Université de Technologie de Compiègne

MT12 — TP3

RAPPORT

Rédigé par :

Ghita FAYEK
Mathis MILLOT

Le 7 novembre 2025 — Compiègne

Introduction

Ce travail pratique porte sur l'étude numérique de la convergence des séries de Fourier pour des fonctions périodiques. L'objectif est d'illustrer par le calcul et la visualisation les propriétés théoriques vues en cours, tout en mettant en évidence certains phénomènes particuliers.
Le TP se divise en trois parties. Nous développons d'abord une méthode d'intégration numérique par la méthode des rectangles, qui permettra d'encadrer les intégrales avec une précision contrôlée. Cette fonction Riemann servira de base pour les calculs des coefficients de Fourier.
Dans la deuxième partie, nous étudions la convergence ponctuelle de la série de Fourier d'une fonction périodique continue et régulière par morceaux. Le calcul des coefficients et la comparaison graphique avec les sommes partielles permettent de vérifier la convergence uniforme prédite par la théorie.
Enfin, la troisième partie analyse le cas d'une fonction discontinue, faisant apparaître le phénomène de Gibbs au voisinage des discontinuités. Nous illustrons également la convergence en norme L^2, qui reste garantie malgré l'absence de convergence ponctuelle en certains points.

Objectif du TP

L'objectif principal de ce TP est d'étudier, de calculer et d'illustrer la convergence des séries de Fourier pour deux types de fonctions périodiques. Les objectifs spécifiques sont les suivants :
- Partie 1 : Implémenter et tester une fonction Riemann(f, a, b, ϵ) capable de fournir un encadrement d'une intégrale avec une précision ϵ donnée.
- Partie 2 : Analyser la convergence ponctuelle de la série de Fourier pour une fonction périodique régulière (continue). Cela impliquera le calcul manuel des coefficients a_k et b_k et la comparaison graphique de la fonction f avec ses sommes partielles $f_N(x)$.
- Partie 3 : Étudier le comportement d'une fonction périodique discontinue afin de mettre en évidence le phénomène de Gibbs.

Partie 1 — Intégration d'une fonction continue sur un intervalle borné

Question 1.1

```
function [Imoins, Iplus, N]=Riemann(f, a, b, epsilon)
    nsubdiv = 20; // Voir la Remarque juste apres
    N = 1;
    done = %F;
    while (~done)
        N = 2 * N;
        Imoins = 0;
        Iplus = 0;
        for k = 1:N
          Ik = [ a+(k-1)*(b-a)/N, a+k*(b-a)/N ]; // (1)
```

```
            subdiv = linspace(Ik(1), Ik(2), nsubdiv) ; //
               Subdivision de l'intervalle
            fmin = min(f(subdiv));
            fmax = max(f(subdiv));
            Imoins = Imoins + fmin;
            Iplus = Iplus + fmax;
        end
    Imoins = ((b-a)/N) * Imoins;
    Iplus = ((b-a)/N) * Imoins;
    done = (Iplus - Imoins) < epsilon;
    end; // (while)
endfunction
```

Listing 1 – Valeur approchée de I

Question 1.2

```
function y=sin_pi(x)
    y= sin(%pi.*x)
endfunction

[Imoins, Iplus, N] = Riemann(f, 0, 1, 1e-4);
I_Riemann = (Imoins + Iplus)/2;

disp('Imoins Iplus I_Riemann=', [Imoins, Iplus, I_Riemann]);

I_intg = integrate('sin_pi(x)', 'x', 0, 1);
disp('intg(0, 1, f)=', I_intg);
```

Listing 2 – Teste sur l'exemple $f(x) = \sin(\pi x)$

Question 1.3

```
function I=RectanglesGauche(f, a, b, N)
    h = (b-a)/N;
    xs = a + (0:(N-1))*h;
    I = sum(f(xs));
endfunction
//test
deff('y=f(x)','y=sin(%pi*x)');
I_g = RectanglesGauche(f, 0, 1, 2000);
disp('Rectangles_gauche=', I_g);
```

Listing 3 – Méthode des rectangles à gauche

Partie 2 : Convergence ponctuelle de la série de Fourier d'une fonction périodique régulière

Question 2.4

```
function y=f(x)
    y = x
    I = find(x >= 1 & x <= 2);
    y(I) = 2 - x(I);
endfunction

X = linspace(0, 2, 1000);
plot(X, f(X)); xgrid(); title('f sur [0,2]'); xlabel('x'); ylabel('
   f(x)');
```

Listing 4 –]f sur l'intervalle [0,2]

