}$$

nazywamy macierzą w postaci kanonicznej obserwowalnej lub równo-

ważnie w pierwszej postaci kanonicznej Brunowskiego-Luenbergera.

Niech \mathbf{p}_i będzie i -tym wierszem macierzy P_2 . Korzystając z zależności (4.507), możemy napisać

$$\tilde{A} = P_2 A P_2^{-1} = \begin{bmatrix} p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_{h_1} \\ \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{h_{k+1}-1} -a_j^{k+1, j} p_{h_1+\dots+h_k+j+1} \\ p_{h_1+2} \\ p_{h_1+3} \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} [p_1, p_2, \dots, p_n]$$

oraz

$$\tilde{P}_2 A = \begin{bmatrix} C_1 A \\ C_1 A^2 \\ \vdots \\ C_1 A^{h_1} \\ C_2 A \\ C_2 A^2 \\ \vdots \\ C_p A \\ C_p A^2 \\ \vdots \\ C_2 A^{h_2} \\ C_3 A \\ C_3 A^2 \\ \vdots \\ C_p A^{h_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_{h_1} \\ p_{h_1+2} \\ p_{h_1+3} \\ \vdots \\ p_{h_1+h_2} \\ C_2 A^{h_2} \\ p_{h_1+h_2+2} \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} \quad (4.510)$$

$$\tilde{C} = CP_2^{-1} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_{h_1+1} \\ \vdots \\ p_{h_1+\dots+h_{p-1}+1} \end{bmatrix} [\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n] = \text{diag} [\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_p]$$

gdzie \tilde{A}_{ij} i \tilde{c}_i , $i, j = 1, \dots, p$ są określone zależnościami (4.509). Zostało więc udowodnione następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 70

Jeżeli para (A, C) jest obserwowna, to istnieje macierz nieosobliwa P_2 poprzedzających go w ciągu (4.504), czyli

$$C_i A^{h_i} = \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{h_{k+1}-1} -a_j^{k+1, j} p_{h_1+\dots+h_k+j+1}, \quad i = 1, \dots, p \quad (4.511)$$

Niech $\bar{\mathbf{p}}_i$ będzie i -ta (i = 1, ..., n) kolumną macierzy P_2^{-1} . Z zależności $P_2 P_2^{-1} = I_n$ mamy

$$p_i \bar{p}_j = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases} \quad (4.512)$$

Podstawiając zależność (4.511) dla $i = 1, \dots, p$ do (4.510) i uwzględniając (4.512), otrzymamy

$$\tilde{A} = P_2 A P_2^{-1} = \begin{bmatrix} p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_{h_1} \\ \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{h_{k+1}-1} -a_j^{k+1, j} p_{h_1+\dots+h_k+j+1} \\ p_{h_1+2} \\ p_{h_1+3} \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} [p_1, p_2, \dots, p_n]$$

Z powyższych rozważań wynika następująca procedura wyznaczania macierzy P_2 oraz postaci kanonicznej (4.509) dla dowolnej pary obserwowejnej (A, C) .

PROCEDURA 23

Krok 1. Stosując wybór wierszy liniowo niezależnych z ciągu (4.504), wyznaczamy macierz P_2 postaci (4.507).

Krok 2. Obliczamy macierz odwrotną P_2^{-1} .

Krok 3. Korzystając z zależności (4.513), wyznaczamy poszukiwaną parę (\tilde{A}, \tilde{C}) .

PRZYKŁAD 124

Wyznaczmy macierz P_2 oraz parę (\tilde{A}, \tilde{C}) dla macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.514)$$

Latwo sprawdzić, że para (4.514) jest obserwowańa. Korzystając z procedury 23, otrzymamy kolejno:

Krok 1. Wyznaczamy ciąg (4.504) dla pary (4.514), który ma postać

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1^T &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{C}_2^T &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{A}^T \mathbf{C}_2^T &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \\ (\mathbf{A}^T)^2 \mathbf{C}_1^T &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (\mathbf{A}^T)^2 \mathbf{C}_2^T &= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, & \dots & & \end{aligned} \quad (4.515)$$

Latwo zauważyc, że wiersze $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_2 \mathbf{A}$ są liniowo niezależne (rys. 4.44).

Rys. 4.44. Tablica do przykładu 124

A^0	A^1	A^2	C_1	C_2
x	0			
x	x	0		
x	x	0		

Macierz utworzoną z tych wierszy ma postać

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_2 \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.516)$$

W tym przypadku $h_1 = 1, h_2 = 2$.

Krok 2. Obliczamy macierz odwrotną macierzy (4.516)

$$\mathbf{P}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Krok 3. Korzystając z zależności (4.513), otrzymamy

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= \mathbf{P}_2 \mathbf{A} \mathbf{P}_2^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

□

Z dowodu twierdzenia 70 (zależność (4.511)) wynika, że wiersze o numerach $h_1, h_1 + h_2, \dots, h_1 + h_2 + \dots + h_p = n$ zawierają współczynniki kombinacji liniowych, które wyrażają wiersze $\mathbf{C}_i \mathbf{A}^{h_i}$ ($i = 1, \dots, p$) za pomocą wierszy liniowo niezależnych ciągu (4.504). Badając liniową niezależność wierszy ciągu (4.504), możemy wyznaczyć współczynniki. Z zależności (4.513) mamy

$$\tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P}_2 = \mathbf{C} \quad \text{oraz} \quad \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2 \mathbf{A}$$

czyli

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_p \end{bmatrix} \quad (4.517)$$

oraz

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \dots & \tilde{A}_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{A}_{p1} & \dots & \tilde{A}_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n \end{bmatrix} \quad (4.518)$$

Wykonując mnożenia i porównując odpowiednie wiersze, po uwzględnieniu (4.509), z zależności (4.517) oraz (4.518) otrzymamy

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{C}_1, \mathbf{p}_{k_1+1} = \mathbf{C}_2, \mathbf{p}_{h_1+h_2+1} = \mathbf{C}_3, \dots, \mathbf{p}_{h_1+\dots+h_{p-1}+1} = \mathbf{C}_p \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 \mathbf{A}, \mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_2 \mathbf{A}, \dots, \mathbf{p}_{h_1} = \mathbf{p}_{h_1-1} \mathbf{A}, \mathbf{p}_{h_1+2} = \mathbf{p}_{h_1+1} \mathbf{A}, \\ \mathbf{p}_{h_1+3} &= \mathbf{p}_{h_1+2} \mathbf{A}, \dots, \mathbf{p}_n = \mathbf{p}_{n-1} \mathbf{A} \end{aligned} \quad (4.519)$$

Znając współczynniki a_k^{ij} kombinacji liniowych (4.511) i korzystając z (4.519), możemy kolejno wyznaczyć wiersze $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ macierzy \mathbf{P}_2 .

Z powyższych rozważań wynika następująca procedura wyznaczania macierzy \mathbf{P}_2 oraz pary $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{C}})$ dla dowolnej obserwowejnej pary (\mathbf{A}, \mathbf{C}) :

PROCEDURA 24

Krok 1. Badając liniową niezależność wierszy ciągu (4.504), wyznaczany wspólnik kombinacji liniowych (4.511) (wierszy $h_1, h_1 + h_2, \dots, n$ macierzy $\tilde{\mathbf{A}}$).

Krok 2. Znając te współczynniki, wyznaczany poszukiwaną parę $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}})$.

Krok 3. Korzystając z zależności (4.519), wyznaczany kolejno wiersze macierzy P_2 .

PRZYKŁAD 125

Korzystając z procedury 24, wyznaczmy macierz P_2 oraz parę $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}})$ dla macierzy (4.514).

Korzystając z tej procedury, otrzymamy kolejno:

Krok 1. Ciąg wierszy dla pary (4.514) ma postać (4.515). Wiersz $C_i A^{h_i}$ dla $i = 1$ daje się wyrazić za pomocą tylko wiersza C_1 , czyli

$$C_1 A = C_1$$

a dla $i = 2$ otrzymamy

$$C_2 A^2 = -C_2 + 2C_2 A = [2, -1, -2]$$

Pierwszy i trzeci wiersz macierzy $\tilde{\mathbf{A}}$ mają więc postacie $[1, 0, 0], [0, -1, 2]$.

Krok 2. Poszukiwana para $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}})$ ma więc postać

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Krok 3. Korzystając z zależności (4.519), otrzymamy

$$p_1 = C_1 = [1, 0, 0], \quad p_2 = C_2 = [0, 1, 0] \quad p_3 = p_2 A = [1, 0, -1]$$

Wobec tego

$$P_2 = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Otrzymane wyniki są zgodne z wynikami uzyskanymi w przykładzie 124. \square

Z porównania procedury 23 i 24 oraz przykładów 124 i 125 wynika, że wyznaczenie macierzy P_2 i pary $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{C}}_2)$ na podstawie procedury 24 jest obliczeniowo prostsze.

Z porównania rozważań dotyczących pary (A, B) i pary (A, C) (twierdzenia 67 i 70) wynika, że rozważania dla pary (A, C) można otrzymać z odpowiednich rozważań dla pary (A, B) , następując w tej parze macierz A macierzą A^T oraz

macierz B macierzą C^T . Rozważania dla pary (A, C) są więc dualne względem rozważań dla pary (A, B) i odwrotnie.

TWIERDZENIE 71

Jeżeli para (A, C) jest obserwowała, to istnieje macierz niesobliwa postaci (4.507), która przekształca tę parę w postać kanoniczną (4.509) z obiema macierzami blokowo diagonalnymi

$$\tilde{\mathbf{A}} = P_2 A P_2^{-1} = \text{diag} [\tilde{\mathbf{A}}_{11}, \tilde{\mathbf{A}}_{22}, \dots, \tilde{\mathbf{A}}_{pp}], \quad (\tilde{\mathbf{A}}_{ij} = 0, i \neq j), \quad (4.521)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = B P_2^{-1} = \text{diag} [\tilde{\mathbf{C}}_1, \tilde{\mathbf{C}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{C}}_p] \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \\ \text{rząd} \begin{bmatrix} C_i \\ C_i A \\ \vdots \\ C_i A^k \end{bmatrix} = h_i \quad \text{dla } k \geq h_i, \quad i = 1, \dots, p \quad (4.522)$$

Dowód tego twierdzenia jest dualny względem dowodu twierdzenia 68.

DEFINICJA 125

Macierz

(4.520)

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & \cdots & \tilde{\mathbf{A}}_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{A}}_{p1} & \cdots & \tilde{\mathbf{A}}_{pp} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0^{ii} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1^{ii} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2^{ii} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{h_i-1}^{ii} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_{ij} \\ 0 & \cdots & 0 & -a_{1j}^{ij} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -a_{h_j-1}^{ij} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{h_i \times h_j}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, p \quad (4.523)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = [\tilde{\mathbf{C}}_1, \tilde{\mathbf{C}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{C}}_p]$$

$$\check{C}_i = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & c_{1i} \\ \vdots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & c_{p-i,i} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times h_i}$$

nazywamy macierzą w postaci kanonicznej obserwatorowej lub równoważnie w drugiej postaci kanonicznej Brunowskiego-Luenbergera.

Niech \bar{P}_i będzie i -tą ($i = 1, \dots, n$) kolumną macierzy odwrotnej P_2 postaci (4.507). Korzystając z tych kolumn, wyznaczamy macierz

$$\check{Q} = [\check{q}_1, \check{A}\check{q}_1, \dots, A^{h_1-1}\check{q}_1, \check{q}_2, A\check{q}_2, \dots, A^{h_2-1}\check{q}_2, \check{q}_3, \dots, A^{h_p-1}\check{q}_p] \quad (4.524)$$

przy czym

$$\check{q}_1 = \bar{p}_{h_1}, \quad \check{q}_2 = \bar{p}_{h_1+h_2}, \dots, \check{q}_p = \bar{p}_n \quad (4.525)$$

W sposób analogiczny jak dla macierzy Q postaci (4.487) można wykazać, że macierz (4.524), (4.525) jest nieosobliwa dla każdej pary obserwowlanej (A, C) .

TWIERDZENIE 72

Jeżeli para (A, C) jest obserwowlana, to istnieje macierz nieosobliwa \check{Q} postaci (4.524) taka, że macierz

$$\check{A} = Q^{-1}A\check{Q}, \quad \check{C} = C\check{Q} \quad (4.526)$$

mają postać kanoniczną obserwatorową (4.523).

Dowód tego twierdzenia jest dualny względem dowodu twierdzenia 69. Macierz \check{Q} oraz para (\check{A}, \check{C}) możemy wyznaczyć, korzystając z procedury:

PROCEDURA 25

Krok 1. Stosując wybór wierszy liniowo niezależnych z ciągu (4.504), wyznaczamy macierz P_2 postaci (4.507) oraz jej odwrotność P_2^{-1} .

Krok 2. Znając odpowiednie kolumny macierzy P_2^{-1} , wyznaczamy macierz \check{Q} postaci (4.524).

Krok 3. Korzystając z zależności (4.526), wyznaczamy poszukiwaną parę (\check{A}, \check{C}) .

PRZYKŁAD 126

Wyznaczmy macierz \check{Q} oraz parę (\check{A}, \check{C}) dla macierzy (4.514). Korzystając z procedury 25, otrzymamy kolejno:

Krok 1. Macierz P_2 ma postać (4.516), $h_1 = 1$, $h_2 = 2$, a więc macierz odwrotna

$$P_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.527)$$

Krok 2. Wobec tego $\check{q}_1 = \bar{p}_1 = [1, 0, 1]^T$, $\check{q}_2 = \bar{p}_3 = [0, 0, -1]^T$, a macierz (4.524) ma postać

$$\check{Q} = [\check{q}_1 \quad \check{q}_2 \quad \check{q}_3] = [\bar{p}_1 \quad \bar{p}_3 \quad A\bar{p}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad (4.528)$$

Krok 3. Korzystając z zależności (4.526), otrzymamy

$$\begin{aligned} \check{A} &= \begin{bmatrix} \check{A}_{11} & \check{A}_{12} \\ \check{A}_{21} & \check{A}_{22} \end{bmatrix} = \check{Q}^{-1}A\check{Q} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \\ \check{C} &= [\check{C}_1, \check{C}_2] = C\check{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.529) \end{aligned}$$

Korzystając z zasad dualizmu, możemy również wykorzystać procedurę 22 do wyznaczenia macierzy \check{Q} oraz pary (\check{A}, \check{C}) dla dowolnej pary obserwowlanej (A, C) .

PRZYKŁAD 127

Korzystając z dualnej wersji procedury 22, wyznaczmy macierz \check{Q} oraz parę (\check{A}, \check{C}) dla macierzy (4.514).

Korzystając z wyników przykładu 125, otrzymamy kolejno:

Krok 1. Pierwsza i trzecia kolumna macierzy \check{A} ma postać $[1, 0, 0]^T$, $[0, -1, 2]^T$ oraz $c_{11} = 0$.

Krok 2. Poszukiwana para (\check{A}, \check{C}) ma więc postać

$$\check{A} = \begin{bmatrix} \check{A}_{11} & \check{A}_{12} \\ \check{A}_{21} & \check{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \check{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Krok 3. Korzystając z dualnych zależności do (4.501), wyznaczamy kolejno wiersze q_1, q_2, q_3 macierzy \check{Q}^{-1}

$$q_1 = C_1 = [1, 0, 0], \quad q_2 = q_3 A - 2q_3 = [1, -2, -1], \quad q_3 = [0, 1, 0]$$

Wobec tego

$$\check{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{oraz } \check{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Wynik ten jest zgodny z wynikiem uzyskanym w przykładzie 126. \square

Dla układów o jednym wejściu i jednym wyjściu rozpatrywaliśmy aż cztery różne postacie kanoniczne par (A, B) i (A, C) . Dla układów osiągalnych i obserwowalnych o wielu wejściach i wielu wyjściach można również definiować cztery różne postacie kanoniczne par (A, B) i (A, C) i wyznaczać odpowiednie macierze przekształcające te pary w postać kanoniczną.

4.4.7. Postacie kanoniczne macierzy układów singularnych

Weźmy pod uwagę singularny układ dyskretny

$$Ex_{i+1} = Ax_i + Bu_i \quad (4.530)$$

$$y_i = Cx_i, \quad i \in Z_+$$

gdzie $x_i \in \mathbb{R}^n$, $u_i \in \mathbb{R}^m$ i $y_i \in \mathbb{R}^p$ są odpowiednio wektorami stanu wymuszeń i odpowiedzi, oraz

$$E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad C \in \mathbb{R}^{p \times n} \quad (4.531)$$

Zakładamy, że $\det E = 0$ oraz

$$\det [Ez - A] \neq 0 \quad \text{dla pewnych } z \in \mathbb{C}$$

Macierz transmitancji układu (4.530), (4.531) jest określona wzorem

$$T(z) = C |Ez - A|^{-1} B \in \mathbb{R}^{p \times m}(z) \quad (4.532)$$

DEFINICJA 126

Mówimy, że macierze E , A i B mają drugą postać kanoniczną, jeżeli $\exists \in \mathbb{R}^{p \times m}(z)$, jeżeli spełniają one równość (4.531).

$$(4.533)$$

$$c_i = [0, \dots, 0, 1] \in \mathbb{R}^{1 \times q_i+1}, \quad n = p + \sum_{i=1}^p q'_i, \quad i = 1, \dots, p$$

Macierz B nie ma żadnej szczególnej postaci

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pm} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad b_{ij} = \begin{bmatrix} c_j^0 \\ c_j^1 \\ \vdots \\ c_j^{q'_i} \\ \vdots \\ c_j^m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times (q'_i+1)}$$

$$i = 1, \dots, p \quad j = 1, \dots, m$$

DEFINICJA 127

Mówimy, że macierze E , A i B mają pierwszą postać kanoniczną, jeżeli

$$E = \text{diag}[E_1, E_2, \dots, E_m] \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad E_i = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{q_i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(q_i+1) \times (q_i+1)}$$

$$A = \text{diag}[A_1, A_2, \dots, A_m] \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad A_i = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I}_{q_i} \\ a_i & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(q_i+1) \times (q_i+1)}$$

$$a_i = [a_0^i, \dots, a_{r_i-1}^i, 1, 0, \dots, 0], \quad B = \text{diag}[B_1, B_2, \dots, B_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q_i+1}, \quad n = m + \sum_{i=1}^m q_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.535)$$

Macierz C nie ma żadnej szczególnej postaci

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pm} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times n}, \quad c_{ij} = [c_{ij}^0, c_{ij}^1, \dots, c_{ij}^{q_i}] \in \mathbb{R}^{1 \times (q_i+1)}$$

$$i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, m$$

DEFINICJA 128

Mówimy, że macierze E , A i B mają drugą postać kanoniczną, jeżeli

$$E = \text{diag}[E_1, E_2, \dots, E_m] \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad E_i = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{q'_i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(q'_i+1) \times (q'_i+1)}$$

$$A = \text{diag}[A_1, A_2, \dots, A_m] \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad A_i = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I}_{q'_i} \\ a'_i & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(q'_i+1) \times (q'_i+1)}$$

$$a'_i = [a_0^i, \dots, a_{r_i-1}^i, 1, 0, \dots, 0], \quad B = \text{diag}[B_1, B_2, \dots, B_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$[Ez - A]^{-1} = \sum_{i=-\mu}^{\infty} \Phi_i z^{-(i+1)} \quad (4.536)$$

$$[Ez - A]^{-1} = \sum_{i=-\mu}^{\infty} \Phi_i z^{-(i+1)} \quad (4.537)$$

$$[Ez - A]^{-1} = \sum_{i=-\mu}^{\infty} \Phi_i z^{-(i+1)} \quad (4.538)$$

gdzie $\mu \leq \text{rząd } E$ – stopień $\det [E\mathbf{z} - \mathbf{A}] + 1$ jest indeksem nilpotentności, a Φ_i są macierzami fundamentalnymi określonymi następująco:

$$\mathbf{E}\Phi_i - A\Phi_{i-1} = \Phi_i E - \Phi_{i-1} A = \begin{cases} \mathbb{I}_n & \text{dla } i = 0 \\ 0 & \text{dla } i \neq 0 \end{cases} \quad (4.539)$$

$$\Phi_i = 0 \quad \text{dla } i < -\mu$$

Rozwiązywanie równania (4.530) ma postać

$$x_i = \Phi_i E x_0 + \sum_{j=0}^{i+\mu-1} \Phi_{i-j-1} B u_j, \quad i \in Z_+ \quad (4.540)$$

Zgodnie z definicją 66 układ (4.530), (4.531) nazywamy osiągalnym w n krokach, jeżeli dla $x_0 = \mathbf{0}$ oraz dowolnego $x_f \in \mathbb{R}^n$ istnieje ciąg $u_i \in \mathbb{R}^m$ dla $i = 0, 1, \dots, n + \mu - 1$ taki, że $x_n = x_f$. Zgodnie z twierdzeniem 18 układ (4.530), (4.531) jest osiągalny w n krokach wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd } R_n = n \quad (4.541)$$

gdzie

$$R_n := [\Phi_{n-1} B, \dots, \Phi_0 B, \Phi_{-1} B, \dots, \Phi_{-\mu} B] \quad (4.542)$$

Zgodnie z definicją 66 układ (4.530), (4.531) nazywamy obserwowalnym w n krokach, jeżeli dla dowolnego $x_0 \neq \mathbf{0}$ oraz danych $u_i \in \mathbb{R}^m$ i $y_i \in \mathbb{R}^p$ dla $i = 0, 1, \dots, n + \mu - 1$ można wyznaczyć wektor $E x_0$. Zgodnie z twierdzeniem 18 układ (4.530), (4.531) jest obserwacyjny w n krokach wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd } O_n = n \quad (4.543)$$

gdzie

$$O_n := \begin{bmatrix} C\Phi_{-\mu} \\ \vdots \\ C\Phi_{-1} \\ C\Phi_0 \\ \vdots \\ C\Phi_{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.544)$$

$$P = \tilde{Q}_n^{-1} \hat{O}_n \quad (4.552)$$

$$\begin{aligned} \bar{O}_n &:= \begin{bmatrix} C\bar{\Phi}_{-\mu} \\ \vdots \\ C\bar{\Phi}_{-1} \\ C\bar{\Phi}_0 \\ \vdots \\ C\bar{\Phi}_{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.551) \\ &\text{gdzie} \\ &Q := \begin{bmatrix} C\Phi_{-\mu} \\ \vdots \\ C\Phi_{-1} \\ C\Phi_0 \\ \vdots \\ C\Phi_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\bar{\Phi}_{-\mu} \\ \vdots \\ C\bar{\Phi}_{-1} \\ C\bar{\Phi}_0 \\ \vdots \\ C\bar{\Phi}_{n-1} \end{bmatrix} P = \bar{O}_n P \quad (4.550) \end{aligned}$$

TWIERDZENIE 73

Niech para (E, A) spełnia warunek (4.533). Istnieją macierze nieosobliwe $P, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ takie, że macierze (4.537) mają postacie kanoniczne (4.535), (4.536) jeżeli układ (4.530), (4.531) jest osiągalny i obserwacyjny w n krokach.

$$P = \tilde{Q}_n^{-1} \hat{O}_n \quad (4.552)$$

Dowód. Korzystając z zależności (4.533) i (4.534), otrzymamy

$$\begin{aligned} [\bar{E}\mathbf{z} - \bar{A}]^{-1} &= [P(E\mathbf{z} - A)Q]^{-1} = Q^{-1}[E\mathbf{z} - A]^{-1}P^{-1} = \\ &= \sum_{i=-\mu}^{\infty} Q^{-1}\Phi_i P^{-1} z^{-(i+1)} = \sum_{i=-\mu}^{\infty} \bar{\Phi}_i z^{-(i+1)} \quad (4.545) \end{aligned}$$

gdzie

$$\bar{\Phi}_i = Q^{-1}\Phi_i P^{-1}, \quad i = -\mu, -\mu + 1, \dots \quad (4.546)$$

Z równań (4.542), (4.546) i $\bar{B} = PB$ mamy

$$R_n := [\Phi_{n-1} B, \dots, \Phi_0 B, \Phi_{-1} B, \dots, \Phi_{-\mu} B] = Q \bar{R}_n \quad (4.547)$$

gdzie

$$\bar{R}_n = [\bar{\Phi}_{n-1} \bar{B}, \dots, \bar{\Phi}_0 \bar{B}, \bar{\Phi}_{-1} \bar{B}, \dots, \bar{\Phi}_{-\mu} \bar{B}] \quad (4.548)$$

Jeżeli układ opisany równaniami (4.530), (4.531) jest osiągalny w n krokach, to jest spełniony warunek (4.541) i z zależności (4.547) otrzymamy

$$Q = \bar{R}_n \bar{R}_n^{-1} \quad (4.549)$$

gdzie \bar{R} i \bar{R} są macierzami kwadratowymi złożonymi z n liniowo niezależnych kolumn macierzy R_n i odpowiednio \bar{R}_n . Podobnie z równań (4.544), (4.546) i $\bar{C} = CQ$ mamy

$$\begin{bmatrix} C\Phi_{-\mu} \\ \vdots \\ C\Phi_{-1} \\ C\Phi_0 \\ \vdots \\ C\Phi_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\bar{\Phi}_{-\mu} \\ \vdots \\ C\bar{\Phi}_{-1} \\ C\bar{\Phi}_0 \\ \vdots \\ C\bar{\Phi}_{n-1} \end{bmatrix} P = \bar{O}_n P \quad (4.550)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \bar{O}_n &:= \begin{bmatrix} C\bar{\Phi}_{-\mu} \\ \vdots \\ C\bar{\Phi}_{-1} \\ C\bar{\Phi}_0 \\ \vdots \\ C\bar{\Phi}_{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.551) \\ &\text{gdzie} \\ &Q := \begin{bmatrix} C\Phi_{-\mu} \\ \vdots \\ C\Phi_{-1} \\ C\Phi_0 \\ \vdots \\ C\Phi_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\bar{\Phi}_{-\mu} \\ \vdots \\ C\bar{\Phi}_{-1} \\ C\bar{\Phi}_0 \\ \vdots \\ C\bar{\Phi}_{n-1} \end{bmatrix} P = \bar{O}_n P \quad (4.550) \end{aligned}$$

Jeżeli układ (4.530), (4.531) jest obserwowany w n krokach, to jest spełniony warunek (4.543) i z zależności (4.550) otrzymamy

$$P = \tilde{Q}_n^{-1} \hat{O}_n \quad (4.552)$$

4. Własności układów

gdzie \tilde{O}_n i \tilde{O}_n są macierzami kwadratowymi złożonymi z n liniowo niezależnych kolumn macierzy O_n i odpowiednio \tilde{O}_n .

Jeżeli układ (4.530), (4.531) jest osiągalny i obserwowlany w n krokach, to macierze \bar{E} , \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} w postaci kanonicznej można wyznaczyć, korzystając z następującej procedury:

PROCEDURA 26

Krok 1. Znając E , A , B , C , wyznaczamy macierz transmitancji (4.534).

Krok 2. Wyznaczamy realizację w postaci kanonicznej (4.535), (4.536) macierzy transmitancji (4.534).

Krok 3. Korzystając z zależności (4.538) i (4.545), wyznaczamy macierze fundamentalne Φ_i i $\bar{\Phi}_i$ dla $i = -\mu, \dots, -1, 0, \dots, n-1$.

Krok 4. Korzystając z równań (4.542), (4.548) i (4.544), (4.551), wyznaczamy macierze R_n , \bar{R}_n , O_n i \tilde{O}_n .

Krok 5. Korzystając ze wzorów (4.549) i (4.552), wyznaczamy poszukiwane macierze Q i P .

TWIERDZENIE 74

Niech macierze

$$\bar{E}_1 = P_1 E Q_1, \quad \bar{A}_1 = P_1 A Q_1, \quad \bar{B}_1 = P_1 B, \quad \bar{C}_1 = C Q_1 \quad (4.553)$$

mają pierwską postać kanoniczną, a macierze

$$\bar{E}_2 = P_2 \bar{E} Q_2, \quad \bar{A}_2 = P_2 A Q_2, \quad \bar{B}_2 = P_2 B, \quad \bar{C}_2 = C Q_2 \quad (4.554)$$

– mają drugą postać kanoniczną. Wtedy macierze (4.553) i (4.554) są związane zależnościami

$$\bar{E}_1 = M \bar{E}_2 N, \quad \bar{A}_1 = M \bar{A}_2 N, \quad \bar{B}_1 = M \bar{B}_2, \quad \bar{C}_1 = \bar{C}_2 N \quad (4.555)$$

gdzie

$$M := P_1 P_2^{-1}, \quad N = Q_2^{-1} Q_1 \quad (4.556)$$

Dowód. Z zależności (4.553) i (4.554) mamy

$$E = P_1^{-1} \bar{E}_1 Q_1^{-1} = P_2^{-1} \bar{E}_2 Q_2^{-1}, \quad A = P_1^{-1} \bar{A}_1 Q_1^{-1} = P_2^{-1} \bar{A}_2 Q_2^{-1},$$

$$B = P_1^{-1} \bar{B}_1 = P_2^{-1} \bar{B}_2, \quad C = \bar{C}_1 Q_1^{-1} = \bar{C}_2 Q_2^{-1}$$

oraz

$$\bar{E}_1 = P_1 P_2^{-1} \bar{E}_2 Q_2^{-1} Q_1 = M \bar{E}_2 N, \quad \bar{A}_1 = P_1 P_2^{-1} \bar{A}_2 Q_2^{-1} Q_1 = M \bar{A}_2 N$$

$$\bar{B}_1 = P_1 P_2^{-1} \bar{B}_2 = M \bar{B}_2, \quad \bar{C}_1 = \bar{C}_2 Q_2^{-1} Q_1 = \bar{C}_2 N$$

Znając P_1 , P_2 , Q_1 , Q_2 i korzystając z równań (4.556), możemy wyznaczyć macierze M i N .

PRZYKŁAD 128

Dany jest układ (4.530), (4.531) o macierzach

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.557)$$

Łatwo sprawdzić, że układ ten jest osiągalny i obserwowlany w n krokach. Korzystając z procedury 26, otrzymamy kolejno:

Krok 1. Transmitancja tego układu

$$T(z) = C[Ez - A]^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & z+2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -2z - 7 \quad (4.558)$$

Krok 2. Realizacja w postaci kanonicznej (4.535) transmitancji (4.558)

$$\bar{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{C}_1 = \begin{bmatrix} -7 & -2 \end{bmatrix} \quad (4.559)$$

a realizacja w postaci kanonicznej (4.536)

$$\bar{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \bar{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.560)$$

Krok 3. Korzystając z równań (4.538) i (4.545), otrzymamy

$$[Ez - A]^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & z+2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \bar{\Phi}_{-2} z + \bar{\Phi}^{-1}, \quad (4.561)$$

$$\bar{\Phi}_{-2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\Phi}_{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{E}_1 z - \bar{A}_1]^{-1} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \bar{\Phi}_{-2}^1 z + \bar{\Phi}_{-1}^1,$$

$$\bar{\Phi}_{-2}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\Phi}_{-1}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.562)$$

$$[\bar{E}_2 z - \bar{A}_2]^{-1} = \begin{bmatrix} z & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \bar{\Phi}_{-2}^2 z + \bar{\Phi}_{-1}^2, \quad (4.563)$$

$$\bar{\Phi}_{-2}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\Phi}_{-1}^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.563)$$

Krok 4. Korzystając z zależności (4.542), (4.548), (4.544), (4.551) i (4.557), (4.561) – (4.563), otrzymamy

4. Własności układów

4.4. Postacie kanoniczne

$$\begin{aligned} R_2 &= [\Phi_1 B, \Phi_0 B, \Phi_{-1} B, \Phi_{-2} B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \bar{R}_2^1 &= [\tilde{\Phi}_1^1 \bar{B}_1, \tilde{\Phi}_0^1 \bar{B}_1, \tilde{\Phi}_{-1}^1 \bar{B}_1, \tilde{\Phi}_{-2}^1 \bar{B}_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.564) \\ \bar{R}_2^2 &= [\tilde{\Phi}_1^2 \bar{B}_2, \tilde{\Phi}_0^2 \bar{B}_2, \tilde{\Phi}_{-1}^2 \bar{B}_2, \tilde{\Phi}_{-2}^2 \bar{B}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_2 &= \begin{bmatrix} C\Phi_{-2} \\ C\Phi_{-1} \\ C\Phi_0 \\ C\Phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{O}_2^1 = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 \tilde{\Phi}_{-2}^1 \\ \tilde{C}_1 \tilde{\Phi}_{-1}^1 \\ \tilde{C}_1 \tilde{\Phi}_0^1 \\ \tilde{C}_1 \tilde{\Phi}_1^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -7 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.565) \\ \tilde{O}_2^2 &= \begin{bmatrix} \tilde{C}_2 \tilde{\Phi}_{-2}^2 \\ \tilde{C}_2 \tilde{\Phi}_{-1}^2 \\ \tilde{C}_2 \tilde{\Phi}_0^2 \\ \tilde{C}_2 \tilde{\Phi}_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Krok 5. Korzystając z zależności (4.532) i (4.551), otrzymamy

$$Q_1 = \hat{R}_2 \hat{R}_2^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \tilde{O}_2^{-1} \tilde{O}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \hat{R}_2 \hat{R}_2^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \tilde{O}_2^{-1} \tilde{O}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Korzystając z zależności (4.556), otrzymamy

$$\begin{aligned} M &= P_1 P_2^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (4.567) \\ N &= Q_2^{-1} Q_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -7 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Latwo sprawdzić, że macierze (4.567), (4.568) spełniają równość (4.555) dla (4.559). \square

4.4.8. Jak to zrobić w MATLAB-ie

W MATLAB-ie stworzono kilka podstawowych funkcji, pozwalających dokonać transformacji macierzy do postaci kanonicznych. Niżej omówiono najważniejsze z nich.

FUNKCJA CANON:

Funkcja sprowadza model zmiennych stanu do postaci kanonicznej sterowej -nej lub diagonalnej.

$\text{CSYS} = \text{CANON}(\text{SYS}, \text{TYPE})$ wyznacza postać kanoniczną. Parametr

- +'modal' + - postać kanoniczna diagonalna,

- +'companion' + - postać kanoniczna sterowań.

[CSYS, T] = CANON(SYS, TYPE) wyznacza postać kanoniczną i podaje macierz przekształceń T, która pozwala sprowadzić model do wybranej postaci kanonicznej.

FUNKCJA JORDAN:

Funkcja wyznacza postać kanoniczną Jordana macierzy.

$[\text{V}, \text{J}] = \text{JORDAN}(\text{A})$ wyznacza postać kanoniczną Jordana macierzy A. Macierz V przekształca macierz A do postaci J, tj.

$$\text{V}^{-1} \text{A} \text{V} = \text{J}$$

PRZYKŁAD 129

Sprawdzić do postaci kanonicznej Jordana macierz o rozmiarach 5×5 , której elementami są wylosowane liczby rzeczywiste. Losujemy macierz o rozmiarach 5×5 za pomocą polecenia

$$\text{A} = \text{rand}(5, 5);$$

Wyznaczamy jej postać kanoniczną Jordana za pomocą polecenia

$$[\text{V}, \text{J}] = \text{jordan}(\text{A});$$

PRZYKŁAD 130

Model zmiennych stanu postaci

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0,2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

sprowadzimy do postaci kanonicznej sterowej -nej i wyznaczymy macierz przekształceń T.

