



UNIVERSITÉ DE TECHNOLOGIE DE COMPIÈGNE

MT12 — TP3

RAPPORT

Rédigé par :

Ghita FAYEK
Mathis MILLOT

Le 7 novembre 2025 — Compiègne

Introduction

Ce travail pratique porte sur l'étude numérique de la convergence des séries de Fourier pour des fonctions périodiques. L'objectif est d'illustrer par le calcul et la visualisation les propriétés théoriques vues en cours, tout en mettant en évidence certains phénomènes particuliers.

Le TP se divise en trois parties. Nous développons d'abord une méthode d'intégration numérique par la méthode des rectangles, qui permettra d'encadrer les intégrales avec une précision contrôlée. Cette fonction Riemann servira de base pour les calculs des coefficients de Fourier.

Dans la deuxième partie, nous étudions la convergence ponctuelle de la série de Fourier d'une fonction périodique continue et régulière par morceaux. Le calcul des coefficients et la comparaison graphique avec les sommes partielles permettent de vérifier la convergence uniforme prédite par la théorie.

Enfin, la troisième partie analyse le cas d'une fonction discontinue, faisant apparaître le phénomène de Gibbs au voisinage des discontinuités. Nous illustrons également la convergence en norme L^2 , qui reste garantie malgré l'absence de convergence ponctuelle en certains points.

Objectif du TP

L'objectif principal de ce TP est d'étudier, de calculer et d'illustrer la convergence des séries de Fourier pour deux types de fonctions périodiques. Les objectifs spécifiques sont les suivants :

- Partie 1 : Implémenter et tester une fonction $\text{Riemann}(f, a, b, \epsilon)$ capable de fournir un encadrement d'une intégrale avec une précision ϵ donnée.
- Partie 2 : Analyser la convergence ponctuelle de la série de Fourier pour une fonction périodique régulière (continue). Cela impliquera le calcul manuel des coefficients a_k et b_k et la comparaison graphique de la fonction f avec ses sommes partielles $f_N(x)$.
- Partie 3 : Étudier le comportement d'une fonction périodique discontinue afin de mettre en évidence le phénomène de Gibbs.

Partie 1 — Intégration d'une fonction continue sur un intervalle borné

Question 1.1

```
1 function [Imoins, Iplus, N]=Riemann(f, a, b, epsilon)
2     nsubdiv = 20; // Voir la Remarque juste apres
3     N = 1;
4     done = %F;
5     while (~done)
6         N = 2 * N;
7         Imoins = 0;
8         Iplus = 0;
9         for k = 1:N
10             Ik = [ a+(k-1)*(b-a)/N, a+k*(b-a)/N ]; // (1)
```

```

11         subdiv = linspace(Ik(1), Ik(2), nsubdiv) ; //
           Subdivision de l'intervalle
12         fmin = min(f(subdiv));
13         fmax = max(f(subdiv));
14         Imoins = Imoins + fmin;
15         Iplus = Iplus + fmax;
16     end
17     Imoins = ((b-a)/N) * Imoins;
18     Iplus = ((b-a)/N) * Imoins;
19     done = (Iplus - Imoins) < epsilon;
20     end; // (while)
21 endfunction

```

Listing 1 – Valeur approchée de I

Question 1.2

```

1 function y=sin_pi(x)
2     y= sin(%pi.*x)
3 endfunction
4
5 [Imoins, Iplus, N] = Riemann(f, 0, 1, 1e-4);
6 I_Riemann = (Imoins + Iplus)/2;
7
8 disp('Imoins Iplus I_Riemann=', [Imoins, Iplus, I_Riemann]);
9
10 I_intg = integrate('sin_pi(x)', 'x', 0, 1);
11 disp('intg(0, 1, f)=', I_intg);

```

Listing 2 – Teste sur l'exemple $f(x) = \sin(\pi x)$

Question 1.3

```

1 function I=RectanglesGauche(f, a, b, N)
2     h = (b-a)/N;
3     xs = a + (0:(N-1))*h;
4     I = sum(f(xs));
5 endfunction
6 //test
7 deff('y=f(x)', 'y=sin(%pi*x)');
8 I_g = RectanglesGauche(f, 0, 1, 2000);
9 disp('Rectangles_gauche=', I_g);

```

Listing 3 – Méthode des rectangles à gauche

Partie 2 : Convergence ponctuelle de la série de Fourier d'une fonction périodique régulière

Question 2.4

```
1 function y=f(x)
2     y = x
3     I = find(x >= 1 & x <= 2);
4     y(I) = 2 - x(I);
5 endfunction
6
7 X = linspace(0, 2, 1000);
8 plot(X, f(X)); xgrid(); title('f sur [0,2] '); xlabel('x'); ylabel('f(x)');
```

