

Matemática Superior

Trabajo Práctico 1

Primer cuatrimestre 2023

Instrucciones:

- Fecha de presentación: 12/08/23.
- Los grupos se conforman de 4 o 5 personas.
- Utilice todas las herramientas informáticas, lenguajes o herramientas en línea que considere convenientes (Mathematica, Wolfram Alpha, Qucs, Xcos, Sympy, Scilab, Octave, Scipy, Matplotlib, ImageJ, etc).
- Elabore un informe lo mas detallado posible, mencionando los problemas con los que se encontró intentando obtener las respuestas a las consignas.
- Subir al campus en un archivo comprimido único, **el informe en formato .pdf** y cualquier otro archivo que considere útil, como códigos u otros.

Epiciclos de Fourier

Introduccion

El filósofo griego Eudoxo, en el siglo IV AC, fue el primero que propuso un modelo del Universo en el que el Sol, la Luna, los planetas y las estrellas giraban en torno a la Tierra siguiendo círculos perfectos. El modelo de Eudoxo, llamado geocéntrico, fue mejorado alrededor del 140 DC por el filósofo alejandrino Claudio Ptolomeo. Ptolomeo imaginó un Universo en el que todos los cuerpos giraban alrededor de la Tierra, pero no describiendo círculos perfectos. Según Ptolomeo, los planetas realizaban pequeños movimientos circulares (epiciclos) alrededor de un punto imaginario que se desplazaba alrededor de la Tierra recorriendo un círculo perfecto (deferente).

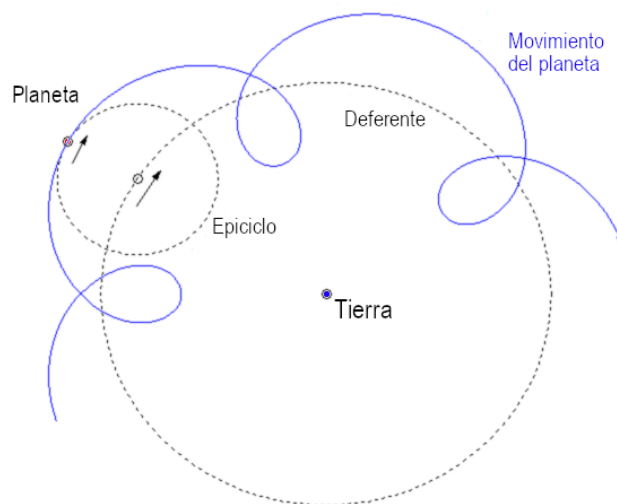


Figura 1: Los planetas giran sobre un epiciclo que a su vez gira sobre un deferente.

1 Graficación de Imágenes

A partir de esta misma idea, podemos pensar que una imagen puede ser descrita por los puntos que N epiciclos van dibujando a medida que rotan en el tiempo. Podemos determinar su posición espacial en diferentes instantes de tiempo a través de la siguiente expresión matemática:

$$p_k[t] = \sum_{k=0}^N C_k e^{i\omega_k t} \quad (1)$$

donde $p_k[t]$ es la coordenada del punto en el plano complejo para el instante de tiempo t , $\omega_k = \omega_0 k$ es la frecuencia del sistema y C_k es una constante compleja.

1. Realice el desarrollo matemático correspondiente para poder obtener, de forma simplificada, las coordenadas x e y correspondientes a los valores de p_k . ¿A qué frecuencia puede asociarse la posición de la tierra?
2. Considere el archivo `epiciclos.txt` que contiene valores de C_k y los radios R_k de cada epiciclo. Obtenga el parámetro necesario para poder observar la imagen deseada de acuerdo al desarrollo anterior y grafique los resultados. Considere N igual al tamaño del archivo. ¿Cuales son los tiempos máximo y paso de tiempo ideales para obtener la mejor resolución de imagen? Justifique
3. Realice un análisis de lo que ocurre al variar parámetros fundamentales como el número de epiciclos necesarios para graficar y obtenga conclusiones. ¿Deben ser todas las imagenes de contorno cerrado para que puedan graficarse con este método? Justifique

2 Aproximación de coeficientes de Fourier

Dada la función compleja $C(t)$ para t real, se desea representar la extensión periódica de dicha función por medio de la serie continua de Fourier :

$$C_{periodica}(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} C_K e^{i\omega_0 K t} \quad (2)$$

donde C_K son los coeficientes complejos.

De dicha función solo se tiene la tabla de valores que se adjunta `Colibri.csv`.

1. Represente la secuencia de datos en el plano complejo.
2. Aproxime a la función original como:

$$C^*(t) \approx \sum_{K=-M}^M \zeta_K e^{i\omega_0 K t} \quad (3)$$

donde ζ_K es una aproximación a los C_K con un M adecuado para que la aproximación sea buena. Muestre gráficamente la aproximación.

Nota: Para obtener los ζ_K se debe aproximar a integral que define los C_K por medio de la suma de Riemann. Si solo del integrando se conoce los $n+1$ valores (Z_0, Z_1, \dots, Z_n) distribuidos uniformemente en el intervalo $[a; b]$ se puede aproximar a la integral definida por medio de:

$$\int_a^b Z(t) dt \approx \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{Z}_i \quad (4)$$

donde $\tilde{Z}_i = \frac{Z_{i-1} + Z_i}{2}$.

3. ¿Pasa la aproximación por los puntos? ¿Qué pasa si se toma un M menor al que determinó en 2)? ¿Y si es mayor? Fundamente sus resultados.

Recursos

Video de interés: <https://www.youtube.com/watch?v=r6sGWTCMz2k&t=1026s>