Definiujemy macierze oraz model zmiennych stanu poleceniami

$$\begin{aligned} \text{A} &= [-1 & 0 & 0,2; 0 & -2 & 1; 1 & 0 & -3]; \\ \text{C} &= [1 & 2 & 0; 0 & 1 & 0; 0 & 0 & 1]; \end{aligned}$$

$B = [0; 0; 1]$;
 $SYS = SS(A, B, C, 0)$;

Następnie wyznaczany równoważny model w postaci kanonicznej sterowalnej i poszukiwaną macierz przekształcania

$[sys_kan, T] = canon(SYS, 'companion')$;

4.5. Zadania

Zadanie 9. Wykaż, że para (A, B) jest osiągalna wtedy i tylko wtedy, gdy macierze $[\mathbb{I}_n z - A]$ i B są lewostronnie względnie pierwsze.

WSKAZÓWKA. Niech $L = L(z)$ będzie lewym dzielnikiem macierzy $[\mathbb{I}_n z - A]$ i B . Wtedy $[\mathbb{I}_n z - A, B] = [\bar{A}, \bar{B}]$, przy czym \bar{A} i \bar{B} są lewostronnie względnie pierwsze. Wykaż, że warunek (4.66) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy L jest macierzą unimodularną.

Zadanie 10. Wykaż, że para (A, B) jest osiągalna wtedy i tylko wtedy, gdy wiersze macierzy $[\mathbb{I}_n z - A]^{-1} B$ są liniowo niezależne nad ciałem liczb zespolonych.

WSKAZÓWKA. Skorzystaj z zależności

$$[\mathbb{I}_n z - A]^{-1} = \sum_{i=0}^{n-1} b_i A^i$$

gdzie

$$b_i = \frac{1}{d(z)} (z^{n-i-1} + a_{n-1} z^{n-i-2} + \dots + a_{i+2} z + a_{i+1})$$

a a_i są współczynnikami wielomianu charakterystycznego macierzy A postaci

$$d(z) = \det [\mathbb{I}_n z - A] = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

oraz

$$[\mathbb{I}_n z - A]^{-1} B = [B, AB, \dots, A^{n-1} B] \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m b_0 \\ \mathbb{I}_m b_1 \\ \vdots \\ \mathbb{I}_m b_{m-1} \end{bmatrix}$$

Zadanie 11. Wykaż, że para (A, C) jest obserwowały wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\prod_{i=0}^{n-1} \ker C A^i = 0 \quad (4.569)$$

WSKAZÓWKA. Wykaż, że warunek (4.569) jest równoważny warunkowi (4.94).

Zadanie 12. Wykaż, że para (A, C) jest odtwarzalna wtedy i tylko wtedy, gdy macierze $[\mathbb{I}_n - AD]$ i C są prawostronnie względnie pierwsze.

WSKAZÓWKA. Niech $P = P(d)$ będzie prawym dzielnikiem macierzy $[\mathbb{I}_n - AD]$ i C . Wtedy

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I}_n - AD \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} P$$

przy czym \bar{A} i \bar{C} są prawostronnie względnie pierwsze. Wykaż, że warunek (4.119) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy P jest macierzą unimodularną.

Zadanie 13. Wykaż, że układ ciągły (4.133), (4.134) jest osiągalny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz W określona wzorem (4.146) jest dodatnio określona (nieosobliwia).

WSKAZÓWKA. Wykaż, że para (A, B) jest osiągalna wtedy i tylko wtedy, gdy wiersze macierzy $e^{At} B$ są liniowo niezależne nad ciałem liczb zespolonych.

Zadanie 14. Wykaż, że para (A, C) układu ciągłego (4.133), (4.134) jest obserwowały wtedy i tylko wtedy, gdy kolumny macierzy $C e^{At}$ są liniowo niezależne nad ciałem liczb zespolonych.

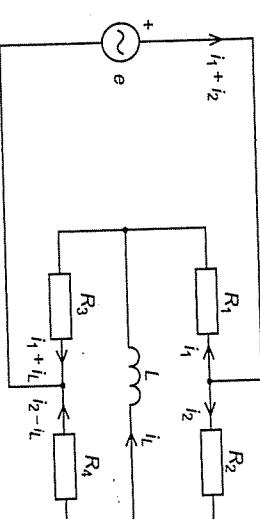
WSKAZÓWKA. Korzystając z zależności

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) A^i$$

wyprowadź równość

$$C e^{At} = [\alpha_0(t) \mathbb{I}_p \ \alpha_1(t) \mathbb{I}_p \ \dots \ \alpha_{n-1}(t) \mathbb{I}_p] \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Zadanie 15. W obwodzie przedstawionym na rys. 4.45



Rys. 4.45. Schemat obwodu elektrycznego

o znanych rezystancjach R_1, R_2, R_3, R_4 i indukcyjności L za zmieniąc stanu przyjmujemy prąd i_L w cewce, za wymuszenie – napięcie źródłowe e , a za odpowiedź y – sumę prądów i_1 i i_2 . Podaj warunki, przy spełnieniu których obwód ten nie jest sterowany ani obserwowany.

Odpowiedź. Warunek niesterowalności

$$\frac{R_1}{R_1 + R_3} = \frac{R_2}{R_2 + R_4}$$

Warunek nieobserwowności

$$\frac{R_3}{R_1 + R_3} = \frac{R_4}{R_2 + R_4}$$

WSKAZÓWKA. Wyrowadź równania stanu tego obwodu

$$\frac{di_L}{dt} = Ai_L + Be$$

$$y = Ci_L + De$$

$$A = -\frac{1}{L} \left(\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} \right)$$

$$B = \frac{1}{L} \left(\frac{R_1}{R_1 + R_3} - \frac{R_2}{R_2 + R_4} \right)$$

$$C = \frac{R_4}{R_2 + R_4} - \frac{R_3}{R_1 + R_3}$$

$$D = \frac{1}{R_1 + R_3} + \frac{1}{R_2 + R_4}$$

Warunek niesterowalności: $B = 0$, warunek nieobserwowności: $C = 0$.

Zadanie 16. Dany jest układ (4.62), (4.63) o niestralnej macierzy transmitancji

$$\mathbf{T}(z) = \mathbf{C} [\mathbb{I}_n z - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} = \frac{\mathbf{N}(z)}{d(z)}$$

gdzie

$$\mathbf{N}(z) = \mathbf{C} [\mathbb{I}_n z - \mathbf{A}]_{ad} \mathbf{B} + \mathbf{D} d(z) = \sum_{i=0}^n \mathbf{N}_i z^i \quad (4.570)$$

$$d(z) = \det [\mathbb{I}_n z - \mathbf{A}] = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad (4.571)$$

Wykaż, że układ ten jest osiągalny wyścielowo wtedy i tylko wtedy, gdy:
 1) wiersze macierzy $\mathbf{T}(z)$ są liniowo niezależne nad ciałem liczb zespolonych, lub

$$2) \quad \text{rząd } [\mathbf{N}_0 \ \mathbf{N}_1 \ \dots \ \mathbf{N}_n] = p \quad (4.572)$$

gdzie p jest liczbą wyjść układu.

WSKAZÓWKA.

1) Korzystając z zależności $[\mathbb{I}_n z - \mathbf{A}]^{-1} = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \mathbf{A}^i$ (patrz wskazówka do zadania 14), wyrowadź zależność

$$\mathbf{T}(z) = \frac{1}{d(z)} \left[\sum_{i=0}^{n-1} b_i \mathbf{C} \mathbf{A}^i \mathbf{B} + d(z) \mathbf{D} \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{C} \mathbf{B} & \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{B} & \dots & \mathbf{C} \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_n d(z) \\ \mathbb{I}_n b_0 \\ \mathbb{I}_n b_1 \\ \vdots \\ \mathbb{I}_n b_{n-1} \end{bmatrix}$$

oraz skorzystaj z warunku (4.129).

2) Wykaż, że

$$[\mathbf{N}_0 \ \mathbf{N}_1 \ \dots \ \mathbf{N}_n] = [\mathbf{D} \ \mathbf{C} \mathbf{B} \ \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{C} \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}] \mathbf{M}$$

gdzie \mathbf{M} jest macierzą nieosobliwą.

Zadanie 17. Wykaż, że układ (4.62), (4.63) o macierzy transmitancji

$$\mathbf{T}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ z+2 & z+2 & z+2 \end{bmatrix}$$

jest osiągalny wyścielowo.

WSKAZÓWKA. Ponieważ

$$\mathbf{T}(z) = \frac{1}{z+2} [\mathbf{N}_1 z + \mathbf{N}_0], \quad \mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_0 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

zatem korzystając z warunku (4.572), many

$$\text{rząd } [\mathbf{N}_0 \ \mathbf{N}_1] = \text{rząd } \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

Zadanie 18. Dany jest układ złożony z jeziora i hydroelektrowni. Do jeziora wpływa woda z hydroelektrowni oraz z topniejącego śniegu w górnach. Masek wody wpływającej z hydroelektrowni w jednostce czasu oznaczamy przez $u(t)$,

a masa wody wpływającej z topniejącego śniegu jest proporcjonalna do masy śniegu $x_1(t)$. Masa wody wypływającej z jeziora $k_2x_2(t)$ jest proporcjonalna do masy $x_2(t)$ wody w tym jeziorze. Z prawa zachowania masy mamy równaną

$$\dot{x}_1 = -k_1 x_1$$

$$\dot{x}_2 = k_1 x_1 - k_2 x_2 + u$$

gdzie k_1 i k_2 są znanyymi niezerowymi współczynnikami. Za odpowiedź y przy-

$$y = k_2 x_2$$

Wykaż, że układ opisany równaniami (4.573), (4.574) jest obserwowy, ale nie jest osiągalny oraz wyznacz model ARMA tego układu.

WSKAZÓWKI. Z równań (4.573), (4.574) mamy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ k_1 & -k_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \quad k_2]$$

Para (\mathbf{A}, \mathbf{B}) nie jest osiągalna, gdyż

$$\text{rząd } [\mathbf{B}, \mathbf{AB}] = \text{rząd } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -k_2 \end{bmatrix} = 1$$

Para (\mathbf{A}, \mathbf{C}) jest obserwowa, gdyż

$$\text{rząd } \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \text{rząd } \begin{bmatrix} 0 & k_2 \\ k_1 k_2 & -k_2^2 \end{bmatrix} = 2$$

Model ARMA jest opisany równaniem

$$y^{(2)}(t) + (k_1 + k_2)y^{(1)}(t) + k_1 k_2 y(t) = k_2 u^{(1)}(t) + k_1 k_2 u(t)$$

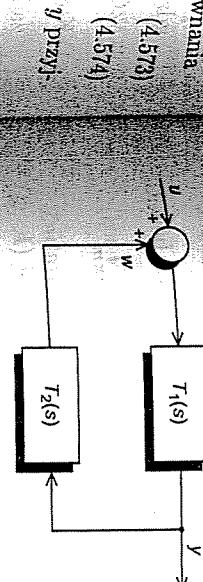
Zadanie 19. Dany jest model ARMA układu opisanego równaniem różniczkowym

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = b_0 u^{(n)}(t) + b_1 u^{(n-1)}(t) + \dots + b_n u(t)$$

gdzie $y^{(i)}(t)$ oraz $u^{(i)}(t)$ są pochodnymi i -tego rzędu odpowiedzi $y(t)$ i wyniknięcia $u(t)$. Niech układ ten będzie opisany równaniami stanu (4.133), (4.134) o macierzach \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} , które zostały przekształcone w postać kanoniczną Kalmanna (4.190). Wykazać, że model ARMA jest w postaci zredukowanej (jego transmitancja jest funkcją wymierną nieskracalną) wtedy i tylko wtedy, gdy układ nie zawiera części nieosiągalnej i obserwowej.

Wskazówka: Model ARMA obejmuje część osiągalną i obserwowaną oraz część nieosiągalną i obserwowaną.

Zadanie 20. Dany jest układ z dodatnim sprzężeniem zwrotnym (rys. 4.46)



Rys. 4.46. Schemat układu sterowania

który w torze głównym zawiera człon o transmitancji operatorowej

$$T_1(s) = \frac{1}{M_1(s)}$$

$(\deg M_1(s) = n)$, a w torze sprzężenia zwrotnego człon o transmitancji

$$T_2(s) = \frac{L_2(s)}{M_2(s)}$$

Niech \mathbf{A}_2 , \mathbf{b}_2 , \mathbf{c}_2 będzie realizacją minimalną $T_2(s)$.

Wykaż, że:

- 1) wartości własne macierzy \mathbf{A}_2 są zerami układu zamkniętego,
- 2) można tak dobrać $u(t)$, aby $y(t) = 0$ dla $t > 0$ i zerowych warunków początkowych członu w torze głównym.

Odpowiedź. Transmitancja układu zamkniętego

1)

$$T(s) = \frac{T_1(s)}{1 - T_1(s)T_2(s)} = \frac{M_2(s)}{M_1(s)M_2(s) - L_2(s)}, \quad \det [I_s - \mathbf{A}_2] = M_2(s)$$

Wartości własne macierzy \mathbf{A}_2 są więc zerami układu zamkniętego, członu w torze sprzężenia zwrotnego, C_2 – stała.

Wskazówka. Jeżeli $y(t) = 0$, to $w(t) = C_2 e^{\mathbf{A}_2 t} \mathbf{x}_2(0)$.

Zadanie 21. Dla układu singularnego o macierzach (4.218) wyznacz sterowanie u przeprowadzające ten układ ze stanu

$$x_{10} = -1$$

do stanu końcowego

$$x_k = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ODPOWIEDŹ. Sterowanie $u(t) = 1$ dla $t \in [0, 1]$.

WSKAZÓWKA. Skorzystaj z wyników przykładu 90.

Zadanie 22. Niech

$$\mathbf{V}(w, t) = \int_0^t w(\tau) e^{A\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{A^T \tau} w(\tau) d\tau, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

gdzie $w(t)$ jest macierzowym wielomianem zmiennej t .

Wykaż, że:

$$1) \quad \ker \mathbf{V}(w, t) = \prod_{i=0}^{n-1} \ker \mathbf{B}^T (\mathbf{A}^T)^i$$

dla każdego $t > 0$

$$2) \quad \begin{aligned} \operatorname{Im} [\mathbf{V}(w, t)] &= \operatorname{Im} [\mathbf{B} \ AB \ \dots \ A^{(n-1)} \mathbf{B}] \\ \text{dla każdego } t &> 0. \end{aligned}$$

WSKAZÓWKA. Jeżeli $x \in \ker \mathbf{V}(w, t)$, to

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{V}(w, t) \mathbf{x} &= \int_0^t \mathbf{x}^T w(\tau) e^{A\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{A^T \tau} w(\tau) \mathbf{x} d\tau = \\ &= \int_0^t \| \mathbf{B}^T e^{A^T \tau} w(\tau) \mathbf{x} \|^2 d\tau = 0, \end{aligned}$$

czyli $\mathbf{B}^T e^{A^T \tau} w(\tau) \mathbf{x} = 0$ dla $0 \leq \tau \leq t$. Ponieważ wielomian $w(\tau)$ ma skończoną liczbę zer w przedziale $[0, t]$, zatem

$$\mathbf{B}^T e^{A^T \tau} \mathbf{x} = 0$$

dla $0 \leq \tau \leq t$. Z dowolnością τ wynika, że

$$x \in \prod_{i=0}^{n-1} \ker [\mathbf{B}^T (\mathbf{A}^T)^i]$$

oraz

$$\operatorname{ker} \mathbf{V}(w, t) \subseteq \operatorname{ker} [\mathbf{B}^T (\mathbf{A}^T)^i]$$

Jeżeli

$$x \in \prod_{i=0}^{n-1} \ker [\mathbf{B}^T (\mathbf{A}^T)^i]$$

to

$$x \in \ker \mathbf{V}(w, t)$$

Dowód własności 2 wynika z równości

$$(\ker \mathbf{V}(w, t))^{\perp} = \operatorname{Im} \mathbf{A}^T$$

Zadanie 23. Wykaż, że układ singularny (4.203), (4.204) o pęku regularnym (E, A) jest R-sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{A} & 0 & \dots & \mathbf{B} & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \mathbf{E} & -\mathbf{A} & \dots & 0 & \mathbf{B} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \mathbf{E} & \dots & 0 & 0 & \mathbf{B} & \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\mathbf{A} & 0 & \dots & 0 & \mathbf{B} \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{E} & -\mathbf{A} & \dots & 0 & \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

o wymiarach $n^2 \times (n+m)n$ ma pełny rzad wierszowy równy n^2 .

WSKAZÓWKA. Skorzystaj z zależności

$$\mathbf{P} \mathbf{E} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} I_{n_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n_1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}$$

oraz przeprowadź redukcję, wykorzystując działania elementarne.

Zadanie 24. Wykaż, że układ singularny (4.203), (4.204) o pęku regularnym (E, A) jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{E} & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -\mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{E} & 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \begin{bmatrix} -\mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{E} & 0 \end{bmatrix}$$

o wymiarach $n^2 \times (n+m-1)n$ ma pełny rzad wierszowy równy n^2 .

WSKAZÓWKA. Skorzystaj ze wskazówki do zadania 14.

4. Własności układów

4.5. Zadania

386

Zadanie 25. Wykaż, że秩 $[N^2, NB_2] = \text{rzad } N$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony jeden z trzech pierwszych warunków twierdzenia 49.

WSKAZÓWKA. Sprawdź macierze N i B_2 do postaci

$$PNQ = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad PB_2 = \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix},$$

P, Q macierze nieosobliwe, $r = \text{rzad } N$ i skorzystaj z jednego z trzech pierwszych warunków twierdzenia 49.

Zadanie 26. Wykaż, że układ singularny (4.203), (4.204) jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz

$$\begin{bmatrix} -A & E & 0 \\ 0 & -A & E \\ \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -A & E \\ 0 & -A \\ \vdots & \ddots \\ C & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ C & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \end{bmatrix}$$

o wymiarach $(n+p)k \times nk$, dla $k \geq n$, ma pełny秩 kolumnowy równy nk .

WSKAZÓWKA. Skorzystaj z zależności

$$\begin{aligned} PEQ &= \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{n_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N \end{bmatrix} \\ PAQ &= \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I}_{n_1} \end{bmatrix} \\ CQ &= [C_1 \ C_2] \end{aligned}$$

oraz działań elementarnych na macierzach.

Zadanie 27. Wykaż, że następujące warunki:

$$1) \quad \text{rzad} \begin{bmatrix} E^s - A \\ C \end{bmatrix} = n$$

dla wszystkich skończonych $s \in \mathbb{C}$

2)

$$\ker [Es - A] \cap \ker C = \mathbf{0}$$

dla wszystkich skończonych $s \in \mathbb{C}$

3)

$$\ker [\mathbb{I}_{n_1} s - A_1] \cap \ker C_1 = \mathbf{0}$$

dla wszystkich skończonych $s \in \mathbb{C}$

są równoważne.

Zadanie 28. Korzystając z dekompozycji (4.208), (4.209) macierzy układu singularnego (4.203), (4.204) wykaż, że układ ten jest sterowalny impulsowo wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rzad } [A_{22}, B_2] = n - \text{rzad } E$$

WSKAZÓWKA. Korzystając z (4.298), wykaż, że

$$\text{rzad} \begin{bmatrix} E & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A & E & B \end{bmatrix} = 2\text{rzad } E + \text{rzad } [A_{22}, B_2]$$

Zadanie 29. Wykaż, że wielomian minimalny pokrywa się z wielomianem charakterystycznym wtedy i tylko wtedy, gdy każdej wartości własnej macierzy odpowiada dokładnie jedna klatka Jordana.

WSKAZÓWKA. Skorzystaj z postaci kanonicznej Jordana i wykaż, że największy wspólny dzielnik minorów stopnia $n-1$ jest równy 1.

Zadanie 30. Dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

wyznacz jej postać kanoniczną Jordana A_J oraz macierz P przekształcającą macierz w postać A_J , $A_J = P^{-1}AP$.

ODPOWIEDŹ.

$$\mathbf{A}_J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

WSKAZÓWKA. Skorzystaj z procedury 8.

Zadanie 31. Wyznacz macierz \mathbf{P} przekształcającą macierz

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

w postać diagonalną.

ODPOWIEDŹ.

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \text{diag} [-1, -2, -3]$$

WSKAZÓWKA. Wyznacz wartości własne $s_1 = -1$, $s_2 = -2$, $s_3 = 3$ oraz odpowiadające im wektory własne p_1, p_2, p_3

$$\mathbf{P} = [p_1, p_2, p_3]$$

Zadanie 32. Niech para $(\bar{\mathbf{A}}_3, \bar{\mathbf{b}}_3)$ będzie w postaci kanonicznej (4.232), a para $(\bar{\mathbf{A}}_{15}, \bar{\mathbf{b}}_{15})$ w postaci kanonicznej (4.103) pary osiągalnej $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}\}$. Wykaż, że pary te są związane zależnościami

$$\bar{\mathbf{A}}_4 = \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}}_3 \bar{\mathbf{M}}^{-1}, \quad \bar{\mathbf{b}}_4 = \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{b}}_3$$

przy czym

$$\bar{\mathbf{M}} = [\bar{\mathbf{b}}_4, \bar{\mathbf{A}}_4 \bar{\mathbf{b}}_4, \dots, \bar{\mathbf{A}}_4^{n-1} \bar{\mathbf{b}}_4] [\bar{\mathbf{b}}_3, \bar{\mathbf{A}}_3 \bar{\mathbf{b}}_3, \dots, \bar{\mathbf{A}}_3^{n-1} \bar{\mathbf{b}}_3]$$

WSKAZÓWKA. Skorzystaj z równości

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}_3^{-1} \bar{\mathbf{A}}_3 \mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_4^{-1} \bar{\mathbf{A}}_4 \mathbf{P}_4$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{P}_3^{-1} \bar{\mathbf{b}}_3 = \mathbf{P}_4^{-1} \bar{\mathbf{b}}_4$$

z których otrzymujemy

$$\bar{\mathbf{A}}_4 = \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_3^{-1} \bar{\mathbf{A}}_3 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4^{-1} = \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{A}}_3 \bar{\mathbf{M}}^{-1}$$

$$\bar{\mathbf{b}}_4 = \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{b}}_3, \quad M = \mathbf{P}_4 \mathbf{P}_3^{-1}$$

Zadanie 33. Wykaż, że jeżeli para (\mathbf{A}, \mathbf{C}) jest obserwowały, to istnieje macierz nieosobliwa \mathbf{Q}_3

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}_3 \\ \hat{\mathbf{C}}_3 \hat{\mathbf{A}}_3 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{C}}_3 \hat{\mathbf{A}}_3^{n-1} \end{bmatrix}$$

która przekształca tę parę w postać kanoniczną

$$\hat{\mathbf{A}}_3 = \mathbf{Q}_3^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.575)$$

$$\hat{\mathbf{C}}_3 = \mathbf{C} \mathbf{Q}_3 = [0 \dots 0 \ 1] \quad (4.576)$$

przy czym a_0, a_1, \dots, a_{n-1} są współczynnikami wielomianu charakterystycznego macierzy \mathbf{A} . Wiersze $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$ macierzy \mathbf{Q}_3^{-1} można wyznaczyć kolejno z zależności $\mathbf{q}_n = \mathbf{C}$, $\mathbf{q}_{n-1} = \mathbf{q}_n \mathbf{A}, \dots, \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2 \mathbf{A}$.

WSKAZÓWKA. Korzystając z zależności (4.575), (4.576), wykaż, że

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}_3 \\ \hat{\mathbf{C}}_3 \hat{\mathbf{A}}_3 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{C}}_3 \hat{\mathbf{A}}_3^{n-1} \end{bmatrix}$$

a następnie skorzystaj z równości $\hat{\mathbf{A}}_3 \mathbf{Q}_3^{-1} = \mathbf{Q}_3^{-1} \mathbf{A}$, $\hat{\mathbf{C}}_3 \mathbf{Q}_3^{-1} = \mathbf{C}$ dla postaci kanonicznej $(\hat{\mathbf{A}}_3, \hat{\mathbf{C}}_3)$.

Zadanie 34. Wykaż, że jeżeli para (\mathbf{A}, \mathbf{C}) jest obserwowały, to istnieje macierz nieosobliwa \mathbf{Q}_4

$$\mathbf{Q}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}_4 \\ \hat{\mathbf{C}}_4 \hat{\mathbf{A}}_4 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{C}}_4 \hat{\mathbf{A}}_4^{n-1} \end{bmatrix}$$

która przekształca tę parę w postać kanoniczną

$$\hat{\mathbf{A}}_4 = \mathbf{Q}_4^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}_4 = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.577)$$

$$\hat{\mathbf{C}}_4 = \mathbf{C} \mathbf{Q}_4 = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$$

przy czym a_0, a_1, \dots, a_{n-1} są współczynnikami wielomianu charakterystycznego macierzy \mathbf{A} . Wiersze $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$ macierzy \mathbf{Q}_4^{-1} można wyznaczyć kolejno z zależności $\mathbf{q}_1 = \mathbf{C}, \mathbf{q}_2 = a_{n-1}\mathbf{q}_1\mathbf{A}, \mathbf{q}_3 = a_{n-2}\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2\mathbf{A}, \dots, \mathbf{q}_n = a_1\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_{n-1}\mathbf{A}$.

WSKAZÓWKI. Korzystając z zależności (4.577), (4.578), wykaż, że

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{Q}_4 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}_4 \\ \hat{\mathbf{C}}_4\hat{\mathbf{A}}_4 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{C}}_4\hat{\mathbf{A}}_4^{n-1} \end{bmatrix}$$

a następnie skorzystaj z równości $\hat{\mathbf{A}}_4\mathbf{Q}_4^{-1} = \mathbf{Q}_4^{-1}\mathbf{A}, \hat{\mathbf{C}}_4\mathbf{Q}_4^{-1} = \mathbf{C}$ dla postaci kanonicznej ($\hat{\mathbf{A}}_4, \hat{\mathbf{C}}_4$).

Zadanie 35. Niech a_k^{ij} będzie elementem podmacierzy $\bar{\mathbf{A}}_{ij}, i \neq j$ postaci kanonicznej (4.143). Wykaż, że przy wyborze w $\bar{\mathbf{A}}$ wierszy kolumn liniowo niezależnych z ciągu (4.135) jest słuszne

$$a_k^{ij} = 0 \quad \text{dla } k > p_{ij} = \begin{cases} \min(d_i - 1, d_j) + 1 & \text{dla } i < j \\ \min(d_i, d_j) & \text{dla } i > j \end{cases}$$

WSKAZÓWKA. Skorzystaj z możliwości wyrażenia kolumny $\mathbf{A}^{d_i} \mathbf{B}_i$ za pomocą kombinacji liniowej kolumn liniowo niezależnych poprzedzających tę kolumnę.

Zadanie 36. Niech \mathbf{q} będzie n -tym ($i = 1, \dots, n$) wyrazem macierzy

$$\mathbf{P}^{-1} = [\mathbf{b}, \mathbf{Ab}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}]^{-1}$$

parę osiągalnej (\mathbf{A}, \mathbf{b}), $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$. Wykaż, że jeżeli

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{q}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{q}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{QP} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \mathbf{q}\mathbf{A}^nb \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \mathbf{q}\mathbf{A}^nb & \cdots & \mathbf{q}\mathbf{A}^{2n-3}\mathbf{b} & \mathbf{q}\mathbf{A}^{2n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad |\det \mathbf{QP}| = 1.$$

WSKAZÓWKI. Skorzystaj z zależności

$$\mathbf{QA} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}\mathbf{A} \\ \mathbf{q}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{q}\mathbf{A}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n \\ -\sum_{i=0}^{n-1} a_i \mathbf{q}_{i+1} \end{bmatrix},$$

przy czym a_0, a_1, \dots, a_{n-1} – współczynniki wielomianu $\det[\mathbf{I}s - \mathbf{A}]$ oraz

$$\mathbf{q}\mathbf{A}^i\mathbf{b} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = n-1 \\ 0 & \text{dla } i = 0, 1, \dots, n-2 \end{cases}$$

Zadanie 37. Wyznacz \mathbf{Q}_1 i \mathbf{Q}_2 , przekształcające parę obserwowlaną (4.197) w postacie kanoniczne

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_1 = \mathbf{C} \mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{Q}_2^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \mathbf{C} \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ODPOWIEDŹ.

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

WSKAZÓWKI. Skorzystaj z zależności

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_k \\ \mathbf{C}_k \mathbf{A}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} \mathbf{Q}_k \quad \text{dla } k = 1, 2$$

oraz z faktu, że macierz $\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix}$ ma pełny rzad kolumnowy, gdyż para (4.197) jest obserwowlana.

Dodatek A

PODSTAWY RACHUNKU MACIERZOWEGO

W dodatku tym zebrano podstawowe wiadomości z rachunku macierzowego. Dowody podanych twierdzeń można znaleźć w wielu książkach, np. w [85, 87, 37].

A.1. Podstawowe rodzaje macierzy

DEFINICJA 129

Macierzą o m wierszach i n kolumnach nazywamy funkcję, która każdej parze liczb naturalnych (i, j) , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, przyporządkowuje jeden element a_{ij} będący liczbą, wielomianem lub operatorem (np. różniczkowaniem, całkowaniem).

Macierz zapisujemy w postaci tablicy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

lub krócej $A = [a_{ij}]_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}$.

DEFINICJA 130

Wymiarem macierzy (A.1) nazywamy parę uporządkowanych $m \times n$ liczb, by wiersz m i kolumna n . Macierz nazywany prostokątną, jeśli $m \neq n$ i kwadratową, jeżeli $m = n$ i wtedy n nazywamy stopniem macierzy A .

Zbiór macierzy o elementach rzeczywistych (zespolonych) i wymiarach $m \times n$ oznaczac będziemy przez $\mathbb{R}^{m \times n}$ ($\mathbb{C}^{m \times n}$). Jeżeli $n = 1$, to macierz nazywamy kolumnową, a jeżeli $m = 1$, to macierz tę nazywamy wierszową.

DEFINICJA 131

Główna przekątna macierzy (A.1) dla $m = n$ składa się z elementów a_{ii} .
Sumę tych elementów nazywamy śladem macierzy i oznaczamy $\text{tr } \mathbf{A}$, czyli

$$\text{tr } \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (\text{A.2})$$

A.2. Wyznacznik macierzy i jego własności

DEFINICJA 132

Największą liczbę całkowiąq nazywaną q taką, że rząd $\mathbf{A}^q =$ rząd \mathbf{A}^{q+1} (skalar) zwany wyznacznikiem tej macierzy, określone rekurencyjnie następującco:

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \quad \text{dla } n = 1$$

$$\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k} \quad \text{dla } n > 1 \quad (\text{A.3})$$

DEFINICJA 133
Macierz kwadratowąq \mathbf{A} nazywamy symetryczną, jeśli $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, czyli $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, \dots, n$.

Szczególnym przypadkiem macierzy symetrycznej jest macierz diagonalna, której wszystkie elementy leżące poza główną przekątną są zerami $a_{ij} = 0$, $i \neq j$. Szczególnym przypadkiem macierzy diagonalnej jest macierz skalarna,

której wszystkie elementy na głównej przekątnej są równe $a_{ii} = a_i$, $i = 1, \dots, n$. Macierz Z macierzą skalarną dla $a = 1$ oznaczamy macierz jednostkowąq \mathbb{I}_n . Macierz, której wszystkie elementy są równe zero nazywamy macierz zerowąq $\mathbf{0}_{mn}$, przy czym m oznacza liczbę wierszy, a n liczbę kolumn.

DEFINICJA 134
Macierz kwadratowąq, której elementy spełniają warunek

$$\begin{aligned} a_{ij} &= -a_{ji} & i, j &= 1, \dots, n \\ \mathbf{A}^T &= -\mathbf{A} \end{aligned}$$

nazywamy skośnie-symetryczną (antisymetryczną).

DEFINICJA 135

Macierz kwadratowąq nazywamy górnotorójkątną (dolnotrójkątną), jeśli wszystkie elementy położone poniżej (powyżej) głównej przekątnej są równe zero.

Wyznacznik det \mathbf{A} ma następujące własności:

- Transpozycja nie zmienia wartości wyznacznika, tzn. $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$.
- Wyznacznik $\det \mathbf{A} = 0$, jeśli macierz \mathbf{A} zawiera jeden wiersz (kolumnę) złożoną z samych zer.
- Wyznacznik $\det \mathbf{A}$ zmienia znak na przeciwny, gdy zamieniamy miejscami dwa wiersze (kolumny) macierzy \mathbf{A} .
- Wyznacznik $\det \mathbf{A} = 0$, gdy dwa wiersze (kolumny) macierzy \mathbf{A} są identyczne lub proporcjonalne.
- Jeżeli macierz \mathbf{B} powstaje z macierzy \mathbf{A} przez pominięcie jednego wiersza (kolumny) przez liczbę c , to
$$\det \mathbf{B} = c \det \mathbf{A}$$
- Jeżeli macierz \mathbf{B} powstaje z macierzy \mathbf{A} przez pomnożenie wszystkich elementów przez liczbę c , to
$$\det \mathbf{B} = c^n \det \mathbf{A}$$
- Wyznacznik $\det \mathbf{A}$ nie zmienia wartości, jeśli do jednego wiersza (kolumny) dodać kombinację liniową innych wierszy (kolumn) macierzy \mathbf{A} .

Elementy a_{ii} macierzy skośnie-symetrycznej są zerami. Każdą macierz kwadratowąq \mathbf{A} można rozłożyć na część symetryczną $\frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^T}{2}$ oraz skośnie-symetryczną $\frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^T}{2}$.

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} D_{ij} = \begin{cases} \det A & \text{dla } k = i \\ 0 & \text{dla } k \neq i \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} D_{ij} = \begin{cases} \det A & \text{dla } k = j \\ 0 & \text{dla } k \neq j \end{cases} \quad (A.4)$$

DEFINICJA 137

Macierz kwadratowa A o niezerowym wyznaczniku nazywamy nieosobliwą i osobliwą, gdy $\det A = 0$.

A.3. Podstawowe działania na macierzach

DEFINICJA 138

Dwie macierze $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ nazywamy równymi, jeżeli mają te same wymiary i odpowiadnie ich elementy są równe, $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$.

DEFINICJA 139

Sumą (różnicą) macierzy $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ o jednakowych wymiarach nazywamy macierz $C = [c_{ij}]$, której elementy są sumą (różnicą) odpowiednich elementów tych macierzy, tzn. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$).

Z definicji sumy macierzy wynika, że:

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad \text{– dodawanie macierzy jest łączne;}$$

$$A + B = B + A \quad \text{– dodawanie macierzy jest przemienne;}$$

$$A + \mathbb{O}_{mn} = A \quad \text{– macierz zerowa } \mathbb{O}_{mn} \text{ jest elementem neutralnym dodawania.}$$

DEFINICJA 140

Iloczynem macierzy $A = [a_{ij}]$ i skalaru λ nazywamy macierz $B = [\lambda a_{ij}]$

Z definicji tej wynika, że:

$$\mathbb{I}A = A,$$

$$A\mathbb{O}_{nn} = \mathbb{O}_{nn},$$

$$\alpha(\beta A) = \alpha\beta A,$$

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A,$$

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

dla dowolnych macierzy $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ i skalarów $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

DEFINICJA 141

Iloczynem macierzy $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ i $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times p}$ nazywamy macierz $C = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times p}$, której elementy są określone zależnością

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, p$$

UWAGA 45. Mnożenie macierzy A przez macierz B jest określone wtedy i tylko wtedy, gdy liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B .

W przypadku ogólnym mnożenie macierzy jest nieprzemienne, tzn. $AB \neq BA$. Rozróżniamy mnożenie prawostrome macierzy A przez macierz B ($C = AB$) oraz mnożenie lewostronne macierzy A przez macierz B ($D = BA$).