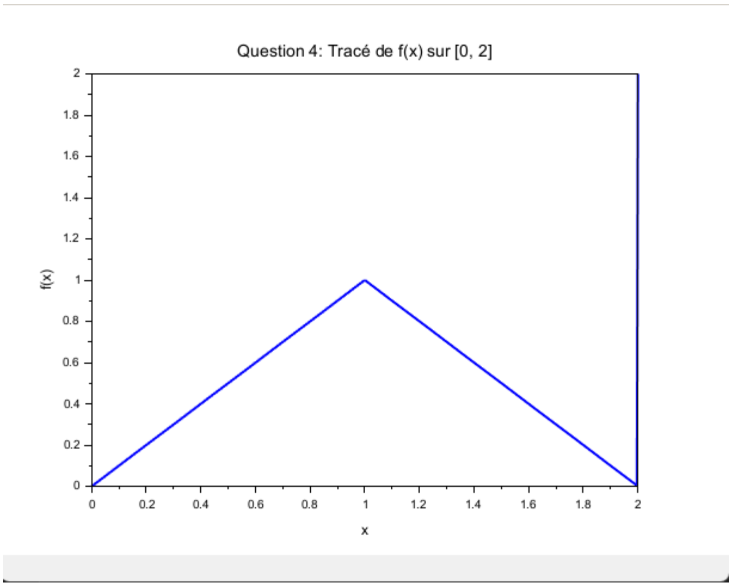

FIGURE 1 – Graphe question 4

Question 2.5

On sait que f est une fonction paire, donc tous les coefficients b_k sont nuls. On a $a_k = \frac{1}{k^2\pi^2}(2(-1)^k - 2)$. Si k est pair, $a_k = 0$. Si k est impair, $a_k = -\frac{-4}{(2n+1)^2\pi^2}$.

Question 2.6

En partant de $f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k cos(k\pi x)$, En ne gardant que les k impaires, $k = 2n + 1$, avec $a_0 = 1$ et $a_{2n+1} = -\frac{4}{(2n+1)^2\pi^2}$, on obtient :

$$f_{2n+1}(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{N} \frac{cos((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^2}$$

Le Changement de variable est donc $k = 2n + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Question 2.7

```
function y1=f2NPlus1(x, N)
    dL=0;
    for k = 0:N
        dL = dL + cos((2*k+1)*%pi.*x) / ((2*k+1).^2);
    end
    y1 = 1/2 - (4/%pi^2) .* dL;
endfunction

scf(1);
clf();

X = linspace(0, 2, 2000);
Y_true = f(X);

N = [2 4 8 16 32 64 128 256];
nN = zeros(length(N) + 1, length(X));
nN(1, :) = Y_true;

legend_strings = "f(x) (exacte)";
for i = 1:length(N_valu)
    N = N(i);
    nN(i + 1, :) = f2NPlus1(X, N);
    legend_strings(i + 1) = "N = " + string(N);
end

plot(X, nN);
xtitle('Question 7: Comparaison de f et f_{2N+1} sur [0, 2]');
xlabel('x');
ylabel('y');
legend(legend_strings);

for N = [2 4 8 16 32 64 128 256]
    Y = f2NPlus1(X,N);
    plot(X,Y);
```

```
end
```

Listing 5 – Comparaison de f et de son approximation

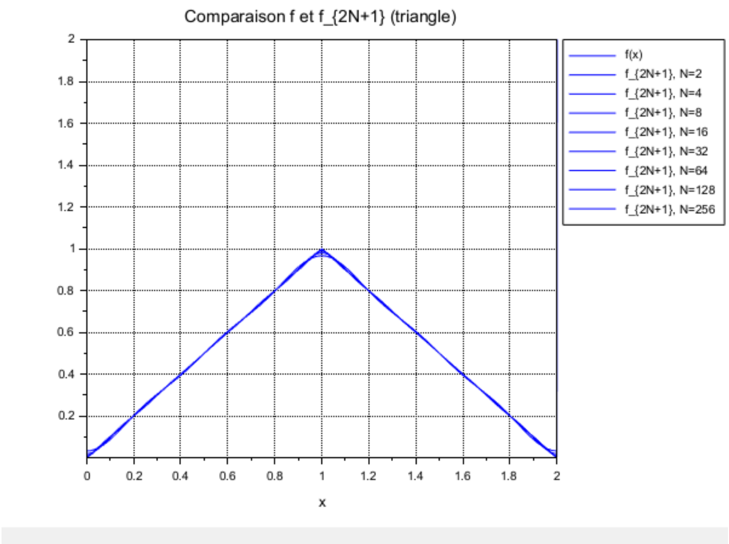

FIGURE 2 – Graphe question 7

Partie 3 : Phénomène de Gibbs pour une fonction périodique discontinue