Listing 4 – $|f|$ sur l'intervalle $[0,2]$

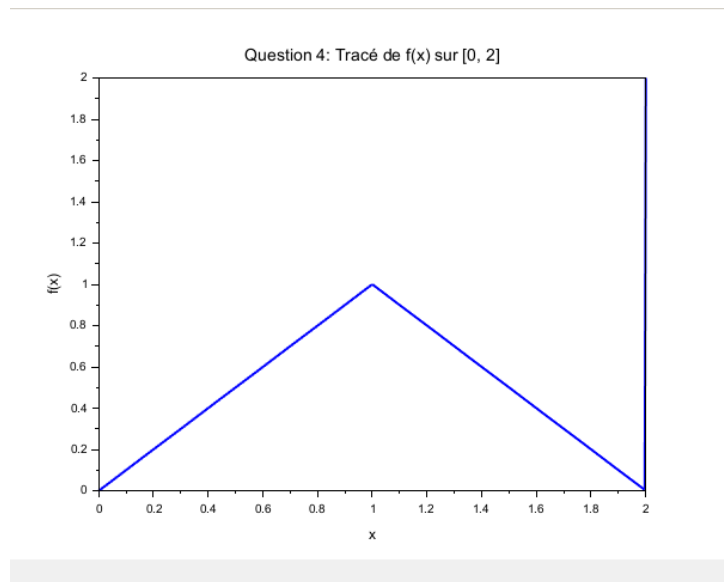


FIGURE 1 – Graphe question 4

Question 2.5

On sait que f est une fonction paire, donc tous les coefficients b_k sont nuls. On a $a_k = \frac{1}{k^2\pi^2}(2(-1)^k - 2)$. Si k est pair, $a_k = 0$. Si k est impair, $a_k = -\frac{4}{(2n+1)^2\pi^2}$.

Question 2.6

En partant de $f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos(k\pi x)$, En ne gardant que les k impaires, $k = 2n + 1$, avec $a_0 = 1$ et $a_{2n+1} = -\frac{4}{(2n+1)^2\pi^2}$, on obtient :

$$f_{2n+1}(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^N \frac{\cos((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^2}$$

Le Changement de variable est donc $k = 2n + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Question 2.7

```
1 function y1=f2NPlus1(x, N)
2     dL=0;
3     for k = 0:N
4         dL = dL + cos((2*k+1)*%pi.*x) / ((2*k+1).^2);
5     end
6     y1 = 1/2 - (4/%pi^2) .* dL;
7 endfunction
8
9 scf(1);
10 clf();
11
12 X = linspace(0, 2, 2000);
13 Y_true = f(X);
14
15 N = [2 4 8 16 32 64 128 256];
16 nN = zeros(length(N) + 1, length(X));
17 nN(1, :) = Y_true;
18
19 legend_strings = "f(x) (exacte)";
20 for i = 1:length(N_valu)
21     N = N(i);
22     nN(i + 1, :) = f2NPlus1(X, N);
23     legend_strings(i + 1) = "N = " + string(N);
24 end
25
26 plot(X, nN);
27 xtitle('Question 7: Comparaison de f et f_{2N+1} sur [0, 2]');
28 xlabel('x');
29 ylabel('y');
30 legend(legend_strings);
31
32 for N = [2 4 8 16 32 64 128 256]
33     Y = f2NPlus1(X,N);
34     plot(X,Y);
```

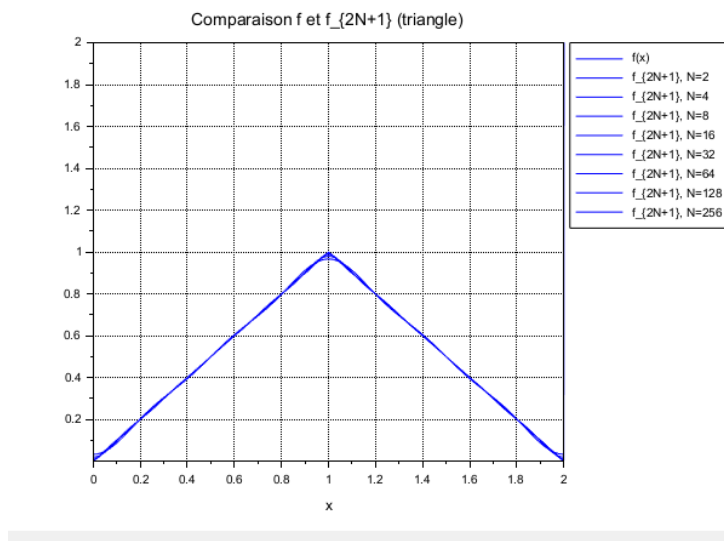
Listing 5 – Comparaison de f et de son approximation

FIGURE 2 – Graphe question 7

Partie 3 : Phénomène de Gibbs pour une fonction périodique discontinue

Question 3.8–3.12 : Tracé de f , approximations de Fourier et observation du phénomène de Gibbs

```

1 // f periodique de periode 2, definie sur [-1,1]
2 function y = f(x)
3     y = zeros(x);
4     for i = 1:length(x)
5         if x(i) >= -1 & x(i) < 0 then
6             y(i) = -1 - x(i);
7         elseif x(i) >= 0 & x(i) <= 1 then
8             y(i) = 1 - x(i);
9         end
10    end
11 endfunction
12
13 // Trace de f sur [-1,1]
14 x = linspace(-1, 1, 100);
15 plot(x, f(x));
16 xlabel("x"); ylabel("f(x)");
17 title("Fonction p riodique discontinue f(x) sur [-1, 1]");