DEFINICJA 142

Macierze A i B spełniające warunek $AB = BA$ nazywamy macierzami przemiennymi.

Z definicji sumy i iloczynu macierzy wynikają następujące własności:

$$A(BC) = (AB)C,$$

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B,$$

$$(A + B)C = AC + BC,$$

$$C(A + B) = CA + CB$$

dla dowolnych macierzy A, B, C spełniających warunek wykonalności doda-wania i mnożenia macierzy oraz $\alpha \in \mathbb{R}$.

DEFINICJA 143

Potęgę k -tej macierzy kwadratowej $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definiujemy następująco:

$$A^0 = \mathbb{I}_n, \quad A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k, \text{ razy}} \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots$$

Dla dowolnych liczb naturalnych k i p zachodzi

$$A^k A^p = A^{k+p}$$

DEFINICJA 144

Macierz kwadratową N nazywamy nilpotentną, jeżeli istnieje liczba naturalna v (zwana indeksem nilpotencji) taka, że $N^v = 0$, ale $N^{v-1} \neq 0$.

DEFINICJA 145

Macierz kwadratowa A nazywamy idempotentną, jeżeli $A^2 = A$.

Transpozycja macierzy ma następujące własności:

$$(A+B)^T = A^T + B^T;$$

$$(A^T)^T = A,$$

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T - (\lambda - \text{skalar}),$$

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

DEFINICJA 146

Macierzę sprzężoną A^* z macierzą zespoloną $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$ nazywamy macierz otrzymaną w wyniku transponowania macierzy $\bar{A} = [\bar{a}_{ij}]$ powstałą z macierzy A przez zastąpienie każdego elementu a_{ij} elementem z nim sprzężonym \bar{a}_{ij} , tzn.

$$A^* = [\bar{a}_{ji}] \in \mathbb{C}^{n \times m}$$

UWAGA 46. Jeżeli A jest macierzą rzeczywistą, to $A^* = A^T$.

Z definicji macierzy sprzężonej wynikają następujące własności:

$$(A+B)^* = A^* + B^*,$$

$$(A^*)^* = A,$$

$$(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

$$(AB)^* = B^* A^*$$

dla dowolnych macierzy A i B spełniających warunek wykonalności dodawania, i mnożenia.

DEFINICJA 147
Macierz nazywaną hermitowską, jeżeli $A^ = A$.***A.4. Minory i wyznacznik iloczynu macierzy oraz rząd macierzy**

Niech $A_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_q}$ będzie minorem macierzy $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ($q \leq \min(m, n)$) złożonym z wierszy o numerach i_1, \dots, i_q oraz kolumn o numerach j_1, \dots, j_q .

A.4. Minory i wyznacznik iloczynu macierzy oraz rząd macierzy**TWIERDZENIE 75** (Bineta-Cauchego)

Minor stopnia q ($q \leq \min(m, n)$) iloczynu macierzy $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ i $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C = AB$ jest powiązany z minorami tego samego stopnia tych macierzy zależnością

$$C_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_q} = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_q \leq n} A_{k_1, \dots, k_q}^{i_1, \dots, i_q} B_{j_1, \dots, j_q}^{k_1, \dots, k_q} \quad (\text{A.5})$$

UWAGA 47. Jeżeli macierze A i B są kwadratowe ($n = m = p$), to z (A.5) otrzymujemy

$$\det C = \det A \det B$$

DEFINICJA 148

Rządem macierzy nazywamy największy stopień podmacierzy o niezero-wym wyznaczniku.

Z tej definicji wynika, że rząd $A \leq \min(m, n)$. Kolumny $a_i = [a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}]^T$ macierzy $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ możemy traktować jako wektory m -wymiarowej przestrzeni wektorowej.

DEFINICJA 149

Kolumny a_1, a_2, \dots, a_k ($k \leq m$) nazywamy liniowo zależnymi nad ciałem F wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją współczynniki liniowe $c_i \in F$, $i = 1, \dots, k$ nie wszystkie równe zero takie, że

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_k a_k = 0$$

W przypadku przeciwnym, gdy zależność ta implikuje $c_i = 0$ dla $i = 1, \dots, k$, kolumny a_1, a_2, \dots, a_k nazywamy liniowo niezależnymi.

Kolumny a_1, a_2, \dots, a_k są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy rząd $A = k$. Liczba kolumn liniowo niezależnych jest zawsze równa liczbie wierszy liniowo niezależnych. Rząd macierzy A nie zmienia się jeżeli:

- dowolna kolumnę (wiersz) pomnożymy przez niezerowy skalar,
- zamienimy miejscami dowolne dwie kolumny (wiersze),
- do dowolnej kolumny (wiersza) dodamy kombinację liniową pozostałych kolumn (wierszy).

Z zależności (A.5) wynika, że

$$\text{rząd } (AB) \leq \min(\text{rząd } A, \text{rząd } B)$$

A. Podstawy rachunku macierzowego

Jeżeli \mathbf{A} (B) jest macierzą nieosobiową, to $\text{rzad}(\mathbf{AB}) = \text{rzad } B$ ($\text{rzad}(\mathbf{AB}) = \text{rzad } A$).

TWIERDZENIE 76 (Sylwester)

Rząd iloczynu macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ i $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ spełnia nierówność

$$\text{rzad } \mathbf{A} + \text{rzad } \mathbf{B} - n \leq \text{rzad}(\mathbf{AB}) \leq \min(\text{rzad } \mathbf{A}, \text{rzad } \mathbf{B}) \quad (\text{A.7})$$

Z definicji rzędu macierzy wynika, że

$$\text{rzad}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \leq \text{rzad } \mathbf{A} + \text{rzad } \mathbf{B} \quad (\text{A.8})$$

Wykażemy, że

$$\text{rzad}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq \text{rzad } \mathbf{A} + \text{rzad } \mathbf{B}$$

Macierze $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ przedstawiamy w postaci iloczynów $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2, \mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2$, przy czym $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{R}^{m \times r_1}, \mathbf{A}_2 \in \mathbb{R}^{r_1 \times n}$, a $\mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{m \times r_2}, \mathbf{B}_2 \in \mathbb{R}^{r_2 \times n}$, $r_1 = \text{rzad } \mathbf{A}, r_2 = \text{rzad } \mathbf{B}$. Podstawiając (A.8) do równości

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1] \begin{bmatrix} \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}$$

otrzymamy zależność (A.9).

A.5. Jądro i obraz macierzy

DEFINICJA 150

Jądrom ker $\mathbf{A}(N(\mathbf{A}))$ macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ nazywamy zbiór wektorów $x \in \mathbb{R}^n$ takich, że $\mathbf{Ax} = 0$, tzn.

$$\ker \mathbf{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} = 0\} \quad (\text{A.10})$$

Jądro ker \mathbf{A} macierzy zawiera wektor zerowy wtedy i tylko wtedy, gdy macierz \mathbf{A} ma pełny rzad kolumnowy.

DEFINICJA 151

Obrazem $\text{Im } \mathbf{A}(R(\mathbf{A}))$ macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ nazywamy zbiór wektorów $y \in \mathbb{R}^n$ takich, że dla każdego z nich istnieje wektor $x \in \mathbb{R}^n$ spełniający warunek $y = \mathbf{Ax}$, tzn.

$$\text{Im } \mathbf{A} = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists, x \in \mathbb{R}^n, y = \mathbf{Ax}\} \quad (\text{A.11})$$

A.6. Lewa i prawa odwrotność macierzy

401

Macierz \mathbf{A} w ustalonych bazach opisuje operator liniowy, który odwzorowuje przestrzeń liniową (wektorową) $X \subset \mathbb{R}^n$ w przestrzeń liniową $Y \subset \mathbb{R}^m$, czyli $\mathbf{A} : X \mapsto Y$. Jądro ker \mathbf{A} jest podprzestrzenią przestrzeni X , a obraz Im \mathbf{A} jest podprzestrzenią przestrzeni Y . Niech dim ker \mathbf{A} (Im \mathbf{A}) będzie wymiarem podprzestrzeni ker \mathbf{A} (Im \mathbf{A}). Wtedy zachodzą zależności

$$\begin{aligned} \text{rzad } \mathbf{A} &= \dim(\text{Im } \mathbf{A}) \\ \dim(\ker \mathbf{A}) + \dim(\text{Im } \mathbf{A}) &= n \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

DEFINICJA 152

Ortogonalnym dopełnieniem V^\perp podprzestrzeni liniowej V nazywamy zbiór wektorów x ortogonalnych do wszystkich wektorów w podprzestrzeni V , czyli

$$V^\perp = \{x : v^T x = 0, \forall x \in V\} \quad (\text{A.9})$$

UWAGA 48. Z definicji ker \mathbf{A} , Im \mathbf{A} oraz ortogonalnego dopełnienia V^\perp mamy, że

$$\begin{aligned} (\text{Im } \mathbf{A})^\perp &= \ker \mathbf{A}^T, \\ (\ker \mathbf{A})^\perp &= \text{Im } \mathbf{A}^T \end{aligned}$$

A.6. Lewa i prawa odwrotność macierzy

DEFINICJA 153

Macierz $\mathbf{A}_L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ nazywamy lewą odwrotnością macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, gdy

$$\mathbf{A}_L \mathbf{A} = \mathbb{I}_n \quad (\text{A.13})$$

TWIERDZENIE 77

Macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ma lewą odwrotność \mathbf{A}_L wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{rzad } \mathbf{A} = n$

$$(\text{A.14})$$

TWIERDZENIE 78

Jeżeli jest spełniony warunek (A.14), to lewa odwrotność \mathbf{A}_L macierzy \mathbf{A} jest określona przez jeden z niżej podanych wzorów

$$\mathbf{A}_L = [\mathbf{A}^T \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}^T + K_1 \left(\mathbb{I}_n - \mathbf{A} [\mathbf{A}^T \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}^T \right) \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbf{A}_L = [\mathbf{K}_2 \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{K}_2 \quad (\text{A.16})$$

$$\mathbf{A}_L = \left[-\frac{1}{a_0} (\mathbb{I}_n - \mathbf{K}_3 \mathbf{A}_2) [\mathbf{A}_1^{n-1} + a_{n-1} \mathbf{A}_1^{n-2} + \dots + a_1 \mathbb{I}_n, \mathbf{K}_3] \right] \mathbf{P} \quad (\text{A.17})$$

dla dowolnych macierzy $\mathbf{K}_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{K}_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ takiej, że $\det[\mathbf{K}_2 \mathbf{A}] \neq 0$, $\mathbf{K}_3 \in \mathbb{R}^{n \times (m-n)}$, przy czym $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ jest macierzą niesobiorową permutacji wierszy macierzy \mathbf{A} taka, że $\mathbf{P}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det \mathbf{A}_1 \neq 0$, $\mathbf{A}_2 \in \mathbb{R}^{(m-n) \times n}$, a_0, a_1, \dots, a_{n-1} są współczynnikami wielomianu

$$\det[\mathbb{I}_n s - \mathbf{A}_1] = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0.$$

DEFINICJA 154
Macierz $\mathbf{A}_P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nazywamy prawą odwrotnością macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, gdy

$$\mathbf{A}\mathbf{A}_P = \mathbb{I}_m \quad (\text{A.18})$$

TWIERDZENIE 79
Macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ma prawą odwrotność \mathbf{A}_P wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rzad } \mathbf{A} = m \quad (\text{A.19})$$

-TWIERDZENIE 80-

Jedzieli jest spełniony warunek (A.19), to prawa odwrotność \mathbf{A}_P macierzy \mathbf{A} jest określona przez jeden z nizzej podanych wzorów

$$\mathbf{A}_P = \mathbf{A}^T [\mathbf{A}^T \mathbf{A}]^{-1} + (\mathbb{I}_n - \mathbf{A}^T [\mathbf{A} \mathbf{A}^T]^{-1} \mathbf{A}) \mathbf{K}_1 \quad (\text{A.20})$$

$$\mathbf{A}_P = \mathbf{K}_2 [\mathbf{A} \mathbf{K}_2]^{-1} \quad (\text{A.21})$$

$$\mathbf{A}_P = \mathbf{Q} \left[-\frac{1}{a_0} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{m-1} + a_{m-1} \mathbf{A}_1^{m-2} + \dots + a_1 \mathbb{I}_m \\ \mathbf{K}_3 \end{bmatrix} (\mathbb{I}_m - \mathbf{A}_2 \mathbf{K}_3) \right] \quad (\text{A.22})$$

dla dowolnych macierzy $\mathbf{K}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{K}_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ takiej, że $\det[\mathbf{A} \mathbf{K}_2] \neq 0$, $\mathbf{K}_3 \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}$, przy czym $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest macierzą niesobiorową permutacji kolumn macierzy \mathbf{A} taką, że $\mathbf{A}\mathbf{Q} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2]$, $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\det \mathbf{A}_1 \neq 0$, $\mathbf{A}_2 \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$, a_0, a_1, \dots, a_{m-1} są współczynnikami wielomianu

$$\det[\mathbb{I}_m s - \mathbf{A}_1] = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0.$$

Z wzorów (A.15), (A.16), (A.17) i (A.20), (A.21), (A.22) wynika, że dla danej macierzy istnieje wiele lewych lub prawych odwrotności. Ma ona dokładnie jedną lewą i prawą odwrotność, gdy macierz ta jest niesobiorowa i wtedy $\mathbf{A}_L = \mathbf{A}_P = \mathbf{A}^{-1}$.

DEFINICJA 155
Macierz nazywamy odwrotną, jeżeli spełnia ona warunek

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbb{I}_n$$

Macierz odwrotną możemy wyznaczyć, korzystając ze wzoru

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{A}_{\text{ad}}}{\det \mathbf{A}} \quad (\text{A.23})$$

gdzie \mathbf{A}_{ad} jest macierzą dodatkową macierzy \mathbf{A} , powstałą przez zastąpienie każdego elementu macierzy transponowanej \mathbf{A}^T odpowiadającym mu dopełnieniu algebraicznym

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

przy czym M_{ij} jest minorem stopnia $n-1$ macierzy \mathbf{A}^T , tzn. wyznacznikiem macierzy powstającej przez wykreszczenie i -tego wiersza oraz j -tej kolumny z macierzy \mathbf{A}^T .

A.7. Rozwiązywanie układu równań liniowych

Układ m równań liniowych z n niewiadomymi x_1, x_2, \dots, x_n można zapisać w postaci

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

gdzie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

TWIERDZENIE 81 (Kroneckera-Capellego)

Układ równań (A.25) ma rozwiązanie \mathbf{x} wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rzad } [\mathbf{A}, \mathbf{b}] = \text{rzad } \mathbf{A} \quad (\text{A.26})$$

lub równoważnie

$$\text{Im } \mathbf{b} \subset \text{Im } \mathbf{A}$$

$$(\text{A.27})$$

Jeżeli rzad $A = m$, to warunek (A.26) (i (A.27)) jest spełniony dla dowolnego \mathbf{b} i układ równań (A.25) ma rozwiązańie w postaci

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}_P \mathbf{b} \quad (\text{A.28})$$

gdzie \mathbf{A}_P jest prawą odwrotnością macierzy A .

TWIERDZENIE 82

Układ równań (A.25) ma dokładnie jedno rozwiązanie \mathbf{x} wtedy i tylko wtedy, gdy rzad $A = n$.

TWIERDZENIE 83

Układ równań (A.25) dla $m = n$ i dowolnego \mathbf{b} ma dokładnie jedno rozwiązanie \mathbf{x} wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0$. W tym przypadku $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$.

Jeżeli $m > n$, rzad $A = n$ i nie jest spełniony warunek (A.26), to układ równań (A.25) nie ma rozwiązania. Można w tym przypadku wyznaczyć rozwiązanie przybliżone $\bar{\mathbf{x}}$ minimalizujące kwadrat modulu wektora

$$\mathbf{y} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}$$

Rozwiązań to dane jest wzorem

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_P \mathbf{b} \quad (\text{A.29})$$

TWIERDZENIE 84

Jeżeli rzad $A = n$, to jedynie rozwiązanie układu równań (A.25) minimalizujące kwadrat modulu wektora $\mathbf{y} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}$ dane jest wzorem

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \left[\mathbf{A} \mathbf{A}^T \right]^{-1} \mathbf{b} \quad (\text{A.30})$$

TWIERDZENIE 85

Jeżeli rzad $A = r < n$, to rozwiązańe przybliżone $\bar{\mathbf{x}}$ układu równań (A.25) minimalizujące kwadrat modulu wektora $\mathbf{y} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}$ dane jest wzorem

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{+} \mathbf{b} \quad (\text{A.31})$$

przy czym $\mathbf{A}^{+} = \mathbf{A}_2^T [\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^T]^{-1} [\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1]$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $\mathbf{A}_2 \in \mathbb{R}^{r \times n}$, rzad $\mathbf{A}_1 = \text{rzad } \mathbf{A}_2 = r$.

A.8. Wartości własne i wektory własne macierzy

gdzie \mathbf{A}_P jest prawą odwrotnością macierzy A .

DEFINICJA 156

Wielomian postaci

$$\varphi(\lambda) = \det [\mathbb{I}_n \lambda - \mathbf{A}] = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \quad (\text{A.32})$$

nazywany wielomianem charakterystycznym macierzy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

DEFINICJA 157

Wartościami własnymi macierzy A nazywamy pierwiastki $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ równania charakterystycznego $\varphi(\lambda) = 0$, a zbiór tych wartości własnych wielomianem macierzy A .

Dla macierzy rzeczywistych współczynniki $a_i, i = 0, 1, \dots, n-1$ są liczbami rzeczywistymi a wartości własne będą liczbami rzeczywistymi lub zespolonymi parami sprzężonymi. Wartość własna λ_i macierzy A może być zerem wielokrotnym wielomianu (A.32). Wartość własna λ_i ma krotność algebraiczną m_i , jeżeli λ_i jest m_i -krotnym zerem wielomianu (A.32). Wartość własna λ_i ma krotność geometryczną n_i , gdy

$$\dim \ker (\mathbb{I}_n \lambda_i - \mathbf{A}) = n_i$$

Jeżeli rzad $[\mathbb{I}_n \lambda_i - \mathbf{A}] = n - \alpha$, to λ_i jest wartością własną macierzy A o krotności geometrycznej $n_i = \alpha$ oraz $m_i \geq n_i$.

DEFINICJA 158

Macierz, dla której $n_i = n_i$ dla wszystkich wartości własnych λ_i , nazywany macierzą prostej struktury, w przypadku przeciwnym – macierzą złożonej struktury.

TWIERDZENIE 86

Macierze podobne $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i $B = P A P^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det P \neq 0$ mają równe wielomiany charakterystyczne $\det [\mathbb{I}\lambda - A] = \det [\mathbb{I}\lambda - B]$ oraz takie same wartości własne o tych samych krotnościach algebraicznych i geometrycznych.

DEFINICJA 159

Prawostronnym wektorem własnym odpowiadającym (przyporządkowanym) wartością własną λ macierzy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nazywany niezerowy wektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ spełniający równanie

$$[\mathbb{I}\lambda - A] \mathbf{x} = 0$$

DEFINICJA 160

Lewostronnym wektorem własnym odpowiadającym (przyporządkowanym) wartościowej λ macierzy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nazywamy niezerowy wektor $x^T \in \mathbb{R}^n$ spełniający równanie

$$x^T [\lambda I - A] = 0$$

UWAGA 49. Jeżeli x jest wektorem własnym macierzy A , to αx , $\alpha \neq 0$, jest również wektorem własnym tej macierzy.

TWIERDZENIE 87

Wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym macierzy są wektorami klinowo niezależnymi.

Każda niezerowa kolumna (wiersz) macierzy doliczonej $[\lambda I - A]_{\text{ad}}$ jest prawostronnym (lewostronnym) wektorem własnym odpowiadającym wartościom własnym λ macierzy A . Wartości własne macierzy hermitowskiej A ($A^* = A$) są liczbami rzeczywistymi, a wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne. Wartości własne macierzy symetrycznej A ($A^T = A$) są liczbami rzeczywistymi, a wektory własne odpowiadające różnym wartościami własnym są ortogonalne.

DEFINICJA 163

Zależność (A.35) nazywamy rozkładem macierzy hermitowskiej A względem wartości własnych.

W szczególnym przypadku dla macierzy symetrycznej $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($A^T = A$) zależności (A.34) i (A.35) przyjmują postać

$$Q^T A Q = \text{diag} [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n] \quad (\text{A.36})$$

gdzie u_i jest i -ta kolumną macierzy U .

Mnożąc lewostronnie przez U^* i prawostronnie przez U , z zależności (A.34) otrzymamy

$$A = U \text{diag} [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n] U^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i u_i^* \quad (\text{A.35})$$

gdzie u_i jest i -ta kolumną macierzy U .

DEFINICJA 161

Macierz niesobliwą $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ nazywaną unitarną, gdy

$$UU^* = U^*U = \mathbb{I}_n$$

DEFINICJA 162

Macierz niesobliwą $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nazywaną ortonormalną, gdy

$$QQ^T = Q^T Q = \mathbb{I}_n$$

DEFINICJA 163

Dla każdej macierzy $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ istnieje macierze unitarne $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ takie, że

$$A = U \Sigma V^*$$

gdzie

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad m < n \quad (\text{A.38})$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad m > n$$

Liczy rzeczywiste $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l = \min(m, n)$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$, $\sigma_{r+1} = \dots = \sigma_m = 0$, $r = \text{rząd } A$, określone jednocześnie przez A .

TWIERDZENIE 90

Wartości szczególnne σ_i z wartościami własnymi λ_i macierzy $A^* A$ są związane zależnością

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, \quad i = 1, \dots, r$$

Z zależności (A.38) wynika rozkład macierzy A względem wartości szczególnych, zwany również rozkładem SVD (ang. Singular Value Decomposition).

$$A = \sum_{u=1}^r \sigma_u u v_i^*$$

gdzie $u_i (v_i^*)$ jest i -tą kolumną (wierszem) macierzy U (V^*).

DEFINICJA 164

Kolumny u_1, u_2, \dots, u_r macierzy U tworzą bazę obrazu $\text{Im } A$, a kolumny v_{r+1}, \dots, v_n macierzy V tworzą bazę jądra kera A macierzy A .
 $\text{Im } A = \text{span } \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$
 $\ker A = \text{span } \{v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n\}$

$$(A.40)$$

$$(A.41)$$

gdzie span oznacza przestrzeń rozpięta na wektorach.

A.10. Formy kwadratowe dodatnio określone

TWIERDZENIE 91

Jeżeli macierz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ jest nieosobliwa, to

$$A^{-1} = U \Sigma^{-1} V^*$$

oraz

$$\sigma_i(A^{-1}) = \frac{1}{\sigma_i(A)}$$

gdzie $\sigma_i(A)$ oznacza wartość szczególną macierzy A .

Dla macierzy rzeczywistej $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ z twierdzenia 89. wynika, że istnieją macierze ortonormalne $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ takie, że

$$A = U \Sigma V^T$$

a zależność (A.39) przyjmuje postać

$$A = \sum_{u=1}^r \sigma_u u v_i^T$$

TWIERDZENIE 92

Jeżeli $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest symetryczna, to $\sigma_i = |\lambda_i|$, $i = 1, \dots, r$.

A.10. Formy kwadratowe dodatnio określone

DEFINICJA 165

Formą kwadratową $A(x)$ nazywamy wielomian jednorodny drugiego stopnia w zmienianych x_1, x_2, \dots, x_n postaci

$$A(x) := x^T A x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

przy czym bez straty ogólności możemy założyć, że macierz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest symetryczna, tj. $a_{ij} := a_{ji}$, $i, j = 1, \dots, n$, a $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$.

Jeżeli macierz A nie jest symetryczna, to możemy ją rozłożyć na część symetryczną $A_s = \frac{A+A^T}{2}$ oraz część skośną symetryczną $A_k = \frac{A-A^T}{2}$, $A = A_s + A_k$, przy czym $x^T A_k x = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$.

DEFINICJA 166

Formę kwadratową (A.46) nazywamy singularną (osobliwą), gdy $\det \mathbf{A} = 0$, a niesingularną (nieosobliwą), gdy $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Podstawiając $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ do (A.46) otrzymamy

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T \bar{\mathbf{A}} \mathbf{y}, \quad \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}$$

DEFINICJA 167

Macierze symetryczne \mathbf{A} i $\bar{\mathbf{A}}$ dla $\det \mathbf{P} \neq 0$ nazywamy macierzami kongruentnymi, a samo przekształcenie kongruencją.

Jeżeli $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, to wartościom własnym $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ macierzy \mathbf{A} odpowiadają wżajemnie ortogonalne wektory własne M_1, M_2, \dots, M_n , a macierz $\mathbf{M} = [M_1, M_2, \dots, M_n]$ spełnia zależność $\mathbf{M}^T \mathbf{M} = \mathbb{I}_n$ oraz

$$\mathbf{M}^T \mathbf{A} \mathbf{M} = \text{diag} [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n] := \mathbf{A}$$

Podstawiając $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{y}$ do (A.46), otrzymujemy

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T \mathbf{M}^T \mathbf{A} \mathbf{M} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \bar{\mathbf{A}} \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \lambda_i (M_i^T \mathbf{x})^2 \quad (\text{A.49})$$

gdzie M_i^T jest i -tym wierszem macierzy \mathbf{M}^T .

DEFINICJA 168

Formę kwadratową (A.46) nazywamy dodatnio (ujemnie) określającą, gdy dla każdego $\mathbf{x} \neq 0$ przyjmuje wartości dodatnie (ujemne), a wartość równa zeru tylko dla $\mathbf{x} = 0$.

DEFINICJA 169
Macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dodatnio (ujemnie) określonej formy kwadratowej nazywamy macierzą dodatnią (ujemnie) określającą.

TWIERDZENIE 93

Forma kwadratowa (A.46) jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ macierzy \mathbf{A} są dodatnie.

Wyznacznik $\det \mathbf{A}$ dodatnio określonej macierzy \mathbf{A} jest dodatni.

TWIERDZENIE 94 (kryterium Sylvester'a)

Forma kwadratowa (A.46) jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie minory główne $M_{i_1 i_2 \dots i_p}$ oraz $\det \mathbf{A}$ są nieujemne, gdzie $M_{i_1 i_2 \dots i_p}$ dla $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$, $p = 1, \dots, n$ jest minorem głównym stopnia p powstającym z macierzy \mathbf{A} przez wykreślenie wszystkich wierszy i kolumn z wyjątkiem o numerach i_1, i_2, \dots, i_p .

DEFINICJA 170

UWAGA 50. Dodatnia (ujemna) określoność formy kwadratowej (A.46)-jest niezmiennicza względem przekształcania (A.47) przez kongruencję dla każdej macierzy nieosobliwej \mathbf{P} .
DEFINICJA 170
Formę kwadratową (A.46) nazywamy półokreślającą dodatnio (ujemnie), gdy dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ przyjmuje wartości nieujemne (niedodatnie).

TWIERDZENIE 95

Forma kwadratowa (A.46) jest półokreślona dodatnio (ujemnie) wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ macierzy \mathbf{A} są nieujemne (niedodatnie).

UWAGA 51. Wyznacznik $\det \mathbf{A}$ półokreślonej dodatnio formy kwadratowej jest nieujemny.

TWIERDZENIE 96

Forma kwadratowa (A.46) jest półokreślona dodatnio wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie minory główne $M_{i_1 i_2 \dots i_p}$ oraz $\det \mathbf{A}$ są nieujemne, gdzie $M_{i_1 i_2 \dots i_p}$ dla $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$, $p = 1, \dots, n$ jest minorem głównym stopnia p powstającym z macierzy \mathbf{A} przez wykreślenie wszystkich wierszy i kolumn z wyjątkiem o numerach i_1, i_2, \dots, i_p .

DEFINICJA 171
Normą $\|x\|$ wektora $x \in \mathbb{C}$ nazywaną niewiączną liczbę rzeczywistą spełniającą warunki

$$\|x\| > 0 \quad \forall x \neq 0 \quad \text{oraz} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$\|kx\| = |k|\|x\| \quad \text{dla dowolnej liczby } k \in \mathbb{C},$

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{nierówność trójkąta})$

Do najczęściej spotykanych norm wektora $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ należą:

$$\|x\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

$$\|x\|_\infty = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad (\text{norma euklidesowa})$$

UWAGA 52. Z definicji normy wynika, że $\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|$.

DEFINICJA 172
Normą $\|A\|$ macierzy A nazywaną niewiączną liczbę rzeczywistą spełniającą warunki

$$\|A\| > 0 \quad \forall A \neq 0, \quad \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0,$$

$$\|kA\| = |k|\|A\| \quad \text{dla dowolnej liczby } k \in \mathbb{C},$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (\text{nierówność trójkąta})$$

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

Korzystając z normy wektora, możemy normę macierzy A zdefiniować następująco:

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| \quad (\text{A.55})$$

Tak określona norma nazywaną normą macierzy indukowaną przez normę wektora. Do najczęściej spotykanych norm macierzy $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$ należą:

A.11. Normy wektorów i macierzy

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (\text{A.56})$$

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} \quad (\text{norma Frobeniusa})$$

DEFINICJA 173

Norma macierzy $\|A\|$ jest zgodna z normą wektora $\|x\|$, jeżeli dla dowolnej macierzy A i dowolnego wektora x zachodzi nierówność

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \quad (\text{A.57})$$

UWAGA 53. Norma macierzy $\|A\|_1$ jest zgodna z normą wektora $\|x\|_1$, norma macierzy $\|A\|_\infty$ jest zgodna z normą wektora $\|x\|_\infty$ i norma macierzy $\|A\|_F$ jest zgodna z normą wektora $\|x\|_2$.

Korzystając z definicji normy macierzy, można wykazać, że

$$\begin{aligned} \| -A \| &= \| A \| \\ \forall k \in N \quad \| A^k \| &\leq \| A \|^k \\ \| A - B \| &\geq \| A \| - \| B \| \\ |\lambda| &\leq \| A \| \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

do dowolnej normy $\|A\|$ oraz każdej wartości własnej λ macierzy A .

$$\|A\|_2 = \sigma_1$$

gdzie σ_1 jest największą wartością szczególną macierzy A .

$$\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_r^2}$$

gdzie $\sigma_i, i = 1, \dots, r$ są wartością szczególnymi macierzy A , $r = \text{rzad } A$.

Jeżeli $\|A\| < 1$, to

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = [\mathbb{I}_n - A]^{-1}$$

$$\left\| [\mathbb{I}_n - A]^{-1} - \sum_{k=0}^n A^k \right\| \leq \frac{\|A\|^{n+1}}{1 - \|A\|}$$

A.12. Macierz pseudoodwrotna Moore'a-Penrose'a

DEFINICJA 174

Macierz pseudoodwrotną Moore'a-Penrose'a nazywamy macierz \mathbf{A}^g spełniającą warunki

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{A}^g\mathbf{A} &= \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^g\mathbf{A}\mathbf{A}^g &= \mathbf{A}^g \\ (\mathbf{A}\mathbf{A}^g)^T &= \mathbf{A}\mathbf{A}^g \\ (\mathbf{A}^g\mathbf{A})^T &= \mathbf{A}^g\mathbf{A} \\ \mathbf{A}^g &\neq 0\end{aligned}\tag{A.59}$$

UWAGA 54. Dla dowolnej macierzy \mathbf{A} istnieje tylko jedna macierz pseudoodwrotna \mathbf{A}^g .

TWIERDZENIE 97

Jeżeli macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, rzad $r \leq \min(m, n)$, to macierz pseudoodwrotna \mathbf{A}^g jest określona wzorem

$$\mathbf{A}^g = \mathbf{C}^T [\mathbf{C}\mathbf{C}^T]^{-1} [\mathbf{B}\mathbf{B}^T]^{-1} \mathbf{B}^T = \mathbf{C}^T [\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{C}^T]^{-1} \mathbf{B}^T \tag{A.60}$$

przy czym $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{r \times n}$, rzad $\mathbf{B} = \text{rzad } \mathbf{C} = r$.

Macierz pseudoodwrotna \mathbf{A}^g dla dowolnej macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ spełnia następujące zależności:

$$(\mathbf{A}^g)^g = \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A}^T)^g = (\mathbf{A}^g)^T$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}^g)^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} &= \mathbf{A} \mathbf{A}^T (\mathbf{A}^g)^T = \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^g (\mathbf{A}^g)^T \mathbf{A}^T &= \mathbf{A}^T (\mathbf{A}^g)^T \mathbf{A}^g = \mathbf{A}^g \\ (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^g &= \mathbf{A}^g (\mathbf{A}^g)^T, (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^g = (\mathbf{A}^g)^T \mathbf{A}^g \\ (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^g \mathbf{A}^T &= \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^g = \mathbf{A}^g \\ \mathbf{A}^g \mathbf{A}, \mathbf{A} \mathbf{A}^g, \mathbb{I}_n - \mathbf{A}^g \mathbf{A}, \mathbb{I}_m - \mathbf{A} \mathbf{A}^g &\quad \text{są macierzami symetrycznymi nilpotentnymi}\end{aligned}\tag{A.61}$$

$$\forall \alpha \neq 0 \quad (\alpha \mathbf{A})^g = \alpha^{-1} \mathbf{A}^g$$

A.13. Wielomian zerujący i minimalny macierzy oraz wzór Sylvester'a

DEFINICJA 98
Jeżeli $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, rzad $\mathbf{A} = r$ i $\mathbf{A} = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T$, to

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^g &= \mathbf{V} \Sigma^{-1} \mathbf{U}^T \\ \text{gdzie } \Sigma^{-1} &= \text{diag} [\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_r^{-1}, 0, \dots, 0] \in \mathbb{R}^{n \times m}, \text{ a macierze} \\ \mathbf{U} &\in \mathbb{R}^{m \times m} \text{ i } \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ są macierzami ortogonalnymi, tj. } \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \\ &= \mathbf{U} \mathbf{U}^T = \mathbb{I}_m, \mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{V} \mathbf{V}^T = \mathbb{I}_n, \Sigma &= \text{diag} [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0] \in \mathbb{R}^{m \times n}, \text{ a } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0 \text{ są wartościami szczególnymi} \\ &\dots, 0] \in \mathbb{R}^{m \times n}, \text{ a } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0 \text{ są wartościami szczególnymi} \\ &\text{macierzy } \mathbf{A}.\end{aligned}\tag{A.62}$$

A.13. Wielomian zerujący i minimalny macierzy oraz wzór Sylvester'a

DEFINICJA 175

Wielomian $w(\lambda)$ nazywany wielomianem zerującym macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w(\mathbf{A}) = 0$.

UWAGA 55. Każda macierz kwadratowa ma co najmniej jeden wielomian zerujący, którym jest jej wielomian charakterystyczny (A.32).

TWIERDZENIE 99 (Cayleya-Hamiltona)
Każda macierz kwadratowa \mathbf{A} spełnia swoje równanie charakterystyczne

$$\det [\mathbb{I}_S - \mathbf{A}] = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0$$

czyli

$$\mathbf{A}^n + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \dots + a_1\mathbf{A} + a_0\mathbb{I}_n = 0$$

$$\mathbf{A}^n + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \dots + a_1\mathbf{A} + a_0\mathbb{I}_n = 0$$

DEFINICJA 176

Wielomianem minimalnym $\psi(\lambda)$ macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nazywamy wielomian zerujący najniższego stopnia tej macierzy o współczynniku równym 1 przy najwyższej potędze zmiennej λ .

UWAGA 56. Każdy wielomian zerujący jest podzielny bez reszty przez wielomian minimalny.

