

Matemática Superior

Trabajo Práctico 2

Segundo cuatrimestre 2023

Instrucciones:

- Fecha de presentación: 01/10/23.
- Los grupos se conforman de 4 o 5 personas.
- Utilice todas las herramientas informáticas, lenguajes o herramientas en línea que considere convenientes (Mathematica, Wolfram Alpha, Qucs, Xcos, Sympy, Scilab, Octave, Scipy, Matplotlib, ImageJ, etc).
- Elabore un informe lo mas detallado posible, mencionando los problemas con los que se encontró intentando obtener las respuestas a las consignas.
- Subir al campus en un archivo comprimido único, **el informe en formato .pdf** y cualquier otro archivo que considere útil, como códigos u otros.

Busqueda de Raíces

Ejercicio 1

- a) Codifique un algoritmo que combine el método cerrado de bisección y abierto Newton-Raphson. Determine criterios de uso incluyendo intervalos válidos, criterios de parada teniendo en cuenta la cota de error y costo computacional, y pruebelo con las siguientes funciones:

$$\begin{aligned}f_1(x) &= xe^{-x/2}; x_0 = 5 \\f_2 &= \arctan(x); x_0 = 1.5 \\f_3 &= -\cos(|x| + \pi/4) + 0.8; x_0 = 0.5\end{aligned}$$

donde x_0 son los puntos de inicio en caso de usar el método abierto Newton-Raphson. Justifique sus ventajas de uso respecto a los otros dos métodos de forma individual y determine el costo computacional óptimo en cada caso.

- b) Una forma simplificada de representar la figura de colibri del **TP1** es a través de funciones polinómicas de tercer grado:

$$P(x) = C1x^3 + C2x^2 + C3x + C4,$$

determinadas por los siguientes coeficientes:

	C1	C2	C3	C4
P1	-0.00648	-0.2674	-2.662	-6.959
P2	-82.08	398.9	-651.7	371.8
P3	-0.342	3.791	-16.47	26.26
P4	0.4102	2.549	6.472	2.406
P5	-0.0166	-0.5157	-3.794	-1.834
P6	-0.007784	0.03998	-0.3053	-9.409
P7	-0.003877	0.1498	-0.3954	-0.7499
P8	0.0002778	-0.01556	0.7777	4.172
P9	0.1023	-0.3259	1.8	12.55

Grafique los polinomios y utilice el algoritmo programado anteriormente para determinar los puntos que usted crea convenientes para que el contorno de la figura pueda apreciarse. Grafique nuevamente dichas funciones en los intervalos determinados por estos puntos. Cual es la distancia más extensa entre los puntos encontrados? Y la más cercana?

Sistemas lineales

Ejercicio 2

Se quiere crear un método iterativo para la aproximación de la solución de un sistema lineal siguiendo la idea base del método de Jacobi (el cual determina la siguiente aproximación por medio de la anterior, $\mathbf{X}^{n+1} = f(\mathbf{X}^n)$). En este nuevo método se debe reemplazar a \mathbf{X}^n por \mathbf{X}^o que es un promedio ponderado $\mathbf{X}^o = (K+1)\mathbf{X}^n - K\mathbf{X}^{n-1}$ en donde K puede estar entre -1 y 1. Este método se lo quiere aplicar a sistemas cuya matriz principal tenga norma infinito mayor o igual a 1

- Genere este nuevo método y compare su convergencia con el de Jacobi para sistemas como mínimo de 5x5 y encuentre el valor de K más conveniente.
- Realice un método similar al anterior pero ahora basándose en el de Gauss-Seidel y compare los resultados con el inciso anterior. ¿El valor óptimo de K es el mismo?
- Comente sus conclusiones acerca de los resultados obtenidos.

Ejercicio 3

Dada la siguiente matriz:

$$H_k(p) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{p+1} & \frac{1}{p+2} & \cdots & \frac{1}{p+1+j} & \cdots \\ \frac{1}{p+1} & \frac{1}{p+2} & \frac{1}{p+3} & \cdots & \frac{1}{p+2+j} & \frac{1}{p+1+k} \cdots \\ \cdots & \cdots & \frac{1}{p+i+j} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{1}{p+2k} \end{pmatrix} \quad (1)$$

- Demuestre que la matriz es definida positiva.
- Resuelva el sistema para el mayor valor de k que pueda, de acuerdo a sus recursos, mediante el método del ejercicio anterior (variante Gauss-Seidel), gradientes conjugados y factorización LU, para un término independiente aleatorio, y un valor de $p = 1$. Compare el costo computacional y los residuos obtenidos en cada caso.
- Repita el inciso anterior con un valor de $p = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Enuncie algunas conclusiones sobre el comportamiento del sistema bajo estas condiciones.