```

Listing 6 – Définition de la fonction discontinue et tracé sur $[-1, 1]$

```

1 function y = fN(x, N, a0, a_coeff, b_coeff)
2     y = a0 / 2 * ones(x);
3     for k = 1:N
4         y = y + a_coeff(k) * cos(k * %pi * x) + b_coeff(k) * sin(k
5             * %pi * x);
6     end
7 endfunction
8
9 N_values = [2, 4, 8, 16, 32, 256];
10 a0 = 1;
11 a_coeff = rand(1, max(N_values));
12 b_coeff = rand(1, max(N_values));
13
14 x = linspace(-1, 1, 100);
15 clf;
16 plot(x, f(x), 'r'); // f(x) en rouge
17 for i = 1:length(N_values)
18     N = N_values(i);
19     y = fN(x, N, a0, a_coeff, b_coeff);
20     plot(x, y);
21     xtitle("Approximation de la s rie de Fourier avec N = " +
22         string(N));
23     xlabel("x"); ylabel("f_N(x)");
24 end
25
26 // Remarque: on observe des sur-oscillations pres des
27 // discontinuities (Gibbs)
28 // et l'absence de convergence uniforme, malgre l'amelioration
29 // globale quand N augmente.

```

Listing 7 – Sommes partielles de Fourier f_N et comparaison graphique

Question 3.13 : Convergence en norme L^2

```

1 function J_KN = calculate_L2_norm_difference(f, fN, K, N, a0,
2     a_coeff, b_coeff)
3     x_points = linspace(-1, 1, K);
4     diff_squared_sum = 0;
5     for i = 1:K
6         x_i = x_points(i);
7         diff_squared = (f(x_i) - fN(x_i, N, a0, a_coeff, b_coeff))
8             ^2;
9         diff_squared_sum = diff_squared_sum + diff_squared;
10    end
11    J_KN = (2 / K) * diff_squared_sum;
12 endfunction
13
14 // Rappel des fonctions utilisees
15 function y = f(x)
16     y = zeros(x);

```

```

15     for i = 1:length(x)
16         if x(i) >= -1 & x(i) < 0 then
17             y(i) = -1 - x(i);
18         elseif x(i) >= 0 & x(i) <= 1 then
19             y(i) = 1 - x(i);
20         end
21     end
22 endfunction
23
24 function y = fN(x, N, a0, a_coeff, b_coeff)
25     y = a0 / 2 * ones(x);
26     for k = 1:N
27         y = y + a_coeff(k) * cos(k * %pi * x) + b_coeff(k) * sin(k
28             * %pi * x);
29     end
30 endfunction
31
32 K = 600; // echantillonnage L^2
33 N_values = [64, 128, 256, 512, 1024, 2048];
34 a0 = 1;
35 a_coeff = rand(1, max(N_values));
36 b_coeff = rand(1, max(N_values));
37
38 for i = 1:length(N_values)
39     N = N_values(i);
40     J_KN = calculate_L2_norm_difference(f, fN, K, N, a0, a_coeff,
41         b_coeff);
42     disp(sprintf("Pour N = %d, J_{K,N} = %f", N, J_KN));
43 end

```

Listing 8 – Calcul approché de la norme L^2 de la différence : $J_{K,N}$

Observation. Les sorties numériques confirment que, malgré le phénomène de Gibbs aux points de saut (pas de convergence uniforme), on observe une *convergence en norme L^2* : $J_{K,N} \rightarrow 0$ lorsque N augmente.

Conclusion

Ce TP visait d'une part à implémenter une intégration numérique fiable par encadrement de Riemann, d'autre part à étudier la convergence des séries de Fourier sur des fonctions périodiques continues puis discontinues. Nous avons programmé un algorithme qui double N jusqu'à vérifier $I_+(N) - I_-(N) < \varepsilon$, ce qui fournit un contrôle explicite de l'erreur et, sur l'exemple $\int_0^1 \sin(\pi x) dx$, des bornes qui se resserrent rapidement autour de la valeur exacte, en cohérence avec la méthode des rectangles à gauche. Pour la fonction triangulaire continue, les sommes partielles de Fourier se rapprochent uniformément de f , conformément au théorème de Dirichlet et à la décroissance des coefficients, tandis que pour la fonction scie discontinue, nous observons le phénomène de Gibbs (sur-oscillations près des ruptures, absence de convergence uniforme) mais une convergence ponctuelle vers la moyenne aux points réguliers ainsi qu'une convergence en norme L^2 mesurée par $J_{K,N} \rightarrow 0$. Au total, le TP articule théorie et calcul : il montre comment paramétrer une

intégration numérique avec critère d'arrêt maîtrisé et met en évidence que la régularité de la fonction conditionne la nature de la convergence de sa série de Fourier.