Wielomian minimalny $\psi(\lambda)$ macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest związany z jej wielomianem charakterystycznym $\varphi(\lambda)$ zależnością

$$\psi(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}$$

gdzie $D_{n-1}(\lambda)$ jest największym wspólnym dzielnikiem wszystkich elementów macierzy dodatkowej $[\mathbb{I}_n\lambda - \mathbf{A}]_{\text{ad}}$.

TWIERDZENIE 100

Jeżeli $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ są różnymi wartościami własnymi macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i jej wielomian charakterystyczny ma postać

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}, \quad \sum_{i=1}^r m_i = n \quad (\text{A.65})$$

to wielomian minimalny tej macierzy ma postać

$$\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}, \quad \sum_{i=1}^r m_i < n \quad (\text{A.66})$$

przy czym $1 \leq m_i \leq n$ dla $i = 1, \dots, r$.

Jeżeli macierz \mathbf{A} ma różne wartości własne, to wielomian minimalny $\psi(\lambda)$ pokrywa się z wielomianem charakterystycznym $\varphi(\lambda)$, tzn. $\psi(\lambda) = \varphi(\lambda)$.

DEFINICJA 177

Mówimy, że funkcja $f(\lambda)$ jest określona na widmie macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ o wielomianie minimalnym (A.66) – wtedy i tylkoka, utek, gdy

$$f(\lambda_k), f^{(1)}(\lambda_k) = \frac{df(\lambda)}{d\lambda}|_{\lambda=\lambda_k}, \dots, f^{(m_k-1)}(\lambda_k) = \frac{d^{m_k-1}f(\lambda)}{d\lambda^{m_k-1}}|_{\lambda=\lambda_k} \quad (\text{A.67})$$

Wielomiany $g(\lambda)$ i $h(\lambda)$ przyjmują te same wartości na widmie macierzy \mathbf{A} wtedy i tylko wtedy, gdy $g(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A})$. Wartości funkcji $f(\lambda)$ na widmie macierzy \mathbf{A} w pełni określają funkcję macierzy $f(\mathbf{A})$.

TWIERDZENIE 101 (Lagrange'a-Sylvestera)

Jeżeli funkcja $f(\lambda)$ jest określona na widmie macierzy \mathbf{A} , to

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^r [Z_{ii}f(\lambda_i) + Z_{i2}f^{(1)}(\lambda_i) + \dots + Z_{im_i}f^{(m_i-1)}(\lambda_i)] \quad (\text{A.68})$$

$$(A.64)$$

przy czym

$$Z_{ij} = \sum_{k=j-1}^{m_i-1} \frac{\psi_i(\mathbf{A})(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbb{I}_n)^k}{(k-j+1)!(j-1)!} \frac{d^{k-j+1}}{d\lambda^{k-j+1}} \left[\frac{1}{\psi_i(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_i} \quad (A.69)$$

$$\begin{aligned} \psi_i(\lambda) &= \frac{\psi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)^{m_i}} = \\ &= (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_{i-1})^{m_{i-1}} (\lambda - \lambda_{i+1})^{m_{i+1}} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r} \end{aligned} \quad (A.70)$$

Macierze Z_{ij} nazywamy macierzami składowymi macierzy \mathbf{A} . Macierze te zależą tylko od macierzy \mathbf{A} , nie zależą natomiast od funkcji $f(\lambda)$ i mają następujące własności:

$$Z_{ij} \quad \text{dla } i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, m_i \quad \text{są liniowo niezależne.}$$

$$\sum_{i=1}^r Z_{ii} = \mathbb{I}_n$$

$$\begin{aligned} Z_{ij}Z_{kl} &= 0 \quad \text{dla } i \neq k \\ Z_{ii}Z_{ij} &= Z_{ij} \quad \text{dla } i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, m_i \\ Z_{ij}^k &= Z_{ii} \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, i = 1, \dots, r \end{aligned} \quad (A.71)$$

$$Z_{ij} = \frac{1}{(j-1)!} (\mathbf{A} - \mathbb{I}_n \lambda_i)^{j-1} Z_{ii} \quad \text{dla } i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, m_i$$

$$\begin{aligned} \text{W szczególnym przypadku, gdy wielomian minimalny macierzy } \mathbf{A} \text{ ma postać} \\ \psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_m) \end{aligned} \quad (A.72)$$

to wzór (A.68) upraszcza się do postaci

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^m Z_{ii}f(\lambda_i) \quad (A.73)$$

przy czym

$$Z_i = \prod_{j=1}^m \frac{\mathbf{A} - \mathbb{I}_n \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \quad (A.74)$$

A.14. Macierze blokowe

DEFINICJA 181

Wyznacznik macierzy blokowo-diagonalnej

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_p \end{bmatrix} = \text{diag}[A_1, A_2, \dots, A_p] \quad (\text{A.77})$$

Macierz nazywamy blokową, jeżeli jej elementy są podmacierzami zwonymi blokami (klatkami). Macierz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ za pomocą $p - 1$ linii pionowych oraz $q - 1$ linii poziomych możemy podzielić na pq podmacierzy $A_{ij} \in \mathbb{R}^{m_i \times n_j}$, $i = 1, \dots, q$, $j = 1, \dots, p$, $\sum_{i=1}^q m_i = m$, $\sum_{i=1}^q n_i = n$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{q1} & \cdots & A_{qp} \end{bmatrix} \quad (\text{A.75})$$

W wyniku różnych podziałów tej samej macierzy otrzymamy różne macierze blokowe. Działania na macierzach blokowych definiujemy analogicznie jak dla macierzy o elementach skalarnych.

DEFINICJA 179

Jeżeli dwie macierze prostokątne A i B o tych samych wymiarach zostaną podzielone na podmacierze A_{ij} i B_{ij} o jednakowych wymiarach

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{q1} & \cdots & A_{qp} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{q1} & \cdots & B_{qp} \end{bmatrix} \quad (\text{A.76})$$

to suma tych macierzy blokowych $A = [A_{ij}]$, $B = [B_{ij}]$ jest macierzą blokową. $C = [C_{ij}]$, przy czym $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$, $i = 1, \dots, q$; $j = 1, \dots, p$.

DEFINICJA 180

Iloczynem, macierzy blokowej $A = [A_{ij}]_{i=1, \dots, q}^{j=1, \dots, p}$ przez macierz blokową

$$B = [B_{ij}]_{i=1, \dots, p}^{j=1, \dots, l} \text{ jest macierzą blokową } C = [C_{ij}]_{i=1, \dots, q}^{j=1, \dots, l}, \text{ przy czym}$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^p A_{ik} B_{kj}.$$

TWIERDZENIE 102

Jeżeli w macierzy blokowej

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (\text{A.79})$$

podmacierze A i D są kwadratowe, to wtedy

$$\det M = \begin{cases} \det A \det [D - CA^{-1}B], \text{ gdy } \det A \neq 0 \\ \det [A - BD^{-1}C] \det D, \text{ gdy } \det D \neq 0 \end{cases} \quad (\text{A.80})$$

TWIERDZENIE 103

Jeżeli wszystkie podmacierze A , B , C , D są kwadratowe tego samego stopnia, to

$$\det M = \begin{cases} \det [AD - ACA^{-1}B], \text{ gdy } \det A \neq 0 \\ \det [AD - BD^{-1}CD], \text{ gdy } \det D \neq 0 \end{cases} \quad (\text{A.81})$$

TWIERDZENIE 104

Jeżeli mnożenie macierzy A i C oraz C i D jest przemienne, to

$$\det M = \begin{cases} \det [AD - CB], \text{ gdy } AC = CA \\ \det [AD - BC], \text{ gdy } CD = DC \end{cases} \quad (\text{A.82})$$

Mnożenie to jest wykonalne wtedy i tylko wtedy, gdy liczba kolumn blokowych w macierzy A jest równa liczbie wierszy blokowych w macierzy B oraz liczba kolumn podmacierzy A_{ik} jest równa liczbie wierszy podmacierzy B_{kj} dla $k = 1, \dots, p$, $i = 1, \dots, q$, $j = 1, \dots, l$.

$$M^{-1} = \begin{cases} \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}BA_1^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BA_1^{-1} \\ -A_1^{-1}CA^{-1} & A_1^{-1} \end{bmatrix}, & \text{gdy } \det A \neq 0 \\ \begin{bmatrix} A_2^{-1} & -A_2^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}CA_2^{-1} & D^{-1} + D^{-1}CA_2^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}, & \text{gdy } \det D \neq 0 \\ \begin{bmatrix} A_2^{-1} & -A^{-1}BA_1^{-1} \\ -D^{-1}CA_2^{-1} & A_1^{-1} \end{bmatrix}, & \text{i } \det D \neq 0 \\ \begin{bmatrix} A_2^{-1} & -A_2^{-1}BD^{-1} \\ -A_1^{-1}CA_1^{-1} & A_1^{-1} \end{bmatrix}, & \text{i } \det D \neq 0 \end{cases} \quad (\text{A.83})$$

przy czym $A_1 = D - CA^{-1}B$, $A_2 = A - BD^{-1}C$.

A.15. Iloczyn Kroneckera macierzy

DEFINICJA 182

Iloczynem Kroneckera $A \otimes B$ macierzy $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ i macierzy $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{p \times q}$ nazywamy macierz blokową postaci

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times nq} \quad (\text{A.84})$$

Z definicji wynika, że na ogół $A \otimes B \neq B \otimes A$. Iloczyn Kroneckera ma następujące własności:

$$\begin{aligned} (\lambda A) \otimes B &= A \otimes (\lambda B) = \lambda(A \otimes B) \\ (A + B) \otimes C &= A \otimes C + B \otimes C \\ A \otimes (B + C) &= A \otimes B + A \otimes C \\ A \otimes (B \otimes C) &= (A \otimes B) \otimes C \\ (A \otimes B)^T &= A^T \otimes B^T \\ (A \otimes B)(C \otimes D) &= AC \otimes BD \\ A \otimes B &= (A \otimes \mathbb{I}_n)(\mathbb{I}_m \otimes B) \quad \text{dla } A \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ \det[A \otimes B] &= (\det A)^n(\det B)^m \quad \text{dla } A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ (A \otimes B)^{-1} &= A^{-1} \otimes B^{-1}, \quad \text{gdy } \det A \neq 0, \quad \det B \neq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.85})$$

Równanie macierzowe

$$AXB = C \quad (\text{A.86})$$

dla danych $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{q \times p}$ i $C \in \mathbb{R}^{m \times p}$ i niewiadomej macierzy $X \in \mathbb{R}^{n \times q}$ można zapisać w postaci równowaznej

$$[A \otimes B^T]X = C \quad (\text{A.87})$$

przy czym $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, $C = [c_1, c_2, \dots, c_m]^T$, a x_i oraz c_i są i -tyimi wierszami macierzy X i C . W szczególnym przypadku równanie macierzowe

$$AX = C, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad C \in \mathbb{R}^{n \times q} \quad (\text{A.88})$$

jest równoważne równaniu

$$(A \otimes \mathbb{I}_q)X = C \quad (\text{A.89})$$

a równanie macierzowe

$$XB = C, \quad B \in \mathbb{R}^{q \times p}, \quad C \in \mathbb{R}^{n \times q} \quad (\text{A.90})$$

jest równoważne równaniu

$$(\mathbb{I}_n \otimes B^T)X = C \quad (\text{A.91})$$

Równanie macierzowe

$$AX - XB = C, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad C \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad \text{dane,} \\ X \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad \text{niewiadoma} \quad (\text{A.92})$$

jest równoważne równaniu

$$(A \otimes \mathbb{I}_n - \mathbb{I}_n \otimes B^T)X = C \quad (\text{A.93})$$

gdzie $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, $C = [c_1, c_2, \dots, c_m]^T$, a x_i oraz c_i są i -tyimi wierszami macierzy X i C .

A.16. Jak to zrobić w MATLAB-ie

Rachunek macierzowy jest podstawowym narzędziem matematycznym, na którym opiera się MATLAB. Z wielkiego bogactwa funkcji operujących na macierzach omówimy tylko te, które mają bezpośredni związek z tematyką poruszoną w tym dodatku.

Przed przystąpieniem do omówienia podstawowych funkcji operujących na macierzach przystąpimy do omówienia dwóch najważniejszych sposobów definiowania macierzy.

- Definicja bezpośrednia, tzn. poprzez podanie kolejnych jej elementów. Np. macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

A. Podstawy rachunku macierzowego

w notacji MATLAB-a definiuje się następująco:

$A = [1 \ 2 \ 3; 4 \ 5 \ 6; 7 \ 8 \ 9];$

lub równoważnie

$A=[1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9];$

Jak widać z tego przykładu, wiersze macierzy są oddzielane średnikami, elementy znajdujące się w kolumnach są oddzielane przecinkami lub spacjami. Nie ma obowiązku definiowania macierzy wierszami, jak uczyniono to wyżej, można macierze definiować kolumnami. Ta sama macierz zdefiniowana kolumnami w zapisie MATLAB-a przedstawia się następująco:

$A=[[1, 4, 7]; [2, 5, 8]; [3, 6, 9]];$

W przestrzeni roboczej powstanie ta sama macierz A , niezależnie od wybranego sposobu jej zdefiniowania. Na zakończenie przykładów definicji macierzy podamy jeszcze inny, również poprawny wariant zdefiniowania macierzy A

$A=[[1, 2, 4, 5], [3, 6], [7, 8], 9];$

- Definicja pośrednia, czyli przez wykorzystanie różnych funkcji MATLAB-a do utworzenia macierzy. Najprostszymi przykładami mogą być macierze składające się wyłącznie z jednakowych liczb. Przypuśćmy, że chcemy zdefiniować macierz o 5 wierszach i 12 kolumnach, zawierających w każdym wierszu i każdej kolumnie liczbę 1.3. Wykonujemy to szybko za pomocą polecenia

$A=ones(5,12)*1.3;$

Funkcja ONES jest opisana niżej.

- Kilka kolejnych przykładów poświęconych będzie zilustrowaniu sposobów wydobywania danych z macierzy.

- Wybranie elementu o numerze wiersza w i numerze kolumny k z macierzy

A realizuje polecenie

$A(w, k)$

- Wybranie wiersza o numerze w z macierzy A realizuje polecenie

$A(w, :)$

Symbol : zamiast numeru kolumny oznacza, że mają być wzięte wszystkie kolumny. Analogicznie postępuje się w stosunku do kolumn, tzn. polecenie

$A(:, k)$

powoduje wybranie kolumny o numerze k z macierzy A .

- Ciąg wybrąć z macierzy A podmacierz składającą się z kolumn od k_1 do k_2 i wierszach od w_1 do w_2 , należy skorzystać z polecenia

$A(w1:w2, k1:k2)$

A.16. Jak to zrobić w MATLAB-ie

Opanowanie wymienionych wyżej trzech sposobów wydobywania danych z macierzy wystarcza do nabycia umiejętności sprawnego posługiwania się macierzami w MATLAB-ie.

FUNKCJA transpose, ctranspose:

Funkcja transpose transponuje macierz o elementach rzeczywistych, funkcja CTRANSPOSE transponuje macierz o elementach zespolonych, czyli

zwraca macierz sprzężoną.

A' zwraca w ogólności macierz sprzężoną względem macierzy A . Jest to najczęściej stosowany zapis ze względów praktycznych. Można jednak używać składni $\text{TRANSPPOSE}(A)$, jeżeli macierz A ma elementy rzeczywiste lub $\text{CTRANSPPOSE}(A)$, jeżeli macierz A ma elementy zespolone.

FUNKCJA DET:

Funkcja oblicza wyznacznik macierzy kwadratowej.

DET(X) oblicza wyznacznik kwadratowej macierzy X .

FUNKCJA TRACE:

Funkcja zwraca ślad macierzy.

TRACE(X) oblicza ślad macierzy X , czyli sumę elementów na diagonali, która dla macierzy kwadratowych równa się sumie wartości własnych.

FUNKCJA RAND:

Funkcja zwraca macierz o podanych wymiarach zawierającą wartości pseudolosowe.

RAND(M, N) zwraca macierz o wymiarach $M \times N$ zawierającą liczby pseudolosowe.

FUNKCJA EYE:

Funkcja tworzy macierz jednostkową podanego wymiaru.

EYE(X) zwraca macierz jednostkową o wymiarze X .
EYE(X, Y) lub **EYE([XY])** tworzy macierz o wymiarach $X \times Y$ mającą jedynki na głównej diagonali.

FUNKCJA ONES:

Funkcja tworzy macierz podanego wymiaru zawierającą jedynki.

ONES(X) zwraca macierz kwadratową o wymiarze X składającą się z jedynek.
ONES(X, Y) lub **ONES([XY])** tworzy macierz o wymiarach $X \times Y$ składającą się z jedynek.

A. Podstawy rachunku macierzowego

A.16. Jak to zrobić w MATLAB-ie

ONES(X, Y, ...) lub **ONES([X Y ...])** tworzy macierz o wymiarach $X \times Y \times \dots$ składającą się z jedynek.

FUNKCJA ZEROS:

Funkcja działa tak samo jak funkcja **ONES**, wypełniając tworzone macierze zerami zamiast jedynek.

FUNKCJA RANK:

Funkcja określa rzad macierzy.

RANK(A) określa liczbę liniowo niezależnych kolumn macierzy **A**.

RANK(A, TOL) określa liczbę wartości singularnych macierzy **A** większych niż wartość parametru **TOL**.

FUNKCJA ORTH:

Funkcja dokonuje ortogonalizacji macierzy.

Q = ORTH(A) zwraca ortonormalną bazę **Q** obrazu macierzy **A**.

FUNKCJA NULL:

Funkcja zwraca bazę jądra macierzy.

Q = NULL(A) zwraca ortonormalna bazę **Q** jądra macierzy **A** wyznaczoną na podstawie rozkładu SVD.

Q = NULL(A, 'r') zwraca bazę **Q** jądra macierzy **A** wyznaczoną dzięki wykorzystaniu przekształceń elementarnych prowadzących do redukcji macierzy.

FUNKCJA INV:

Funkcja zwraca macierz odwrotną podanej macierzy kwantatowej.

Q = INV(A) zwraca macierz odwrotną **Q** macierzy **A**. Jeżeli macierz **A** jest osobliwa lub źle uwarunkowana, to wtedy generowane jest ostrzeżenie.

FUNKCJA POLY:

Funkcja wyznacza wielomian charakterystyczny podanej macierzy kwadratowej.

Q = POLY(A) zwraca wektor **Q** współczynników wielomianu charakterystycznego macierzy **A**.

FUNKCJA EIG:

Funkcja wyznacza wartości własne i odpowiadające im wektory własne danej macierzy kwadratowej.

Q = EIG(A) zwraca wektor **Q** zawierający wartości własne macierzy **A**.

[V, Q] = EIG(A) zwraca macierz diagonalną **Q** zawierającą wartości własne oraz nieosobliwą macierz **V** składającą się z wektorów własne macierzy **A** wiadujących wartościom własne znajdującym się na diagonali macierzy **Q**.

FUNKCJA SVD:
Funkcja wyznacza rozkład SVD macierzy.

[U, S, V] = SVD(X) zwraca trzy macierze składające się na dekompozycję macierzy **X** względem wartości szczególnych.

S = SVD(X) zwraca tylko wartości szczególne macierzy **X**.

FUNKCJA PINV:

Funkcja zwraca macierz pseudoodwrotną macierzy.
X = PINV(A) zwraca macierz pseudoodwrotną do macierzy **A** taką, że

$$AXA = A, \quad XAX = X, \quad AX = XA$$

FUNKCJA KRON:

Funkcja wyznacza iloczyn Kroneckera dwóch macierzy.
KRON(X, Y) zwraca macierz będącą ilocznem Kroneckera macierzy **X** i **Y**.

FUNKCJA NORM:

Funkcja wyznacza normę wektora lub macierzy.

- Dla macierzy **NORM(X)** lub **NORM(X, 2)** zwraca największą wartość szczególną macierzy **X**.

NORM(X, 1) zwraca największą sumę elementów znajdujących się w kolumnach macierzy **X**.
NORM(X, inf) zwraca największą sumę elementów znajdujących się w wierszach macierzy **X**.
NORM(X, 'fro') zwraca normę Frobeniusa macierzy **X**.

- Dla wektorów
 - **NORM(X)** lub **NORM(X, 2)** zwraca długość wektora **X**.
 - **NORM(X, inf)** zwraca największą wartość szczególną wektora **X**.
 - **NORM(X, -inf)** zwraca najmniejszy, co do modulu, element wektora **X**.

PRZYKŁAD 131

Dla macierzy o rozmiarach 5×5 składającej się z elementów losowych należy:

- obliczyć wyznacznik,
- wyznaczyć wartości własne i wektory własne,
- wyznaczyć rozkład względem wartości szczególnych,
- obliczyć normę Frobeniusa,
- wielomian charakterystyczny.

Do wyłosowania elementów macierzy o wskazanych rozmiarach używamy polecenia **A=rand(5, 5)**;
Realizację postawionych zadań wykonamy wg ich kolejności.

- Wyznacznik macierzy
 $\det(A)$

- Wyznaczenie wartości własnych i wektorów własnych
 $[v, \lambda] = \text{eig}(A)$

Dla sprawdzenia można wykonać działania, które potwierdzą poprawność otrzymanych wyników. Jako proste ćwiczenie pozostawiamy do obliczenia następujący iloczyn macierzy:

$$lvt^{-1}$$

- Wynik powinien równać się macierzy A .

- Wyznaczenie rozkładu względem wartości szczególnych

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}}_b \quad (A.94)$$

W rezultacie otrzymamy trzy macierze, które składają się na rozkład macierzy A względem wartości szczególnych. Można to sprawdzić, podobnie jak w przypadku wartości własnych, mnożąc uzyskane macierze, tj. obliczając iloczyn

$$usv^T$$

- Należy zwrócić uwagę, że macierze u oraz v są ortonormalne. Oznacza to, że iloczyn $uv^T = u^Tu = I$ oraz $vv^T = v^Tv = I$ i dodatkowo wyznacznik obu tych macierzy jest równy jedności. Sprawdzenie tych faktów również pozostawiamy jako proste ćwiczenie do wykonania.
- Wyznaczenie normy Frobeniusa sprowadza się do skorzystania z funkcji **NORM** z odpowiednią opcją.

- Wielomian charakterystyczny danej macierzy wyznaczmy za pomocą polecenia **poly(A)**

Przypuszczy, że otrzymaliśmy wynik

$$\text{ans}=$$

$$1,0000 \quad -2,3032 \quad -1,2638 \quad 0,1694 \quad 0,0477 \quad -0,0321$$

Oznacza to, że wielomian charakterystyczny wskazanej macierzy jest następujący

$$x^5 - 2,3032x^4 - 1,2638x^3 + 0,1694x^2 + 0,0477x - 0,0321$$

Oczywiście, nazwa zmiennej jest nieistotna. Funkcja zwraca tylko kolejne współczynniki wielomianu charakterystycznego. \square

W kolejnych przykładach przedstawimy problemy związane z rozwiązywaniem liniowych równań algebraicznych typu

$$Ax = b$$

gdzie macierz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ jest pełnego rzędu kolumnowego i wektor $b \in \mathbb{R}^n$ są dane, wektor $x \in \mathbb{R}^m$ jest poszukiwany. Rozpatrzymy trzy przypadki:

- 1) $n = m$,
- 2) $n > m$,
- 3) $n < m$.

PRZYKŁAD 132

Rozwiążemy równanie

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}}_b \quad (A.94)$$

W tym przypadku $n = m = 3$. Z tego względu można łatwo wyznaczyć jednoznacznie rozwiązanie, mnożąc równanie lewostronne (A.94) przez A^{-1} . Niżej podano串wencje poleceń pozwalających obliczyć rozwiązanie równania (A.94)

$$A=[8, 1, 6; 3, 5, 7; 4, 9, 2];$$

$$b=[1, 3, 2];$$

$$x=\text{inv}(A)*b;$$

\square

PRZYKŁAD 133

Rozwiążemy równanie

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & 9 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}}_b \quad (A.95)$$

W tym przypadku $n = 3 < m = 4$ i rozwiązań tego układu równań jest nieskończono wiele. Powodem tego jest fakt, że

$$\ker A \neq 0$$

Zatem każde z rozwiązań układu równań (A.95) można przestawić w postaci

$$x = A^+b + J\gamma$$

gdzie $\gamma \in \mathbb{R}^{m-n}$, a J jest bazą jądra macierzy A . Jedno z możliwych rozwiązań równania (A.95) można wyznaczyć za pomocą polecen

$$J=\text{null}(A);$$

$$x=\text{pinv}(A)*b+J*\text{rand}(1,1);$$

Dzięki zastosowaniu funkcji RAND każde wygenerowane rozwiązanie będzie różnić się od poprzedniego, ale wszystkie w ten sposób otrzymane wektory będą spełniać równanie (A.95). \square

PRZYKŁAD 134

Rozwiążemy równanie

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 3 & 5 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}}_A \underbrace{x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}}_b \quad (\text{A.96})$$

W tym przypadku $n = 3 > m = 2$ i rozwiązywanie tego układu równań może nie istnieć. Jak wiadomo, warunkiem istnienia rozwiązań układu równań (A.96) jest

$$b \in \text{Im } A$$

Bazę obrazu macierzy wyznacza się za pomocą polecenia

$$\text{R}= \text{orth}(A);$$

W [Walter Rudin] podano twierdzenie, które pozwala sprawdzić, czy $b \in \text{Im } A$ przy założeniu, że do dyspozycji jest dowolna baza ortogonalna obrazu macierzy R . Twierdzenie to mówi, że

$$b \in \text{Im } A \equiv \left\| b - R R^T b \right\| = 0 \quad (\text{A.97})$$

Z tego wynika, że za pomocą polecenia

$$\text{norm}(b - R * R^T * b)$$

mówiąc szybko uzyskać odpowiedź na pytanie o istnienie rozwiązań układu równań (A.96). Jak widać w tym przypadku rozwiązań nie ma, ale gdyby przyjąć

$$b = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 13 \end{bmatrix} \quad (\text{A.98})$$

wtedy polecam podane wyżej zwroti wartością zero, co oznacza, że za pomocą polecenia

$$\text{x=pinv}(A)*b$$

otrzymamy dokładne rozwiązań równania (A.96) dla (A.98).

□

DEFINICJA 183
Pochodną rzędu k macierzy $A(t) = [a_{ij}]_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}$, której elementy $a_{ij}(t)$ są funkcjami wielokrotnie różniczkowalnymi zmiennej t .

$$B_k(t) = \frac{d^k A(t)}{dt^k} = \left[\frac{d^k a_{ij}(t)}{dt^k} \right]_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}^{i=1, \dots, m} \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots \quad (\text{B.1})$$

Jeżeli $A(t)$ i $B(t)$ są macierzami przynajmniej jednokrotnie różniczkowalnymi względem zmiennej t , to

$$\frac{d}{dt} [A(t) + B(t)] = \frac{dA(t)}{dt} + \frac{dB(t)}{dt} \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)] = \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t)\frac{dB(t)}{dt}$$
(B.3)

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{A}^{-1}(t)] = \mathbf{A}^{-1}(t)\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\mathbf{A}^{-1}(t), \quad \det \mathbf{A}(t) \neq 0$$
(B.4)

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{y}) = \mathbf{A} \mathbf{y}$$

DEFINICJA 184
Gradientem funkcji skalarnej $g(\mathbf{x})$ względem wektora $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ nazywamy wektor postaci

$$\text{grad } g(\mathbf{x}) = \frac{dg(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$
(B.5)

gdzie $\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_i}$ oznacza pochodną cząstkową względem x_i .

Weźmy pod uwagę funkcję wektorową $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})]^T$, której składowe $x_i = x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, są różniczkowalnymi wektorem \mathbf{x} , którego składowe $x_i = x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, są różniczkowalnymi funkcjami zmiennej t .

Niech $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ oraz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wtedy

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{y}^T \mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x}^T \mathbf{y}) = \mathbf{y}$$
(B.7)

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{y}) = \mathbf{A} \mathbf{y}$$
(B.8)

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{y}^T \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \mathbf{y}) = \frac{d\mathbf{f}^T(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \mathbf{y}$$
(B.9)

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{A}^T \mathbf{x}, & \text{gdy } \mathbf{A}^T \neq \mathbf{A} \\ 2\mathbf{A} \mathbf{x}, & \text{gdy } \mathbf{A}^T = \mathbf{A} \end{cases}$$
(B.10)

Niech macierze $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ mają takie wymiary, że istnieje ich iloczyn \mathbf{BAC} , a $\text{tr } \mathbf{A}$ niech będzie sładem macierzy $\mathbf{A}(t) = [a_{ij}]_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}$. Wtedy

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \text{tr} (\mathbf{BAC}) = \mathbf{B}^T \mathbf{C}^T$$
(B.11)

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \text{tr} (\mathbf{ABA}^T) = 2\mathbf{AB}, \quad \text{gdy } \mathbf{B}^T = \mathbf{B}$$
(B.12)

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \det [\mathbf{BAC}] = \det [\mathbf{BAC}] \mathbf{A}^{-1}, \quad \text{gdy } \det \mathbf{A} \neq 0$$
(B.13)

Weźmy pod uwagę macierz $\mathbf{A}(t) = [a_{ij}]_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}$, której elementy $a_{ij}(t)$ są całkowalnymi funkcjami zmiennej t .

DEFINICJA 185
Pochodna funkcji wektorowej $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ względem zmiennej t jest określona następująco:

$$\frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x})}{dt} = \dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \frac{df(\mathbf{x})}{dx^T} \frac{dx}{dt}$$

przy czym

(B.6)

$$\frac{df(\mathbf{x})}{dx^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Jeżeli

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}$$

to

(B.14)

DEFINICJA 186

Calką oznaczoną macierzy $\mathbf{A}(t)$ w przediale $[0, t]$ nazywamy macierz $\mathbf{C}(t)$, której elementy są całkami oznaczonymi w tym przediale odpowiednich elementów macierzy $\mathbf{A}(t)$, czyli

$$\mathbf{C}(t) = \int_0^t \mathbf{A}(\tau) d\tau = \left[\int_0^t a_{ij}(\tau) d\tau \right]_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}$$

Jeżeli $\mathbf{A}(t)$ i $\mathbf{B}(t)$ są macierzami przynajmniej jednokrotnie całkowalnymi względem zmiennej t , to

$$\int_0^t [\mathbf{A}(\tau) + \mathbf{B}(\tau)] d\tau = \int_0^t \mathbf{A}(\tau) d\tau + \int_0^t \mathbf{B}(\tau) d\tau$$
(B.15)

$$\int_0^t \lambda A(\tau) d\tau = \lambda \int_0^t A(\tau) d\tau \quad \text{dla skalarza } \lambda \text{ niezależnego od } t$$

$$\int_0^t A(t) dB(t) = A(t)B(t) - \int_0^t [dA(t)]B(t)$$

DEFINICJA 187

Calką iterowaną macierzy $A(t) = [a_{ij}]_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}$ nazywamy macierz $C_1(t)$, której elementy są całkami iterowanymi elementów macierzy $A(t)$ czyli

$$C_1(t) = \int_0^t \int_0^\tau A(\tau_1) d\tau_1 d\tau \quad \begin{matrix} i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n \end{matrix} \quad (B.18)$$

Jeżeli $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest macierzą nieosobliwą, to

$$\int_0^t e^{A\tau} d\tau = A^{-1} (e^{At} - I_n) \quad (B.19)$$

a jeżeli ponadto wszystkie wartości własne λ_k ($k = 1, \dots, n$) tej macierzy mają ujemne części rzeczywiste (A jest macierzą stabilną asymptotycznie), to

$$\int_0^\infty e^{A\tau} d\tau = -A^{-1} \quad (B.20)$$

B.2. Równania różniczkowe

DEFINICJA 188

Liniowym równaniem różniczkowym n -tego rzędu o zmiennych współczynnikach $a_0(t), a_1(t), \dots, a_{n-1}(t)$ nazywamy równanie postaci

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t) \quad (B.21)$$

zwartkami początkowymi

$$y(t_0) = y_{10}, \frac{dy(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} = y_{20}, \dots, \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} \Big|_{t=t_0} = y_{n0} \quad (B.22)$$

Wprowadzając nowe zmienne: $x_1 = y, x_2 = \frac{dy(t)}{dt}, \dots, x_n = \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}$, możemy równanie różniczkowe (B.21) napisać w postaci

$$\dot{x} = A(t)x + f \quad (B.23)$$

B.2. Równania różniczkowe

przy czym

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (B.24)$$

Warunek początkowy dla równania (B.23) ma postać

$$x(t_0) = x_0 = \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{bmatrix} \quad (B.25)$$

TWIERDZENIE 106

Niech $A(t)$ będzie macierzą kwadratową stopnia n , o elementach będących funkcjami ciągłymi czasu t , a $f(t)$ n -wymiarowym wektorem ciągłych funkcji czasu. Rozwiążanie $x = x(t)$ równania (B.23) spełniające warunek początkowy $x(t_0) = x_0$ ma postać

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)f(\tau)d\tau \quad (B.26)$$

przy czym

$$\Phi(t, t_0) = \mathbb{I}_n + \int_{t_0}^t A(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t A(\tau) \int_{t_0}^\tau A(\tau)d\tau + \dots \quad (B.26)$$

a t_0 jest chwilą początkową.

DEFINICJA 189

Macierz $\Phi(t, t_0)$ określona zależnością (B.26) nazywamy macierzą podstawową (fundamentalną, transzyjną) równania (B.23).

Macierz $\Phi(t, t_0)$ ma następujące własności (B.27)–(B.36):

$$\Phi(t_0, t_0) = \mathbb{I}_n \quad (B.27)$$

Macierz $\Phi(t, t_0)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_0). \quad (\text{B.28})$$

z warunkiem początkowym (B.27).

$$\det \Phi(t, t_0) \neq 0$$

dla każdego $t \neq t_0$.

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_1)\Phi(t_1, t_0)$$

dla dowolnych chwil t_0, t_1, t spełniających warunek $t_0 \leq t_1 \leq t$.

$$\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t)$$

dla dowolnych $t \neq t_0$.

Macierz transponowana $\Phi^T(t, t_0)$ spełnia równanie różniczkowe

$$\dot{\Phi}^T(t, t_0) = -\mathbf{A}^T(t)\Phi^T(t_0, t) \quad (\text{B.32})$$

$$\Phi_{A+B}(t, t_0) = \Phi_A(t, t_0)\Phi_B(t, t_0) \quad (\text{B.33})$$

dla dowolnych macierzy kwadratowych $A(t)$ i $B(t)$ tego samego stopnia, przy czym

$$\begin{aligned} \Phi_{A+B}(t, t_0) &= \mathbb{I}_n + \int_{t_0}^t [\mathbf{A}(\tau) + \mathbf{B}(\tau)]d\tau + \\ &\quad + \int_{t_0}^t [\mathbf{A}(\tau) + \mathbf{B}(\tau)] \int_{t_0}^\tau [\mathbf{A}(\tau) + \mathbf{B}(\tau)]d\tau d\tau + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

$$\Phi_S(t, t_0) = \Phi_A(t_0, t)\mathbf{B}\Phi_A(t, t_0) \quad (\text{B.35})$$

Jeżeli macierz $\mathbf{A}(t)$ ma elementy stałe, niezależne od czasu, to równanie (B.23) przyjmuje postać

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f} \quad (\text{B.36})$$

a macierz (B.26) upraszcza się do postaci $\Phi(t, t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$.

TWIERDZENIE 107

Rozwiążanie równania (B.36) spełniające warunek początkowy $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ ma postać

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t-t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau \quad (\text{B.37})$$

Niech

$$\Psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}, \quad \sum_{i=1}^r m_i = m \leq n. \quad (\text{B.38})$$

będzie wielomianem minimalnym macierzy \mathbf{A} . W tym przypadku, korzystając ze wzoru (A.68) dla

$$\mathbf{f}(\lambda) = e^{\lambda(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{\lambda(t-\tau)}\mathbf{f}(\tau)d\tau \quad (\text{B.39})$$

otrzymany rozwiązanie równania (B.36) w postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \left[Z_{i1} + Z_{i2}(t-t_0) + \cdots + Z_{im_i}(t-t_0)^{m_i-1} \right] e^{\lambda_i(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + \\ &\quad + \int_{t_0}^t \left[Z_{i1} + Z_{i2}(t-\tau) + \cdots + Z_{im_i}(t-\tau)^{m_i-1} \right] e^{\lambda_i(t-\tau)}\mathbf{f}(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

gdzie Z_{ij} , $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, m_i$ są macierzami składowymi macierzy \mathbf{A} określonymi wzorem (A.69). W przypadku szczególnym, gdy wielomian minimalny macierzy \mathbf{A} ma postać

$$\Psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_m), \quad m \leq n \quad (\text{B.41})$$

wzór (B.39) upraszcza się do postaci

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^m Z_i \left[e^{\lambda_i(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{\lambda_i(t-\tau)}\mathbf{f}(\tau)d\tau \right] \quad (\text{B.42})$$

przy czym

$$\begin{aligned} Z_i &= \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \frac{\mathbf{A} - \lambda_j \mathbb{I}_n}{\lambda_i - \lambda_j} = \\ &= \frac{(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbb{I}_n) \cdots (\mathbf{A} - \lambda_{i-1} \mathbb{I}_n) (\mathbf{A} - \lambda_{i+1} \mathbb{I}_n) \cdots (\mathbf{A} - \lambda_m \mathbb{I}_n)}{(\lambda_i - \lambda_1) \cdots (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \cdots (\lambda_i - \lambda_m)} \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

B.3. Równania różnicowe

DEFINICJA 190

Różnicę n -tego rzędu $\Delta^n f_m$ funkcji dyskretnej f_k w punkcie $k = m$ nazywamy funkcję dyskretną określoną wzorem

$$\Delta^n f_m = \Delta^{n-1} f_{m+1} - \Delta^{n-1} f_m, \quad n = 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{B.44})$$

Korzystając z zależności (B.43), dla $n = 2$ otrzymamy

$$\Delta^2 f_m = \Delta f_{m+1} - \Delta f_m = f_{m+2} - 2f_{m+1} + f_m$$

Ogólnie, różnicę n -tego rzędu funkcji dyskretnej f_k w punkcie $k = m$ można wyrazić za pomocą wartości tej funkcji w kolejnych $n + 1$ punktach

$$\Delta^n f_m = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{n!}{(n-i)!i!} f_{m+i-n-i} \quad (\text{B.44})$$

DEFINICJA 191

Równaniem różnicowym n -tego rzędu nazywamy związek funkcji dyskretnej i jej różnic do n -tego rzędu ułacznie. Liniowe równanie różnicowe n -tego rzędu o zmiennych współczynnikach $a_0^k, a_1^k, \dots, a_{n-1}^k$ ma postać

$$\Delta^n x_k + a_{n-1}^k \Delta^{n-1} x_k + \dots + a_1^k \Delta x_k + a_0^k x_k = g_k \quad (\text{B.45})$$

gdzie g_k jest daną funkcją dyskretną. Warunki początkowe dla (B.45) mają postać

$$\Delta^0 x_0 = x_0, \Delta x_0 = x_1, \dots, \Delta^{n-1} x_0 = x_{n-1} \quad (\text{B.46})$$

Korzystając z (B.44), możemy równanie różnicowe (B.45) przedstawić w postaci równoważnej

$$x_{k+n} + b_{n-1}^k x_{k+n-1} + \dots + b_1^k x_{k+1} + b_0^k x_k = g_k \quad (\text{B.47})$$

przy czym współczynnik b_i^k , $i = 0, 1, \dots, n-1$ w zależności od wspólników a_i^k wyraża się zależnością

$$b_{n-j}^k = \sum_{i=0}^j (-1)^{j-i} \frac{(n-i)!}{(n-j)!(j-i)!} a_{n-i}^k, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B.48})$$

Warunki początkowe dla (B.47) są określone wartościami funkcji dyskretnej x_k dla $k = 0, 1, \dots, n-1$. Wprowadzając nowe zmienną

$$x_k^1 = x_k, x_k^2 = \Delta x_k, \dots, x_k^n = \Delta^{n-1} x_k \quad (\text{B.49})$$

mogimy równanie różnicowe (B.45) napisać w postaci

$$x_{k+1} = A_k x_k + f_k \quad (\text{B.50})$$

B.3. Równania różnicowe

przy czym

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \\ \vdots \\ x_k^n \end{bmatrix}, \quad A_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0^k & -a_1^k & -a_2^k & \cdots & -a_{n-1}^k \end{bmatrix}, \quad f_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_k \end{bmatrix} \quad (\text{B.51})$$

Analogicznie, wprowadzając zmienne $x_k^1 = x_k, x_k^2 = x_{k+1}, \dots, x_k^n = x_{k+n-1}$, możemy równanie różnicowe (B.47) napisać w postaci (B.50), przy czym wektory \mathbf{x}_k i f_k są zdefiniowane tak samo, a macierz A ma postać Frobeniusa

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -b_0^k & -b_1^k & -b_2^k & \cdots & -b_{n-1}^k \end{bmatrix} \quad (\text{B.52})$$

TWIERDZENIE 108

Rozwiązywanie równania (B.50) spełniające warunek początkowy x_0 , ma postać

$$\mathbf{x}_k = \Phi_{k,0} x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi_{k,i+1} f_i, \quad k = 0, 1, \dots \quad (\text{B.53})$$

przy czym

$$\Phi_{k,i} = \begin{cases} A_{k-1} A_{k-2} \cdots A_i & \text{dla } k > i \\ \mathbb{I}_n & \text{dla } k \leq i \end{cases} \quad (\text{B.54})$$

Macierz (B.53) nazywamy macierzą podstawową (fundamentalną, transzytyczną) równania (B.50). Macierz ta ma następujące własności (B.54)÷(B.57):

Macierz Φ_{k,k_0} jest rozwiązaniem równania

$$\Phi_{k+1,k_0} = A_k \Phi_{k,k_0} \quad (\text{B.55})$$

przy warunku początkowym $\Phi_{k_0,k_0} = \mathbb{I}_{\eta_i}$;

$$\Phi_{k,k_0} = \Phi_{k,k_1} \Phi_{k_1,k_0} \quad (\text{B.56})$$

dla dowolnych k, k_0, k_1 spełniających warunek $k_0 \leq k_1 \leq k$;

$$\Phi_{k,k_0}^{-1} = \Phi_{k_0,k} \quad (\text{B.57})$$

dla dowolnych k i k_0 ($k \geq k_0$).

Jeżeli macierz \mathbf{A}_k ma elementy stałe niezależne od k , to równanie (B.50) przyjmuje postać

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{f}_k$$

a macierz (B.53) upraszcza się do postaci $\Phi_{k,k_0} = \mathbf{A}^{k-k_0}$.

TWIERDZENIE 109

Rozwiązywanie równania (B.57) spełniające warunek początkowy \mathbf{x}_0 , ma postać

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-i-1} \mathbf{f}_i \quad (\text{B.58})$$

Niech wielomian minimalny macierzy \mathbf{A} ma postać (B.38). W tym przypadku, korzystając ze wzoru (A.68), dla $\mathbf{f}(\lambda) = \lambda^k \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-i-1} \mathbf{f}_i$ otrzymamy rozwiązanie równania (B.57) w postaci

$$\mathbf{x}_k = \sum_{i=1}^r \left[Z_{i1} \lambda_i^k + Z_{i2} k \lambda_i^{k-1} + \cdots + Z_{im_i} k(k-1) \cdots (k-m_i+1) \right.$$

$$\left. + 2) \lambda_i^{k-m_i+1} \right] \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{k-1} \left[Z_{i1} \lambda_i^{k-j-1} + Z_{i2} (k-j-1) \lambda_i^{k-j-2} \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + Z_{im_i} (k-j-1)(k-j-2) \cdots (k-j-m_i+1) \lambda_i^{k-j-m_i} \right] \mathbf{f}_j \quad (\text{B.59})$$

PRZYKŁAD 2. Rozwiązywanie różniczkowego równania (A.69). W przypadku szczególnym składowymi macierzy \mathbf{A} określonymi wzorem wzór (B.59) upraszcza się do postaci

$$\mathbf{x}_k = \sum_{i=1}^m Z_i \left[\lambda_i^k \mathbf{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_i^{k-j-1} \mathbf{f}_j \right]$$

$$\text{a macierze } Z_i \text{ są określone wzorem (B.42).}$$

B.4. Macierzowe równanie różniczkowe Riccatiego

DEFINICJA 192

Macierzowym równaniem różniczkowym Riccatiego o współczynnikach zmiennych w czasie nazywamy równanie postaci

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{X} \mathbf{A}_{12}(t) \mathbf{X} + \mathbf{A}_{22}(t) \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}_{11}(t) + \mathbf{A}_{21}(t) \quad (\text{B.61})$$

z warunkiem początkowym $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$, gdzie $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest macierzą poszukiwaną, $\mathbf{A}_{11}(t), \mathbf{A}_{12}(t), \mathbf{A}_{21}(t), \mathbf{A}_{22}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ są danymi macierzami o elementach będących funkcjami ciągłymi czasu t , a to jest, dana chwilą początkową.

TWIERDZENIE 110

Rozwiązywanie równania (B.61) spełniające warunek początkowy $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$ ma postać

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y}_2 \mathbf{Y}_1^{-1} \quad (\text{B.62})$$

przy czym macierze $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_1(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y}_2(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ są rozwiązaniami równania różniczkowego

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Y}}_1 \\ \dot{\mathbf{Y}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{11}(t) & -\mathbf{A}_{12}(t) \\ \mathbf{A}_{21}(t) & \mathbf{A}_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.63})$$

z warunkiem początkowym

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1(t_0) \\ \mathbf{Y}_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_n \\ \mathbf{X}_0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.64})$$

Niech

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t, t_0) & \Phi_{12}(t, t_0) \\ \Phi_{21}(t, t_0) & \Phi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{ij}(t, t_0) \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ dla } i, j = 1, 2$$

będzie macierzą podstawową równania (B.63). Rozwiązywanie równania (B.63) spełniające warunek początkowy (B.64) ma więc postać

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix} = \Phi(t, t_0) \begin{bmatrix} \mathbb{I}_n \\ \mathbf{X}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t, t_0) + \Phi_{12}(t, t_0) \mathbf{X}_0 \\ \Phi_{21}(t, t_0) + \Phi_{22}(t, t_0) \mathbf{X}_0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.65})$$

Podstawiając (B.65) do (B.62), otrzymamy

$$\mathbf{X} = [\Phi_{21}(t, t_0) + \Phi_{22}(t, t_0) \mathbf{X}_0] [\Phi_{11}(t, t_0) + \Phi_{12}(t, t_0) \mathbf{X}_0]^{-1} \quad (\text{B.66})$$

W przypadku gdy macierze $\mathbf{A}_{ij}(t)$ mają elementy stałe niezależne od czasu t , równania (B.61) (i (B.63)) przyjmują odpowiednio postacie

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{X} \mathbf{A}_{12}(t) \mathbf{X} + \mathbf{A}_{22}(t) \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}_{11}(t) + \mathbf{A}_{21}(t) \quad (\text{B.67})$$

oraz

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Y}}_1 \\ \dot{\mathbf{Y}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{11} & -\mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.68})$$

W tym przypadku dla $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{11} & -\mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$ i $t_0 = 0$ mamy

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) \\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.70})$$

Rozwiążanie równania (B.68) ma więc postać

$$\mathbf{X} = [\Phi_{21}(t) + \Phi_{22}(t)\mathbf{X}_0][\Phi_{11}(t) + \Phi_{12}(t)\mathbf{X}_0]^{-1} \quad (\text{B.71})$$

B.5. Pochodna Liego funkcji skalarnej wzduż wektora pola

Weźmy pod uwagę układ nielinowy o jednym wejściu opisany równaniem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u \quad (\text{B.72})$$

gdzie $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ jest wektorem stanu, u jest skalarnym wymuszeniem, a $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})]^T$ i $g(\mathbf{x}) = [g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_n(\mathbf{x})]^T$ są wektorami zależnymi od \mathbf{x} .

DEFINICJA 193
Polem wektorowym $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ w obszarze $V \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy funkcję, która każdemu punktowi $p \in V$ przyporządkowuje wektor $\mathbf{f}(p)$.

Funkcje wektorowe $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ i $g(\mathbf{x})$ w równaniu (B.72) określają więc odpowiednie pół wektorowe. Niech dana będzie funkcja skalarna $h(\mathbf{x})$ wektora \mathbf{x} , która ma ciągle pochodne dowolnego rzędu względem wszystkich składowych tego wektora.

DEFINICJA 194
Pochodną Liego $L_f h$ pierwszego rzędu funkcji skalarnej $h = h(\mathbf{x})$ względem pola wektorowego $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ nazywamy funkcję skalarną określona wzorem

$$L_f h = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_i} \quad (\text{B.73})$$

Pochodne Liego $f(\mathbf{x})$ określamy rekurencyjnie

$$L_f^k h = L_f(L_f^{k-1} h), \quad k = 1, 2, \dots \quad (L_f^0 h = h) \quad (\text{B.74})$$

Korzystając z iloczynu skalarnego $\langle \cdot, \cdot \rangle$, możemy (B.73) napisać w postaci

$$L_f h = \langle \text{grad } h, \mathbf{f} \rangle = \quad (\text{B.75})$$

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) \\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t) \end{bmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial h}{\partial x_1}, \frac{\partial h}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = [f_1, f_2, \dots, f_n] \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial h}{\partial x_n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

lub stosując oznaczenie $\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial h}{\partial x_1}, \frac{\partial h}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n} \right]$ w postaci

$$L_f h = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} \quad (\text{B.76})$$

PRZYKŁAD 135

Wyznaczmy pochodną Liego rzędu drugiego funkcji $h(\mathbf{x}) = x_1 x_2 x_3$ względem pola wektorowego $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [x_1 x_2, x_2^2, x_2 x_3]$.

Korzystając z definicji (B.73), otrzymamy w tym przypadku

$$L_f h = \left[\frac{\partial h}{\partial x_1}, \frac{\partial h}{\partial x_2}, \frac{\partial h}{\partial x_3} \right] \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = [x_2 x_3, x_1 x_3, x_1 x_2] \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_2^2 \\ x_2 x_3 \end{bmatrix} = 3x_1 x_2^2 x_3$$

oraz

$$\begin{aligned} L_f^2 h &= L_f(L_f h) = \left[\frac{\partial L_f h}{\partial x_1}, \frac{\partial L_f h}{\partial x_2}, \frac{\partial L_f h}{\partial x_3} \right] \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \\ &= [3x_2^2 x_3, 6x_1 x_2 x_3, 3x_1 x_2^2] \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_2^2 \\ x_2 x_3 \end{bmatrix} = 12x_1 x_2^3 x_3 \end{aligned}$$

□

Z definicji (B.73) wynika, że:

$$L_\alpha f_1 + \beta f_2 = \alpha L_{f_1} h + \beta L_{f_2} h \quad (\text{B.77})$$

– dla dowolnych pól wektorowych oraz dowolnych funkcji skalarnych f_1 i f_2

$$L_f c h = c L_f h \quad (\text{B.78})$$

– dla dowolnego skalarra c niezależnego od wektora \mathbf{x}

$$L_g L_f h = \frac{\partial(L_f h)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g} \quad (\text{B.79})$$

– dla dowolnych pól wektorowych \mathbf{f} i \mathbf{g} oraz funkcji skalarnej $h = h(\mathbf{x})$.

B.6. Nawias Liego pól wektorowych

Weźmy pod uwagę dwa gładkie (tzn. mające ciągłe pochodne dowolnego rzędu) n -wymiarowe pola wektorowe $f = f(\mathbf{x})$ i $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ wektora $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

DEFINICJA 195

Nawiasem Liego $[f, \mathbf{g}]$ pół wektorowych f i \mathbf{g} nazywamy pole wektorowe określone wzorem

$$[f, \mathbf{g}] = \frac{df}{dx} f - \frac{df}{dx} \mathbf{g} \quad (\text{B.80})$$

przy czym

$$\frac{d\mathbf{g}}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad \frac{df}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (\text{B.81})$$

sq macierzami Jacobiego pola wektorowego \mathbf{g} i odpowiednio f .

Nawiasy Liego pół wektorowych f i \mathbf{g} oznacza się również symbolem $\text{ad}_f \mathbf{g}$, czyli $\text{ad}_f \mathbf{g} = [f, \mathbf{g}]$. Nawiasy Liego wyższych rzędów pól wektorowych f i \mathbf{g} określamy rekurencyjnie

$$\text{ad}_f^k \mathbf{g} = \text{ad}_f(\text{ad}_f^{k-1} \mathbf{g}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (\text{ad}_f^0 \mathbf{g} = \mathbf{g}) \quad (\text{B.82})$$

PRZYKŁAD 136

Wyznaczmy nawiasy Liego rzędu pierwszego i drugiego pół wektorowych

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_2^2 \\ x_2 x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 1 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.83})$$

Korzystając z definicji (B.80), otrzymamy

$$\text{ad}_f \mathbf{g} = [f, \mathbf{g}] = \frac{df}{dx} f - \frac{df}{dx} \mathbf{g} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_2^2 \\ x_2 x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & 2x_2 & 0 \\ 0 & x_3 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ 1 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -2x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix}$$

oraz

$$\begin{aligned} \text{ad}_f^2 \mathbf{g} &= \text{ad}_f(\text{ad}_f \mathbf{g}) = \frac{d(\text{ad}_f \mathbf{g})}{dx} f - \frac{d}{dx} \text{ad}_f \mathbf{g} = \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_2^2 \\ x_2 x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & 2x_2 & 0 \\ 0 & x_3 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 \\ -2x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 x_2 \\ 2x_2^2 \\ 2x_2 x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Korzystając z definicji (B.80), łatwo wykazać, że:

$$[f, \mathbf{g}] = -[\mathbf{g}, f] \quad (\text{B.84})$$

$$[af + bg, q] = a[f, q] + b[g, q] \quad (\text{B.85})$$

$$[f, ag + bq] = a[f, g] + b[f, q]$$

- dla dowolnych pól wektorowych f , \mathbf{g} i q oraz stałych współczynników a , $b \in \mathbb{R}$
- dla dowolnych pól wektorowych f i \mathbf{g} oraz funkcji skalarnych α i β

$$[f, [g, q]] + [g, [q, f]] + [q, [f, g]] = 0 \quad (\text{B.87})$$

- zachodzi torzanaość Jacobiego dla dowolnych pól wektorowych f , \mathbf{g} i q .
- Pochodna Liego funkcji skalarnej $h = h(\mathbf{x})$ względem pola wektorowego $[f, \mathbf{g}]$ możemy obliczyć dwoma sposobami.

Sposób 1. Wyznaczany najpierw nawias Liego pół wektorowych f i \mathbf{g} , a następnie $L_{[f, g]} h$.

Sposób 2. Wyznaczany pochodne Liego $L_f L_q h$ i $L_g L_f h$, a następnie skorystany z zależności

$$L_{[f, g]} h = L_f L_g h - L_g L_f h \quad (\text{B.88})$$

PRZYKŁAD 137

Obliczymy dwoma sposobami pochodną funkcji skalarnej $h = x_1 x_2 x_3$ względem nawiasu Liego pół wektorowych (B.83).

Sposób 1. W przykładzie 136 został już wyznaczony nawias Liego pół wektorowych (B.83) równy

$$[f, \mathbf{g}] = - \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Wobec tego

$$L_{[f, g]} h = \frac{\partial h}{\partial x} [f, g] = - \begin{bmatrix} x_2 x_3 & x_1 x_3 & x_1 x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -4x_1 x_2 x_3$$

Sposób 2. Obliczamy najpierw pochodne Liego

$$\begin{aligned} L_g h &= \frac{\partial h}{\partial x} g = [x_2 x_3 \quad x_1 x_3 \quad x_1 x_2] \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_2^2 x_3 + x_1 x_3 + x_1^2 x_2 \\ L_f h &= \frac{\partial h}{\partial x} f = [x_2 x_3 \quad x_1 x_3 \quad x_1 x_2] \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_2^2 \\ x_2 x_3 \end{bmatrix} = 3x_1 x_2^2 x_3 \end{aligned}$$

oraz

$$L_f L_g h = \frac{\partial(L_g h)}{\partial x} f = [x_3 + 2x_1 x_2 \quad x_1^2 + 2x_2 x_3 \quad x_1 + x_2^2] \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_2^2 \\ x_2 x_3 \end{bmatrix} =$$

$$= 3x_1^2 x_2^2 + 2x_1 x_2 x_3 + 3x_2^3 x_3$$

$$\begin{aligned} L_g L_f h &= \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} g = [3x_2^2 x_3 \quad 6x_1 x_2 x_3 \quad 3x_1 x_2^2] \begin{bmatrix} x_2 \\ 1 \\ x_1 \end{bmatrix} = \\ &= 3x_2^3 x_3 + 6x_1 x_2 x_3 + 3x_1^2 x_2^2 \end{aligned}$$

Korzystając z (B.88), otrzymamy ten sam wynik

$$L_{[f, g]} h = L_f L_g h - L_g L_f h = -4x_1 x_2 x_3$$

□

TWIERDZENIE 111. *Pochodna Liego funkcji skalarnej h uzupełniona o pół wektorowego $[f, g]$ ma następującą własność (spełnia reguły Leibniz'a):*

$$L_{[f, g]}(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) = L_{\alpha_1 [f, g]} h_1 + L_{\alpha_2 [f, g]} h_2 \quad (\text{B.89})$$

$$L_{[f, g]}(h_1 h_2) = (L_{[f, g]} h_1) h_2 + h_1 (L_{[f, g]} h_2) \quad (\text{B.90})$$

dla dowolnych funkcji skalarnych h_1 i h_2 .

Dowód. Korzystając z zależności (B.76), otrzymamy

$$\begin{aligned} L_{[f, g]}(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) &= \\ &= \frac{\partial(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2)}{\partial x} [f, g] = \left(\alpha_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} \right) [f, g] = \\ &= \alpha_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} [f, g] + \alpha_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} [f, g] = L_{\alpha_1 [f, g]} h_1 + L_{\alpha_2 [f, g]} h_2 \end{aligned}$$

B.7. Dystrybucje, dystrybucje inwolutywne i dystrybucje invariantne

oraz

$$\begin{aligned} L_{[f, g]}(h_1 h_2) &= \frac{\partial(h_1 h_2)}{\partial x} [f, g] = \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} h_2 + h_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} \right) [f, g] = \\ &= \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} [f, g] \right) h_2 + h_1 \left(\frac{\partial h_2}{\partial x} [f, g] \right) = \\ &= (L_{[f, g]} h_1) h_2 + h_1 (L_{[f, g]} h_2) \end{aligned}$$

B.7. Dystrybucje, dystrybucje inwolutywne i dystrybucje invariantne

B.7.1. Dystrybucje

Niech V będzie otwartym podzbiorem \mathbb{R}^n oraz niech w każdym punkcie $x \in V$ będzie określonych d liniowo niezależnych gładkich wektorów $f_i(x) \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, d$. Wektory te rozpinają d -wymiarową gładką podprzestrzeń przestrzeni liniowej \mathbb{R}^n w każdym punkcie $x \in V$.

DEFINICJA 196

Podprzestrzeń $\Delta(x) \subset \mathbb{R}^n$ rozpięta na wektorach $f_1(x), \dots, f_d(x)$, tzn.

$$\Delta(x) = \text{span } \{f_1(x), \dots, f_d(x)\} \quad (\text{B.91})$$

nazywaną dystrybucją (dokładniej dystrybucją) w punkcie $x \in V \subset \mathbb{R}^n$.

DEFINICJA 197

Wymiarem dystrybucji $\Delta(x)$ nazywamy wymiar podprzestrzeni (B.91).

DEFINICJA 198

Jeżeli Δ_1 i Δ_2 są dystrybucjami, to ich suma i iloczyn (przykroj) definiujemy jako sumę i iloczyn podprzestrzeni wektorowych $\Delta_1(x)$ i $\Delta_2(x)$, czyli

$$\begin{aligned} (\Delta_1 + \Delta_2)(x) &= \Delta_1(x) + \Delta_2(x) \\ (\Delta_1 \cap \Delta_2)(x) &= \Delta_1(x) \cap \Delta_2(x) \end{aligned} \quad (\text{B.92})$$

$$\begin{aligned} \text{Suma dwóch dystrybucji gładkich jest dystrybucją gładką. Jeżeli } \Delta_1 &= \\ &= \text{span } \{f_1, \dots, f_n\} \text{ oraz } \Delta_2 = \text{span } \{g_1, \dots, g_k\}, \text{ to } \Delta_1 + \Delta_2 = \\ &= \text{span } \{f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_k\}. \text{ Iloczyn dwóch dystrybucji gładkich może} \\ &\text{nie być dystrybucją gładką.} \end{aligned} \quad (\text{B.93})$$

TWIERDZENIE 112

Dystrybucja Δ_1 zawiera dystrybucję Δ_2 , $\Delta_1(x) \supset \Delta_2(x)$, wtedy, gdy

$$\forall x \in V \quad \Delta_1(x) \supset \Delta_2(x)$$

TWIERDZENIE 113

Pole wektorowe $f(x)$ należy do dystrybucji Δ , $f(x) \in \Delta(x)$, jeżeli

$$\forall x \in V \quad f(x) \in \Delta(x)$$

Niech $F(x)$ będzie macierzą o n wierszach i elementach będących funkcjami gładkimi wektora $x \in \mathbb{R}^n$. Kolumny macierzy $F(x)$ można traktować jako pola wektorowe, a sama macierz jako dystrybucję rozpiętą na jej kolumnach. Wartość tej dystrybucji w punkcie x jest równa obrazowi Im macierzy $F(x)$, czyli

$$\Delta(x) = \text{Im}(F(x)) \quad (\text{B.94})$$

Wymiar (\dim) tej dystrybucji w punkcie x jest równy rzędowi macierzy $F(x)$ w tym punkcie, czyli

$$\dim \Delta(x) = \text{rzad } F(x) \quad (\text{B.95})$$

DEFINICJA 199

Dystrybucję Δ nazywamy nieosobliwą na podziale V , jeżeli istnieje liczba naturalna d taka, że

$$\forall x \in V \quad \dim \Delta(x) = d$$

w przypadku przeciwnym dystrybucję tę nazywamy singularną (osobliwą).

DEFINICJA 200
Punkt $x^0 \in V$ nazywamy punktem regularnym dystrybucji Δ , jeżeli istnieje otoczenie V^0 punktu x^0 , w którym dystrybucja ta jest nieosobliwa w każdym punkcie x^0 .

TWIERDZENIE 114

Niech x^0 będzie punktem regularnym dystrybucji Δ oraz niech $\dim \Delta(x^0) = d$. Wtedy istnieje otoczenie V^0 punktu x^0 takie, że:

- Wektory $f_1(x), \dots, f_d(x)$ są liniowo niezależne w każdym punkcie $x \in V^0$.
- $\Delta(x) = \text{span} \{f_1(x), \dots, f_d(x)\}$ w każdym punkcie $x \in V^0$.

- Jeżeli $x \in \Delta$, to

$$x = \sum_{i=1}^d c_i(x) f_i(x) \quad (\text{B.96})$$

gdzie $c_i(x)$, $i = 1, \dots, d$ są gładkimi funkcjami skalarnymi wektora x określonymi na V^0 .

TWIERDZENIE 115

Jeżeli $x^0 \in V^0$ jest punktem regularnym gładkich dystrybucji $\Delta_1 \cap \Delta_2$, to iloczyn tych dystrybucji $\Delta_1 \cap \Delta_2$ jest również dystrybucją gładką w V^0 .

B.7.2. Dystrybucje inwolutywne**DEFINICJA 201**

Dystrybucję Δ nazywamy inwolutywną, jeżeli napis Liego $[f, g] \xrightarrow{\text{każdej parę pól wektorowych}} f \circ g$ należących do Δ należy również do Δ , czyli $f, g \in \Delta \Rightarrow [f, g] \in \Delta$

$$f(x) = \sum_{i=1}^d c_i(x) f_i(x) \quad \text{oraz} \quad g(x) = \sum_{i=1}^d d_i(x) f_i(x) \quad (\text{B.97})$$

Niech

$$\Delta(x) \in \text{span} \{f_1(x), \dots, f_d(x)\} \quad (\text{B.98})$$

Z założenia $f, g \in \Delta$ wynika, że

$$f(x) = \sum_{i=1}^d c_i(x) f_i(x) \quad \text{oraz} \quad g(x) = \sum_{i=1}^d d_i(x) f_i(x) \quad (\text{B.99})$$

gdzie $c_i(x)$, $d_i(x)$ są gładkimi funkcjami skalarnymi. Z (B.97)÷(B.99) wynika następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 116

Dystrybucja Δ jest inwolutywna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall 1 \leq i, j \leq d \quad [f_i, f_j] \in \Delta$$

TWIERDZENIE 117

Warunek (B.100) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall (x, 1 \leq i, j \leq d) \quad \text{rzad } [f_1(x), \dots, f_d(x)] = \text{rzad } [f_1(x), \dots, f_d(x), [f_i, f_j]] \quad (\text{B.101})$$

Aby więc sprawdzić, czy dana dystrybucja Δ jest inwolutywna należy:

- obliczyć nawiązy Liego $[f_i, f_j]$ dla wszystkich $x, 1 \leq i, j \leq d$,
- sprawdzić, czy są spełnione warunki (B.101).

PRZYKŁAD 138

Dana jest dystrybucja

$$\Delta = \text{span} \{f_1, f_2\}, \quad f_1(x) = \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_2(x) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Sprawdzimy, czy dystrybucja ta jest inwolutywna.

Korzystając z (B.80), obliczamy nawiązy Liego

$$[f_1, f_2] = \frac{df_2}{dx} f_1 - \frac{df_1}{dx} f_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & e^{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

oraz sprawdzamy warunek (B.101)

$$\text{rzad} \begin{bmatrix} e^{x_2} & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} = 2, \quad \text{rzad} \begin{bmatrix} e^{x_2} & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

w całej przestrzeni \mathbb{R}^3 . Tak więc dystrybucja ta nie jest inwolutywna w całej przestrzeni \mathbb{R}^3 . \square

UWAGA 57. Każda dystrybucja rzędu pierwszego jest inwolutywna, gdyż dla każdego niezerowego wektora f mamy

$$[f, f] = \frac{df}{dx} f - \frac{df}{dx} f = 0 \text{ oraz } \text{rzad}[f, 0] = \text{rzad}[f] = 1$$

B.7.3. Dystrybucje invariantne

DEFINICJA 202

Dystrybucję Δ nazywaną invariantną względem pola wektorowego f , jeżeli nawiązy Liego $[f, g] \in \Delta$ dla każdego $g \in \Delta$, czyli

$$g \in \Delta \Rightarrow [f, g] \in \Delta \quad (\text{B.102})$$

Niech Δ będzie rozpięta na wektorach f_1, \dots, f_d . Wtedy z założenia wynika, że

$$g(x) = \sum_{i=1}^d d_i(x) f_i(x)$$

gdzie $d_i(x), i = 1, \dots, d$ są gladkimi funkcjami skalarnymi.

TWIERDZENIE 118
Z zależności (B.102) i (B.103) wynika, że dystrybucja Δ jest invariantna względem pola wektorowego f wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall (1 \leq i \leq d) \quad [f, f_i] \in \Delta$$

TWIERDZENIE 119

Warunek (B.104) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall (x, 1 \leq i \leq d)$$

$$\text{rzad}[f_1(x), \dots, f_d(x)] = \text{rzad}[f_1(x), \dots, f_d(x), [f, f_i](x)] \quad (\text{B.105})$$

Aby więc sprawdzić, czy dana dystrybucja Δ jest invariantna względem pola wektorowego f należy:

- obliczyć nawiązy Liego $[f, f_i]$ dla wszystkich $x, 1 \leq i \leq d$,
- sprawdzić, czy są spełnione warunki (B.105).

PRZYKŁAD 139

Dana jest dystrybucja

$$\Delta = \text{span} \{f_1, f_2\}, \quad f_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.106})$$

Sprawdzić, czy dystrybucja ta jest invariantna względem pola wektorowego

$$f = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_3 x_4 - x_1 x_2 x_3 \\ \sin(x_3) + x_2^2 + x_1 x_3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.107})$$

W tym celu, korzystając z zależności (B.80), obliczamy

$$[f, f_1] = \frac{df_1}{dx} f - \frac{df}{dx} f_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_3 x_4 - x_1 x_2 x_3 \\ \sin(x_3) + x_2^2 + x_1 x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_2 x_3 & -x_1 x_3 & x_4 - x_1 x_2 & x_3 \\ x_3 & 2x_2 & \cos(x_3) + x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.108})$$

$$[f, f_2] = \frac{df_2}{dx} f - \frac{df}{dx} f_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_3x_4 - x_1x_2x_3 \\ \sin(x_3) + x_2^2 + x_1x_3 \end{bmatrix} +$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_2x_3 & -x_1x_3 & x_4 - x_1x_2 & x_3 \\ x_3 & 2x_2 & \cos(x_3) + x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ x_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

oraz sprawdzamy warunek (B.105). Warunki te są spełnione, gdyż

$$\text{rząd } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{rząd } \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

w całej przestrzeni \mathbb{R}^4 . Dystrybucja (B.106) jest więc invarianta względem pola wektorowego (B.107). \square

DEFINICJA 203 *Podprzestrzeń $V \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy A-invariantną, jeżeli*

$\forall x \in V \quad Ax \in V$

Pojęcie dystrybucji invariantnej względem pola wektorowego zawiera w sobie pojęcie podprzestrzeni A-invariantnej. Niech $\Delta = V = \text{span}\{v_1, \dots, v_d\}$ oraz $f = Ax$. Wtedy

$$\forall v_i \in V \quad [f, f_i] = [Ax, v_i] = \frac{dv_i}{dx} Ax - \frac{d(Ax)}{dx} v_i = -Av_i \in V$$

W dodatku tym zebrano podstawowe wiadomości dotyczące przekształcania Laplace'a, jego własności i rozwiązywania równań różniczkowych metodą operatorową opartą na tym przekształcaniu oraz przekształcania \mathcal{Z} , jego własności i rozwiązywanie równań różnicowych metodą operatorową opartą na tym przekształcaniu. Dowody podanych tu twierzeń można znaleźć w [85, 153, 178].

C.1. Przekształcanie Laplace'a i jego własności

C.1.1. Przekształcanie Laplace'a

Weźmy pod uwagę zbiór $C_L(t)$ funkcji $f(t)$ czasu t spełniających następujące warunki:

- Funkcja $f(t) = 0$ dla $t < 0$.
- Funkcja $f(t)$ jest jednoznacznie określona w całym przedziale od 0 do ∞ i ciągła, z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów nieciągłości w każdym skończonym przedziale; w punktach tych następuje skok funkcji o skończoną wartość.
- Funkcja $f(t)$ rośnie co do bezwzględnej wartości nie szybciej niż funkcja wykładnicza, tzn. istnieje liczba rzeczywista dodatnia M oraz liczba rzeczywista niewjemna α taką, że $|f(t)| < M e^{\alpha t}$.

DEFINICJA 204 *Jednostronnym przekształcaniem Laplace'a (krótko przekształcaniem Laplace'a) nazywamy przekształcanie określone zależnością*

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (\text{C.1})$$

Dodatek C PRZEKSZTAŁCENIA CAŁKOWE

C. Przekształcenia całkowe

które funkcji $f(t) \in \mathbb{C}_L(t)$ przyporządkowuje jej funkcję $F(s)$ zmiennej zespłonnej s . Funkcje czasu $f(t)$ nazywamy oryginałem, a funkcję $F(s)$ jej transformatą.

UWAGA 58. Transformata $F(s)$ funkcji $f(t)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje całka (C.1). Calka ta istnieje dla funkcji $f(t)$ spełniających podane wyżej trzy warunki, czyli dla $f(t) \in C_L(t)$.

Korzystając ze wzoru (C.1) dla funkcji wykładniczej $f(t) = e^{\alpha t}$, otrzymamy

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \int_0^\infty e^{\alpha t} e^{-st} dt = \\ &= -\frac{1}{s-\alpha} e^{-(s-\alpha)t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s-\alpha} \quad \text{dla } \operatorname{Re} s > \alpha \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Z zależności (C.2) otrzymamy dla $\alpha = 0$

$$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s} \quad \text{gdzie } 1(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \geq 0 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \end{cases}$$

dla $\alpha = j\omega t$

$$\mathcal{L}[\operatorname{Re} j\omega t] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{s-j\omega}\right] = \frac{1}{s-j\omega} \quad \text{oraz}$$

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right] = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{-at} \sin \omega t] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{(j\omega-\alpha)t} - e^{-(j\omega+\alpha)}}{2j}\right] = \\ = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s-(j\omega-\alpha)} - \frac{1}{s+j\omega+\alpha} \right) = \frac{\omega}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cos \omega t] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{(j\omega-\alpha)t} + e^{-(j\omega+\alpha)}}{2}\right] = \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-(j\omega-\alpha)} - \frac{1}{s+j\omega+\alpha} \right) = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{-at} - e^{-bt} [1 - (a-b)t]] = \frac{1}{(s+a)^2} - \frac{1}{(s+b)^2}$$

$$\mathcal{L}[a-b(a-b)t] e^{-bt} - a e^{-at} = \frac{s}{(s+a)(s+b)^2}$$

W tablicy C.1 zebrane transformaty najczęstszej spotykanych funkcji czasu t .

C.1. Przekształcenie Laplace'a i jego własności

Tablica C.1. Oryginaly i transformaty Laplace'a wybranych funkcji

Oryginal $f(t)$	Transformata $F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{1}{(n-1)!t^{n-1}}$ (n – liczba naturalna)	$\frac{1}{s^n}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$t e^{-at}$	$\frac{(s+a)^2}{(s+a)^2}$
$\frac{1}{2} t^2 e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^3}$
$(1-at)e^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)^2}$
$t \left(1 - \frac{a}{2}t\right) e^{-at}$	$\frac{(s+a)^3}{(s+a)^3}$
$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at}$ (n – liczba naturalna)	$\frac{1}{(s+a)^n}$
$e^{-at} \sum_{k=0}^n \frac{n!(-a)^k}{(n-k)!(k!)} t^k$ (n – liczba naturalna)	$\frac{s^n}{(s+a)^{n+1}}$
$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a} (1 - e^{-at})$
$\frac{1}{b-a} (be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
$\frac{1}{ab} + \frac{1}{b-a} \left(\frac{e^{-bt}}{b} - \frac{e^{-at}}{a} \right)$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)} + \frac{e^{-ct}}{(c-a)(c-b)}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
$a e^{-at}$	$\frac{b e^{-bt}}{(a-b)(c-b)} + \frac{c e^{-ct}}{(c-a)(c-b)}$
$b^2 e^{-at}$	$\frac{b^2 e^{-bt}}{(a-b)(c-b)} + \frac{c^2 e^{-ct}}{(c-a)(c-b)}$
$(b-a)(c-a)$	$\frac{s^2}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
$e^{-at} - e^{-bt} [1 - (a-b)t]$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)^2}$
$[a-b(a-b)t] e^{-bt} - a e^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)^2}$

Tablica C.1 (cd.)	Oryginal $f(t)$	Transformata $F(s)$
$\frac{e^{-at}}{b} \sin bt$		$\frac{1}{(s+a)^2 + b^2}$
$e^{-at} \cos bt$		$\frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$
$(\cos bt - \frac{a}{b} \sin bt) e^{-at}$		$\frac{s}{(s+a)^2 + b^2}$
$e^{-at} \cosh bt$		$\frac{s+a}{(s+a)^2 - b^2}$
$e^{-at} \sinh bt$		$\frac{b}{(s+a)^2 - b^2}$
$\cos at$		$\frac{s}{s^2 + a^2}$
$\frac{1}{a} \sin at$		$\frac{1}{s^2 + a^2}$
$\cos(at+b)$		$\frac{s \cos b - a \sin b}{s^2 + a^2}$
$\sin(at+b)$		$\frac{s \sin b - a \cos b}{s^2 + a^2}$
$\cosh at$		$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$\frac{1}{a} \sinh at$		$\frac{1}{s^2 - a^2}$
$\frac{1}{a^2}(1 - \cos at)$		$\frac{1}{s(s^2 + a^2)}$
$\frac{1}{a^3}(at - \sin at)$		$\frac{1}{s^2(s^2 + a^2)}$
$\frac{1}{2a^3}(\sin at - at \cos at)$		$\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}$
$\frac{1}{2a}t \sin at$		$\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}$
$\frac{1}{2a}(\sin at + at \cos at)$		$\frac{s^2}{(s^2 + a^2)^2}$
$t \cos at$		$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$
$\frac{1}{a^4}(1 - \cos a) - \frac{-1}{2a^3}t \sin at$		$\frac{1}{s(s^2 + a^2)^2}$
$\frac{1}{2a^3}(\sinh at - \sin at)$		$\frac{1}{s^4 - a^4}$

C.1.2. Podstawowe własności przekształcenia Laplace'a

Przekształcenie Laplace'a spełnia zasadę superpozycji, tzn.

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)] \quad (\text{C.3})$$

dla dowolnych funkcji $f_1(t), f_2(t) \in \mathbb{C}\mathcal{L}(t)$ oraz dowolnych skalarów c_1 i c_2 . Z (C.3) dla $c_1 = c_2 = 1$ ($c_1 = 1$, $c_2 = -1$) wynika, że transformata sumy (różnicy) jest równa sumie (różnicy) transformat.

DEFINICJA 205

Spłotem dwóch funkcji $f_1(t)$ i $f_2(t)$ nazywamy funkcję $f(t)$ określona uzo-

$$f(t) := f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \quad (\text{C.4})$$

TWIERDZENIE 120(Borela)

Transformata spłotu dwóch funkcji czasu $f_1(t)$ i $f_2(t)$ jest równa iloczynowi transformat $F_1(s)$ i $F_2(s)$ tych funkcji

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s)F_2(s) \quad (\text{C.5})$$

TWIERDZENIE 121(o opóźnieniu)

Przesunięcie funkcji czasu $f(t)$ w stronę dodatnich chwil o wartość a (opóźnienie o a) $f(t-a)$ powoduje pomnożenie transformaty funkcji nie-

$$\mathcal{L}[f(t-a)] = e^{-as} F(s) \quad (\text{C.6})$$

C. Przekształcenia całkowe

C.1. Przekształcenie Laplace'a i jego własności

Niech dana będzie funkcja czasu $f(t)$ ciągła i różniczkowalna taka, że jej pochodna $f'(t)$ należy również do zbioru $\mathbb{C}_L(t)$. Wtedy korzystając z zależności (C.1), otrzymamy

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0), \quad \text{gdzie} \quad F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \quad (\text{C.7})$$

Jeżeli $f(0) = 0$, to różniczkowanie funkcji czasu odpowiada pomnożeniu jej transformaty przez s . W przypadku pochodnej n -tego rzędu $f^n(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n}$

$$\mathcal{L}[f^n(t)] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n f^{k-1}(0)s^{n-k} \quad n = 1, 2, \dots, 2, \dots \quad (\text{C.8})$$

Niech $f(t)$ będzie całkowalna, a jej całka oznaczona $f_1(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau \in \mathbb{C}_L(t)$. Wtedy z (C.7) dla $f_1(0) = 0$ mamy

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}, \quad \text{gdzie} \quad F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \quad (\text{C.9})$$

Calkowaniu funkcji czasu w granicach od 0 do t odpowiada podzielenie jej transformaty przez s . W przypadku ogólnym, jeżeli $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, to

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} f(\tau_1)d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_n\right] = \frac{F(s)}{s}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{C.10})$$

W tablicy C.2 zebrane zostały podstawowe własności przekształcania Laplace'a.

Tablica C.2. Podstawowe własności przekształcania Laplace'a

Przekształcenie	Według Laplace'a
Przekształcenie proste	$F(s) = \int_0^t f(t)e^{-st} dt$
Przekształcenie odwrotne	$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty} F(s)e^{st} ds = \sum \operatorname{res} F(s)e^{st}$
Różniczkowanie oryginalu	$f'(t) = sF(s) - f(0)$ $f^n(t) = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n f^{k-1}(0)s^{n-k}$
Calkowanie oryginalu	$\int_0^t f(t)dt = \frac{F(s)}{s}$ $\int_0^t \cdots \int_0^t f(t)(dt)^n = \frac{F(s)}{s^n}$
Różniczkowanie transformaty	$F^n(s) = (-t)^n f(t)$
Calkowanie transformaty	$\int_s^\infty F(s)ds = \frac{f(t)}{t}$ $\int_0^\infty F(s)ds = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt$

Tablica C.2 (cd.)

457

Przekształcenie	Według Laplace'a
Różniczkowanie względem parametru	$\frac{\partial}{\partial x} f(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} F(s, x)$
Calkowanie względem parametru	$\int_{x_0}^x f(t, x)dx = \int_{x_0}^x F(s, x)dx$
Twierdzenie o podobieństwie (zmiana skali zmiennej niezależnej)	$f(at) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
Twierdzenie o opóźnieniu (przesunięcie w obszarze zmiennej rzeczywistej)	$f(t-\tau) = e^{-s\tau} F(s)$
Twierdzenie o przesunięciu (przesunięcie w obszarze zmiennej zespolonej)	$e^{\pm\lambda t} f(t) = F(s \mp \lambda)$
Twierdzenie o wartościach granicznych	$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ $f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
Twierdzenie Borela o transformacie splotu	$F_1(s) * F_2(s) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau =$ $= \int_0^t f_2(\tau)f_1(t-\tau)d\tau$
Calka Duhamela	$sF_1(s) * F_2(s) = \frac{d}{dt} \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau =$ $= \frac{d}{dt} \int_0^t f_2(\tau)f_1(t-\tau)d\tau + f_1(t)*f_2(0) =$ $= \int_0^t f_2(\tau)f_1'(\tau)(t-\tau)d\tau + f_1(0)*f_2(t) =$ $= f_1(t)f_2(t) =$ $= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty} F_1(q)*F_2(s-q)dq =$ $= \sum \operatorname{res} F_1(q)*F_2(s-q)$
Iloczyn oryginalów	$\cos(\omega_0 t)f(t) =$ $= \frac{1}{2} [F(s-j\omega_0) + F(s+j\omega_0)]$ $\sin(\omega_0 t)f(t) =$ $= \frac{s}{2j} [F(s-j\omega_0) - F(s+j\omega_0)]$
Calkowanie iloczynu oryginalu	$\int_0^\infty f_1(t)f_2(t)dt =$ $= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0-\infty}^{\sigma_0+\infty} F_1(s)F_2(-s)ds =$ $= \sum \operatorname{res} F_1(s)F_2(-s)$
Calkowanie iloczynu transformat	

C. Przekształcenia całkowe

458

Tablica C.2 (cd.)

Przekształcenie	Według Laplace'a
Analog równości Parsevala	$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty} F(s) F(-s) ds =$ $= \sum \operatorname{res} F(s) F(-s)$
Twierdzenie o rozkładzie (przypadek pierwiastków jednokrotnych)	$\frac{F_1(s)}{F_2(s)} = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(s_k) e^{s_k t}}{F_2(s_k)}$ $\frac{F_1(s)}{pF_3(s)} = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{F_1(s_k) e^{s_k t}}{p_k F_3(s_k)}$
Twierdzenie o rozkładzie (przypadek pierwiastków wielokrotnych)	$\frac{F_1(s)}{F_2(s)} = \frac{F_1(s)}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{(m_k - 1)!} \left[\frac{d^{m_k-1}}{ds^{m_k-1}} \frac{F_1(s - s_k)^{m_k} e^{s t}}{F_2(s)} \right]_{s=s_k}}$

C.1. Przekształcenie Laplace'a i jego własności

DEFINICJA 207

Funkcja $f(t)$ określona wzorem (C.12) jest oryginałem transformaty $F(s)$, jeżeli $F(s)$ jest funkcją holomorficzną w półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} s \geq \sigma_0$, spełnia warunek (C.11) oraz istnieje cała $\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} |F(s)| ds$, gdzie σ_0 i c są odpowiednimi liczbami rzeczywistymi.

Niech będzie dana transformata w postaci funkcji wymiernej

$$F(s) = \frac{L(s)}{M(s)} \quad (\text{C.13})$$

przy czym

$$L(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0 \quad n \geq m$$

$$M(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

Załóżmy, że równanie $M(s) = 0$ ma różne (jednokrotne) niezerowe pierwiastki s_1, s_2, \dots, s_n , czyli $M(s) = (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)$. Wtedy transformata (C.13) można rozłożyć na ułamki proste

$$\frac{L(s)}{M(s)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{s - s_k} \quad (\text{C.15})$$

przy czym

$$A_k = \frac{L(s_k)}{M'(s_k)} = \frac{L(s_k)}{(s_k - s_1) \dots (s_k - s_{k-1})(s_k - s_{k+1}) \dots (s_k - s_n)} \quad (\text{C.16})$$

a oryginal wyznaczyć za wzorem

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{L(s)}{M(s)} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{L(s_k)}{M'(s_k)} e^{s_k t} \quad (\text{C.17})$$

Jeżeli jeden z pierwiastków równania $M(s) = 0$ jest zerowy, a pozostałe s_1, s_2, \dots, s_{n-1} różne i niezerowe, to oryginal transformaty (C.13) dany jest wzorem

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{L(s)}{M(s)} \right] = \frac{L(0)}{M(0)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{L(s_k)}{s_k M'(s_k)} e^{s_k t} \quad (\text{C.18})$$

DEFINICJA 206
Przekształceniem odwrotnym Laplace'a \mathcal{L}^{-1} nazywany przekształcenie określone zależnością

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad t \geq 0 \quad (\text{C.12})$$

która funkcję $F(s)$ zmiennej zespolonej s przyporządkowuje funkcję czasu $f(t)$.

transformatę (C.13) można rozłożyć na ułamki proste

$$\frac{L(s)}{M(s)} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} \frac{A_{ik}}{(s - s_i)^{m_i - k + 1}}$$

gdzie

$$A_{ik} = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \left[\frac{(s-s_i)^{m_i} L(s)}{M(s)} \right]_{s=s_i}$$

a oryginal transformaty (C.13) dany jest wzorem

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{L(s)}{M(s)} \right] = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} \frac{A_{ik}}{(m_i - k)!} t^{m_i - k} e^{s_i t}$$

Many więc dwa następujące sposoby wyznaczenia oryginału (C.13).

PROCEDURA 27

Wyznaczanie oryginału dla danej transformaty.

Krok 1. Wyznaczamy pierwiastki równania (C.15) lub (C.20).

Krok 2. Korzystając ze wzoru (C.16) lub (C.21), wyznaczamy współczynniki A_k .

Krok 3. Transformatę (C.13) rozkładamy na ułamki proste (C.15) lub (C.20).

Krok 4. Korzystając z tablicy C.1, wyznaczamy oryginalny odpowiadający po-

PROCEDURA 28

Wyznaczanie oryginału transformaty.

Krok 1. Wyznaczamy pierwiaski równania (C.17), (C.18) lub (C.22), wyznaczamy poszu-

Krok 2. Korzystając ze wzoru (C.17), (C.18) lub (C.22), wyznaczamy poszu-

Krok 3. Wyznaczamy pierwiastki równania (C.15) lub (C.20).

Krok 4. Wyznaczamy współczynniki (C.15) lub (C.20).

Krok 5. Wyznaczamy oryginalny odpowiadający po-

Krok 6. Wyznaczamy oryginalny odpowiadający po-

Krok 7. Wyznaczamy oryginalny odpowiadający po-

Krok 8. Wyznaczamy oryginalny odpowiadający po-

Krok 9. Wyznaczamy oryginalny odpowiadający po-

Krok 10. Wyznaczamy oryginalny odpowiadający po-

Krok 11. Wyznaczamy oryginalny odpowiadający po-

Krok 12. Wyznaczamy oryginalny odpowiadający po-

Krok 13. Wyznaczamy oryginalny odpowiadający po-

Krok 14. Wyznaczamy oryginalny odpowiadający po-

Krok 15. Wyznaczamy oryginalny odpowiadający po-

Krok 16. Wyznaczamy oryginalny odpowiadający po-

Krok 17. Wyznaczamy oryginalny odpowiadający po-

Krok 18. Wyznaczamy oryginalny odpowiadający po-

Krok 19. Wyznaczamy oryginalny odpowiadający po-

Krok 20. Wyznaczamy oryginalny odpowiadający po-

Krok 21. Wyznaczamy oryginalny odpowiadający po-

Krok 22. Wyznaczamy oryginalny odpowiadający po-

Krok 23. Wyznaczamy oryginalny odpowiadający po-

Krok 24. Wyznaczamy oryginalny odpowiadający po-

Krok 25. Wyznaczamy oryginalny odpowiadający po-

Krok 26. Wyznaczamy oryginalny odpowiadający po-

Krok 27. Wyznaczamy oryginalny odpowiadający po-

Krok 28. Wyznaczamy oryginalny odpowiadający po-

Krok 29. Wyznaczamy oryginalny odpowiadający po-

Krok 30. Wyznaczamy oryginalny odpowiadający po-

C. Przekształcenia całkowe

C.1. Przekształcenie Laplace'a i jego własności

$$n \geq m, \text{ przy czym } y = y(t) \text{ jest poszukiwaną funkcją czasu } t, \text{ a } u = u(t)$$

jest daną funkcją czasu. Poszukiwać będziemy funkcji y spełniającej równanie

$$y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \dots, y^{n-1}(0) = y_{n-1}$$

czyli równanie różniczkowe (C.23) oraz warunki początkowe

$$y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \dots, y^{n-1}(0) = y_{n-1}$$

czyli równanie różniczkowe (C.24) opartą na przekształceniu Laplace'a (C.23) wyznaczymy metodą operatorową opartą na przekształceniu Laplace'a. Równanie różniczkowe (C.24) poddajemy pochodnej (C.8) dla $n = 1, 2, \dots$ oraz biorąc pod uwagę warunki początkowe (C.24), otrzymujemy

$$M(s)Y(s) + Y_0(s) = L(s)U(s) + U_0(s)$$

czyli równanie różniczkowe (C.24) poddajemy pochodnej (C.8) dla $n = 1, 2, \dots$ oraz biorąc pod uwagę warunki początkowe (C.24), otrzymujemy

$$M(s)Y(s) + Y_0(s) = L(s)U(s) + U_0(s)$$

czyli równanie różniczkowe (C.24) poddajemy pochodnej (C.8) dla $n = 1, 2, \dots$ oraz biorąc pod uwagę warunki początkowe (C.24), otrzymujemy

$$M(s)Y(s) + Y_0(s) = L(s)U(s) + U_0(s)$$

czyli równanie różniczkowe (C.24) poddajemy pochodnej (C.8) dla $n = 1, 2, \dots$ oraz biorąc pod uwagę warunki początkowe (C.24), otrzymujemy

$$M(s)Y(s) + Y_0(s) = L(s)U(s) + U_0(s)$$

czyli równanie różniczkowe (C.24) poddajemy pochodnej (C.8) dla $n = 1, 2, \dots$ oraz biorąc pod uwagę warunki początkowe (C.24), otrzymujemy

$$M(s)Y(s) + Y_0(s) = L(s)U(s) + U_0(s)$$

czyli równanie różniczkowe (C.24) poddajemy pochodnej (C.8) dla $n = 1, 2, \dots$ oraz biorąc pod uwagę warunki początkowe (C.24), otrzymujemy

$$M(s)Y(s) + Y_0(s) = L(s)U(s) + U_0(s)$$

czyli równanie różniczkowe (C.24) poddajemy pochodnej (C.8) dla $n = 1, 2, \dots$ oraz biorąc pod uwagę warunki początkowe (C.24), otrzymujemy

$$M(s)Y(s) + Y_0(s) = L(s)U(s) + U_0(s)$$

czyli równanie różniczkowe (C.24) poddajemy pochodnej (C.8) dla $n = 1, 2, \dots$ oraz biorąc pod uwagę warunki początkowe (C.24), otrzymujemy

$$M(s)Y(s) + Y_0(s) = L(s)U(s) + U_0(s)$$

czyli równanie różniczkowe (C.24) poddajemy pochodnej (C.8) dla $n = 1, 2, \dots$ oraz biorąc pod uwagę warunki początkowe (C.24), otrzymujemy

$$M(s)Y(s) + Y_0(s) = L(s)U(s) + U_0(s)$$

czyli równanie różniczkowe (C.24) poddajemy pochodnej (C.8) dla $n = 1, 2, \dots$ oraz biorąc pod uwagę warunki początkowe (C.24), otrzymujemy

$$M(s)Y(s) + Y_0(s) = L(s)U(s) + U_0(s)$$

czyli równanie różniczkowe (C.24) poddajemy pochodnej (C.8) dla $n = 1, 2, \dots$ oraz biorąc pod uwagę warunki początkowe (C.24), otrzymujemy

$$M(s)Y(s) + Y_0(s) = L(s)U(s) + U_0(s)$$

czyli równanie różniczkowe (C.24) poddajemy pochodnej (C.8) dla $n = 1, 2, \dots$ oraz biorąc pod uwagę warunki początkowe (C.24), otrzymujemy

$$M(s)Y(s) + Y_0(s) = L(s)U(s) + U_0(s)$$

czyli równanie różniczkowe (C.24) poddajemy pochodnej (C.8) dla $n = 1, 2, \dots$ oraz biorąc pod uwagę warunki początkowe (C.24), otrzymujemy

$$M(s)Y(s) + Y_0(s) = L(s)U(s) + U_0(s)$$

czyli równanie różniczkowe (C.24) poddajemy pochodnej (C.8) dla $n = 1, 2, \dots$ oraz biorąc pod uwagę warunki początkowe (C.24), otrzymujemy

$$M(s)Y(s) + Y_0(s) = L(s)U(s) + U_0(s)$$

czyli równanie różniczkowe (C.24) poddajemy pochodnej (C.8) dla $n = 1, 2, \dots$ oraz biorąc pod uwagę warunki początkowe (C.24), otrzymujemy

$$M(s)Y(s) + Y_0(s) = L(s)U(s) + U_0(s)$$

czyli równanie różniczkowe (C.24) poddajemy pochodnej (C.8) dla $n = 1, 2, \dots$ oraz biorąc pod uwagę warunki początkowe (C.24), otrzymujemy

$$M(s)Y(s) + Y_0(s) = L(s)U(s) + U_0(s)$$

czyli równanie różniczkowe (C.24) poddajemy pochodnej (C.8) dla $n = 1, 2, \dots$ oraz biorąc pod uwagę warunki początkowe (C.24), otrzymujemy

$$M(s)Y(s) + Y_0(s) = L(s)U(s) + U_0(s)$$

C.2. Rozwiązywanie równań różniczkowych metodą operatorową

461

PRZYKŁAD 140

Wyznaczymy rozwiązanie równania różniczkowego

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y = 2 \frac{du}{dt} + u$$

gdzie $u = u(t)$ jest daną funkcją czasu. Poszukiwać będziemy funkcji y spełniającej równanie

$$y(0) = y_0, y'(0) = y_1$$

czyli równanie różniczkowe (C.24) poddajemy pochodnej (C.8) dla $n = 1, 2, \dots$ oraz biorąc pod uwagę warunki początkowe (C.24), otrzymujemy

$$M(s)Y(s) + Y_0(s) = L(s)U(s) + U_0(s)$$

czyli równanie różniczkowe (C.24) poddajemy pochodnej (C.8) dla $n = 1, 2, \dots$ oraz biorąc pod uwagę warunki początkowe (C.24), otrzymujemy

$$M(s)Y(s) + Y_0(s) = L(s)U(s) + U_0(s)$$

czyli równanie różniczkowe (C.24) poddajemy pochodnej (C.8) dla $n = 1, 2, \dots$ oraz biorąc pod uwagę warunki początkowe (C.24), otrzymujemy

$$M(s)Y(s) + Y_0(s) = L(s)U(s) + U_0(s)$$

czyli równanie różniczkowe (C.24) poddajemy pochodnej (C.8) dla $n = 1, 2, \dots$ oraz biorąc pod uwagę warunki początkowe (C.24), otrzymujemy

$$M(s)Y(s) + Y_0(s) = L(s)U(s) + U_0(s)$$

czyli równanie różniczkowe (C.24) poddajemy pochodnej (C.8) dla $n = 1, 2, \dots$ oraz biorąc pod uwagę warunki początkowe (C.24), otrzymujemy

$$M(s)Y(s) + Y_0(s) = L(s)U(s) + U_0(s)$$

czyli równanie różniczkowe (C.24) poddajemy pochodnej (C.8) dla $n = 1, 2, \dots$ oraz biorąc pod uwagę warunki początkowe (C.24), otrzymujemy

$$M(s)Y(s) + Y_0(s) = L(s)U(s) + U_0(s)$$

czyli równanie różniczkowe (C.24) poddajemy pochodnej (C.8) dla $n = 1, 2, \dots$ oraz biorąc pod uwagę warunki początkowe (C.24), otrzymujemy

$$M(s)Y(s) + Y_0(s) = L(s)U(s) + U_0(s)$$

czyli równanie różniczkowe (C.24) poddajemy pochodnej (C.8) dla $n = 1, 2, \dots$ oraz biorąc pod uwagę warunki początkowe (C.24), otrzymujemy

$$M(s)Y(s) + Y_0(s) = L(s)U(s) + U_0(s)$$

czyli równanie różniczkowe (C.24) poddajemy pochodnej (C.8) dla $n = 1, 2, \dots$ oraz biorąc pod uwagę warunki początkowe (C.24), otrzymujemy

$$M(s)Y(s) + Y_0(s) = L(s)U(s) + U_0(s)$$

czyli równanie różniczkowe (C.24) poddajemy pochodnej (C.8) dla $n = 1, 2, \dots$ oraz biorąc pod uwagę warunki początkowe (C.24), otrzymujemy

$$M(s)Y(s) + Y_0(s) = L(s)U(s) + U_0(s)$$

czyli równanie różniczkowe (C.24) poddajemy pochodnej (C.8) dla $n = 1, 2, \dots$ oraz biorąc pod uwagę warunki początkowe (C.24), otrzymujemy

$$M(s)Y(s) + Y_0(s) = L(s)U(s) + U_0(s)$$

czyli równanie różniczkowe (C.24) poddajemy pochodnej (C.8) dla $n = 1, 2, \dots$ oraz biorąc pod uwagę warunki początkowe (C.24), otrzymujemy

$$M(s)Y(s) + Y_0(s) = L(s)U(s) + U_0(s)$$

czyli równanie różniczkowe (C.24) poddajemy pochodnej (C.8) dla $n = 1, 2, \dots$ oraz biorąc pod uwagę warunki początkowe (C.24), otrzymujemy

$$M(s)Y(s) + Y_0(s) = L(s)U(s) + U_0(s)$$

czyli równanie różniczkowe (C.24) poddajemy pochodnej (C.8) dla $n = 1, 2, \dots$ oraz biorąc pod uwagę warunki początkowe (C.24), otrzymujemy

$$M(s)Y(s) + Y_0(s) = L(s)U(s) + U_0(s)$$

czyli równanie różniczkowe (C.24) poddajemy pochodnej (C.8) dla $n = 1, 2, \dots$ oraz biorąc pod uwagę warunki początkowe (C.24), otrzymujemy

$$M(s)Y(s) + Y_0(s) = L(s)U(s) + U_0(s)$$

czyli równanie różniczkowe (C.24) poddajemy pochodnej (C.8) dla $n = 1, 2, \dots$ oraz biorąc pod uwagę warunki początkowe (C.24), otrzymujemy

$$M(s)Y(s) + Y_0(s) = L(s)U(s) + U_0(s)$$

spełniające warunek początkowy

$$\begin{aligned} y(0) &= y = 1, & (C.31) \\ y'(0) &= y_1 = 2 \end{aligned}$$

dla $u = u(t) = e^{-3t}$.

Wyznaczając poszukiwane rozwiązanie metodą operatorową, poddajemy obie stro-ny równania (C.30) przekształceniu Laplace'a i po uwzględnieniu liniowości przekształ-cenia (C.3) otrzymamy

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] + 3\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] + 2\mathcal{L}[y] = 2\mathcal{L}\left[\frac{du}{dt}\right] + \mathcal{L}[u] \quad (C.32)$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] = sY(s) - y(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{du}{dt}\right] = sU(s) - u(0), \quad U(s) = \frac{1}{s+3}$$

oraz warunek początkowy (C.31) i $u(0) = 1$, z równania (C.25) otrzymujemy

$$Y(s) = \frac{L(s)}{M(s)}U(s) + \frac{L_0(s)}{M(s)} = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)(s+3)} + \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \quad (C.33)$$

przy czym $M(s) = s^2 + 3s + 2$, $L(s) = 2s + 1$, $L_0(s) = s + 4$. Równanie $M(s) = 0$ ma pierwiastki $s_1 = -1$, $s_2 = -2$. Korzystając ze wzoru (C.17) dla (C.33), otrzymamy

$$y(t) = \frac{3}{2}e^{-t} + 2e^{-2t} - \frac{5}{2}e^{-3t}$$

□

Weźmy pod uwagę układ n równań różniczkowych pierwszego rzędu o stałych współczynnikach

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f \quad (C.34)$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^n$ jest nieznany, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i $f \in \mathbb{R}^n$ jest dany. Poszukiwać będziemy metodą operatorową rozwiązania $x = x(t)$ równania (C.34) spełniającego waru-nek początkowy $x(0) = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ jest dane. Poddajemy obie strony równania (C.34) przekształceniu Laplace'a i po uwzględnieniu, że $\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0)$ otrzymamy

$$X(s) = [Is - A]^{-1}(x_0 + F(s)) \quad (C.35)$$

gdzie $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$. Biorąc pod uwagę, że $\mathcal{L}^{-1}[[Is - A]^{-1}] = e^{At}$ oraz korzystając z twierdzenia Borela dla (C.35), otrzymamy

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}f(\tau)d\tau \quad (C.36)$$

C.2. Przekształcenie \mathcal{Z} i jego własności

C.2.1. Przekształcenie \mathcal{Z}

Niech dany będzie ciąg wartości funkcji dyskretnej (sygnału dyskretnego)

$$\{f_0, f_1, \dots\}$$

który będziemy oznaczać przez f_k .

DEFINICJA 208

Jednostronnym przekształceniem \mathcal{Z} (krótko przekształceniem \mathcal{Z}) nazywa-my przekształcenie określone zależnością

$$F(z) = \mathcal{Z}[f_k] = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} \quad (C.38)$$

„...która przyporządkowuje funkcji dyskretnej f_k funkcję $F(z)$ zmieniającą zc-spoloną z. Funkcję f_k nazywamy oryginałem, a $F(z)$ transformatą \mathcal{Z} -funkcji f_k .

UWAGA 59. Transformata $F(z)$ istnieje, jeżeli szereg (C.38) jest zbieżny.

Promień zbieżności R szeregu (C.38) jest określony wzorem

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \sqrt[k]{|f_k|} \quad (C.39)$$

Szereg ten jest zbieżny w obszarze $|z| > R$ i jest rozbieżny dla $|z| < R$. Transformata \mathcal{Z} istniejąca dla funkcji dyskretnych, które nie rosną szybciej niż funkcje wykładnicze. Transformata $F(z)$ jest funkcja holomorficzną w punkcie $z = \infty$. Funkcję tę można rozwijać w szereg Laurenta.

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} \quad (C.40)$$

zbieżny w otoczeniu punktu $z = \infty$. Istnieje dokładnie jedno takie rozwinięcie, tzn. ciąg f_0, f_1, \dots jest jednoznacznie określony przez funkcję $F(z)$. Miedzy ciągiem f_0, f_1, \dots , czyli funkcją dyskretną f_k i jej transformatą $F(z)$ zachodzi więc odpowiednio wzajemnie jednoznaczna. Niech $1(k)$ będzie dyskretna jednostkową funkcją skokową określona zależnością

$$1(k) = \begin{cases} 1 & \text{dla } k \geq 0 \\ 0 & \text{dla } k < 0 \end{cases} \quad (C.41)$$

a $1(k)e^{ak}$ ($a \neq 0$) dyskretną funkcję wykładniczą. Korzystając z zależności

C. Przekształcenia całkowe

C.2. Przekształcenie \mathcal{Z} i jego własności

465

(C.38) oraz ze wzoru na sumę postępu geometrycznego, otrzymamy

$$\mathcal{Z} \left[e^{ik} I(k) \right] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ak} z^{-k} = \frac{z}{z - e^a} \quad \text{dla } |z| > |e^a| \quad (\text{C.42})$$

Z zależności (C.42) otrzymamy dla $a = 0$

$$\mathcal{Z} [1(k)] = \frac{z}{z - 1} \quad \text{dla } |z| > 1 \quad (\text{C.43})$$

a dla $a = j\omega$

$$\mathcal{Z} \left[e^{j\omega k} 1(k) \right] = \frac{z}{z - e^{j\omega}} \quad \text{dla } |z| > 1 \quad (\text{C.44})$$

W tablicy C.3 zebrane transformaty \mathcal{Z} najczęściej spotykanych funkcji dyskretnych.

Tablica C.3. Oryginaly i transformaty \mathcal{Z} wybranych funkcji

Oryginal f_k	Transformata $F(z)$	Promień zbieżności
----------------	---------------------	--------------------

Oryginal f_k	Transformata $F(z)$	Promień zbieżności
$1(kT_i)$	$\frac{z}{z - 1}$	$ z > 1$
$A1(kT_i)$	$A \frac{z}{z - 1}$	$ z > 1$
$(kT_i)^1 1(kT_i)$	$\frac{T_i z}{(z - 1)^2}$	$ z > 1$
$(kT_i)^2 1(kT_i)$	$\frac{T_i^2 z(z + 1)}{(z - 1)^3}$	$ z > 1$
$(kT_i)^3 1(kT_i)$	$\frac{T_i^3 z(z^2 + 4z + 1)}{(z - 1)^4}$	$ z > 1$
$(kT_i)^4 1(kT_i)$	$\frac{T_i^4 z(z^3 + 11z^2 + 11z + 1)}{(z - 1)^5}$	$ z > 1$
$(kT_i)^5 1(kT_i)$	$\frac{T_i^5 z(z^4 + 26z^3 + 66z^2 + 26z + 1)}{(z - 1)^6}$	$ z > 1$
$e^{akT_i} 1(kT_i)$	$\frac{z}{z - e^{aT_i}}$	$ z > e^{aT_i} $
$e^{-akT_i} 1(kT_i)$	$\frac{z}{z - e^{-aT_i}}$	$ z > e^{aT_i} $
$(1 - e^{-akT_i}) 1(kT_i)$	$\frac{z(1 - e^{-aT_i})}{(z - 1)(z - e^{-aT_i})}$	$ z > e^{-aT_i} $
$kT_i' e^{-akT_i} 1(kT_i)$	$\frac{T_i z}{(z - e^{-aT_i})^2}$	$ z > e^{-aT_i} $
$1(kT_i) \sin \beta kT_i$	$\frac{z \sin \beta T_i}{z^2 - 2z \cos \beta T_i + 1}$	$ z > 1$

Tablica C.3 (cd.)

C.2.2. Podstawowe własności przekształcenia \mathcal{Z}

Przekształcenie \mathcal{Z} spełnia zasadę superpozycji, tzn.

$$\mathcal{Z} [c_1 f_k + c_2 g_k] = c_1 \mathcal{Z} [f_k] + c_2 \mathcal{Z} [g_k] \quad (\text{C.45})$$

dla dowolnych funkcji dyskretnych f_k i g_k oraz współczynników skalarowych c_1 i c_2 . Z zależności (C.45) dla $c_1 = c_2 = 1$ ($c_1 = 1$, $c_2 = -1$) wynika, że transformata \mathcal{Z} sumy (różnicy) jest równa sumie (różnicy) transformat \mathcal{Z} .

DEFINICJA 209

Splotem $f_k * g_k$ funkcji dyskretnych f_k i g_k nazywany funkcją dyskretną określona wzorem

$$f_k * g_k = \sum_{i=0}^{k-1} g_{k-i} f_i = \sum_{i=0}^{k-1} g_{k-i} f_i \quad (\text{C.46})$$

TWIERDZENIE 123 (o transformacie splotu)

Transformata \mathcal{Z} splotu dwóch funkcji dyskretnych f_k i g_k jest równa iloczynowi transformat $\mathcal{Z} F(z)$ i $G(z)$ tych funkcji

$$\mathcal{Z} [f_k * g_k] = \mathcal{Z} [f_k] \mathcal{Z} [g_k] = F(z) G(z) \quad (\text{C.47})$$

bądź

$$f_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k F(w^{-1})}{dw^k} \right|_{w=0} \quad (C.63)$$

Metodę dzielenia wielomianów oraz metody oparte na wzorach (C.62) i (C.63) wygodnie jest stosować zwykle wtedy, gdy poszukujemy wartości oryginału f_k dla kilku początkowych wartości $k = 0, 1, \dots$

PRZYKŁAD 141

Wyznaczmy oryginal f_k dla $k = 0, 1, 2, 3$ transformaty

$$F(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2} \quad (C.64)$$

Dzieląc wielomian z przez wielomian $z^2 - 3z + 2$, otrzymamy

$$z : z^2 - 3z + 2 = z^{-1} + 3z^{-2} + 7z^{-3} + \dots$$

czyli

$$F(z) = z^{-1} + 3z^{-2} + 7z^{-3} + \dots$$

Wobec tego $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = 3$, $f_3 = 7$. Korzystając z zależności (C.62), otrzymamy te same wartości oryginału.

$$f_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{z^2 - 3z + 2} = 0$$

$$f_1 = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2}{z^2 - 3z + 2} = 1$$

$$f_2 = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 \left[\frac{z^2}{z^2 - 3z + 2} - z^{-1} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{3z^2 + 2z}{z^2 - 3z + 2} = 3$$

$$f_3 = \lim_{z \rightarrow \infty} z^3 \left[\frac{z}{z^2 - 3z + 2} - z^{-1} - 3z^{-2} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{7z^2 + 6z}{z^2 - 3z + 2} = 7$$

Korzystając ze wzoru (C.63) otrzymany również te same wartości oryginału.

$$f_0 = F(w^{-1}) \Big|_{w=0} = \frac{w^{-1}}{w^{-2} - 3w^{-1} + 2} = \frac{w}{2w^2 - 3w + 1} \Big|_{w=0} = 0$$

$$f_1 = \left. \frac{dF(w^{-1})}{dw} \right|_{w=0} = \left. \frac{-2w^2 + 1}{(2w^2 - 3w + 1)^2} \right|_{w=0} = 1$$

$$f_2 = \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 F(w^{-1})}{dw^2} \right|_{w=0} = \left. \frac{4w^3 - 6w + 3}{(2w^2 - 3w + 1)^3} \right|_{w=0} = 3$$

$$f_3 = \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3 F(w^{-1})}{dw^3} \right|_{w=0} = \left. \frac{-8w^4 - 24w^2 + 24w + 7}{(2w^2 - 3w + 1)^4} \right|_{w=0} = 7$$

Niech równanie $M(z) = 0$ ma pierwiastki z_1, z_2, \dots, z_n jednokrotne i różne od 1. W tym przypadku oryginal transformaty (C.59) jest określony wzorem

$$f_k = \sum_{i=1}^n \frac{L(z_i)}{M'(z_i)} z_i^{k-1} \quad (C.65)$$

przy czym

$$M'(z_i) = \left. \frac{dM(z)}{dz} \right|_{z=z_i} = (z_i - z_1) \cdots (z_i - z_{i-1})(z_i - z_{i+1}) \cdots (z_i - z_n) \quad (C.66)$$

Jeżeli równanie $M(z) = 0$ ma jeden pierwiastek $z_n = 1$ i pozostałe z_1, z_2, \dots, z_{n-1} jednokrotne i różne od 1, to $M(z) = (z - 1)M_1(z)$ i oryginal transformaty (C.59) jest określony wzorem

$$f_k = \frac{L(1)}{M_1(1)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{L(z_i)}{(z_i - 1)M'_1(z_i)} z_i^{k-1} \quad (C.67)$$

gdzie

$$M'_1(z_i) = \left. \frac{dM_1(z)}{dz} \right|_{z=z_i} = (z_i - z_1) \cdots (z_i - z_{i-1})(z_i - z_{i+1}) \cdots (z_i - z_n) \quad (C.68)$$

W przypadku ogólnym, gdy równanie $M(z) = 0$ ma pierwiastki wielokrotnie z_1, z_2, \dots, z_r o krotnościach odpowiednio m_1, m_2, \dots, m_r , $\sum_{i=1}^r m_i = n$, oryginal transformaty (C.59) jest określony wzorem

$$f_k = \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{m_i-1} A_{ij} \frac{(k-1)!}{(k-j-1)! j!} z_i^{k-j-1} \quad (C.69)$$

gdzie

$$A_{ij} = \frac{1}{(m_i - j - 1)!} \left. \frac{d^{m_i-j-1}}{dz^{m_i-j-1}} \left[\frac{L(z)}{M(z)} (z - z_i)^{m_i} \right] \right|_{z=z_i} \quad (C.70)$$

PRZYKŁAD 142

Wyznaczmy oryginal transformaty (C.64), korzystając ze wzoru (C.67).

W tym przypadku $L(z) = z$, $M(z) = (z - 1)(z - 2) = (z - 1)M_1(z)$ oraz $M_1(z) = z - 2$. Wobec tego $z_1 = 2$, $M'_1(z) = 1$ i korzystając ze wzoru (C.67), otrzymamy

$$f_k = \frac{L(1)}{M_1(1)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{L(z_i)}{(z_i - 1)M'_1(z_i)} z_i^{k-1} = \frac{1}{-1} + \frac{2}{1} 2^{k-1} = 2^k - 1 \quad (C.71)$$

Podstawiając w zależności (C.71) $k = 0, 1, 2, 3$, otrzymamy te same początkowe wartości oryginału. Jak w poprzednim przykładzie. \square

C.2.4. Rozwiązywanie równań różnicowych metodą operatorową

Dane jest równanie różnicowe n -tego rzędu ze stałymi współczynnikami $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_0, b_1, \dots, b_m$

$$\begin{aligned} & y_{k+n} + a_{n-1}y_{k+n-1} + \cdots + a_1y_{k+1} + a_0y_k = \\ & = b_m u_{k+m} + b_{m-1}u_{k+m-1} + \cdots + b_1u_{k+1} + b_0u_k \end{aligned} \quad (\text{C.72})$$

czyżym $n \geq m$, y_k jest poszukiwana funkcją dyskretną, a u_k jest daną funkcją dyskretną. Poszukiwać będziemy metodą operatorową rozwiązania y_k równania (C.72) spełniającego warunki początkowe

$$y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \quad (\text{C.73})$$

W tym celu obie strony równania (C.72) poddajemy przekształceniu \mathcal{Z} , korzystając z zależności (C.45) i (C.48), otrzymamy

$$M(z)Y(z) + Y_0(z) = L(z)U(z) + U_0(z) \quad (\text{C.74})$$

czyżym $M(z)$ i $L(z)$ mają postacie (C.60), $Y(z) = \mathcal{Z}[y_k]$, $U(z) = \mathcal{Z}[u_k]$, a $Y_0(z)$ i $U_0(z)$ są funkcjami wielomianowymi zmiennej z zależnymi od warunków początkowych (C.73) i funkcji u_k dla $k = 0, 1, \dots, m-1$. Wyznaczając z równania (C.74) transformację $Y(z)$ poszukiwanej funkcji, otrzymamy

$$Y(z) = \frac{L(z)}{M(z)}U(z) + \frac{L_0(z)}{M(z)} \quad (\text{C.75})$$

licz $L_0(z) = U_0(z) - Y_0(z)$. Niech

$$g_k = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{L(z)}{M(z)}\right], \quad h_k = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{L_0(z)}{M(z)}\right] \quad (\text{C.76})$$

Korzystając z twierdzenia o transformacji \mathcal{Z} splotu oraz z (C.76) dla (C.75), otrzymamy

$$y_k = \sum_{i=0}^{k-1} g_{k-i}u_i + h_k \quad (\text{C.77})$$

Rozwiązanie składa się z dwóch składowych: ze składowej wymuszonej przy czym $x_k \in \mathbb{R}^n$ jest poszukiwane, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, a $f_k \in \mathbb{R}^n$ jest dane. Poszukiwać będziemy metodą operatorową rozwiązania x_k równania (C.82) spełniającego dany warunek początkowy x_0 . Poddajemy obie strony równania (C.82) przekształceniu \mathcal{Z} i po uwzględnieniu, że $\mathcal{Z}[x_{k+1}] = zX(z) - zx_0$ otrzymamy

$$X(z) = [\mathbb{I}_n z - A]^{-1}(zx_0 + F(z)) \quad (\text{C.83})$$

PRZYKŁAD 143

Wyznaczymy metodą operatorową rozwiązanie równania różnicowego

$$y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = u_{k+1} + 2u_k \quad (\text{C.79})$$

spełniające warunek początkowy $y_0 = 0, y_1 = 1$ dla $u_k = e^{-k}$. Obie strony równania (C.79) poddajemy przekształceniu \mathcal{Z} i korzystamy z zależności (C.47). Biorąc pod uwagę, że

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[y_{k+2}] &= z^2Y(z) - y_0z^2 - y_1z \\ \mathcal{Z}[y_{k+1}] &= zY(z) - y_0z \\ \mathcal{Z}[u_{k+1}] &= zU(z) - u_0z \\ \mathcal{Z}[u_k] &= U(z) = \frac{z}{z - e^{-1}} \end{aligned}$$

oraz warunki początkowe i $u_0 = 1$, otrzymujemy

$$Y(z) = \frac{L(z)}{M(z)}U(z) = \frac{z^2 + 2z}{(z^2 - 5z + 6)(z - e^{-1})} \quad (\text{C.80})$$

gdzie $M(z) = z^2 - 5z + 6$, $L(z) = z + 2$. Równanie $M(z) = 0$ ma pierwiastki $z_1 = 2$, $z_2 = 3$. Korzystając ze wzoru (C.65), otrzymamy

$$y_k = \sum_{i=1}^n \frac{L(z_i)}{M'(z_i)} z_i^{k-1} = \frac{2^{k+1}}{e^{-1} - 2} + \frac{5}{3 - e^{-1}} 3^k + \frac{e^{-1} + 2}{e^{-2} - 5e^{-1} + 6} e^{-k}$$

Ten sam wynik otrzymamy, wyznaczając oryginalny $y_k = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^2 + 2z}{z^2 - 5z + 6}\right] = \frac{5}{3}3^k - 2^{k+1}$ oraz korzystając ze wzoru (C.78). \square

Jeżeli równanie różnicowe ma postać

$$\begin{aligned} \Delta^n y_k + a_{n-1}\Delta^{n-1}y_k + \cdots + a_1\Delta y_k + a_0y_k &= \\ &= b_m \Delta^m u_k + b_{m-1}\Delta^{m-1}u_k + \cdots + b_1\Delta u_k + b_0u_k \end{aligned} \quad (\text{C.81})$$

to korzystając ze wzoru (B.44), sprawdzany je do równoważnej postaci (C.72) lub bezpośrednio obie jego strony poddajemy przekształceniu \mathcal{Z} i korzystamy z zależności (C.52). W wyniku otrzymamy równanie analogiczne do równania (C.74). Dalsze postępowanie jest takie jak dla równania różnicowego (C.72).

Niech dany będzie układ n równań różnicowych o stałych współczynnikach

$$x_{k+1} = Ax_k + f_k \quad (\text{C.82})$$

przy czym $x_k \in \mathbb{R}^n$ jest poszukiwane, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, a $f_k \in \mathbb{R}^n$ jest dane. Poszukiwać będziemy metodą operatorową rozwiązania x_k równania (C.82) spełniającego dany warunek początkowy x_0 . Poddajemy obie strony równania (C.82) przekształceniu \mathcal{Z} i po uwzględnieniu, że $\mathcal{Z}[x_{k+1}] = zX(z) - zx_0$ otrzymamy

$$X(z) = [\mathbb{I}_n z - A]^{-1}(zx_0 + F(z)) \quad (\text{C.83})$$

C. Przekształcenia całkowe

C.2. Przekształcenie \mathcal{Z} i jego własności

gdzie $F(z) = \mathcal{Z}[f_k]$. Biorąc pod uwagę, że

$$\Phi_k = A^k = \mathcal{Z}^{-1} [z[I_n z - A]^{-1}]$$

oraz korzystając z twierdzenia o transformacie splotu dla (C.83), otrzymamy

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} f_i \quad (\text{C.84})$$

C.2.5. Jak to zrobić w MATLAB-ie

Obliczenia, zwiżane z wyznaczaniem transformaty \mathcal{Z} oraz transformaty odwrotnej są zrealizowane w MATLAB-ie za pomocą dwóch funkcji, które opisano poniżej.

FUNKCJA ZTRANS:

Funkcja wyznacza transformatę \mathcal{Z} danego szeregu.

$F = \text{ZTRANS}(f)$ wyznacza transformatę \mathcal{Z} skalarnego wyrażenia symbolicznego, w którym zmienna niezależna jest n . Wynik obliczeń jest transformatą \mathcal{Z} zmiennej z .

$F = \text{ZTRANS}(f, w)$ wyznacza transformatę \mathcal{Z} skalarnego wyrażenia symbolicznego, używając w transformacie zmiennej w zamiast zmiennej z .

$F = \text{ZTRANS}(f, k, w)$ wyznacza transformatę \mathcal{Z} skalarnego wyrażenia symbolicznego f zakładając, że jest ono funkcją zmiennej niezależnej k .

Transformata będzie wyrażona za pomocą zmiennej w .

FUNKCJA ZTRANS:

Funkcja wyznacza odwrotną transformatę \mathcal{Z} .

$f = \text{IZTRANS}(F)$ wyznacza transformatę odwrotną \mathcal{Z} skalarnego wyrażenia symbolicznego F będącego funkcją zmiennej niezależnej z . Wynik obliczeń jest domyślnie funkcją zmiennej n .

$f = \text{IZTRANS}(F, k)$ wyznacza transformatę odwrotną \mathcal{Z} skalarnego wyrażenia symbolicznego F będącego funkcją zmiennej k .

$f = \text{IZTRANS}(F, w, k)$ wyznacza transformatę odwrotną \mathcal{Z} skalarnego wyrażenia symbolicznego F będącego funkcją zmiennej k . Wynik obliczeń ma być wyrażony w funkcji zmiennej k .

Wykorzystajmy teraz obie funkcje do wyznaczenia transformat \mathcal{Z} kilku wybranych ciągów dyskretycznych oraz wyznaczenia ich transformat odwrotnych. Wyznaczmy transformatę \mathcal{Z} ciągu

$$f(n) = 1$$

W wierszu poleceń należy wpisać następujące polecenie:

```
ztrans(sym('1'))
ans=
z/(z-1)
```

Clickając otrzymamy transformatę będącą funkcją zmiennej w , należy użyć polecenia

```
ztrans(sym('1'), \ sym('w'))
```

```
ans=
w/(w-1)
```

PRZYKŁAD 144

Wyznaczmy transformatę \mathcal{Z} ciągu

$$f(x) = x$$

gdzie x jest zmienną niezależną, a transformata ma być funkcją zmiennej w . Należy wtedy skorzystać z polecenia

```
ztrans(sym('x'), sym('x'), sym('w'))
```

W odpowiedzi otrzymamy

```
ans=
w/(w-1)^2
```

PRZYKŁAD 145

Wykorzystując funkcję ZTRANS, wyznaczmy transformatę ciągu

$$f(n) = \cos(kn)$$

za pomocą polecenia

```
ztrans(sym('cos(n*k)'), sym('n'), sym('w'))
```

Rezultat jest następujący

```
ans=
(w-cos(k))*w/(w^2-2*w*cos(k)+1)
```

□

Dodatek D

ELEMENTY LOGIKI

I DOWODZENIE TWIERDZEŃ

D.1. Zdania proste i złożone

Zdaniem w sensie logicznym nazywamy wyrażenie oznajmujące, które jest prawdziwe lub fałszywe. Zdanie Córka jest młodszego od matki.

Jest zdaniem prawdziwym, ale zdanie Matka jest młodszego od córki.

Jest zdaniem fałszywym. Zdania prawdziwe oznaczać będącymi przez P (prawda), a zdania fałszywe przez F (fałsz). Łącząc zdania proste spójnikami \wedge , \vee , \neg , \rightarrow , $\neg\rightarrow$, $\neg\neg$, $\wedge\rightarrow$, $\vee\rightarrow$ i $\neg\wedge$, $\neg\vee$ otrzymamy zdania złożone. Symbole logiczne odpowiadające tym spójnikom oraz nazwy zdań złożonych są podane w tablicy D.1.

Tablica D.1. Spójniki logiczne

Spójnik	Symbol logiczny	Nazwa zdania złożonego
i	\wedge	koniunkcja
tub	\vee	alternatywa
$nieprawda, zie$	\neg	negracja
$jeżeli, to$	\Rightarrow	implikacja
$wtedy i tylko wtedy, gdy$	\Leftrightarrow	równoważność

Zdanie złożone

Andrzej ma samochód i ma komputer. Składa się z dwóch prostych zdań p: Andrzej ma samochód. q: Andrzej ma komputer.

połączonych spójnikiem i . To zdanie złożone nazywany koniunkcją zdani p i q i oznaczany przez $p \wedge q$. Jest ono prawdziwe, gdy oba zdania proste są prawdziwe. Gdy jedno ze zdani p albo q jest fałszywe, to zdanie złożone $p \wedge q$ jest fałszywe. Koniunkcja dwóch zdani jest prawdziwa tylko wtedy, gdy oba zdania tworzące ją są prawdziwe (tablica D.2).

Zdanie złożone

Andrzej dziś wieczorem pojedzie do kina lub teatru.

składa się z dwóch zdani prostych:

p : Andrzej dziś wieczorem pojedzie do kina.

q : Andrzej dzisiaj wieczorem pojedzie do teatru.

połączonych spojnikiem lub . To zdanie złożone nazywany alternatywą zdani p oraz q i oznaczany przez $p \vee q$. Jest ono prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy Andrzej albo idzie do kina, albo tylko do teatru, albo gdy idzie zarówno do kina oraz do teatru. Zdanie to jest więc fałszywe tylko wtedy, gdy Andrzej nie pojedzie ani do kina, ani do teatru. Alternatywa dwóch zdani jest fałszywa tylko wtedy, gdy oba zdania tworzące ją są fałszywe (tablica D.3).

Tablica D.3. Alternatywa

p	q	$p \vee q$
P	P	P
P	F	P
F	P	P
F	F	F

Zdanie

Nieprawda, że Andrzej ma samochód.

nazywany zaprzeczeniem (negacją) zdania

Andrzej ma samochód.

i oznaczany przez $\neg p$. Zdanie p oraz jego negacja $\neg p$ mają przeciwnie wartości logiczne (tylko jedno z nich jest prawdą, a drugie fałszem) (tablica D.4).

Zdanie złożone

Jeżeli Andrzej zrobi doktorat, to otrzyma nagrodę.

nażywany implikacją utworzoną ze zdani prostych

p : Andrzej zrobi doktorat. q : Andrzej otrzyma nagrodę.

i oznaczany przez $p \Rightarrow q$. Zdanie p nazywany poprzednikiem implikacji, a zdanie q następstkiem. Implikacja jest tylko wtedy fałszywa, gdy jej poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy (tablica D.5).

Tablica D.4. Negacja

p	$\neg p$
P	F
F	P

Zdanie $p \Rightarrow q$ jest równoważane zdaniem

p jest warunkiem wystarczającym (dostatecznym) dla q .
 q jest warunkiem koniecznym dla p .

Na przykład w zdaniu

Jeżeli liczba A jest podzielna przez 4, to liczba ta jest podzielna przez 2.

warunkiem wystarczającym podzielności przez 2 jest podzielność przez 4, a warunkiem koniecznym podzielności przez 4 jest podzielność przez 2.

Zdanie złożone nazywany równoważnością zdani prostych p i q , i oznaczany $p \Leftrightarrow q$ wtedy, gdy zachodzi implikacje $p \Rightarrow q$ oraz $q \Rightarrow p$. Równoważność jest prawdziwa tylko wtedy, gdy oba zdania tworzące ją są prawdziwe albo oba są fałszywe (tablica D.6).

Tablica D.6. Równoważność

p	q	$p \Leftrightarrow q$
P	P	P
P	F	F
F	P	F
F	F	P

Tablica D.5. Implikacja

p	q	$p \Rightarrow q$
P	P	P
P	F	F

D. Elementy logiki i dowodzenie twierdzeń

7. Łączność alternatywy: $(p \vee q) \vee t \Leftrightarrow p \vee (q \vee t)$

8. Przemienność koniunkcji: $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

9. Łączność koniunkcji: $(p \wedge q) \wedge t \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge t)$

10. Rozdzierność koniunkcji względem alternatywy: $p \wedge (q \vee t) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge t)$

11. Rozdzierność koniunkcji względem koniunkcji: $p \wedge (q \wedge t) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge (p \wedge t)$

12. Prawo przechodności implikacji: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow t) \Rightarrow (p \Rightarrow t)$

13. Prawo zaprzeczenia implikacji: $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

14. Równoważność implikacji prostej i przeciwniej: $p \Rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge \neg q$

15. Równoważność implikacji odwrotnej i przeciwniej: $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$

16. Zamiana równoważności na koniunkcję na implikację prostej i odwrotnej: $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

Z tablicy D.7 wynika, że zdanie $p \vee \neg p$ jest zawsze prawdziwe niezależnie od tego, czy zdanie p jest prawdziwe czy fałszywe. Jeżeli implikacja $p \Rightarrow q$ jest zawsze prawdziwa, to implikacja $\neg p \Rightarrow \neg q$ jest zawsze fałszywa. Jeżeli implikacja $p \Rightarrow q$ jest zawsze fałszywa, to implikacja $\neg p \Rightarrow \neg q$ jest zawsze prawdziwa.

Tablica D.7. Prawo wyłączonego środka

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
F	P	P
P	F	P

W tablicy D.7 wynika, że zdanie $p \vee \neg p$ jest zawsze prawdziwe niezależnie od tego, czy zdanie p jest prawdziwe czy fałszywe. Jeżeli implikacja $p \Rightarrow q$ jest zawsze prawdziwa, to implikacja $\neg p \Rightarrow \neg q$ jest zawsze fałszywa. Jeżeli implikacja $p \Rightarrow q$ jest zawsze fałszywa, to implikacja $\neg p \Rightarrow \neg q$ jest zawsze prawdziwa.

Z tablicy D.7 wynika, że zdanie $p \vee \neg p$ jest zawsze prawdziwe niezależnie od tego, czy zdanie p jest prawdziwe czy fałszywe. Jeżeli implikacja $p \Rightarrow q$ jest zawsze prawdziwa, to implikacja $\neg p \Rightarrow \neg q$ jest zawsze fałszywa. Jeżeli implikacja $p \Rightarrow q$ jest zawsze fałszywa, to implikacja $\neg p \Rightarrow \neg q$ jest zawsze prawdziwa.

D.3. Dowodzenie twierdzeń

479

Tablica D.8. Równoważność implikacji

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$
F	F	P	P	P
P	F	F	P	P

D.3. Dowodzenie twierdzeń

Każde twierdzenie składa się z założenia (lub założień) Z oraz tezy (tez) T . Na przykład weźmy pod uwagę twierdzenie Pitagorasa w następującym sformułowaniu:

TWIERDZENIE 124

W trójkącie prostokątnym kwadrat przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów przyprostokątnych, czyli

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (\text{D.1})$$

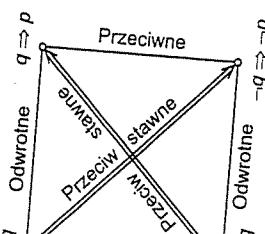
W twierdzeniu tym założeniem Z jest to, że trójkąt jest prostokątny, a teza T następujący:

1. Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to zachodzi zależność (D.1).
2. Zachodzi zależność (D.1) wtedy, gdy trójkąt jest prostokątny.
3. W warunkiem wystarczającym na to, aby zachodziła zależność (D.1) jest to, aby trójkąt był prostokątny.
4. Z założenia, że trójkąt jest prostokątny wynika, że zachodzi zależność (D.1).
5. Z założenia, że trójkąt jest prostokątny implikuje, że zachodzi zależność (D.1), czyli $Z \Rightarrow T$.

W twierdzeniu 124 (oraz jego równoważnych sformułowańach 1–5) jest powtórzanie polega na wykazaniu, że Z wynika z zależności (D.1). Dowód tego przekształca się w dowód, że z założenia Z wynika teza T . Wychodząc z tego, że z założenia i korzystając z praw logicznych (a w szczególności z prawa koniugacji zespolonych, twierdzenie to możemy udowodnić następująco. Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to możemy przyjąć, że przyprostokątna a leży na osi przeciwprostokątnej, a przyprostokątna b leży na osi liczby urojonych. Wtedy moduł liczby c jest równa liczbie zespolonej $c = a + ib$, gdzie $i = \sqrt{-1}$

$$c^2 = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

Rys. D.1.



Wychodząc z założenia Z wykazaliśmy, że zachodzi teza T , czyli implikacja $Z \Rightarrow T$.

TWIERDZENIE 125
Zależność (D.1) jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt jest prostokątny.

W twierdzeniu 125 jest podany warunek konieczny i wystarczający. W tym twierdzeniu również założeniem Z jest to, że trójkąt jest prostokątny, a teza T zależność (D.1).

UWAGA 60. Dowód dostateczności polega na wykazaniu implikacji $Z \Rightarrow T$, a dowód konieczności na wykazaniu implikacji $T \Rightarrow Z$.

Dowód. Weźmy pod uwagę dowolny trójkąt o bokach a , b i c i kącie α między bokami a i b . Wykażemy najpierw, że jest spełniona dla tego trójkąta zależność

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha \quad (\text{D.2})$$

Korzystając z rachunku liczb zespolonych, możemy przyjąć, że bok a leży na osi liczb rzeczywistych, a bok b jest równy liczbie zespolonej $b = -b \cos \alpha + i b \sin \alpha$. Bok c tego trójkąta jest równy liczbie zespolonej $c = a - b \cos \alpha + i b \sin \alpha$, a kwadrat tego boku jest równy kwadratowi modułu tej liczby, czyli

$$\begin{aligned} c^2 &= (a - b \cos \alpha + i b \sin \alpha)(a - b \cos \alpha - i b \sin \alpha) = \\ &= a^2 + b^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - 2ab \cos \alpha = \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha \end{aligned}$$

gdyż $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Aby udowodnić dostateczność, należy pokazać implikację $Z \Rightarrow T$. Z zależności (D.2) wynika, że jeśli trójkąt ten jest prostokątny, to $\alpha = 90^\circ$ i $\cos \alpha = 0$ i otrzymujemy natychmiast zależność (D.1). Aby udowodnić konieczność, należy wykazać implikację $T \Rightarrow Z$. Z zależności (D.2) otrzymujemy zależność (D.1) tylko wtedy, gdy $\cos \alpha = 0$, czyli $\alpha = 90^\circ$. Zatem tylko wtedy, gdy trójkąt jest prostokątny.

UWAGA 61. Dowodząc powyższe twierdzenia, korzystałmy z metody bezpośredniej dowodzenia, która polega na wykazaniu implikacji $Z \Rightarrow T$ lub $T \Rightarrow Z$.

W metodzie bezpośredniej, wykazując te implikacje, korzystamy z praw logicznych, a zwłaszcza często z prawa przeodniosły implikacji.

UWAGA 62. W metodzie przez zaprzeczenie (implikacji przeciwnawnej), opartej na równoważności implikacji prostej i przeciwstawnej: $Z \Rightarrow T \Leftrightarrow \neg Z \Rightarrow \neg T$, zamiast dowodzić implikacji prostej $Z \Rightarrow T$, dowodzimy implikacji przeciwstawnej $\neg T \Rightarrow \neg Z$, której dowód może być prostszy.

Metodę tę objaśnimy na przykładzie twierdzenia 125. Założymy, że nie jest spełniona równość (D.1). Wtedy z zależności (D.2) wynika, że trójkąt nie jest prostokątny. Wykazaliśmy więc implikację $\neg T \Rightarrow \neg Z$, która jest równoważna implikacji $Z \Rightarrow T$. Metoda doprowadzenia do sprzeczności opiera się na następującej równoważności $Z \Rightarrow T \Leftrightarrow \neg(Z \wedge \neg T)$, która wynika z prawa zaprzeczenia implikacji $\neg(Z \Rightarrow T) \Leftrightarrow \neg(Z \wedge \neg T)$ oraz prawa podwójnego przeczenia $\neg(\neg(Z \Rightarrow T)) \Leftrightarrow \neg(Z \wedge T)$.

UWAGA 63. W metodzie doprowadzenia do sprzeczności, wychodząc z założenia Z oraz przyjmując, że teza T nie jest prawdziwa, doprowadzamy do sprzeczności.

Objaśnimy tę metodę na przykładzie twierdzenia 125. Zakładamy, że trójkąt jest prostokątny (Z) oraz że nie zachodzi równość (D.1) (T). Wtedy z zależności (D.2) wynika, że $\alpha \neq 90^\circ$, a więc zachodzi sprzeczność.

Często tezę twierdzenia formuluje się następująco: Następujące warunki są równoważne: w_1, w_2, w_3, w_4 . Zamiast kolejno wykazywać równoważność kolejnej pary warunków: $(w_1, w_2), (w_1, w_3), \dots, (w_3, w_4)$ znacznie prościej jest wykazać następujące implikacje $w_1 \Rightarrow w_2 \Rightarrow w_3 \Rightarrow w_4 \Rightarrow w_1$, które dowodzą równoważności wszystkich czterech warunków.

UWAGA 64. Metoda indukcji zupełnej polega na:

1. *Sprawdzeniu prawdziwości tezy dla $n = 1$ lub $n = 2$.*
2. *Wykazaniu prawdziwości tezy T dla liczb naturalnej $k+1$ przy założeniu, że teza jest prawdziwa dla $k \geq 1$.*

Jeżeli powyższe warunki są spełnione, to teza jest prawdziwa dla dowolnej liczby naturalnej n .

Metodę tę objaśnimy na następującym przykładzie.

PRZYKŁAD 146

Wykażemy prawdziwość równości

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3} \quad \text{dla } n > 1 \quad (\text{D.3})$$

Korzystając z metody indukcji zupełnej, sprawdzamy prawdziwość równości (D.3) dla $n = 2$. Otrzymamy wtedy

$$1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 2$$

Założmy, że zachodzi równość (D.3) dla liczby naturalnej $k > 1$, czyli

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (k-1)k = \frac{(k-1)k(k+1)}{3} \quad \text{dla } k > 1 \quad (\text{D.4})$$

Wykażemy, że równość ta jest również prawdziwa dla $k+1$. Biorąc pod uwagę (D.3) i (D.4), możemy napisać

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n &= \frac{(n-1)n(n+1)}{3} + k(k+1) = \\ &= \frac{(k-1)k(k+1) + 3k(k+1)}{3} = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Równość (D.3) jest więc prawdziwa dla dowolnego $n > 1$. \square

BIBLIOGRAFIA

1. Ackermann J.: Robust control prevents car skidding. *IEEE Control Systems*, 3(17), 1997, s. 23–31.
2. Amborski K.: *Teoria sterowania*. Warszawa, PWN, 1987.
3. Arbib M.A., Fallb P.L., Kalman R.E.: *Topics in mathematical system theory*. New York, McGraw-Hill, 1969.
4. Antsaklis P.J., Michel A.N.: *Linear systems*. New York, McGraw-Hill, 1997.
5. Åström K.J., Wittenmark B.: *Adaptive Control*. Reading, MA, Addison-Wesley, 1995.
6. Barnett S.: *Matrices in Control Theory*. London, Van Nostrand Reinhold Company, 1971.
7. Barnett S.: *Introduction to Mathematical Control Theory*. Oxford, Clarendon Press, 1975.
8. Barnett S.: *Polynomials and linear control systems*. New York, Marcel Dekker, 1983.
9. Bellman R.: *Introduction to Matrix Analysis*. New York, McGraw-Hill, 1960.
10. Bhattacharyya S.P., Chapellat H., Keel L.H.: *Robust Control: The Parametric Approach*. London, Prentice-Hall, 1995.
11. Bialas S.: On certain properties of Hurwitz determinants for interval polynomials. *Computing*, 30, 1983, s. 149–155.
12. Bialas S., Garloff J.: Stability of polynomials under coefficient perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-30(3), 1985, s. 310–312.
13. Bialas S.: *Systemy dynamiczne przedziałowe*. Kraków, ZN AGH, Automatyka, 1987.
14. Bialas S.: A generalization of the criterion that a quadratic form is positive definite. *Bull. Pol. Acad. Techn. Sci. 43(3)*, 1995, s. 337–400.
15. Bialas S.: Necessary and sufficient condition for the Hurwitz stability of symmetrizable interval matrices. *Bull. Pol. Acad. Techn. Sci. 48(4)*, 2000, s. 587–593.
16. Bialas S.: *Odporuna stabilność wielomianów i macierzy*. Kraków, Uczelniane Wydawnictwo Naukowo-Dydaktyczne, 2002.
17. Blomberg H., Ylinen R.: *Algebraic theory of multivariable linear systems*. London, Academic Press, 1983.
18. Boltiański W.G.: *Matematyczne metody sterowania optymalnego*. Warszawa, WNT, 1971.

19. Bose N.K.: Tests for Hurwitz and Schur properties of convex combination of complex polynomial. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 36(9), 1989, s. 1245÷1247.
20. Bose N.K., Shi Y.Q.: A simple general proof of Kharitonov's generalized stability criterion. *IEEE Trans. Automat. Control*, CAS-34(9), 2002, s. 1233÷1237.
21. Brockett R.W.: *Finite Dimensional Linear Systems*. New York, John Wiley & Sons, 1970.
22. Brogan W.L.: *Modern Control Theory*. NJ, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1991.
23. Bryson E. Jr.: *Dynamic Optimization*. Menlo Park, CA, Addison Wesley Longman, 1999.
24. Busłowicz M.: *Stabilność układów liniowych stacjonarnych o niepevnnych parametrach*. Białystok, Politechnika Białostocka, 1997.
25. Campbell S.L., Meyer C.D. Jr.: *Generalized Inverses of Linear Transformations*. New York, Dover Publications, 1991.
26. Chan H.Y., Źak S.H.: Chaotic neural fuzzy associative memory. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 9(8), 1999, s. 1597÷1617.
27. Charitonov V.L.: Ob asymptotyczkoj ustoicivosti położenia rawnovesija systemy liniowej differentialnych uravnenij. *Diff. Uravn.*, 14(10), 1978, s. 2086÷2088.
28. Charitonov V.L.: Ob odnom obosbenii kriteria ustoicivosti. *Izv. AN Kaz. SSR*, 1, 1978, s. 53÷57.
29. Chen C.T.: *Linear Systems Theory and Design*. New York, Oxford University Press, 1999.
30. Chong E.K.P., Źak S.H.: *An Introduction to Optimization*. New York, J. Wiley, 1996.
31. Dai L.: *Singular control systems*. In: Lecture notes in control and information sciences. New York, Springer, 1989.
32. Debnath L., Mikusiński P.: *Introduction to Hilbert Space with Applications*. San Diego, Academic Press, 1990.
33. Demidowicz B.P.: *Matematyczna teoria stabilności*. Warszawa, WNT, 1972.
34. DeCarlo R.A.: *Linear Systems: A State Variable Approach with Numerical Implementation*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1989.
35. Findeisen W.: *Technika regulacji automatycznej*. Warszawa, PWN, 1969.
36. Foo Y.K., Soh Y.C.: Strong Kharitonov theorem for low-order polynomials. *IEEE Trans. Automat. Control*, 37(11), 1992, s. 1816÷1820.
37. Gantmacher F.R.: *Theory of Matrices*. London, Chelsea, 1977.
38. Golub G.H., Van Loan C.F.: *Matrix Computations*. Baltimore, The John Hopkins University Press, 1983.
39. Górecki H.: *Analiza i synteza układów regulacji z opóźnieniem*. Warszawa, WNT, 1971.
40. Górecki H.: *Optymalizacja systemów dynamicznych*. Warszawa, PWN, 1993.
41. Górecki H., Fuksa S., Grabowski P., Korytowski A.: *Analysis and Synthesis of Time Delay Systems*. Chichester, PWN – J. Wiley, 1989.
42. Górecki H., Fuksa S., Korytowski A., Mittkowski W.: *Sterowanie optymalne w systemach liniowych z kwadratowym uskoźnikiem jakości*. Warszawa, PWN, 1983.
43. Guttenbaum J.: *Problemy teorii regulatorów Warszawa, WNT*, 1975.
44. Hejmo W.: *Teoria sterowania czasoprzypadkowego i jej zastosowania*. Warszawa, PWN, 1990.

45. Hestenes M.R.: *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*. New York, John Wiley & Sons, 1966.
46. Isermann R., Lachmann K.H., Matko D.: *Adaptive Control Systems*. New York, Prentice-Hall, 1992.
47. Isidori A.: *Nonlinear control systems. An introduction*. Berlin, Germany, Springer-Verlag, 1995.
48. Jordan A., Benmouna M., Borucki A., Bouayed F.: Optimal linearization method applied to the resolution of non-linear state equation. *Accepte a Recherche Automatique, systems analysis and control*, Dunod, Paris.
49. Jury E.I.: *Inners and Stability of Dynamic Systems*. New York, Wiley, 1974.
50. Kaczorek T.: *Infinite-Dimensional Linear Systems Theory. Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 8, Springer-Verlag, 1978.
51. Kaczorek T.: *Teoria wielowymiarowych układów dynamicznych*. Warszawa, WNT, 1983.
52. Kaczorek T.: General response formula, local reachability and local controllability of a class of 2D bilinear systems. *Bull. Pol. Acad. Techn. Sci.*, 42(4), 1995, s. 191÷201.
53. Kaczorek T.: Local controllability and minimum energy control of continuous 2D linear time-invariant systems. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, sing. 6, 1995, s. 69÷75.
54. Kaczorek T.: Controllability and minimum energy control of 2D continuous-discrete linear systems. *Applied Mathematics and Computer Science*, 5(1), 1995, s. 5÷21.
55. Kaczorek T.: Generalized 2D continuous-discrete linear systems with delays. *Applied Mathematics and Computer Science*, 5(3), 1995, s. 439÷454.
56. Kaczorek T.: An extension of the Cayley-Hamilton theorem for non-square block matrices and computation of the left and right inverses of matrices. *Bull. Pol. Acad. Techn. Sci.*, 43(1), 1995, s. 39÷56.
57. Kaczorek T.: U-reachability and U-controllability of 2D Roesser model. *Bull. Pol. Acad. Techn. Sci.*, 43(1), 1995, s. 31÷37.
58. Kaczorek T.: State-feedback controllers for linear descriptor systems with singular matrix pencils. *Bull. Pol. Acad. Techn. Sci.*, 43(4), 1995, s. 505÷516.
59. Kaczorek T., Cichocki A., Mazurek J.: Analog neural network for solving in real time linear inverse and total least squares problems. *Applied Mathematics and Computer Science*, 5(1), 1995, s. 105÷138.
60. Kaczorek T.: Methods for computation of solutions to regular discrete-time linear systems. *Applied Mathematics and Computer Science*, 5(4), 1995, s. 635÷656.
61. Kaczorek T.: Singular 2D continuous-discrete linear systems, Dynamics of continuous, discrete and impulsive systems. *Advances in Systems Science and Applications*, 1995, s. 103÷108.
62. Kaczorek T.: Local controllability and minimum energy control of continuous 2D linear time-invariant systems with variable coefficients. *Bull. Pol. Acad. Techn. Sci.*, 44(1), 1996, s. 67÷74.
63. Kaczorek T.: Pole assignment by state-feedback for descriptor linear systems with nonsquare matrix pencils. *Proceedings of XII International Conference on Systems Science*, 1996, s. 23÷32.
64. Kaczorek T.: Stabilization of linear descriptor systems by state-feedback controllers. *Appl. Math. and Comp. Science*, 6(1), 1996, s. 27÷32.

Bibliografia

65. Kaczorek T.: Stabilization of singular 2D continuous-discrete systems by state-feedback controllers. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 41(7), 1996, s. 1007÷1009.
66. Kaczorek T.: Singular two-dimensional continuous-discrete linear systems, Dynamics of continuous, discrete and impulsive system. *An International Journal for Theory Systems Science and Applications*, 1996, s. 193÷204.
67. Kaczorek T.: Reachability and controllability of nonnegative 2D Roesser type models. *Bull. Pol. Acad. Techn. Sci.*, 44(4), 1996, s. 405÷410.
68. Kaczorek T.: Positive realisations of improper transfer matrices of discrete-time linear systems. *Bull. Pol. Acad. Techn. Sci.*, 45(2), 1997, s. 227÷286.
69. Kaczorek T.: Realisation problem for discrete-time positive linear systems. *Appl. Math. and Computer Science*, 7(1), 1997, s. 117÷124.
70. Kaczorek T.: Realisation problem for positive 2D Roesser type model. *Bull. Pol. Acad. Techn. Sci.*, 45(4), 1997, s. 607÷618.
71. Kaczorek T.: Regularisation of singular 2D linear models by state-feedbacks. *Applied Mathematics and Computer Science*, 7(4), 1997, s. 795÷815.
72. Kaczorek T.: A method for determination of a solution to two-point boundary problem for 2D continuous-discrete linear systems. *Bull. Pol. Acad. Techn. Sci.*, 45(3), 1997, s. 417÷426.
73. Kaczorek T.: Stabilization of singular 2D continuous-discrete systems by output-feedback controllers. *SAMS*, 28, 1997, s. 21÷30.
74. Kaczorek T.: Positive singular discrete linear systems. *Bull. Pol. Acad. Techn. Sci.*, 45(4), 1997, s. 619÷631.
75. Kaczorek T.: Realization problem for positive 2D Roesser type model. *Bull. Pol. Acad. Techn. Sci.*, 45(4), 1997, s. 607÷618.
76. Kaczorek T.: Weakly positive continuous-time linear systems. *Bull. Pol. Acad. Techn. Sci.*, 46(2), 1997, s. 233÷245.
77. Kaczorek T.: Computation of fundamental matrices and reachability of positive singular discrete linear systems. *Bull. Pol. Acad. Techn. Sci.*, 46(4), 1998, s. 501÷511.
78. Kaczorek T.: Positive 2D linear systems. *Computational Intelligence and Applications*, 1998, s. 59÷84.
79. Kaczorek T.: Positive solutions to polynomial matrix equations. *Applied Mathematics and Computer Science*, 8(2), 1998, s. 403÷415.
80. Kaczorek T.: Reachability and minimum energy control of positive 2D continuous-discrete systems. *Bull. Pol. Acad. Techn. Sci.*, 46(1), 1998, s. 85÷93.
81. Kaczorek T.: Positive descriptor discrete-time linear systems. *International Journal: Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems*, 1(7), 1998, s. 38÷54.
82. Kaczorek T.: Equivalence of nD singular Roesser and Fornasini-Marchesini models. *Bull. Pol. Acad. Techn. Sci.*, 47(3), 1999, s. 235÷246.
83. Kaczorek T.: Externally positive 2D linear systems. *Bull. Pol. Acad. Techn. Sci.*, 47(3), 1999, s. 227÷234.
84. Kaczorek T.: Reachability and controllability of positive linear systems with state feedbacks. *Bull. Pol. Acad. Techn. Sci.*, 47(1), 1999, s. 67÷73.
85. Kaczorek T.: *Teoria Sterowania i Systemów*. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1999.
86. Kaczorek T.: Weakly positive continuous-time linear systems. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 1999, s. 3÷16.
87. Kaczorek T.: *Wektory i macierze w Elektrotechnice*. Warszawa, WNT, 1999.
88. Kaczorek T.: *Dodatnie układy jedno i dwuwymiarowe*. Warszawa, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2000.
89. Kaczorek T.: Reachability, controllability and minimum energy control of positive 2D Roesser type models. *Systems Analysis Modeling Simulation*, 37, 2000, s. 437÷447.
90. Kaczorek T.: Reachability and Controllability of 2D Positive Linear Systems with State Feedbacks. *IEEE Mediterranean Conference on Control & Automation*, 2000.
91. Kaczorek T.: Reachability, Controllability and minimum energy control of positive 2D Roesser type models. *SAMS*, 37, 2000, s. 435÷447.
92. Kaczorek T.: Realisation problem for weakly positive linear systems. *Machine Intelligence & Robotics Control*, 2(1), 2000, s. 11÷16.
93. Kaczorek T.: Reduced – order perfect and standard observers for singular continuous-time linear systems. *Machine Intelligence and Robotics Control*, 2(3), 2000, s. 93÷98.
94. Kaczorek T.: The relationship between the infinite eigenvalue assignment for singular systems and the solvability of polynomial matrix equations. *Int. J. Appl. Math. Comput. Ser.*, 13(2), 2003, s. 161÷167.
95. Kaczorek T.: Anticipatory 1D and 2D linear systems. *International Journal of Computing Anticipatory Systems*, 8, 2001, s. 319÷335.
96. Kaczorek T.: Elimination of anticipation of singular linear systems. *Computing Anticipatory Systems CASYS*, 2001, s. 107÷118.
97. Kaczorek T.: Elimination of finite eigenvalues of strongly singular 2D Roesser model by the state-feedbacks. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 11(2), 2001, s. 101÷108.
98. Kaczorek T.: Externally and internally positive singular discrete-time linear systems. *Machine Intelligence & Robotic Control*, 3(1), 2001, s. 1÷6.
99. Kaczorek T.: Full-order perfect observers for continuous-time linear systems. *Bull. Pol. Acad. Techn. Sci.*, 49(4), 2001, s. 549÷558.
100. Kaczorek T.: Dynamics assignment problem of linear systems. *Bull. Pol. Acad. Techn. Sci.*, 49(3), 2001, s. 461÷466.
101. Kaczorek T.: Perfect observers for singular 2D Fornasini-Marchesini models. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 46(10), 2001, s. 1671÷1675.
102. Kaczorek T.: Perfect observers for singular 2D linear systems. *Bull. Pol. Acad. Techn. Sci.*, 49(1), 2001, s. 141÷147.
103. Kaczorek T.: Minimal order perfect functional observers for singular linear systems. *Machine Intelligence & Robotic Control*, 4(2), 2002, s. 71÷74.
104. Kaczorek T.: Perfect functional observers of singular continuous-time linear systems. *Machine Intelligence & Robotics Control*, 4(1), 2002, s. 77÷82.
105. Kaczorek T.: Perfect Observers for Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 7(3), 2002, s. 145÷148.
106. Kaczorek T.: Perfect observers of standard linear systems. *Bull. Pol. Acad. Techn. Sci.*, 50(3), 2002, s. 237÷245.
107. Kaczorek T.: Polynomial approach to pole shifting to infinity in singular systems by feedbacks. *Bull. Pol. Acad. Techn. Sci.*, 50(2), 2002, s. 134÷144.
108. Kaczorek T.: When do equilibria of positive 2D Roesser model are strictly positive. *Bull. Pol. Acad. Techn. Sci.*, 50(3), 2002, s. 221÷227.

Bibliografia

109. Kaczorek T.: A novel approach to design of minimal order functional observers for singular linear systems. *Bull. Pol. Acad. Techn. Sci.*, 2003.
110. Kaczorek T.: Dekompozycja singularnych układów liniowych. *Przegląd Elektrotechniczny*, 1(2), 2003.
111. Kaczorek T.: Holdability and stabilizability of 2D Roesser model. *Control and Cybernetics*, 31(1), 2003.
112. Kaczorek T.: Przesuwanie do nieskończoności wartości własnych singularnych układów liniowych. *Przegląd Elektrotechniczny*, 1(3), 2003.
113. Kaczorek T.: Relationship between infinite eigenvalue assignment for singular systems and solvability of polynomial matrix equations. *Applied Mathematics and Computer Science*, 13(2), 2003.
114. Kaczorek T., Lopatka R.: Existence and computation of the set of positive solutions to polynomial matrix equations. *Applied Mathematics and Computer Science*, 10(2), 2000, s. 309÷320.
115. Kaczorek T., Przybustki K.M., Żak S.H.: Wybrane metody analizy liniowych układów dynamicznych. Warszawa, Źak S.H.: Wybrane metody analizy liniowych układów dynamicznych. Warszawa, PWN, 1984.
116. Kalman R.E.: Mathematical description of linear dynamical systems. *SIAM J. Control*, 1(1), 1963, s. 152÷192.
117. Kalman R.E.: On the general theory of control systems. Proc. of the first IFAC Congr., London: Butterworth, 1960.
118. Khalil H.K.: Nonlinear systems. Upper Saddle River, NJ, Prentice-Hall, 1996.
119. Kirk D.E.: Optimal Control Theory: An Introduction. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1970.
120. Klamka J.: Sterowalność układów dynamicznych. Warszawa – Wrocław, PWN, 1990.
121. Klamka J.: Constrained controllability of nonlinear systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 12, 1995, s. 245÷252.
122. Klamka J.: Approximate relative controllability of retarded dynamical systems. *Applied Mathematics and Computer Science*, 6(1), 1996, s. 15÷26.
123. Klamka J.: Constrained controllability of delayed distributed parameter dynamical systems. *SAMS, Systems Analysis Modelling Simulation*, 24(1-3), 1996, s. 15÷23.
124. Klamka J.: Constrained controllability of nonlinear systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 201(2), 1996, s. 365÷374.
125. Klamka J.: Controllability of 2D nonlinear systems. *Proceedings of the 2nd World Congress on Nonlinear Analysis*, 1996.
126. Klamka J.: Controllability of retarded dynamical systems. *Kybernetika*, 32(6), 1996, s. 591÷600.
127. Klamka J.: Controllability of second order infinite-dimensional systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 13(1), 1996, s. 79÷88.
128. Klamka J.: Approximate controllability of delayed dynamical systems. *Applied Mathematics and Computer Science*, 7(1), 1997, s. 5÷16.
129. Klamka J.: Approximate controllability of delayed dynamical systems. *Applied Mathematics and Computer Science*, 7(1), 1997, s. 101÷112.
130. Klamka J.: Constrained approximate boundary controllability. *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-42(2), 1997, s. 280÷284.
131. Klamka J.: Controllability and minimum energy control of 2D linear systems. *Proceedings of the American Control Conference ACC'97*, 5, 1997, s. 3141÷3143.

132. Klamka J.: Controllability of infinite-dimensional 2D linear systems. *Advances in Systems Science and Applications*, 1(1), 1997, s. 537÷543.
133. Klamka J.: Controllability of nonlinear 2D systems. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 30(5), 1997, s. 2963÷2968.
134. Klamka J.: Controllability of 2D systems: a survey. *Applied Mathematics and Computer Science*, 7(4), 1997, s. 101÷120.
135. Klamka J.: Controllability of delayed dynamical systems. *Studia z Automatyki i Informatyki*, 22, 1997, s. 29÷40.
136. Klamka J.: Constrained controllability of positive 2D systems. *Bull. Pol. Sci. Acad.*, 46(1), 1998, s. 95÷104.
137. Klamka J.: Controllability of second order semilinear infinite-dimensional dynamical systems. *Applied Mathematics and Computer Science*, 8(3), 1998, s. 459÷470.
138. Klamka J.: Controllability of 2D continuous-discrete systems with delays in control. *Bull. Pol. Sci. Acad.*, 46(3), 1999, s. 363÷373.
139. Klamka J.: Constrained controllability of dynamic systems. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 9(2), 1999, s. 231÷244.
140. Klamka J.: Constrained controllability of semilinear systems. *Proceedings of 14th World Congress of IFAC*, B, 1999, s. 389÷394.
141. Klamka J.: Controllability of delayed dynamical systems. *Proceedings of 14th World Congress of IFAC*, D, 1999, s. 485÷490.
142. Klamka J.: Controllability of 2D nonlinear systems. *Proceedings of the European Control Conference*, 1999, s. 1121÷1127.
143. Klamka J.: Local controllability of 2D nonlinear systems. *Bull. Pol. Sci. Acad.*, 47(2), 1999, s. 153÷161.
144. Klamka J.: Constrained approximate controllability. *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-45(9), 2000, s. 1746÷1749.
145. Klamka J.: Schauder's fixed-point theorem in nonlinear controllability problems. *Control and Cybernetics*, 29, 2000, s. 153÷165.
146. Klamka J.: Constrained boundary controllability. *Proceedings of 10 International Conference on System, Modelling, Control*, I, 2001, s. 387÷392.
147. Klamka J.: Constrained controllability of semilinear infinite-dimensional systems. *Proceedings of 7 International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics*, 2001, s. 45÷50.
148. Klamka J.: Constrained controllability of semilinear systems. *Nonlinear Analysis*, 47, 2001, s. 2939÷2949.
149. Klamka J., Ogonowski Z.: Teoria systemów liniowych. *Skrypt Politechniki Śląskiej*, 1999.
150. Kucera V.: *Discrete linear control: the polynomial equation approach*. Prague, Academica, 1979.
151. Kudrewicz J.: *Częstotliwościowe metody w teorii nieliniowych układów dynamicznych*. Warszawa, WNT, 1970.
152. Kudrewicz J.: *Analiza funkcyjonalna dla automatyków i elektroników*. Warszawa, PWN, 1976.
153. Kudrewicz J.: *Przezształcenie Z i równania różnicowe*. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2000.
154. Kwakernaak H., Sivan R.: *Linear Optimal Control Systems*. New York, Wiley Interscience, 1972.

155. Lyapunov A.M.: *The general problem of stability and motion*. London, Taylor & Francis, 1992.
156. LaSalle J.P.: *The Stability and Control of Discrete Processes*. New York, Springer-Verlag, 1986.
157. La Salle J., Lefschetz S.: *Zarys teorii stabilności Lapunowa i jego metody bez pośrednici*. Warszawa, PWN, 1966.
158. Lee E.B., Markus L.: *Foundations of Optimal Control Theory*. New York, John Wiley, 1967.
159. Lee E.B., Markus L.: *Foundations of Optimal Control Theory*. Malabar FL, Robert E. Krieger Publishing Company, 1986.
160. Lewis F.L.: *Optimal control*. New York, J. Wiley, 1986.
161. Lewis F.L.: *Optimal estimation*. New York, Wiley, 1986.
162. Lewis F.L., Syrmos V.L.: *Optimal Control*. New York, Wiley-Interscience, 1995.
163. Luenberger D.G.: Observers for multivariable systems. *IEEE Trans. on Autom. Contr.*, AC-11(1), 1966, s. 190÷197.
164. Luenberger D.G.: An introduction to observers. *IEEE Trans. on Autom. Contr.*, AC-16(6), 1971, s. 596÷602.
165. Luenberger D.G.: *Teoria optymalizacji*. Warszawa, PWN, 1973.
166. Marino R., Tomei P.: *Nonlinear control design*. London, Prentice-Hall, 1995.
167. Mirkowski W.: *Stabilizacja systemów dynamicznych*. Warszawa, WNT, 1991.
168. Mirkowski W.: Stabilizacja liniowych układów wymiarowych za pomocą dynamicznego sprzężenia zwrotnego. *Arch. Automatyki i Telemechaniki*, 33(4), 1995, s. 515÷528.
169. Mirkowski W.: *Stabilizacja systemów dynamicznych*. Kraków, Wydawnictwa AGH, 1996.
170. Mirkowski W.: Projektowanie systemów sterowania z wykorzystaniem równania Riccatiego. *Mat. Konferencyjne XIII Krajowej Konferencji Automatyki*, 1, 1999, s. 171÷176.
171. Mirkowski W.: *Systemy dynamiczne*. Materiały uzupełniające do wykładów. Kraków, Wydawnictwo-Wydruk Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Elektroniki AGH, 2000.
172. Mirkowski W.: Metody projektowania układów regulacji optymalnej. *Mat. Konferencyjne XIV Krajowej Konferencji Automatyki*, 1, 2002, s. 195÷204.
173. Moore R.E.: *Interval Analysis*. New York, Prentice-Hall, 1966.
174. Niederlinski A.: *Układy wielowymiarowe automatyki*. Warszawa, WNT, 1974.
175. Nowacki P., Szklarski L., Górecki H.: *Podstawy teorii układów regulacji automatycznej*. Warszawa, PWN, 1974.
176. Ogata K.: *Metody przestrzeni stanów w teorii sterowania*. Warszawa, WNT, 1974.
177. O'Reilly J.: *Observers for linear systems*. London, Academic, 1983.
178. Osiowski J.: *Zarys rachunku operatoryowego*. Warszawa, WNT, 1981.
179. Owens D.H.: *Multivariable and Optimal Control*. London, Academic Press, 1981.
180. Pedrycz W.: *Fuzzy Control and Fuzzy Systems*. Taunton, Somerset, England, Research Studies Press, 1993.
181. Petczewski W.: *Teoria sterowania*. Warszawa, WNT, 1980.
182. Rolewicz S.: *Analiza funkcyjonalna i teoria sterowania*. Warszawa, PWN, 1974.
183. Rosenbrock H.H.: *State – space and multivariable theory*. London, Nelson, 1970.
184. Rugh W.J.: *Linear System Theory*. Upper Saddle River, NJ, Prentice-Hall, 1996.
185. Sastry S.: *Nonlinear systems. Analysis, stability and control*. New York, NY, Springer-Verlag, 1999.
186. Slotine J.E. and Li W.: *Applied nonlinear control*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1991.
187. Soh C.B.: Necessary and sufficient conditions for stability of symmetric interval matrices. *International Journal of Control*, 51(1), 1990, s. 243÷248.
188. Solheim O.A.: Design of optimal control systems with prescribed eigenvalues. *International Journal of Control*, 15(1), 1972, s. 143÷160.
189. Sontag E.D.: *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems*. New York, Springer-Verlag, 1998.
190. Takahashi Y., Rabins M.J., Auslander D.M.: *Sterowanie i systemy dynamiczne*. Warszawa, WNT, 1976.
191. Tsui C.C.: A New Algorithm for Design of Multifunctional Observers. *IEEE Trans. Autom. Control*, AC-30(1), 1985, s. 89÷93.
192. Tsui C.C.: On the order reduction of linear function observers. *IEEE Trans. Autom. Control*, AC-31(1), 1986, s. 447÷449.
193. Tsui C.C.: What is the Minimum Function Observer Order? *Journal of the Franklin Institute*, 335(4), 1998, s. 623÷628.
194. Turowicz A.: *Geometria zer i wielomianów*. Warszawa, PWN, 1967.
195. Turowicz A.: Teoria Macierzy, *Wykłady na Studium Doktoranckim w zakresie automatyki i elektrotechniki* (spisal Mirkowski W.). (skrypt nr 1435), 1970/1971, s. 1÷222.
196. Węgrzyn S.: *Podstawy automatyki*. Warszawa, PWN, 1976.
197. Wierzbicki A.: *Modele i warzliwość układów sterowania*. Warszawa, WNT, 1977.
198. Willens J.I.: *Stability Theory of Dynamical Systems*. New York, John Wiley & Sons, 1970.
199. Wolovich W.A.: *Linear multivariable systems*. New York, Springer, 1974.
200. Wolovich W.A.: *Automatic Control Systems: Basic Analysis and Design*. Fort Worth, TX, Saunders College Publishing, 1994.
201. Wonham W.M.: On pole assignment in multi-input controllable linear systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-12(6), 1967, s. 660÷665.
202. Wonham W.M.: *Linear multivariable control: a geometric approach*. New York, Springer, 1979.
203. Zabczyk J.: *Zarys matematycznej teorii sterowania*. Warszawa, PWN, 1991.
204. Zadeh L.A., Desoer Ch.A.: *Linear System Theory: The State Space Approach*. New York, McGraw-Hill, 1963.
205. Żurada J.M.: *Introduction to Artificial Neural Systems*. St. Paul, MN, West Publishing, 1992.

SKOROWIDZ

- A**
człon inercyjny pierwszego rzędu 102
opóźniający 106
różniczkujący idealny 98
rzeczywisty 113
- B**
Bineta, twierdzenie zob. twierdzenie
Bineta
Bodego charakterystyka 80
Borela twierdzenie zob. twierdzenie
Borela
Brunovskiego-Luenbergera postać kanoniczna *zob.* układ, postać kanoniczna Brunovskiego-Luenbergera
- C**
całka Duhamela 457
charakterystyka
amplitudowa 77
logarytmiczna 80
amplitudowo-fazowa 77
Bodego 80
fazowa 77
logarytmiczna 80
impulsowa 62
skokowa 61
- D**
decybel 79
dekada 79
dekompozycja
Kalmana 263
par (A, B) 258
par (A, C) 261
dystrybucja 445
A-inwariantna 450
iloczyn 445
inwariantna 448
inwolutywna 447
nieosobliwa 446
osobliwa 446
punkt regularny 446
suma 445
wymiar 445
- F**
firma kwadratowa *zob.* macierz, forma kwadratowa
funkcja
dyskretna
ciąg wartości 463
różnica 435
suma w punkcie 466
Lagrange'a 33
Lapunowa 213

- funkcja przenoszenia 73
 Rayleigha 34
 skalarna
 gradient 430
 pochodna Liego 440
 plot 455
 transformata 455
 wektorowa
 pochodna 430
- G**
 gradient funkcji skalarnej 430
- H**
 Hurwitza kryterium *zob.* stabilność, kryterium Hurwizza
- I**
 iloczyn Kroneckera *zob.* macierz, iloczyn Kroneckera
 Kroneckera izolinka 140
- J**
 Jacobiego macierz *zob.* macierz Jacobiego
 Jordana klakka *zob.* macierz, klakka Jordana
- K**
 kryterium stabilności *zob.* stabilność, kryterium krzywa Michajłowa 171
- L**
 Lagrange'a równanie *zob.* równanie Lagrange'a Laplace'a przekształcenie Laplace'a Laurenta szereg *zob.* szereg Laurenta
- M**
 macierz 393
 antisymetryczna 394
- macierz blokowa 418
 iloczyn 418
 wyznacznik 419
 całka
 iterowana 432
 oznaczona 431
 cykliczna 310
 diagonalna 394
 dodatkowa 403
 dodatnio określona 410
 dolnotrójkątna 395
 dopełnienie 395
 działania elementarne 319
 dzielnik elementarny 320
 formą kwadratową 409
 dodatnio określona 410
 nieosobienna 410
 osobienna 410
 ujemnie określona 410
 fundamentalna 433
 górnotorójkątna 395
 główna przekątna 394
 hermitowska 398
 idempotentna 398
 iloczyn 397
 iloczyn Kroneckera 420
 indeks 394
 jądro 400
 Jacobiego 442
 klatka, Jordana 321
- kolumnowa 393
 kongruencja 410
 kwadratowa 393
 nieosobienna 396
 nilpotentna 397
 indeks nilpotentności 270
 norma 412
 euklidesowa 412
 Frobeniusa 413
 zgodność 413
 obraz 400
 odwrotność 403
 lewa 401
 prawa 402
 ortogonalna 406
 osobienna 396
 pęk regularny 270
 pochodna 429
 podobieństwo 405
- funkcja przenoszenia 73
 Rayleigha 34
 skalarna
 gradient 430
 pochodna Liego 440
 plot 455
 transformata 455
 wektorowa
 pochodna 430
- G**
 macierz podstawowa 433
 postać kanoniczna
 Frobeniusa 309
 Jordana 321
 Smitha 319
 prostej struktury 405
 prostokątna 393
 przeniemość 397
 przenoszenia 56
 pseudoodwrotność
 Moore'a-Penrose'a 414
 równość 396
 rząd 399
 skalarna 394
 skośno-symetryczna 394
 sprzężona 398
 stopień 393
 suma 396
 symetryczna 394
 systemu 52
 ślad 394
 transpozycja 394
 tranzycyjna 433
 ujemnie określona 410
 unitarna 406
 wartość szczególna 407
 rozkład 407
 wartość własna 405
 obserwowały 254, 256
 osiągająca 253, 256
 rozkład 407
 wejścia 52
 wektor własne
 lewostronny 406
 prawostronny 405
 wielomian
 charakterystyczny 405
 invariacyjny 320
 minimalny 415
 zerujący 415
 wierszowa 393
 wyjścia 56
 wymiar 393
 wyznacznik 395
 metoda
 izoklin 140
 Krasowskiego 213, 215
 Lapunowa 202, 204, 205
 nieliniowego sprężenia zwrotnego 28
- metoda opptymalnej liniaryzacji 23
 rozwinięcia w szeregu 19
 model
 AR 16, 57, 61
 ARMA 16, 57, 61
 ARMAX 58, 59
 czasowy 50
 częstotliwościowy 73
 Leontiefa 45
 Lotki-Volterry 43
 Maya 43
 punkt równowagi
 stabilny 156
 stabilny asymptotycznie 158
 równanie charakterystyczne 161, 162,
 190, 191
 Solowa 44
 stan równowagi 154
 wejście-wyjście 73
 wielomian charakterystyczny 161, 162,
 190, 191
 zmiennej stanu 55
 konstrukcja 52
 macierz przenoszenia 56
 systemu 52
 wejścia 52
 wyjście 56
 równanie wyjścia 56
 rząd 54
- N**
 niestabilność 199
 Nyquista kryterium *zob.* stabilność, kryterium Nyquista
 punkt *zob.* punkt Nyquista, twierdzenie *zob.* twierdzenie Nyquista
- O**
 obiekt regulacji 2
 oktawa 79
 operator liniowy 401
- P**
 płaszczyzna fazowa 54
 analiza 132

- pole wektorowe 440
 gładkość 442
 nawiąs Liego 442
 portret fazowy 132
 postać kanoniczna *zob.* macierz, postać
 kanoniczna; układ, postać
 kanoniczna
 przekształcenie
 Laplace'a 451
 odwrotne 458
 oryginal 451, 459
 pochodnej funkcji 456
 różnicy funkcji 455
 splotu funkcji 455
 sumy funkcji 455
 zasada superpozycji 455
- Z**
- 463
 odwrotne 467
 oryginal 463
 różnicy funkcji 465
 splotu funkcji 465
 sumy funkcji 465
 zasada superpozycji 465
 przestrzeń liniowa, dopełnienie
 ortogonalne 401
 punkt
 Nyquista 178
 równowagi 154
- R**
- regulacja 1
 regulator 2
 równanie
 charakterystyczne 190
 Lagrange'a 34
 liniowe
 różnicowe 435, 470
 różniczkowe 432, 460
 Riccatiego 438

- stabilność, kryterium Nyquista 176
 lokalna 201, 210
 Routha 164
 stan
 obserwowałny 232, 249
 odtwarzalny 238, 252
 osiągalny 223, 244
 równowagi 153, 200
 sterowalny do zera 228, 247
 układu 2, 14
 sterowanie 1
 szereg Laurenta 463
 szum biały 57
- T**
- tożsamość Jacobiego 443
 trajektoria fazowa 54
 transformata
 Laplace'a 451
 oryginal 459
Z 463
 oryginal 463
 transmitancja
 operatorowa 73
 widmowa 76
- twierdzenie
 Bineta-Cauchy'ego 399
 Borela 455
 Cauchy'ego-Hamiltona 415
 Kroneckera-Capellego 403
 Lagrange'a-Sylvestera 417
 Lapunowa 209
 Nyquista 178
 o opóźnieniu 455
 o transformacie splotu 455, 465
 Sylvestera 400, 411
- U**
- uchyb regulacji 2
 układ
 dualny 240, 252
 dynamiczny 18, 29
 obserwowałny 232, 249
 indeks 234
 odtwarzalny 238, 252
 osiągalny 223, 244
 wyjściowo 242

- układ, postać kanoniczna
 Brunowskiego-Luebergera 331, 334,
 340, 343, 347, 354, 362, 368
 obserwatorowa 343, 368
 obserwowałna 340, 362
 regulatorowa 334, 354
 sterowalna 331, 347
 regulacji automatycznej 2, 4
 adaptacyjny 7
 ciągły 6
 dyskretny 6
 hybrydowy 6
 jednowarstwowy 7
 jednowymiarowy 6
 liniowy 4
 nieliniowy 5
 nieoptymalny 7
 optymalny 7
 wielowarsztowy 7
 wielowymiarowy 5
 zwykły 7
- równań
 liniowych 403
 rozwiązań 403
 nielinowych 440
 singularny 270
- R**-obserwowałny 286
R-sterowalny 275
 dualny 294
 obserwowałny 288
 obserwowałny impulsowo 290
 sterowalny 276
 stabilizowałny 253
- Z**
- zapas
 amplitudy 188
 fazy 188
 zasada superpozycji 4
 zbiór
 osiągalności 271
 stanów osiągalnych 271
 zmenna stanu 14



Biblioteka Główna

WYDAWNICTWA NAUKOWO-TECHNICZNE
ul. Mazowiecka 2/4, 00-048 Warszawa
tel. 0-22 826 72 71 do 79
Dział Marketingu i Sprzedaży
tel. 0-22 827 56 87, fax 0-22 826 82 93
e-mail: handlowy@wnt.pl

Zapraszamy
do naszej
Księgarni internetowej
www.wnt.pl

Można tam znaleźć
szczegółowe informacje
o naszych książkach,
m.in. omówienie, spis treści.



WNT, Warszawa 2006. Wyd. II zmienione
Ark. wyd. 28,5. Ark. druk. 31,75
Symbol Isn/84204/WNT
Cieszyńska Drukarnia Wydawnicza